

LES DÉRIVATEURS

ALEXANDRE GROTHENDIECK

Appendice au Chapitre XII

[page 1]

Proposition (?) ⁽¹⁾. Soit X dans Cat , avec b, c dans X tels que

a) $b \times c$ est dans X .

b) $\forall x$ dans X , $b(x)$ ($\stackrel{\text{déf}}{=} \text{Hom}_X(x, b)$) et $c(x)$ sont $\neq \emptyset$, i.e. $X/b \rightarrow X$ et $X/c \rightarrow X$ sont surjectifs sur les objets.

Alors X est \mathbf{W}_∞ -sphérique. ⁽²⁾

Le fait que b soit un plus grand élément de $\text{Ob } X$ assure déjà la 0-connexité.

Pour la 1-connexité, prouvons que dans le groupoïde fondamental $\Pi(X)$, $a \stackrel{\text{déf}}{=} b \times c$ devient un élément final.

$$\begin{array}{ccc} b \times c & \longrightarrow & b \\ \downarrow & & \\ & & c \end{array}$$

Pour ceci, prouvons d'abord que $\forall x$ dans X , tous les éléments de $a(x) = b(x) \times c(x)$ sont égaux dans $\text{Fl } \Pi(X)$. En effet, comme $b \times c \rightarrow b$ est [un] isomorphisme, donc [un] monomorphisme dans $\Pi(X)$, cela montre déjà que si $\beta, \beta' \in b(x)$, $\gamma, \gamma' \in c(x)$, d'où $(\beta, \gamma), (\beta, \gamma'), (\beta', \gamma') \in b(x) \times c(x)$, on a $(\beta, \gamma) = (\beta, \gamma')$ dans $\Pi(X)$ (puisque $\text{pr}_1(\beta, \gamma) = \text{pr}_1(\beta, \gamma')$, et de même (en utilisant que pr_2 est [un] isomorphisme, donc [un] monomorphisme) $(\beta, \gamma') = (\beta', \gamma')$). Donc tous les $(\beta, \gamma) \in b(x) \times c(x) = a(x)$ sont égaux dans $\text{Fl } \Pi(X)$. Pour achever de prouver que a est objet final de $\Pi(X)$, il suffit de voir que toute flèche dans $\Pi(X)$ d'un $x \in \text{Ob } X$ dans a , provient d'une flèche $x \rightarrow a$ dans X . Mais une flèche dans $\Pi(X)$ est obtenue par un chemin dans X

$$\begin{array}{ccccccc} x = x_0 & \xrightarrow{u_1} & x_1 & \xleftarrow{u_2} & x_2 & \longrightarrow & \dots & \xleftarrow{u_{2N}} & x_{2N} = a \\ & \searrow \alpha_0 & & \nearrow \alpha_1 & & \searrow \alpha_2 & & & \\ & & & & & & & & a. \end{array}$$

Prenons une flèche $\alpha_0 : x \rightarrow a_0$ dans X , je dis que la

[page 2]

classe d'homotopie du chemin c (i.e. son image dans $\text{Fl}(\Pi(X))$) est égale à celle de u_0 . Pour le voir, choisissons pour tout $i \in [0, 2N]$ une flèche $\alpha_i : x_i \rightarrow a$. (Ça existe grâce à l'hypothèse b)). Je dis que pour chaque $i \in [0, 2N]$, le triangle

¹Cf. pages 11 ff. pour les contrexemples-clef.

²Faux, cf. plus bas. X est 1-connexé, mais pas nécessairement 2-connexé.

$$\begin{array}{ccc} x_0 & \xrightarrow{c_i} & x_i \\ & \searrow \alpha_0 & \swarrow \alpha_i \\ & a & \end{array}$$

dans $\Pi(X)$ est commutatif, où c_i désigne la classe d'homotopie du chemin de x_0 à x_i définie par les u_i ($i \in [1, i]$) [plutôt ($i \in [1, 2N]$)]. Nous le faisons par récurrence sur i , l'assertion est triviale si $i = 0$ (c_0 représente l'application identitique). Le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} & & & & c_{i+1} \\ & & & & \curvearrowright \\ x_0 & \xrightarrow{c_i} & x_i & \xrightarrow{u_{i+1}} & x_{i+1} \\ & \searrow \alpha_0 & \swarrow \alpha_i & \searrow \alpha_{i+1} & \\ & & a & & \end{array}$$

montre qu'il suffit de prouver que pour $i \in [0, 2N - 1]$ le triangle

$$\begin{array}{ccc} x_i & \xrightarrow{u_{i+1}} & x_{i+1} \\ & \searrow \alpha_i & \swarrow \alpha_{i+1} \\ & a & \end{array}$$

est commutatif dans $\Pi(X)$. (**NB** u_{i+1} est en sens directe ou rétrograde, suivant que i est paire ou impaire.) Mais cela résulte du fait que l'image de $\text{Hom}_X(x_i, a)$ (resp. $\text{Hom}_X(x_{i+1}, a)$)

[page 3]

dans $\text{Fl}\Pi(X)$ est réduite à un seul élément.

Ainsi on trouve que X est 1-connexe. Il y a donc de l'espoir! Il reste à prouver

$$H^i(X, M) = 0, \quad i \geq 2, \quad M \text{ coefficient constant.}$$

J'ai regardé le cas lorsqu'on a ceci : $b = c$, $\text{Ob } X = \{b, b \times b\}$, $\text{Hom}_X(b \times b)$ [plutôt $\text{Hom}(b \times b, b)$] = { réunion disjointe des ensembles $u \circ \text{pr}_1$ et $u \circ \text{pr}_2$, avec $u \in \text{Hom}_X(b, b) = G$ un monoïde quelconque }. Alors X° est fibrée, via $I \mapsto b^I$, sur la sous-catégorie pleine S de Ens formée de $\{0\}$ et $\{0, 1\}$, et donc X est cofibrée (en particulier propre) sur $S^\circ \stackrel{\text{déf}}{=} T$. (NB $S^\circ = T$ a un objet initial, mais non un objet final. Sa cohomologie à valeurs dans un préfaisceau quelconque n'est pas toujours triviale, cf. ci-dessous.)

On trouve ['On trouve' barré]

$$H^n(X, M) \longleftarrow H^p(T, \underbrace{R^q f_*(M_X)}_{= \mathcal{H}^q}), \quad \text{où } f : X \longrightarrow S^\circ$$

[$n = p + q$]. J'admet ici (provisoirement) ceci :

$$\begin{aligned} H^p(T, F) &= 0, & \text{pour } p \geq 2, \text{ tout } F \in T^\wedge, \\ H^0(T, F) &= \text{Ker } \delta, \\ H^2(T, F) &= \text{Coker } \delta, \end{aligned}$$

où $\delta : F_0 \rightarrow F_1$ est défini comme la différence $\delta = p_1^* - p_2^*$, où p_1, p_2 sont les deux projections de $\{0, 1\} \simeq \{0\}^2$ dans $T = S^\circ$. On a de plus

$$(\mathcal{H}^q)_0 = H^q(G, M), \quad (\mathcal{H}^q)_1 = H^q(G \times G, M),$$

et

$p_1^*, p_2^* : H^q(G, M) \rightrightarrows H^q(G \times G, M)$ sont les transposés de $\text{pr}_1, \text{pr}_2 : G \times G \rightarrow G$.

[page 4]

On vérifie aisément que

$$H^0(T, \mathcal{H}^q) = 0 \quad \text{si } q \geq 1,$$

et il reste

$$H^n(X, M) \simeq H^1(S, \mathcal{H}^{n-1}) = \text{Coker}(\delta : H^{n-1}(G) \rightarrow H^{n-1}(G \times G)).$$

Cela donne, pour $n = 2$,

$$\begin{aligned} H^2(X, M) &\simeq \text{Coker}\left(\delta : \text{Hom}_{\text{mon}}(G, M) \rightarrow \underbrace{\text{Hom}_{\text{mon}}(G \times G, M)}_{\text{Hom}_{\text{mon}}(G, M) \times \text{Hom}_{\text{mon}}(G, M)}\right) \\ &\simeq \text{Coker}\left(u \mapsto (u, -u) : H \rightarrow H \times H\right), \end{aligned}$$

où H est le groupe abélien $\text{Hom}_{\text{mon}}(G, M)$.

D'où

$$H^2(X, M) \simeq H = \text{Hom}_{\text{mon}}(G, M).$$

Donc

X est 2-connexe si et seulement si le groupe *abélien* enveloppant du monoïde G est nul.

Ainsi, si G est un groupe abélien $\neq 0$, X n'est pas 2-connexe.

Corollaire. $\Psi = a_0 \begin{array}{l} \nearrow b_0 \\ \searrow c_0 \end{array}$ n'est pas totalement \mathbf{W}_∞ -asphérique; i.e. si on a un dia-

gramme $a \begin{array}{l} \nearrow b \\ \searrow c \end{array}$ dans une catégorie $X \in \text{Ob Cat}$, tel que sa somme amalgamée dans X^\wedge

soit égale à e_X , il ne s'ensuit pas que X soit \mathbf{W}_∞ -asphérique. (Mais peut-être voudra bien être 1-connexe?)

[page 5]

Question. *Y-a-t-il d'autres objets totalement \mathbf{W}_∞ -sphériques de Cat , que les catégories ayant un objet final?* Je suspecte à présent que non – donc que l'on ne peut améliorer substantiellement sur la notion déjà connue d'immersion ouverte de Dwyer.

Dans le diagramme

$$(*) \quad \begin{array}{ccccc} U & \xrightarrow{i} & X & \xleftarrow{j} & T \\ p \downarrow & \text{cocart.} & \downarrow q & & \downarrow \text{iso} \\ & \text{et cart.} & & & \\ U' & \xrightarrow{i'} & X' & \xleftarrow{j'} & T', \end{array}$$

prenons

$$U = \Psi, \quad T = \{t\} = e \text{ catégorie finale,}$$

t objet final de X ,

$$\text{i.e. } H_t = (u \mapsto \text{Hom}_X(u, t)) = e_U \in \text{Ob } U^\wedge \text{ } ^{(3)}.$$

Prenons pour U' la catégorie dont il est question dans la 'proposition' hypothétique (et fausse) p. 1 avec $b = c$, plus précisément une catégorie avec deux objets b et $b \times b$, un groupe (voire un monoïde) G d'automorphismes [(voire d'endomorphismes)] de b , et les autres flèches celles qui s'en déduisent, en exigeant que $b \times b$ soit bel et bien le carré cartésien de b . On trouve une catégorie cofibrée (donc propre) sur la catégorie T opposée de celle des ensembles finis de la forme $\{0\}$ et $\{0, 1\}$ (deux objets) avec comme fibres B_G et $B_{G \times G}$ respectivement ($B_\pi =$ catégorie avec un seul objet, et monoïde d'endomorphismes π). Le foncteur

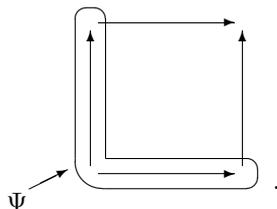
$$U = \Psi \longrightarrow U'$$

est celui donné par le diagramme

[page 6]

$$\begin{array}{c} & & b \\ & \nearrow \text{pr}_1 & \\ b \times b & & \\ & \searrow \text{pr}_2 & \\ & & b \end{array}$$

³i.e. X déduit de $U = \Psi$ en lui rajoutant un objet final t – donc $X \simeq \Delta^1 \times \Delta^1$,



dans U' , et les hypothèses a), b) de la page 1 assurent que la somme amalgamée \varinjlim de ce diagramme dans U'^{\wedge} est $e_{U'}$, i.e. que

$$p_!(e_U) = e_{U'}.$$

Il s'ensuit que dans la somme amalgamée, X' envisagée dans (*), l'unique élément t' de T' est objet final de X' . On a vu que U' est 1-connexe, mais non 2-connexe si le groupe abélien enveloppant de G (i.e. $G/(\text{groupe des commutateurs})$ dans le cas où G est un groupe) n'est pas réduit à 1. L'exemple le plus économique s'obtient en prenant $G = \{\pm 1\}$ le groupe à deux éléments. C'est donc un cas où dans (*) on a

$$i \in W \text{ (et même } i \text{ asphérique),} \quad \text{mais } i' \notin W,$$

et qui a l'avantage sur l'exemple plus sophistiqué de la page 103 (prop. 10) de ne mettre en jeu que des catégories finies – et même fort petites !

Procédons maintenant comme dans la proposition 11, en désignant par U'' la catégorie déduite de U' en lui ajoutant un objet

[page 7]

final, et soit

$$p' : U' \longrightarrow U''$$

l'inclusion, de sorte que

$$p'_!(e_{U'}) = (p'p)_!(e_U) = U' \text{ en tant qu'objet dans } U''^{\wedge} \\ \text{(sous-préfaisceau du préfaisceau final } e_{U''}).$$

Considérons

$$\begin{array}{ccccc} U & \xrightarrow{i} & X & \xleftarrow{j} & T \\ p''=p'p \downarrow & & \downarrow q'' & & \downarrow \text{iso} \\ U'' & \xrightarrow{i''} & X'' & \xleftarrow{j''} & T'' \end{array}$$

cocart. et cart.

Cette fois U , X et U'' sont \mathbf{W}_∞ -asphériques (et même contractiles toutes trois), donc i , p'' sont dans W , pourtant X'' n'est pas \mathbf{W}_∞ -asphérique (donc $i'', q'' \notin \mathbf{W}_\infty$), car pour qu'elle le soit, i.e. pour que $i'' \in \mathbf{W}_\infty$, il faudrait (prop. 7, cor. page 85 ⁽⁴⁾) que i'' soit \mathbf{W}_∞ -asphérique, i.e. que U''/t'' soit \mathbf{W}_∞ -asphérique. Mais par construction $U''/t'' \simeq U'$, qui n'est pas \mathbf{W}_∞ -asphérique.

Voilà un exemple encore plus simple d'un foncteur $f : \Psi \longrightarrow X$ tel que $f_!(e_\Psi)$ ne soit pas \mathbf{W}_∞ -asphérique, i.e. d'un diagramme

$$\begin{array}{c} \beta_0 \nearrow b \\ a \\ \gamma_0 \searrow c \end{array}$$

⁴pas encore démontré !

[page 8]

dans une catégorie V , telle que la limite inductive $L = b \amalg_a c$ dans V^\wedge soit un objet non asphérique de V^\wedge , i.e. V/L soit non asphérique. Je sais qu'il faut, pour un tel contre-exemple, que $a \rightarrow b$ et $a \rightarrow c$ ne soient pas des monomorphismes. L'idée, c'est de prendre un exemple universel où ces flèches ne soient pas [des] monomorphismes, en prenant

[page 9]

$$V = \left(\begin{array}{ccc} & & b \\ & \begin{array}{c} \xrightarrow{\lambda} \\ \xrightarrow{\mu} \end{array} & a \\ & & \begin{array}{c} \xrightarrow{\beta} \\ \xrightarrow{\gamma} \end{array} \\ & & c \end{array} \right)$$

avec

$$\beta\lambda = \beta\mu \quad \text{et} \quad \gamma\lambda = \gamma\mu$$

les deux seules flèches non identiques, en plus des quatre flèches marquées $\beta, \gamma, \lambda, \mu$.

On trouve que

$$b \amalg_a c \xrightarrow{\sim} e_X \quad (\text{somme amalgamée dans } V^\wedge).$$

Pourtant V n'est pas asphérique, ni même 1-connexe : il est homotope à la sous-catégorie ouverte $V_0 = (0 \xrightarrow{\lambda} a)$, car on a une rétraction $V \xrightarrow{r} V_0$ (envoyant b et c sur a), et une flèche $ir \rightarrow \text{id}_V$ (où $i : X_0 \hookrightarrow X$ est l'inclusion). Donc V a le même type d'homotopie que V_0 , qui est un cercle. Donc on a intérêt à prendre ce V , où \tilde{V} déduit de V en rajoutant un élément final e ,

$$\tilde{V} = \left(\begin{array}{ccc} & & b \\ & \xrightarrow{\quad} & \nearrow \\ & 0 \xrightarrow{\quad} a & \searrow \\ & & c \\ & & \nearrow \\ & & e \end{array} \right),$$

comme U' , pour les contre-exemples pages 6 et 7.

[page 10]

2.6. Contre-exemples pour la totale asphéricité.

Je me suis finalement convaincu que

$$\Psi = \left\{ \begin{array}{ccc} & & b_0 \\ & \nearrow & \\ a_0 & & \\ & \searrow & \\ & & c_0 \end{array} \right\}$$

n'est *pas* totalement asphérique (pour le localiseur \mathbf{W}_∞ – dans le présent numéro, on supposera $W = \mathbf{W}_\infty$), ou ce qui revient au même, qu'on peut avoir un diagramme de type Ψ

$$(*) \quad \begin{array}{ccc} & & b \\ & \nearrow \beta & \\ a & & \\ & \searrow \gamma & \\ & & c \end{array}$$

dans une catégorie $Z \in \text{Ob Cat}$, dont la limite inductive $b \amalg_a c$ dans Z^\wedge soit le préfaisceau final e_Z , i.e. tel que l'on ait

$$b(z) \amalg_{a(z)} c(z) \xrightarrow{\sim} \text{ensemble ponctuel}$$

pour tout objet z de Z (où $a(z) = \text{Hom}_Z(a, z)$ [plutôt $\text{Hom}_Z(z, a)$]) sans que pour autant Z soit asphérique, ni même 1-connexe ⁽⁵⁾. L'exemple le plus simple que j'ai trouvé, est l'exemple 'universel' d'un diagramme $(*)$ où ni l'une ni l'autre des deux flèches $a \rightarrow b$, $a \rightarrow c$ n'est [un] monomorphisme (car si elle l'est, alors on peut prouver que Z est bel et bien asphérique, comme nous verrons par la suite). C'est la catégorie

$$Z = \left\{ \begin{array}{ccc} & & b_0 \\ & \nearrow \beta_0 & \\ 0_0 & \xrightarrow[\mu_0]{\lambda_0} & a_0 \\ & \searrow \gamma_0 & \\ & & c_0 \end{array} \right\}$$

[page 11]

déduite de Ψ en lui rajoutant un objet 0_0 , relié à a_0 par deux flèches distinctes λ_0, μ_0 , telles que

$$\beta_0 \lambda_0 = \beta_0 \mu_0 \quad \text{et} \quad \gamma_0 \lambda_0 = \gamma_0 \mu_0,$$

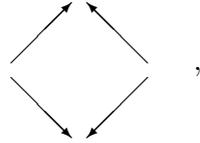
ces deux flèches composées étant, avec les quatre flèches $\beta_0, \gamma_0, \lambda_0, \mu_0$ marquées sur le diagramme, les seules (six) flèches non identiques de Z . Ψ immergée dans Z comme un fermé, de complémentaire la catégorie ponctuelle réduite à 0_0 . (NB L'immersion fermée $\Psi \rightarrow Z$ n'est pas immersion de Dwyer, i.e. (comme Z est le plus petit ouvert de Z contenant Ψ) n'est pas coasphérique, car la catégorie $0 \setminus \Psi$, cofibrée sur Ψ avec fibres discrètes, de cardinal 2 en a_0 et 1 en b_0 et c_0 , est la catégorie

$$\begin{array}{ccc} & & \tilde{b}_0 \\ & \nearrow & \\ a'_0 & & \\ & \searrow & \\ & & \tilde{c}_0 \\ & \nearrow & \\ a''_0 & & \end{array}$$

⁵faux – il est 1-connexe forcément ⁽⁶⁾, mais non 2-connexe.

⁶cf. commentaire XII, p. 101.

i.e.



qui a le type d'homotopie du cercle.) Ni l'immersion ouverte $\{0_0\} \rightarrow Z$, car $\{0_0\}/a_0$ est la catégorie discrète de cardinalité 2.

L'inclusion $i : Z_0 \rightarrow Z$ de

$$Z_0 = (0_0 \begin{array}{c} \xrightarrow{\lambda_0} \\ \xrightarrow{\mu_0} \end{array} a_0)$$

dans Z est un homotopisme ⁽⁷⁾ (car il existe une rétraction évidente r de Z sur Z_0 ⁽⁷⁾, et une flèche $ir \rightarrow id_Z$), donc Z est homotope à Z_0 , qui a le type d'homotopie du cercle, donc n'est pas 1-connexe.

[page 12]

D'autre part, la vérification de

$$b_0 \Pi_{a_0} c_0 = e_Z \quad \text{dans } Z^\wedge$$

est immédiate.

On va utiliser cette flèche

$$\Psi \rightarrow Z$$

pour construire des exemples intéressants (et déchirants) de sommes amalgamées

$$\begin{array}{ccc} U \hookrightarrow i & X \\ \downarrow p & \downarrow q \\ U' \hookrightarrow i' & X' \end{array},$$

avec i immersion ouverte, telle qu'on ait même

$$i : U \rightarrow \bar{U} \quad \text{est asphérique, donc dans } W,$$

alors que pourtant on aura

$$i' : U' \rightarrow \bar{U}' \quad \notin W,$$

et ce qui mieux (ou pis) est,

$$p \in W \quad \text{mais} \quad q \notin W$$

⁷faux, il n'y a pas de rétraction du tout! En fait, Z est la *suspension* de la \rightrightarrows , qui a le type d'homotopie (topologique) du cercle, et il a donc le type d'homotopie de la 2-sphère.

(et éventuellement, en même temps, $i \in W$ mais $i' \notin W$). De plus (contrairement aux constructions des propositions 10, 11 (p. 101-107)), les catégories envisagées pourront toutes être finies. Je suis particulièrement intéressé par le cas où X est un ‘carré’

$$X = \Phi_n \times \Phi_m \quad (n, m \geq 2),$$

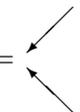
et où U est son ‘bord’

$$U = \dot{X} \stackrel{\text{déf}}{=} (\dot{\Phi}_n \times \Phi_m) \cup (\Phi_n \times \dot{\Phi}_m).$$

[page 13]

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & a & \longleftarrow & a' & \longrightarrow & \dots \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 b & \longrightarrow & t_1 & \longleftarrow & \dots & & \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 b' & \longrightarrow & & \longleftarrow & \dots & & \\
 \downarrow & & & & & & \\
 & & & & & & \dots
 \end{array}$$

Proposition. Soient $n, m \geq 2$, et considérons l’inclusion $U = \partial X \xrightarrow{i} X$ du bord du ‘carré’ $X = \Phi_n \times \Phi_m$ dans X . C’est une immersion ouverte W -asphérique, de façon

précise, les U/t ($t \in \dot{U} = \bar{U} \setminus U$) sont isomorphes à e (catégorie ponctuelle) ou à $\Phi =$  (catégorie avec élément final), sauf pour les quatre éléments t_i des quatre ‘coins’ de \dot{U} , où c’est la catégorie

$$\tilde{\Psi} = \left(\begin{array}{c} \\ \nearrow a \\ \searrow b \\ \end{array} \right)$$

n’ayant pas d’élément final. Donc $U \xrightarrow{i} X$ n’est pas immersion ouverte de Dwyer (mais $U \rightarrow X \setminus \{t_1, t_2, t_3, t_4\}$ l’est ...). Ceci posé, je dis que $i : U \rightarrow X$ n’est pas une W -cofibration.

DÉMONSTRATION. Soit

$$F \hookrightarrow U$$

l'inclusion dans $U = \partial X$ de la catégorie-coin $[V =]$ $\begin{array}{ccc} 0 & \rightarrow & a \\ \downarrow & & \downarrow \\ & & b \end{array}$ (cf. figure), isomorphe à

Ψ . On voit aussitôt que c'est une immersion fermée de Dwyer (le plus petit ouvert de U contenant Ψ est justement la catégorie $\tilde{\Psi} = U/t_1$ de tantôt), donc une W -cofibration. Si $U \rightarrow X$ était une W -cofibration, il en serait de même du composé $V \rightarrow X$. On va voir que ce n'est pas le cas.

Soit $\bar{V} = \begin{array}{ccc} 0 & \rightarrow & a \\ \downarrow & & \downarrow \\ b & \rightarrow & t_1 \end{array}$ l'adhérence de V dans X ,

[page 14]

et considérons l'inclusion

$$\bar{V} \rightarrow X,$$

je dis que $[c]$ est une immersion fermée de Dwyer, i.e. pour tout $s \in W \setminus \bar{V}$, où W est le plus petit ouvert de X contenant \bar{V} , i.e.

$$W = \begin{array}{ccccc} & 0 & \rightarrow & a & \leftarrow & a' \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & b & \rightarrow & & \leftarrow & a'' \\ & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ & b' & \rightarrow & b'' & \leftarrow & c, \end{array}$$

la catégorie $s \setminus \bar{V}$ a un objet initial. (Les catégories $s \setminus \bar{V}$ qu'on obtient, à partir des cinq choix possibles pour s , sont Δ^1 (si $s = a'$ ou b') ou e (pour $s = a''$, b'' ou c)). Donc $\bar{V} \rightarrow X$ est une W -cofibration.

Ceci posé, on sait qu'il existe, pour $[?]$ l'inclusion (immersion ouverte)

$$V \hookrightarrow \bar{V} \quad \text{i.e. } \Psi \hookrightarrow \Delta^1 \times \Delta^1,$$

un foncteur $V \rightarrow V'$, donnant lieu à un carré cocartésien

$$(*) \quad \begin{array}{ccc} V \hookrightarrow i & \rightarrow & \bar{V} \\ p \downarrow & & \downarrow \bar{p} \\ V' \hookrightarrow i' & \rightarrow & \bar{V}' \end{array}$$

avec

$i, p \in W$ (car V, V', \bar{V} W -asphérique), mais $i', \bar{p} \notin W$ (i.e. \bar{V}' pas W -asphérique).

Je rappelle qu'on prend d'abord

$$V'_0 = \left(\begin{array}{ccc} & & a \\ & \nearrow \alpha & \\ 0' & \xrightleftharpoons[\mu]{\lambda} & 0 \\ & \searrow \beta & \\ & & b \end{array} \right) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \alpha\lambda = \alpha\mu \\ \beta\lambda = \beta\mu \end{cases}$$

et l'immersion fermée 'identique' de V dans V' [plutôt V'_0]

$$p_0 : V \longrightarrow V'_0$$

[page 15]

(qui est telle que

$$p_{0!}(e_V) = e_{V'_0}),$$

puis on prend pour V' la catégorie obtenue en ajoutant un objet final à V'_0

$$V' = \left(\begin{array}{ccccc} & & a & & \\ & \nearrow \alpha & & \searrow \rho & \\ 0' & \xrightleftharpoons[\mu]{\lambda} & 0 & & e \\ & \searrow \beta & & \nearrow \sigma & \\ & & b & & \end{array} \right) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \alpha\lambda = \alpha\mu \\ \beta\lambda = \beta\mu \\ \rho\alpha = \sigma\beta \end{cases}$$

et pour p le foncteur composé

$$V \xrightarrow{p_0} V'_0 \xrightarrow{p_1} V',$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_p$$

où p_1 est l'inclusion (ouverte). On trouve alors le carré (*), avec $\overline{V'}$ non W -asphérique, ou ce qui revient au même, $i' \notin W$. Car comme $\overline{V'} \setminus V' \simeq \overline{V} \setminus V$ est la catégorie ponctuelle, $i' \in W$ équivaut à V'/t W -asphérique⁽⁸⁾ (cf. cor. 4, p. 149 dans XII). Or par construction $V'/t \simeq V'_0$, qui n'est pas W -asphérique (dans le cas, disons, où $W \subseteq W_1$, car $\pi_1(V'_0) \simeq \mathbf{Z}$).

[page 16]

Considérons alors le diagramme de carrés cocartésiens

$$\begin{array}{ccccc} V & \xrightarrow{i} & \overline{V} & \hookrightarrow & X \\ p \downarrow & & \downarrow \bar{p} & & \downarrow q \\ V' & \xrightarrow{i'} & \overline{V'} & \hookrightarrow & X' \end{array} .$$

⁸moyennant (W 7 bis).

Comme $\bar{V} \hookrightarrow X$ est [une] immersion fermée de Dwyer, le carré de droite est W -cocartésien, donc $(\bar{p} \in W) \iff (q \in W)$, donc (comme $\bar{p} \notin W$) on a

$$p \in W, \quad \text{mais} \quad q \notin W,$$

ce qui montre bien que $V \rightarrow X$ n'est pas une W -cofibration. Factorisant $V \rightarrow X$ par U (au lieu de \bar{V}), on trouve

$$\begin{array}{ccccc} V & \longrightarrow & U & \longrightarrow & X \\ \downarrow p \in W & & \downarrow q_U \in W & & \downarrow q \notin W \\ V' & \longrightarrow & U' & \longrightarrow & X' \end{array},$$

où $q_U \in W$ puisque $p \in W$ et $V \rightarrow U$ est [une] immersion de Dwyer. Cela rend explicite que $U \rightarrow X$ n'est pas une W -cofibration, puisque

$$q_U \in W, \quad \text{mais} \quad q \notin W,$$

q.e.d.

[page 17]

Recollement dans Cat d'un ouvert et d'un fermé complémentaire.

[Supposons donné]

$$X_0 \overset{\text{ouvert}}{\hookrightarrow} X \overset{\text{fermé complémentaire}}{\twoheadrightarrow} X_1$$

dans Cat, [et soit]

$$\tilde{X}_{01} \subseteq \text{Fl}(X)$$

[1a] sous-catégorie pleine des flèches de source dans X_0 , but dans X_1 .

Question. *Ce diagramme*

(*)

est-il W -cocartésien?

OK si i W -asphérique ou j W -coasphérique, i.e. $X \rightarrow \Delta^1$ lisse ou propre – c'est un cas où on a soit $X_0 \xrightarrow{W} X$, soit $X_1 \xrightarrow{W} X$. Mais même en supposant i ou j dans W , et de plus X asphérique (donc X_0 et X asphériques, ou X_1 et X asphériques), et $W = \mathbf{W}_\infty$, je n'ai pu prouver que le diagramme est cocartésien, i.e. $q \in W$ resp. $p \in W$ ⁽⁹⁾. (Pas non plus si $X_0 \simeq e$, X , X_1 W -asphérique $\implies e \setminus X$ W -asphérique, i.e. $X_1 \rightarrow X$ W -coasphérique ...) Mais j'ai prouvé du moins, dans tous les cas, que

$$(**) \quad \mathcal{X} \stackrel{\text{déf}}{=} \int \tilde{X}_{01} \begin{array}{c} \nearrow X_0 \\ \searrow X_1 \end{array} \xrightarrow{\varphi} X$$

est dans \mathbf{W}_1 .

Chose *fausse* (sauf si i ou j dans $W = \mathbf{W}_\infty$) si on remplace \tilde{X}_{01} par \tilde{X}'_{01} , formée des triples (x_0, x_1, c) , avec $x_0 \in \text{Ob } X_0$, $x_1 \in \text{Ob } X_1$, $c : x_0 \dashrightarrow x_1$ un *chemin* de x_0 à x_1 dans X ! On a

[page 18]

donc une situation 'topologique' tout à fait spéciale à la catégorie de modèles Cat , qui ne semble pas avoir d'analogue dans des catégories telles que Esp ou Δ^\wedge , où pourtant les notions d'ouvert et de fermé complémentaire (avec grain de sel dans Δ^\wedge) ont un sens.

L'argument catégorique quasi-trivial qui établit que $(**)$ est dans \mathbf{W}_1 , i.e. induit une équivalence de catégories entre $\text{Rev}(X)$ et

$$\text{Rev}(\mathcal{X}) \simeq \text{Rev}(X_0) \times_{\text{Rev}(\tilde{X}_{01})}^2 \text{Rev}(X_1),$$

me semble devoir s'étendre aux dimensions supérieures, à coups de n -gerbes sur X – mais les fondements sur la théorie des n -gerbes manquent. (Et je n'ai pas eu le courage d'explicitier l'argument même pour $n = 2$ (où pourtant GIRAUD fournit ce qu'il faut) ⁽¹⁰⁾.) Aussi je conjecture que φ est tout au moins dans \mathbf{W}_∞ , i.e. que le diagramme $(*)$ est W -cocartésien si $W \supseteq \mathbf{W}_\infty$ (et satisfait Loc (6 a')).

⁹Je suppose que W satisfait Loc (6).

¹⁰Mais j'ai fait quand même une esquisse de vérification pour $n = 2$, qui me convainc qu'on a bien $\varphi \in \mathbf{W}_2$. Et je n'ai pas guère de doute qu'on a même $\varphi \in \mathbf{W}_\infty$.