

[page 59]

V Sommes amalgamées et carrés W -cocartésiens dans Cat

1 Généralités sur $U \xrightarrow{i} X \xleftarrow{j} T$, et les sommes amalgamées.

1.1 Données de recollement entre un ouvert et un fermé.

Soit X dans Cat , U un ouvert dans X , T le complémentaire fermé. (NB Les ouverts correspondent bien aux ouverts de $\text{Ob } X$, topologisé par sa relation de préordre naturelle $x \leq y \iff \text{Hom}_X(x, y) \neq \emptyset$, de même pour les fermés. Les topologies associées aux relations de préordre sont celles où toute intersection d'ouverts est encore ouverte, i.e. toute réunion de fermés est encore fermée. Donc les ouverts d'une telle topologie sont les fermés d'une topologie duale, correspondant à la relation de préordre opposée. La relation de préordre associée à la topologie est

$$x \leq y \iff x \in \overline{\{y\}},$$

la topologie associée au préordre sur I est celle pour laquelle les ouverts sont les réunions d'ensembles de la forme I/x (lesquels forment une base d'ouverts), ou encore les 'cribles' ($x \in U, y \leq x \implies y \in U$), les fermés sont les réunions d'ensembles $x \setminus I$, c'est-à-dire les cocribles. Pour toute partie A de I , il y a un plus petit ouvert contenant A , qui est aussi son plus petit voisinage, c'est la réunion des I/x pour $x \in A$. Et dualement il y a un plus grand fermé contenu dans A , dont le complémentaire est le plus petit ouvert contenant $B = I \setminus A$, donc $\bigcup_{x \in B} I/x$. L'adhérence de A est la réunion des adhérences $x \setminus I$ de ses points.)

[page 60]

La situation (X, U, T) se reconstitue, à isomorphisme unique près, par la connaissance de

1°) Les deux catégories U, T .

2°) Le bifoncteur $\begin{cases} H : U^\circ \times T \longrightarrow \text{Ens} \\ H(u, t) = \text{Hom}_X(u, t). \end{cases}$

De plus, ces données 1°) 2°) en sont soumises à aucune restriction. On a, plus exactement

Proposition 1. *Un isomorphisme [plutôt une équivalence de catégories] entre la catégorie \mathcal{T} dont les objets sont les triples (X, U, T) , avec $X \in \text{Ob } \text{Cat}$, $U \in \text{Ouv}(X)$, $T \in \text{Ferm}(X)$, U et T complémentaires l'un de l'autre, les morphismes de (X, U, T) dans (X', U', T') étant les foncteurs $f : X \longrightarrow X'$ qui induisent $U \longrightarrow U'$, $T \longrightarrow T'$ (d'où*

$U = f^{-1}(U')$, $T = f^{-1}(T')$, avec la catégorie \mathcal{T}' des triples (U, T, H) , de deux catégories U, T et d'un bifoncteur

$$H : U^\circ \times T \longrightarrow \mathbf{Ens}$$

(ou encore un préfaisceau $U^\circ \longrightarrow T^\vee$ sur U , donc un objet de $\underline{\mathbf{Hom}}(U^\circ, T^\vee)$),

un morphisme de (U, T, H) dans (U', T', H') étant un triple

$$(f_U, f_T, u) \left\{ \begin{array}{l} f_U : U \longrightarrow U' \\ f_T : T \longrightarrow T' \end{array} \right\} \text{ des foncteurs}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u : H \longrightarrow H' \circ (f_U^\circ \times f_T), \\ \text{i.e. } H(u, t) \longrightarrow H'(f_U(u), f_T(t)) \\ \text{un homomorphisme fonctoriel} \\ \text{(flèche dans } (U \times T^\circ)^\wedge \simeq \underline{\mathbf{Hom}}(U^\circ, T^\vee)), \end{array} \right.$$

composition des flèches évidente.

Si $U \hookrightarrow X \leftarrow T$ est un triple, et

$$f_{U'} : U' \longrightarrow U, f_{T'} : T' \longrightarrow T$$

des flèches dans \mathbf{Cat} , il y a une façon privilégiée de 'recoller' U' et T' , de façon à ce que l'objet (X', U', T') s'envoie dans (X, U, T) en induisant

[page 61]

$f_{U'}, f_{T'}$:

$$\begin{array}{ccccc} U' & \xrightarrow{i'} & X' & \xleftarrow{j'} & T' \\ f_{U'} \downarrow & & \downarrow f & & \downarrow f_{T'} \\ U & \xrightarrow{i} & X & \xleftarrow{j} & T, \end{array}$$

elle s'obtient à l'aide des bifoncteurs

$$\left\{ \begin{array}{l} H'(u', t') \stackrel{\text{déf}}{=} H(f_{U'}(u'), f_{T'}(t')) \\ \text{i.e. } H' = H \circ (f_{U'}^\circ \times f_{T'}). \end{array} \right.$$

Ce triple, i.e. cet objet de \mathcal{T} , représente le foncteur suivant sur \mathcal{T} :

$$(X'', U'', T'') \longmapsto \mathbf{Hom}_{\mathbf{Cat}}(U'', U) \times \mathbf{Hom}_{\mathbf{Cat}}(T'', T),$$

i.e. on a pour tout objet (X'', U'', T'') de \mathcal{T} une bijection canonique, fonctorielle en cet objet

$$(*) \quad \mathbf{Hom}_{\mathcal{T}}((X'', U'', T''), (X', U', T')) \simeq \mathbf{Hom}_{\mathbf{Cat}}(U'', U) \times \mathbf{Hom}_{\mathbf{Cat}}(T'', T).$$

Nul doute qu'on a même

$$(**) \quad \underline{\text{Hom}}_{\mathcal{T}}((X'', U'', T''), (X', U', T')) \simeq \underline{\text{Hom}}_{\text{Cat}}(U'', U) \times \underline{\text{Hom}}_{\text{Cat}}(T'', T),$$

tout aussi fonctoriel, dont (*) se déduit en passant aux ensembles d'objets. On dit que le triple (X', U', T') est le triple *induit* par le triple (X, U, T) , via les foncteurs $f_{U'}$, $f_{T'}$.

NB Si $f_{U'}$, $f_{T'}$ sont pleinement fidèles, alors il en est de même de $f : X' \rightarrow X$. Nous utiliserons cette opération de recollement privilégié surtout quand $U' = U$, $f_{U'} = \text{id}_U$, ou inversement $T' = T$, $f_{T'} = \text{id}_T$.

1.2 Relation avec le recollement des topos.

La situation d'un triple

$$(\mathcal{X}, \mathcal{U}, \mathcal{T})$$

d'un topos \mathcal{X} , d'un ouvert \mathcal{U} de \mathcal{X} , et d'un

[page 62]

sous-topos fermé complémentaire, est toute similaire (**NB** Si $\mathcal{X} = \text{Top}(X)$, avec X dans Cat , alors $\text{Ouv}(\mathcal{X}) \simeq \text{Ouv}(X)$, puisque les ouverts correspondent aux sous-faisceaux du faisceau final sur \mathcal{X} , i.e. du préfaisceau final sur X . Cette bijection est compatible avec le passage aux complémentaires.) La théorie des topos dit que les couples $(\mathcal{X}, \mathcal{U}, \mathcal{T})$ [plutôt **triples**] se reconstituent, à équivalence définie à isomorphisme unique près, à l'aide d'un triple

$$\begin{cases} \mathcal{U}, \mathcal{T} \text{ deux topos} \\ \varphi : \text{Fais}(\mathcal{U}) \rightarrow \mathcal{T} \text{ un foncteur exact à gauche ('accessible'),} \end{cases}$$

ce foncteur φ étant obtenu, quand on part de

$$\mathcal{U} \xrightarrow{i} \mathcal{X} \xleftarrow{j} \mathcal{T},$$

comme

$$\varphi = j^* i_*.$$

De plus, le triple $(\mathcal{U}, \mathcal{T}, \varphi)$ peut être choisi arbitrairement, avec la seule restriction (pratiquement anodine, car toujours satisfaite pour tous les foncteurs naturels qu'on rencontre) que φ soit (en plus d'être exact à gauche) 'accessible'.

Dans le cas actuel $\mathcal{X} = \text{Top}(X)$, $\mathcal{U} = \text{Top}(U)$, $\mathcal{T} = \text{Top}(T)$, le foncteur $\varphi = j^* i_*$ est non seulement exact à gauche, mais même il commute aux \varprojlim quelconques, puisqu'il en est ainsi (toujours) de i_* , et aussi (parce que le j topossique est induit par le $j : T \rightarrow X$ catégorique) de j^* . En fait, on

[page 63]

trouve ceci :

Proposition 2 : *Considérons une situation de recollement de deux topos \mathcal{U} , \mathcal{T} par $\varphi : \text{Fais } \mathcal{U} \rightarrow \text{Fais } \mathcal{T}$, foncteur exact à gauche. Supposons que $\mathcal{U} = \text{Top}(U)$, $\mathcal{T} = \text{Top}(T)$, avec U et T dans Cat . Pour que le topos recollé \mathcal{X} soit équivalent à un topos $\text{Top}(X)$, avec X dans Cat , il faut et il suffit que le foncteur de recollement φ commute aux \varinjlim quelconques, ou ce qui revient au même, qu'il ait un adjoint à gauche :*

$$\psi : \underbrace{\text{Fais } \mathcal{T}}_{= T^\wedge} \longrightarrow \underbrace{\text{Fais } \mathcal{U}}_{= U^\wedge}.$$

On s'attend dès lors que la donnée de recollement φ , ou ce qui revient au même le foncteur ψ ayant un adjoint à droite, i.e. commutant aux \varinjlim quelconques, revient à celle d'une donnée de recollement H

$$H : U^\circ \times T \longrightarrow \text{Ens}$$

pour U et T . Mais on sait bien que les foncteurs $\psi : T^\wedge \rightarrow \mathcal{C}$ dans une catégorie \mathcal{C} avec \varinjlim quelconques, qui commutent auxdites \varinjlim , forment une catégorie équivalente (par le foncteur $\psi \mapsto \psi|T(\subseteq T^\wedge)$) à celle des foncteurs

$$\psi_0 : T \longrightarrow \mathcal{C} \quad (= \underbrace{U^\wedge}_{\text{Hom}(U^\circ, \text{Ens})} \text{ en l'occurrence}),$$

[page 64]

et la donnée d'un tel foncteur ψ_0 revient bien à celle d'un H . Donc

Corollaire. *La catégorie des données de recollement topossique $\varphi : U^\wedge \rightarrow T^\wedge$ entre $\text{Top}(U)$, $\text{Top}(T)$, telles que le topos recollé soit un 'topos paradisiaque', i.e. équivalent à un topos de la forme X^\wedge (avec X dans Cat), est équivalente à celle des données de recollement $H : U^\circ \times T \rightarrow \text{Ens}$ entre U et T . La donnée topossique φ associée à H est le foncteur adjoint à droite de $T^\wedge \rightarrow U^\wedge$ déduit de $T \xrightarrow{H} U^\wedge$ par prolongement commutant aux \varinjlim , ou encore elle est donnée par*

$$\varphi(\underbrace{F}_{\in U^\wedge})(t) \simeq \text{Hom}_{U^\wedge}(H(t), F),$$

où dans le second membre H est interprété comme un foncteur $T \rightarrow U^\wedge$. Le topos recollé par φ est canoniquement équivalent à $\text{Top}(X)$, où X est l'objet de Cat obtenu par recollement à l'aide de H .

Du point de vue de la théorie des faisceaux, cela donne l'interprétation de H , comme exprimant le foncteur

$$\varphi = j^*i_* : U^\wedge \rightarrow T^\wedge$$

par la formule précédente.

[page 65]

1.3 Flèches dans Cat , de source ou but un objet recollé (X, U, T) .

Quand (X, U, T) est donné par une donnée de recollement

$$U, T, H : U^\circ \times T \longrightarrow \text{Ens},$$

les flèches

$$f : X' \longrightarrow X$$

dans Cat se décrivent immédiatement ainsi : la donnée de f définit d'abord

$$U' = f^{-1}(U), \quad T' = f^{-1}(T),$$

couple d'un ouvert de X' et du fermé complémentaire, de sorte que cette donnée équivaut à celle de

1°) un couple (U', T') dans X'

2°) un morphisme (dans \mathcal{T}) de (X', U', T') dans (X, U, T) , ce qui équivaut par 1.1 à un triple

$$\left\{ \begin{array}{l} f_{U'} : U' \longrightarrow U \\ f_{T'} : T' \longrightarrow T \\ u : H_{U', T'} \longrightarrow H \circ (f_{U'}^\circ \times f_{T'}), \end{array} \right.$$

où on a posé

$$\left\{ \begin{array}{l} H_{U', T'} : U'^\circ \times T' \longrightarrow \text{Ens} \\ H_{U', T'}(u', t') = \text{Hom}_{X'}(u', t'), \end{array} \right.$$

i.e. $H_{U', T'}$ est la donnée de recollement qui correspond au triple (X', U', T') dans \mathcal{T} .

[page 66]

Nous serons plus intéressés par la situation inverse, i.e. par la question de déterminer les foncteurs

$$\underbrace{X}_{= X_{U, T, H}} \longrightarrow X'$$

de X , obtenu par (U, T, H) , dans un objet quelconque de Cat . On trouve tautologiquement

Proposition 3. *$\text{Hom}_{\text{Cat}}(X, X')$ est en correspondance bijective canonique, fonctorielle en X' dans Cat , avec l'ensemble des triples*

$$[(*)] \quad \left\{ \begin{array}{l} f_U : U \longrightarrow X' \\ f_T : T \longrightarrow X' \\ u : H \longrightarrow H_{X'}(f_U^\circ \times f_T), \text{ flèche dans } \underline{\text{Hom}}(U^\circ \times T, \text{Ens}), \end{array} \right\} \text{ flèches dans Cat}$$

où pour tout X' dans Cat , on a posé

$$H_{X'} = ((x, y) \mapsto \text{Hom}_{X'}(x, y)) : X'^\circ \times X' \longrightarrow \text{Ens}.$$

Sûrement on aura même un isomorphisme de catégories

$$\underline{\text{Hom}}(X, X') \simeq \text{catégorie des triples } (f_U, f_T, u) \text{ comme dans } (*).$$

1.4 Construction de sommes amalgamées à partir d'une immersion ouverte où fermée.

Pour une construction d'une sorte de somme amalgamée, en termes d'un triple (X, U, T) + ... ,

[page 67]

qui soit symétrique en U, T , j'ai envie de regarder d'abord la situation 'mixte', d'un diagramme en traits pleins

$$(*) \quad \begin{array}{ccccc} U & \xrightarrow{i} & X & \xleftarrow{j} & T \\ f_U \downarrow & & \downarrow f & & \downarrow f_T \\ U' & \xrightarrow{i'} & X' & \xleftarrow{j'} & T' \end{array}$$

qu'on aimerait compléter 'canoniquement', si faire se peut, en un morphisme de triples (i.e. en une flèche dans \mathcal{T}). L'idée naturelle, c'est que le X' qui s'y insère serait la limite inductive, dans Cat , du diagramme initial. Si $T' = T$, $f_T = \text{id}_T$, cela signifie donc que X' s'identifie à la somme amalgamée $X \amalg_U U'$, et inversement si $U' = U$, $f_U = \text{id}_U$.

Désignons par X' la somme amalgamée [plutôt la limite inductive], et explicitons, pour X'' quelconque dans Cat , l'ensemble des flèches g de X' dans X'' , comme foncteur en X'' . C'est l'ensemble des triples

$$(*) \quad (g_X, g_{U'}, g_{T'}) \quad \left\{ \begin{array}{l} g_X : X \longrightarrow X'' \\ g_{U'} : U' \longrightarrow X'' \\ g_{T'} : T' \longrightarrow X'' \end{array} \right. \quad \text{avec} \quad \begin{array}{l} g_X \circ i = g_{U'} f_U \\ g_X \circ j = g_{T'} f_T. \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
 U & \xrightarrow{i} & X & \xleftarrow{j} & T \\
 f_U \downarrow & & \downarrow g_X & & \downarrow f_T \\
 U' & & & & T' \\
 & \searrow g_{U'} & & \swarrow g_{T'} & \\
 & & X'' & &
 \end{array}$$

Notons que pour un tel triple, g_X est partiellement connu déjà en termes de $g_{U'}$, $g_{T'}$, par ses restrictions $g_X \circ i$ et $g_X \circ j$ à U et T respectivement, par les formules

$$g_U = g_{U'} f_U, \quad g_T = g_{T'} f_T.$$

[page 68]

Donc la donnée d'un triple (*) équivaut à celle d'un triple

$$(g_{U'}, g_{T'}, g_X) \quad \begin{cases} g_X \text{ une flèche } X \rightarrow X'' \text{ correspondant à} \\ g_U = g_{U'} \circ f_U \text{ et } g_T = g_{T'} \circ f_T \text{ déjà donnés (via } g_{U'}, g_{T'}), \end{cases}$$

donc en vertu de 1.3. cela correspond à

$$(*) \quad (g_{U'}, g_{T'}, u) \quad \begin{cases} g_{U'} : U' \rightarrow X'' \\ g_{T'} : T' \rightarrow X'' \\ u : H \rightarrow \underbrace{H_{X''}((g_{U'} \circ f_U)^\circ \times (g_{T'} \circ f_T))}_{(u,t) \mapsto \text{Hom}_{X''}(g_{U'} f_U(u), g_{T'} f_T(t))}. \end{cases}$$

On va interpréter la donnée de u , en termes d'un foncteur

$$(**) \quad F^* = (H' \mapsto H' \circ F) : \underline{\text{Hom}}(U'^\circ \times T', \text{Ens}) \rightarrow \underline{\text{Hom}}(U^\circ \times T, \text{Ens})$$

où

$$F : U^\circ \times T \rightarrow U'^\circ \times T' \quad \text{est donné par } F = f_U^\circ \times f_T.$$

On a un objet $H'' = H''_{g_{U'}, g_{T'}}$ de la catégorie source de (**) déterminé en termes du couple $(g_{U'}, g_{T'})$, par

$$H''(u', t') = \text{Hom}_{X''}(g_{U'}(u'), g_{T'}(t')),$$

et le bifoncteur but de la flèche u dans (*) s'interprète comme

$$F^*(H'') = H'' \circ F : (u, t) \mapsto \underbrace{H''(f_U(u), f_T(t))}_{= \text{Hom}(g_{U'} f_U(u), g_{T'} f_T(t))}.$$

Ainsi, u s'interprète comme une flèche

$$u : H \rightarrow F^*(H'').$$

Or le foncteur F^* a un adjoint à gauche $F_!$, i.e. on a

$$(***) \quad \text{Hom}(H, F^*(H'')) \simeq \text{Hom}(F_!(H), H'').$$

[page 69]

avec

$$F_! : \underline{\text{Hom}}(U^\circ \times T, \text{Ens}) \longrightarrow \underline{\text{Hom}}(U'^\circ \times T', \text{Ens}).$$

Posons

$$H' = F_!(H) : U'^\circ \times T' \longrightarrow \text{Ens},$$

c'est un bifoncteur bien déterminée par la seule donnée du diagramme initial (*) p. 67, ou ce qui revient au même, en termes de

$$(U, T, H, f_U : U \longrightarrow U', f_T : T \longrightarrow T').$$

Et on voit que la donnée d'une flèche $X' \longrightarrow X''$, X'' objet variable de Cat , équivaut à celle de

$$g_{U'} : U' \longrightarrow X'', g_{T'} : T' \longrightarrow X'', u : H' \longrightarrow H'' = H_{X''}(g_{U'}^\circ \times g_{T'}),$$

c'est à dire, en vertu de 1.3., à celle d'une flèche

$$X'_0 \longrightarrow X'',$$

où X'_0 désigne l'objet de Cat déduit de U', T' par recollement au moyen de H' . Cela montre donc que la limite inductive cherchée n'est autre que X'_0 . On a ainsi trouvé le

Théorème 1. *La limite inductive X' dans Cat du diagramme (*) page 67, défini en termes d'un triple (X, U, T) dans \mathcal{T} et de flèches $f_U : U \longrightarrow U', f_T : T \longrightarrow T'$ dans Cat , existe (sans mérite)*

[page 70]

et les flèches canoniques

$$U' \hookrightarrow^{i'} X' \xleftarrow{j'} T'$$

sont des immersions ouvertes et fermées complémentaires l'une de l'autre. La donnée de recollement qui définit X' via U', T' est donnée par

$$H' = \underbrace{(f_U^\circ \times f_T)}_F(H) : U'^\circ \times T' \longrightarrow \text{Ens},$$

où H est la donnée de recollement qui définit X , i.e. $H : U^\circ \times T \longrightarrow \text{Ens}$ est le bifoncteur $(u, t) \longmapsto \text{Hom}_X(u, t)$.

Ainsi on a, pour u' dans U' et t' dans T'

$$\text{Hom}_{X'}(u', t') = F_!(H)(u', t'),$$

et il reste à expliciter $F_!(H)$. Ici $F = f_U^\circ \times f_T$ est un foncteur covariant sur $U^\circ \times T$, on peut l'interpréter comme un préfaisceau sur $U \times T^\circ$, et écrire dès lors

$$(*) \quad \underbrace{F_!(H)(u', t')}_{\text{Hom}_{X'}(u', t')} = \varinjlim_{(u', t') \setminus U \times T^\circ} \underbrace{\text{Hom}_X(u, t)}_{H(u, t)}.$$

La catégorie $(u', t') \setminus U \times T^\circ$ sur laquelle on prend la \varinjlim s'explique comme un produit

$$(u', t') \setminus U \times T^\circ \simeq (u' \setminus U) \times (T/t')^\circ.$$

Les applications

$$\mathrm{Hom}_X(u, t) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{X'}(u', t') \quad (= F_!(H)(u', t'))$$

[page 71]

déduites de cette formule ne sont autres que les suivantes : u, t sont données comme objets de $u' \setminus U, T/t'$, i.e. avec des flèches

$$u' \xrightarrow{\alpha} f_U(u), \quad f_T(t) \xrightarrow{\beta} t',$$

d'où

$$\mathrm{Hom}_X(u, t) \xrightarrow{\text{via } f = f_X : X \rightarrow X'} \mathrm{Hom}_{X'}(\underbrace{f(u)}_{f_U(u)}, \underbrace{f(t)}_{f_T(t)}) \xrightarrow{\text{via } \alpha, \beta} \mathrm{Hom}_{X'}(u', t').$$

Notons pour mémoire que pour tout objet Z de Cat , et tout préfaisceau G sur Z , on a la formule

$$\varinjlim_Z G \simeq \pi_0(Z/G),$$

où Z/G s'interprète en termes de l'immersion canonique $Z \rightarrow Z^\wedge$ ($G \in \mathrm{Ob} Z^\wedge$). C'est donc une catégorie fibrée sur Z à fibres discrètes, et on a en fait un isomorphisme entre la sous-catégorie pleine de Cat/Z formée de telles catégories fibrées à fibres discrètes, avec Z^\wedge . Dans ce dictionnaire parfait entre préfaisceaux d'ensembles et catégories fibrées à fibres discrètes, le foncteur \varinjlim sur Z^\wedge correspond simplement au foncteur π_0 sur la catégorie des objets au dessus de Z dans Cat , lui-même induit par le foncteur (indépendant de Z)

$$\mathrm{Cat} \xrightarrow{\pi_0} \mathrm{Ens}.$$

[page 72]

On peut donc réécrire la formule fondamentale (*) p. 70, en termes du foncteur H définissant le recollement X de U et de T , par

$$(*) \quad \boxed{\underbrace{\mathrm{Hom}_{X'}(u', t')}_{H'(u', t')} \simeq \pi_0(\underbrace{(u', t') \setminus U \times T^\circ / H}_{((u' \setminus U) \times (T/t')^\circ) / H})}$$

Par la suite, nous n'aurons sans doute qu'à utiliser le cas où on a soit $T' = T, f_T = \mathrm{id}_T$, soit l'inverse. Nous travaillerons surtout dans le premier cas, en déduisant ce dont nous aurons besoin pour le cas dual, par principe de dualité (automorphisme $X \mapsto X^\circ$ de la

catégorie Cat). Dans ce cas, dans la formule fondamentale (*) l'élément t' de T' s'écrit comme un élément t de T , et la formule se retranscrit comme

$$(**) \quad \boxed{\begin{array}{l} \text{Hom}_{X'}(u', t) \simeq \pi_0(\underbrace{u' \backslash U/t}_{\text{catégorie des triples } (u, \alpha, \beta')}, \left\{ \begin{array}{l} u \in \text{Ob } U \\ \alpha : u \rightarrow t \\ \beta' : u' \rightarrow f_U(u) \end{array} \right. \end{array}}$$

C'est la formule que j'avais trouvée directement dans ce cas, sans me soucier encore de faire varier T en même temps que U . Je voudrais faire le lien entre les deux formules (*) et (**), par voie topologique, donc établir une bijection canonique, fonctorielle etc.

$$\pi_0(u' \backslash U/t) \xrightarrow{\simeq} \pi_0(((u' \backslash U) \times (T/t)^\circ)/H).$$

[page 73]

On a sûrement un foncteur

$$u' \backslash U/t \longrightarrow ((u' \backslash U) \times (T/t)^\circ)/H$$

qui associe à un triple

$$(u, \alpha, \beta') : u \in \text{Ob } U, \alpha : u \rightarrow t, \beta' : u' \rightarrow f_U(u)$$

le triple (\bar{u}, \bar{t}, ξ) ($\xi \in H(\bar{u}, \bar{t})$) dans le second membre, avec \bar{u} dans $u' \backslash U$, \bar{t} dans T/t , défini ainsi :

$$\bar{u} = (u, \beta'), \bar{t} = (t, \text{id}_t), \underbrace{\xi}_{=\alpha} \in H(\bar{u}, \bar{t}) = \text{Hom}(u, t).$$

En somme

$$u' \backslash U/t = \text{fibre de } ((u' \backslash U) \times (T/t)^\circ)/H \text{ en l'objet initial } \bar{t} \text{ de } (T/t)^\circ$$

par la projection naturelle, flèche composée

$$\begin{array}{c} ((u' \backslash U) \times (T/t)^\circ)/H \\ \downarrow \\ (u' \backslash U) \times (T/t)^\circ \\ \downarrow \pi \\ (T/t)^\circ. \end{array}$$

Il faut voir que l'inclusion de la fibre donne une bijection sur les π_0 , ou ce qui revient au même, que l'inclusion de la fibre $u' \backslash U$ de π en l'objet initial (t, id_t) de $(T/t)^\circ$ donne une bijection sur les $\underline{\lim}$ du foncteur H . Donc l'inclusion a intérêt à être asphérique, ou du moins co-cofinale.

[page 74]

Mais l'inclusion d'un objet initial est toujours asphérique, et le reste par produit avec un objet quelconque (i.e. $u' \setminus U$) de Cat (et même par tout changement de base lisse ...), d'où la conclusion.

Dans la suite, nous nous intéressons surtout à la situation de sommes amalgamées (où on change de notation un peu, à présent)

$$(*) \quad \begin{array}{ccccc} U & \xrightarrow{i} & X & \xleftarrow{j} & T \\ \downarrow p & & \downarrow q & & \downarrow \text{dotted} \\ U' & \xrightarrow{i'} & X' & \xleftarrow{\text{dotted}} & T' \simeq T \end{array}$$

Le fermé T' complémentaire de U' dans X' est alors canoniquement isomorphe au fermé T complémentaire de U dans X , l'isomorphisme étant induit par q . Souvent nous identifierons T' et T , ce qui est licite en regardant X' comme déduit du recollement de U' et de t [plutôt T], par le bifoncteur $U'^{\circ} \times T \rightarrow \text{Ens}$ explicité dans la formule (**) p. 72. Nous nous intéressons surtout à dégager des conditions qui assurent les deux implications suivantes

- a) $i \in W \implies i' \in W$ (et même \iff).
- b) $p \in W \implies q \in W$ (et même \iff).

[page 75]

Proposition 4. *Soit $t \in \text{Ob} T$. Pour que $t \in \text{Ob} \bar{U}$, il faut et il suffit que $q(t) \in \text{Ob} \bar{U}'$. En d'autres termes, le 'bord' $\bar{T} = T \cap \bar{U}$ de T dans X est 'le même' que son bord dans X' .*

DÉMONSTRATION. Dire que $t \in \text{Ob} \bar{U}$ signifie aussi

$$U/t \neq \emptyset$$

et implique, par continuité, que $q(t) \in \overline{q(U)} \subseteq \bar{U}'$. Inversement, si $q(t) \in \bar{U}'$, i.e. s'il existe $u' \in U'$ tel que

$$\text{Hom}(u', q(t)) (= \pi_0(u' \setminus U/t)) \neq \emptyset,$$

il en résulte que $u' \setminus U/t \neq \emptyset$, a fortiori U/t (qui reçoit $u' \setminus U/t$) $\neq \emptyset$, q.e.d.

Proposition 5. *Soit*

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{i} & X \\ \downarrow p & & \downarrow q \\ Y' & \xrightarrow{i'} & X' \end{array}$$

un carré cocartésien dans Cat . Si i est une immersion ouverte (resp. fermée), alors i' aussi, et le carré est aussi cartésien. Idem pour p et q . Si i et p sont des immersions ouvertes (⁶³) (resp. ...), alors la situation est isomorphe à celle d'un objet X' de Cat , de deux ouverts (resp. fermés) X, Y' de X ayant pour réunion X' , pour intersection Y . Inversement, dans une telle situation le carré correspondant est cocartésien, i.e. X [plutôt X'] s'identifie à la somme amalgamée

$$X' \simeq X \amalg_Y Y'.$$

Donc aussi on a la proposition 15, page 158, et ses corollaires.

⁶³**NB** Nous utilisons 'immersion ouverte', 'immersion fermée' au sens strict : c'est un *monomorphisme* pleinement fidèle dont l'image est une sous-catégorie *pleine*, soit ouverte, soit fermée.

2 Sommes amalgamées et W -équivalences.

2.1 Axiome du carré cocartésien et axiome du cube (ou ‘Lemme des cinq’).

Nous supposons à présent donné un localiseur fondamental

$$W \subseteq \text{Fl}(\text{Cat}),$$

donc W satisfait à W(1, 2 bis, 3). Nous ne supposons pas pour le moment pour les autres axiomes standard W(4) (axiome de fibration), W(5) (axiome de connexité), W(6) (axiome des limites inductives). Mais nous allons introduire à présent deux axiomes de stabilité supplémentaire, de nature différente, concernant les sommes amalgamées.

W(7 bis) (Axiome du carré cocartésien.) Soient X un objet de Cat , U, U' deux ouverts de X tels que $U \cup U' = X$, considérons le diagramme cocartésien correspondant (cf. prop. 5 en marge de la page [ci-dessus]) :

[page 76]

$$(*) \quad \begin{array}{ccc} & U \cap U' & \\ i'_0 \swarrow & & \searrow i_0 \\ U & & U' \\ i \swarrow & & \searrow i' \\ & X & \end{array}$$

Alors

$$i_0 \in W \quad \iff \quad i \in W$$

(et symétriquement

$$i'_0 \in W \quad \iff \quad i' \in W).$$

NB Par dualité, cet axiome est équivalent à l’axiome similaire, avec des *fermés* T, T' de X de réunion X .

Corollaire. *Supposons W(7 bis). Considérons les conditions suivantes sur le carré précédent.*

- a) $U \cap U'$ W -asphérique.
- b) U, U' W -asphériques.
- c) X W -asphérique.

Alors (a et b) implique c, et (b et c) implique a.

NB Moralement, il faudrait aussi que (c et a) implique b, i.e. si $U \cap U'$ et X sont W -asphériques, il en est de même de U et de U' . Mais il ne semble pas que l’axiome du carré cocartésien permette de le prouver. Par contre, l’axiome qui suit impliquera le corollaire précédent sous sa forme complète.

W(7) ('Axiome du cube', ou 'Lemme des cinq'.) Soit un diagramme commutatif cubique

$$\begin{array}{ccccc}
 U_1 \cap U'_1 & \longrightarrow & U_1 & & \\
 \downarrow f_{U_1 \cap U'_1} & \searrow & \downarrow f_{U_1} & \searrow & \\
 U_1 \cap U'_1 & & U'_1 & \longrightarrow & X_1 \\
 \downarrow f_{U_1 \cap U'_1} & \searrow & \downarrow f_{U'_1} & \searrow & \downarrow f \\
 U_2 \cap U'_2 & \longrightarrow & U_2 & & \\
 & \searrow & \downarrow & \searrow & \\
 & & U'_2 & \longrightarrow & X_2
 \end{array}$$

représentant un morphisme (flèches verticales) d'un

[page 77]

$$\begin{array}{ccc}
 U_1 \cap U'_1 & \longrightarrow & U_1 \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 U'_1 & \longrightarrow & X_1
 \end{array}$$

carré cocartésien du type envisagé dans W(7 bis) (X_1 réunion

de deux ouverts U_1, U'_1) dans un autre (à indices 2). Considérons les conditions suivantes.

- a) $f_{U_1 \cap U'_1} \in W$.
- b) f_{U_1} et $f_{U'_1}$ sont [dans] W .
- c) $f \in W$.

Alors deux parmi ces conditions impliquent la troisième. En d'autres termes, quand l'une de ces conditions est satisfaite, les deux autres sont équivalentes entre elles.

NB Cet axiome est équivalent à l'axiome dual, en termes d'objets X_1, X_2 représentés chacun comme réunion de deux fermés.

Corollaire. *Supposons W(7) satisfait. Alors le corollaire à W(7 bis) (axiome qu'on n'a pas à utiliser ici), sous sa forme complétée (cf. le NB qui le suit) est valable : deux parmi les conditions a), b), c) impliquent la troisième.*

Il suffit de regarder l'unique morphisme du diagramme (*), p. 76, dans le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 & e & \\
 \swarrow & & \searrow \\
 e & & e \\
 \searrow & & \swarrow \\
 & e &
 \end{array}$$

trivial e , correspondant au cas où X est la catégorie finale e , et U, U' égaux

à X . Alors le corollaire n'est autre que W(7) appliqué à ce cas particulier.

Cet argument fait sentir que W(7) est sans doute plus fort que W(7 bis). Incité par ce sentiment, je m'aperçois avec plaisir qu'il est fondé :

[page 78]

Proposition 6. *L'axiome W(7) (lemme des cinq) implique W(7 bis) (axiome du carré cocartésien).*

On regarde le diagramme cubique suivant

$$\begin{array}{ccccc}
 U \cap U' & \xrightarrow{i_0} & U' & & \\
 \downarrow f_{U \cap U'} = i_0 & \searrow i'_0 & \downarrow f_{U'} = \text{id} & \searrow i' & \\
 & & U & \xrightarrow{i} & X \\
 & & \downarrow f_U = i & & \downarrow f = \text{id}_X \\
 U' & \xrightarrow{\text{id}} & U' & & \\
 & \searrow i' & \downarrow & \searrow i' & \\
 & & X & \xrightarrow{\text{id}} & X,
 \end{array}$$

du carré cocartésien donné dans le carré cocartésien déduit de X et de ses deux ouverts X, U' , d'intersection U' . Ici les deux flèches verticales f et $f_{U'}$ sont des isomorphismes, donc [dans] W . Avec les notations de W(7), on a donc c) ($f \in W$), donc a) et b) sont équivalentes, i.e. $i_0 \in W$ et $i \in W$ sont équivalentes.

q.e.d.

Théorème 2. *Le localiseur fondamental W_∞ satisfait à l'axiome W(7).*

C'est sûrement une conséquence du critère cohomologique d'ARTIN-MAZUR, compte tenu de la suite exacte de Mayer-Vietoris pour l'un et l'autre des deux carrés cocartésiens, et les variantes non commutatives de Mayer-Vietoris. Je n'ai pas écrit la vérification en forme, et devrais sans doute réparer cette omission.

[page 79]

Remarque. La version duale (au sens de QUILLEN) de l'axiome W(7 bis) du carré cocartésien, i.e. l'axiome correspondant pour les carrés cartésiens, n'est pas valable pour W_∞ . L'énoncé pertinent serait le suivant : soit

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xleftarrow{q} & X' \\
 \downarrow f & & \downarrow f' \\
 S & \xleftarrow{p} & S'
 \end{array}$$

un carré cartésien, avec f une W -fibration. Alors $f \in W \iff f' \in W$. Si W satisfait à W(4c) (ce qui est le cas pour W_∞), alors $f \in W$ implique bien que ses fibres sont W -asphériques, donc que c'est une W -équivalence universelle, i.e. $f' \in W \forall p : S' \rightarrow S$. Mais pour l'implication inverse $f' \in W \implies f \in W$, il faut supposer visiblement que

$$\pi_0(p) : \pi_0(S') \rightarrow \pi_0(S)$$

est *surjectif*. (P. ex. si $S' = \emptyset$, on a $X' = \emptyset$, donc $f' \in W$, sans que ça implique $f \in W$!) Le fait que dans le cas cocartésien de W(7 bis), $i_0 \in W \implies i \in W$ doit être considéré comme ‘allant de soi’ - autrement le carré ne mérite pas, du point de vue W -homotopique, le nom de ‘cocartésien’. Par contre, l’implication inverse $i \in W \implies i_0 \in W$ m’apparaît comme un trait très particulier du dérivatuer HOT_W (quand il le possède), et notamment de $\text{HOT} = \text{HOT}_{W_\infty}$. Le début

[page 80]

de la remarque signifie simplement que le dérivatuer dual HOT° ne possède pas cette même propriété. Je dois renvoyer à ce sujet aux deux axiomes pour les dérivatuer correspondants à W(7 bis), W(7), ce que je ferai sans doute sous peu, de façon à donner un sens plus précis aux présents commentaires.

2.2 Application aux carrés cocartésiens déduits d’une immersion ouverte ou fermée.

Les axiomes W(7), W(7 bis) (du cube, et du carré cocartésien) concernent des carrés cocartésiens de nature très particulière. Nous allons voir à présent comment en déduire des énoncés du même type pour des carrés cocartésiens beaucoup plus généraux, y compris pour des carrés qui n’ont rien de cocartésien (dans Cat) - et que nous appellerons ‘homotopiquement cocartésiens’ (relativement à W), ou simplement W -cocartésiens. (Il y aura également des carrés W -cartésiens un jour ...) Dans le cas où $W = W_\infty$, je les appellerai aussi Hot-cocartésiens.

Je commencerai par le cas particulier d’un carré cocartésien associé à une immersion ouverte (diagramme (*), p. 74) :

$$(*) \quad \begin{array}{ccccc} U & \xrightarrow{i} & X & \xleftarrow{j} & T \\ \downarrow p & & \downarrow q & & \downarrow \\ U' & \xrightarrow{i'} & X' & \xleftarrow{j'} & T' \simeq T. \end{array}$$

[page 81]

Le grand traquenard ici qu’il faut arriver à exorciser, c’est qu’il peut arriver que $i \in W$, sans qu’on ait $i' \in W$, et aussi $p \in W$ sans qu’on ait $q \in W$. Je m’en étais convaincu en 1983 en écrivant *Pursuing Stacks* (durant les semaines de ‘scratchwork’), et n’ai pas envie de rechercher un contre-exemple ici, s’il ne se présente de lui-même (ce qu’il fera sans doute).

Je vais donner un cas important où ces ennuis disparaissent :

Proposition 6 : *Considérons les adhérences \bar{U} et \bar{U}' de U et U' dans X , X' respectivement, et supposons que les inclusions*

$$U \xrightarrow{i_0} \bar{U}, \quad U' \xrightarrow{i'_0} \bar{U}'$$

soient dans W ⁽⁶⁴⁾. Alors

$$\begin{cases} \textcircled{a} & i \in W \iff i' \in W \quad \text{si on a W(7 bis)} \\ \textcircled{b} & p \in W \iff q \in W \quad \text{si on a W(7)}. \end{cases}$$

DÉMONSTRATION. Considérons d'abord le cas \textcircled{a} de i, i' . Soit

$$k : \bar{U} \hookrightarrow X$$

l'inclusion. Le triangle $U \xrightarrow{i_0} \bar{U} \xrightarrow{k} X$, où $i_0 \in W$, montre que

$$i \in W \iff k \in W.$$

D'autre part, X est la réunion des fermés \bar{U}, T , donc on a un carré cocartésien dans Cat

$$(*) \quad \begin{array}{ccc} \bar{U} \cap T = \dot{T} & \xrightarrow{k_0} & T \\ j_0 \downarrow & & \downarrow j \\ \bar{U} & \xrightarrow{k} & X. \end{array}$$

L'axiome W(7 bis) (sous sa forme duale (i.e. appliqué au carré formé par les catégories opposées ...)) implique

[page 82]

que

$$k \in W \iff k_0 \in W,$$

d'où

$$i \in W \iff (k_0 : \dot{T} \rightarrow T) \in W.$$

De même on trouve, en appliquant ceci à (X', U') au lieu de (X, U)

$$i' \in W \iff (k'_0 : \dot{T}' \rightarrow T') \in W.$$

Or on a $T \xrightarrow{\sim} T'$ (isomorphisme), et par la proposition 4 cet isomorphisme transforme \dot{T} en \dot{T}' . Donc

$$k_0 \in W \iff k'_0 \in W \quad (\text{trivialement}),$$

d'où a).

Prouvons b). Le carré commutatif induit par (*), p. 80,

⁶⁴cf. th. 3 p. 107 pour des conditions générales assurant que cette hypothèse est satisfaite.

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{i_0} & \bar{U} \\ p \downarrow & & \downarrow \bar{p} \\ U' & \xrightarrow{i'_0} & \bar{U}' \end{array},$$

où $i_0, i'_0 \in W$ par hypothèse, montre que

$$p \in W \iff \bar{p} \in W,$$

donc tout revient à prouver que

$$\bar{p} \in W \stackrel{?}{\iff} q \in W.$$

Mais q induit un homomorphisme du carré $(*)$ déduit de (X, \bar{U}, T) (avec $X = \bar{U} \cup T$), dans le carré similaire pour X'

$$\begin{array}{ccc} \bar{U}' \cap T' = \dot{T}' & \xrightarrow{k'_0} & T \\ j'_0 \downarrow & & \downarrow j' \\ \bar{U}' & \xrightarrow{k'} & X' \end{array},$$

les flèches verticales étant notées $q_{\dot{T}'}, q_T, \bar{p}, q$.

[page 83]

On sait que $q_{\dot{T}'}, q_T$ sont des isomorphismes, donc dans W , donc le ‘lemme des cinq’ W(7) nous assure que $\bar{p} \in W \iff q \in W$, q.e.d.

Commentaire. Cette proposition nous amène à chercher des conditions sur un ouvert U d’un X , qui assurent que l’inclusion $i_0 : U \rightarrow \bar{U}$ soit [dans] W , et que cette propriété soit conservée par tout cochage de base $U \rightarrow U'$. De plus, nous recherchons des conditions qui soient de nature locale sur \bar{U} , plus exactement sur $\bar{U} \cap T = \dot{U} = \dot{T}$. Nous pouvons motiver ce souci (a posteriori) en disant que nous voudrions que la propriété $i_0 \in W$ soit conservée, non seulement par cochage de base quelconque $U \rightarrow U'$, mais aussi, de plus, par passage de X à toute sous-catégorie pleine X_1 contenant U , donnant donc naissance à une situation

$$U \xrightarrow{i_Y} X_1, \quad U \xrightarrow{(i_Y)_0} \bar{U}^{X_1} = \bar{U} \cap X_1$$

[$Y = X_1$?], similaire à la situation de départ. Plus généralement encore, nous voudrions qu’elle soit conservée en passant du triple (X, U, T) à un triple “induit” (X_1, U, T_1) , par une flèche quelconque $g : T_1 \rightarrow T$ de but T dans Cat , donnant naissance au couple de flèches

$$U \xrightarrow{\text{id}} U, \quad g : T_1 \rightarrow T$$

(cf. pages 60, 61). Le cas précédent est celui où

[page 84]

T_1 est une sous-catégorie pleine de T , g la flèche d'inclusion, Notons à ce sujet la proposition soritale

Proposition 7. *Conditions équivalentes sur l'ouvert U d'un objet X de Cat (moyennant W(7 bis)) :*

- a) *L'inclusion $i_0 : U \rightarrow \bar{U}$ est W -asphérique, i.e. pour tout $t \in \dot{U} = \bar{U} \setminus U$, la catégorie U/t est W -asphérique.*
- b) *L'inclusion $i_0 : U \rightarrow \bar{U}$ est dans W , et cette condition reste satisfaite, quand on remplace (X, U) par (X_1, U) , où (X_1, U) est déduit de (X, U) au moyen d'une flèche $T_1 \rightarrow T (= X \setminus U)$ dans Cat , comme rappelé ci-dessus.*
- b') *Comme b), dans le cas où T_1 est la catégorie ponctuelle e , et où de plus son image est dans \dot{U} .*

DÉMONSTRATION. Il est évident que si dans b), b') on remplace la condition " $i_0 \in W$ " par la condition plus forte ' i_0 est W -asphérique', les quatre [plutôt trois] conditions a) à b') sont équivalentes. Il reste à prouver que la condition que les U/t soient W -asphériques ($t \in \bar{U}$ - mais c'est trivial pour $t \in U$, donc il suffit de l'exprimer pour $t \in \bar{U} \setminus U = \dot{U}$) est déjà impliquée par la plus faible b' et on devine qu'on a ceci :

[page 85]

Corollaire. (Moyennant W(7 bis).) *Soit X dans Cat , U un ouvert de X tel que $X \setminus U = \overline{\{t\}}$ soit la catégorie finale. Alors l'inclusion $U \xrightarrow{i} X$ est dans W si et seulement si elle est W -asphérique, i.e. si et seulement si U/t est W -asphérique (où t est l'unique élément de T).*

Nous démontrons ultérieurement ce corollaire ⁽⁶⁵⁾. La proposition 7 ne nous servira pas d'ici là - elle n'aura qu'un rôle purement esthétique à jouer, pour justifier notre propos délibéré de chercher des conditions sur $i : U \rightarrow X$ (pour assurer que $U \rightarrow \bar{U}$ est dans W et le reste, quand on remplace (X, U) par d'autres couples (X_1, U_1) qui s'en déduisent par certaines opérations ...) qui

[page 86]

soient de *nature locale* sur \bar{U} (en fait, en les points de \dot{U}), et qui en tout état de cause entraînent la W -asphéricité de $U \rightarrow \bar{U}$.

J'avais espéré que cette condition d'asphéricité (suggérée par la notion 'd'immersion de Dwyer') serait stable par cochage de base quelconque $U \rightarrow U'$, ce qui aurait assuré en même temps qu'après une telle opération, l'immersion ouverte $i' : U' \rightarrow X'$ obtenue satisfait encore à la condition que $i'_0 : U' \rightarrow \bar{U}'$ est dans W . Nous verrons que cette attente n'est pas fondée - la condition de W -asphéricité n'est *pas* stable par cochage de base, et elle ne suffit *pas* même à assurer qu'après un cochage de base, $i'_0 : U' \rightarrow \bar{U}'$ soit

⁶⁵cf. cor. 4 de la proposition 15, page 149.

dans W . Il faudra une notion plus forte, qui est suggérée par le cas où $T = \{t\}$ est la catégorie finale et contenue dans \bar{U} (cas auquel nous avons essayé de nous ramener dans la proposition 7). Dans ce cas, on l'a dit (corollaire précédent), la condition que $i : U \rightarrow \bar{U} = X$ soit dans W , équivaut à la W -asphéricité de i , i.e. à la W -asphéricité de U/t , et de même pour $i' : U' \rightarrow \bar{U}' = X'$: elle est dans W si et seulement si U'/t' est W -asphérique, où

[page 87]

t' est l'unique élément de $T'(\simeq T) = X' \setminus U'$. Donc il faut des conditions sur U/t qui assurent que non seulement U/t , mais aussi toutes les catégories similaires U'/t [plutôt U'/t'], soient W -asphériques. Dans le cas général où T est quelconque, c'est cette condition-là que nous allons imposer aux U/t ($t \in \text{Ob } T$), et il s'avérera que cette fois-ci, elles sont stables [plutôt elle est stable] par tout cochage de base $U \xrightarrow{p} U'$, i.e. que les U'/t' ($t' \in \text{Ob } T'$) satisferont alors à la même condition. C'est cette condition que nous allons à présent reformuler.

2.3 Objets totalement W -asphériques de Cat , et morphismes totalement W -asphériques.

Reprenons la situation

$$U \xhookrightarrow{i} X \xleftarrow{j} T, \quad \text{avec } T = \{t\}, \text{ catégorie finale, } t \in \bar{U}, \text{ i.e. } X = \bar{U},$$

et celle d'un cochage de base $U \rightarrow U'$, donnant naissance à un carré cocartésien dans Cat

$$(*) \quad \begin{array}{ccccc} U & \xhookrightarrow{i} & X & \xleftarrow{j} & T = \{t\} \\ \downarrow p & & \downarrow q & & \downarrow \text{iso} \\ U' & \xhookrightarrow{i'} & X' & \xleftarrow{j'} & T' = \{t'\}. \end{array}$$

La donnée de recollement H entre U et T , $H : \underbrace{U^\circ \times T}_{\simeq U^\circ} \rightarrow \text{Ens}$, peut s'interpréter comme un préfaisceau sur U , $H \in \text{Ob } U^\wedge : U^\circ \rightarrow \text{Ens}$,

[page 88]

et on a

$$U/t \simeq U/H,$$

où U/H est interprété en termes du plongement canonique

$$U \hookrightarrow U^\wedge.$$

De même, le recollement entre U' et T' sera donné par un préfaisceau

$$H' \in \text{Ob } U'^\wedge : U'^\circ \rightarrow \text{Ens},$$

et on aura

$$U'/t' \simeq U/H'.$$

La relation entre H' et H a été explicitée au §1, comme

$$H' = p_! H, \quad \text{où } p_! : U^\wedge \longrightarrow U'^\wedge$$

est l'adjoint à gauche de $p^* : U'^\wedge \longrightarrow U^\wedge$, donné par

$$p^* F' = F' \circ p.$$

On a

$$p_!(H)(u') \simeq \pi_0(u' \setminus U/H).$$

Définition 1. (a) Soit U un objet de Cat , $H \in \text{Ob } U^\wedge$ un préfaisceau sur U . On dit que H est *totalelement* W -asphérique si pour toute flèche $p : U \longrightarrow U'$ de Cat , $p_!(H)$ dans U'^\wedge est un objet W -asphérique, i.e. $U'/p_!H$ est W -asphérique. (b) On dit qu'un objet V de

[page 89]

Cat est *totalelement* W -asphérique, si le foncteur final e_V sur V ($v \longmapsto \{\emptyset\}$) est totalelement W -asphérique, i.e. si pour toute flèche $f : V \longrightarrow V'$ dans Cat , le préfaisceau

$$\pi_0(f) \stackrel{\text{déf}}{=} f_!(e_V) \stackrel{\text{déf}}{=} (v' \longmapsto \pi_0(v' \setminus V))$$

sur V' est W -asphérique, i.e. si la catégorie

$$\underline{\pi}_0(f) \text{ ou } \underline{\pi}_0(V/V') \stackrel{\text{déf}}{=} V'/\pi_0(f)$$

est W -asphérique. [Cette notion est différente de la notion de totale asphéricité de Pursuing Stacks.]

Notons que la définition des foncteurs $p_!$ (ou $f_!$) comme adjoints, et leur 'calcul' en termes de π_0 de certaines catégories, ne dépend pas du localiseur W . Donnons quelques précisions à ce sujet. On a un morphisme d'adjonction dans V^\wedge

$$f^* f_!(F) \longleftarrow F,$$

d'où

$$(*) \quad V/F \longrightarrow V/f^* f_!(F) \simeq V \times_{V'} (V'/f_!(F)),$$

le dernier isomorphisme provenant du fait que l'on a commutativité, à isomorphisme canonique près, dans le diagramme de foncteurs

$$\begin{array}{ccc} V'^\wedge & \xrightarrow{f^*=(F' \mapsto F' \circ f)} & V^\wedge \\ \downarrow F' \mapsto V'/F' & & \downarrow F \mapsto F/V \\ \text{Cat}/V' & \xrightarrow{f_{\text{Cat}}^*=(W' \mapsto W' \times_{V'} V)} & \text{Cat}/V, \end{array}$$

[page 90]

en d'autres termes, l'opérateur f^* sur les préfaisceaux s'interprète, en termes géométriques, comme l'opération $W' \mapsto W' \times_{V'} V$ de changement de base par $V \rightarrow V'$, sur les catégories au dessus de V' qui sont fibrées à fibres discrètes (propriété qui se conserve par changement de base).

Ceci dit, la donnée d'une flèche $(*)$ équivaut, par la propriété universelle du changement de base, à celle d'une flèche (canonique en l'occurrence)

$$f/F : V/F \longrightarrow V'/f_!(F)$$

rendant commutatif le carré

$$(*) \quad \begin{array}{ccc} V/F & \xrightarrow{\substack{\text{oubli de } F \\ \text{ou foncteur} \\ \text{source}}} & V \\ f/F \downarrow & & \downarrow f \\ V'/(F' = f_!(F)) & \xrightarrow{\text{oubli de } F'} & V'. \end{array}$$

Dans le cas qui nous intéresse surtout ici, $F = e_V$, $V/F \rightarrow V$ est un isomorphisme, et on obtient une factorisation canonique de foncteurs

[page 91]

$$(**) \quad \begin{array}{ccc} & & V \\ & \tilde{f} = f/e_V \swarrow & \downarrow f \\ & \pi_0(V/V') & \\ & = V'/f_!(e_V) & \\ & \swarrow \text{can.} & \downarrow \\ & & V'. \end{array}$$

Explicitons le V' -morphisme \tilde{f} sur les fibres,

$$(***) \quad \tilde{f}_{v'} : V_{v'} \longrightarrow \pi_0(V/V')_{v'} \stackrel{\text{déf}}{=} \pi_0(v' \setminus V),$$

où dans le dernier membre, on a identifié l'ensemble $\pi_0(v' \setminus V)$ à la catégorie discrète qu'il définit. Pour expliciter cette flèche $(***)$, notons qu'on a une inclusion canonique

$$V_{v'} \longrightarrow v' \setminus V$$

et pour toute catégorie W , un morphisme canonique (d'adjonction) $W \rightarrow \pi_0(W)$, d'où un composé

$$V_{v'} \longrightarrow v' \setminus V \longrightarrow \pi_0(v' \setminus V),$$

qui n'est autre que $\tilde{f}_{v'}$ dans $(***)$.

Il doit être facile de montrer que la factorisation $(**)$ de f est caractérisée, à isomorphisme unique près, en tant que

[page 92]

factorisation dans Cat/V'

$$\begin{array}{ccc} & \tilde{V} & \\ \tilde{f} \nearrow & & \searrow \pi \\ V & \xrightarrow{f} & V', \end{array}$$

par les propriétés suivantes :

- a) π est fibrée à fibres discrètes, i.e. un isomorphisme local (i.e. \tilde{V} est isomorphe dans Cat/V' à une catégorie V/F' , avec F' dans V'^{\wedge}).
- b) $f_!(e_V) = e_{\tilde{V}}$, i.e. pour tout $\tilde{v} \in \text{Ob } \tilde{V}$, la catégorie $\tilde{v} \setminus V$ est 0-connexe : les colocalisés de V au dessus de \tilde{V} sont 0-connexes.

Notons ici, en passant, que pour *tout* morphisme $\pi : W' \rightarrow W$ dans Cat qui soit fibré à fibres discrètes, i.e. tel que W' soit isomorphe dans Cat/W à une catégorie de la forme W/F ($F \in \text{Ob } W^{\wedge}$), on a

$$(*) \quad \pi_!(e_{W'}) = F, \quad \text{i.e. } W' \underset{\text{dans } \text{Cat}/W}{\simeq} W/\pi_!(e_{W'}).$$

Il faut vérifier que le foncteur

$$w \mapsto \pi_0 \underbrace{(w \setminus (W/F))}_{\stackrel{\text{déf}}{=} w \setminus W/F}$$

est canoniquement isomorphe à F . Mais l'inclusion

$$\underbrace{W'_w}_{= F(w) \text{ (catégorie discrète)}} \longrightarrow w \setminus W'$$

[page 93]

définit bien comme tantôt

$$F(w) = W'_w \longrightarrow \pi_0(w \setminus W'),$$

il faut prouver que c'est bijectif. Or, W' étant W_{∞} -lisse sur W , on sait que l'inclusion $W'_w \hookrightarrow w \setminus W'$ est dans W_{∞} , a fortiori induit un isomorphisme pour les π_0 .

Ceci posé, si on a une factorisation de $f : V \rightarrow V'$ en $f = \pi \tilde{f}$ ayant les propriétés a) b) de la page précédente, on voit déjà que l'on a

$$f_!(e_V) \simeq \pi_!(\underbrace{f_!(e_V)}_{\simeq e_{\tilde{V}} \text{ par b}}) \simeq \pi_!(e_{\tilde{V}}),$$

ce qui déjà détermine \tilde{V} à isomorphisme canonique près (grâce à a) comme

$$\tilde{V} \simeq V'/f_!(e_V) \stackrel{\text{déf}}{=} \pi_0(V'/V),$$

et il ne doit pas être bien dur de se convaincre que \tilde{f} n'est autre que la flèche canonique de la page 91.

Proposition 8. *Pour qu'un objet H de U^\wedge soit totalement W -sphérique, il suffit que l'objet U/H de Cat soit totalement W -sphérique.*

[page 94]

Supposons en effet cette dernière condition satisfaite et prouvons que H est totalement W -sphérique, i.e. que pour tout $p : U \rightarrow U'$, $U'/p_!(H)$ soit W -sphérique.

$$\begin{array}{ccc} V \stackrel{\text{déf}}{=} U/H & \xrightarrow{\alpha} & U \\ & \searrow f & \downarrow p \\ & & U' \end{array}$$

Soit f le foncteur composé du diagramme ci-contre [ci-dessus], on a $H \simeq \alpha_!(e_V)$ (par (*) p. 92), d'où

$$p_!(H) \simeq p_!\alpha_!(e_V) \simeq (p\alpha)_!(e_V) \simeq f_!(e_V),$$

qui est W -sphérique par hypothèse sur $V = U/H$.

La réciproque de [1a] prop. 8 est-elle valable, i.e. si H est totalement W -sphérique, en est-il de même de $V = U/H$? La difficulté provient du fait que cela signifie que pour toute flèche $f : V \rightarrow V'$ dans Cat de source V , on ait $f_!(e_V)$ W -sphérique, alors que l'hypothèse équivaut à le postuler seulement pour les flèches qui se factorisent par U . Notons que si on ne fait pas cette hypothèse sur f , mais qu'on suppose au lieu de cela que f s'insère dans un carré commutatif

[page 95]

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\alpha} & U \\ f \downarrow & & \downarrow p \\ V' & \xrightarrow{\alpha'} & U', \end{array}$$

avec α' lui aussi un isomorphisme local, alors on peut conclure que $\pi_0(f) = \pi_0(V/V')$ est bien sphérique. En effet, on a un isomorphisme canonique dans Cat/U' ,

$$\pi_0(\alpha'f) \simeq \pi_0(f), \quad \text{i.e. } \pi_0(V/V') \simeq \pi_0(V/U'),$$

du fait p. ex. que la factorisation canonique de f

$$\begin{array}{ccc}
 & V & \\
 \tilde{f} \swarrow & \downarrow f & \\
 \pi_0(V/V') & & V' \\
 \pi \searrow & & \alpha' \searrow \\
 & & U'
 \end{array}$$

fournit une factorisation du même type pour $\alpha'f$, en

$$\alpha'f = (\alpha'\pi) \circ \tilde{f}.$$

Ceci dit, on peut appliquer l'hypothèse à p et on trouve bien la W -asphéricité de $\pi_0(f) \simeq \pi_0(\alpha'f) = \pi_0(p\alpha)$.

[page 96]

L'idée naturelle, pour une réciproque à [1a] prop. 8, serait de prendre pour U' la somme amalgamée de U et V' sur V , ce qui marchera pourvu qu'on sache que α' est bel et bien un isomorphisme local tout comme α . C'est bien le cas p. ex. si $V \rightarrow U$ est une immersion ouverte, i.e. H un sous-préfaisceau du préfaisceau final. Mais je crains que ce ne soit pas vrai en général - ça a l'air un peu trop beau pour être vrai! C'est en effet déjà faux dans le cas

$$\begin{array}{ccc}
 V = E_G & \xrightarrow{\alpha \text{ can}} & B_G = U \\
 f \downarrow & & \\
 V' = B_{G'} & &
 \end{array}$$

dans le cas p. ex. où $G = \{\pm 1\}$, groupe à deux éléments, et où l'élément α de G' , image par f de l'une des deux flèches non identiques de E_G est $\neq 1$ [plutôt de carré $\neq 1$]. Si H' est le sous-groupe invariant engendré par α [plutôt par α^2] dans G' , la somme amalgamée s'identifie à $B_{G'/H'}$, or $B_{G'} \rightarrow B_{G'/H'}$ n'est pas un isomorphisme local (car $(B_{G'})/t_0 \rightarrow (B_{G'/H'})/t'_0$ n'est pas bijectif sur les objets, s'identifiant à $G' \xrightarrow{q} G'/H' \dots$).

Mais d'autre part la condition de totale W -asphéricité sur un objet H de U^\wedge paraît déjà à tel point exigeante, que je me vois mal con-

[page 97]

struire un exemple où elle est satisfaite, sans que U/H elle-même ne soit totalement W -asphérique.

L'existence d'objets totalement W -asphériques dans Cat n'est pas tellement évidente a priori. Qu'il y en ait un bon paquet est assuré par la

Proposition 9.

- a) *Tout objet V de Cat ayant un objet final est totalement W -asphérique - donc tout préfaisceau d'ensembles H représentable sur une catégorie U (la représentabilité signifiant justement que U/H a un objet final) est totalement W -asphérique.*
- b) ⁽⁶⁶⁾ *(Supposons W(7 bis) satisfait.) Soient V dans Cat , V', V'' deux ouverts de réunion V . Si $V', V'', V' \cap V''$ sont totalement W -asphériques, il en est de même de V .*

DÉMONSTRATION de a). Soit V avec objet final et $f : V \rightarrow V'$, d'où la factorisation

$$\begin{array}{ccc}
 & \tilde{V} = \pi_0(V/V') & \\
 \tilde{f} \nearrow & & \searrow \pi \\
 V & \xrightarrow{f} & V'
 \end{array}$$

de f . On démontre sans mal ⁽⁶⁷⁾ (histoire de cofinalité) ceci :

Corollaire. *L'image par \tilde{f} d'un objet final de V est un objet final de $\tilde{V} = \pi_0(V/V')$.*

Comme un objet de Cat avec objet final est W -asphérique par W(3), cela établit a).

Prouvons b). J'ai envie de dire que si on a $f : V \rightarrow W$ dans Cat , alors $\pi_0(V/W)$ est réunion de deux ouverts isomorphes à $\pi_0(V'/W)$, $\pi_0(V''/W)$, dont l'intersection est isomorphe à $\pi_0(V' \cap V''/W)$. Cela signifierait ni plus ni

[page 98]

moins que ceci : $f_!$ transforme les monomorphismes $V' \rightarrow V$, $V'' \rightarrow V$ (interprétés comme flèches dans V^\wedge , de but e_V) en monomorphismes, et le produit fibré $V' \cap V'' = V' \times_V V''$ en le produit fibré correspondant dans W^\wedge . Mais le foncteur $f_!$ commute aux \varinjlim quelconques (étant un adjoint à gauche), et je ne vois aucune raison a priori pour qu'il commute (disons) aux produits fibrés (ce qui impliquerait aussi qu'il transforme monomorphismes en itou). Si je me rappelle bien, c'est ultrafaux en général. Donc je doute fort à présent que l'énoncé b) soit vrai, sans hypothèse supplémentaire. Pour assurer la monomorphie, on songe à imposer l'existence de *rétractions* de V sur V', V'' et de V' ou V'' sur $V' \cap V''$.

Je viens de vérifier la chose, et donne le

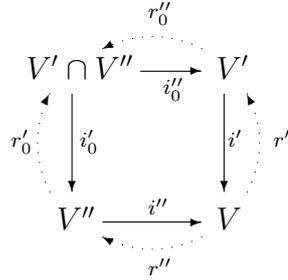
⁶⁶!! Sans doute *faux* tel quel, cf. rectification page suivante.

⁶⁷Voici une démonstration simple : On a pour toute V dans Cat $e_V = \varinjlim_{v \text{ dans } V} v$ (limite inductive du foncteur d'inclusion de V dans V^\wedge), car $\forall x$ dans V

$$\varinjlim_{v \text{ dans } V} \text{Hom}(x, v) \simeq \pi_0(x \setminus V) = e.$$

Comme $f_!$ commute aux \varinjlim , on a donc $f_!(e_V) = \varinjlim_{v \text{ dans } V} f(v)$. Si v_0 est un objet final de V , cela montre que $f_!(e_V) = f(v_0)$, q.e.d.

Corollaire 1 (rectification de [1a] prop. 9, partie b) ⁽⁶⁸⁾ : *L'énoncé est valable si on suppose qu'il existe une rétraction r'_0 de V'' sur $V' \cap V''$, et de même une rétraction r''_0 de V' sur $V' \cap V''$.* ⁽⁶⁹⁾

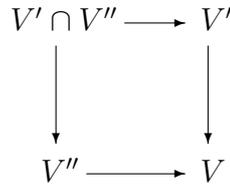


(NB Nous verrons plus tard qu'il suffit de l'existence d'une de ces retractions pour assurer la conclusion.)

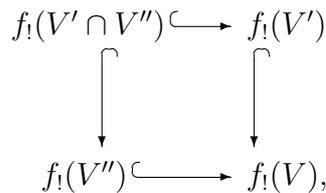
DÉMONSTRATION. Comme V est somme amalgamée de V' et V'' , il existe une rétraction r' de V sur V' (donnée par $\text{id}_{V'}$ sur V' , par $i''_0 r'_0$ sur V'') qui induit r'_0 sur V'' , et de même il existe

[page 99]

une rétraction r'' de V sur V'' , induisant r''_0 sur V' . L'existence de ces retractions assure déjà que pour tout foncteur $f : V \rightarrow W$, le diagramme transformé de



(interprété comme diagramme dans V^\wedge) est formé de monomorphismes ⁽⁷⁰⁾



et de plus que $f_!(V') \cap f_!(V'')$ (qui contient $f_!(V' \cap V'')$) lui est en fait *égal*. Il en résulte que l'on a un diagramme à la fois cartésien et cocartésien d'immersions ouvertes dans Cat

⁶⁸NB Il y a un énoncé légèrement plus général, en partant d'une catégorie U et d'un diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 V' \cap V'' & \longrightarrow & V' \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 V'' & \longrightarrow & V
 \end{array}$$

dans U^\wedge : si $V', V'', V' \cap V''$ sont totalement W -asphériques, il en est de même de V .

⁶⁹Corollaire rectifié faux également - les retractions ne sont pas des flèches de V^\wedge , et ne passent dans \mathcal{P} .

⁷⁰**faux**, déjà dans le cas où $V = \Phi$, V', V'' ses deux ouverts canoniques isomorphes à Δ^1 , et $V' \cap V'' = e$.

$$\begin{array}{ccc} W/f_!(V' \cap V'') \hookrightarrow W/f_!(V') & & \\ \downarrow & & \downarrow \\ W/f_!(V'') \hookrightarrow W/(f_!(V) \stackrel{\text{déf}}{=} f_!(e_V)), & & \end{array}$$

lequel s'identifie aussi à

$$\begin{array}{ccc} \pi_0(V' \cap V''/W) \hookrightarrow \pi_0(V'/W) & & \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_0(V''/W) \hookrightarrow \pi_0(V/W). & & \end{array}$$

[page 100]

L'hypothèse sur V' , V'' , $V' \cap V''$ implique que les trois sommets du carré autres que $\pi_0(V/W)$ sont W -asphériques, donc par W(7 bis) il en est de même de ce dernier, q.e.d.

Corollaire 2 ⁽⁷¹⁾. Moyennant W(7 bis), la catégorie $\Psi = 0 \begin{array}{l} \nearrow a \\ \searrow b \end{array}$ (ou $0 \longleftarrow 1 \longrightarrow 2$) est totalement W -asphérique ⁽⁷²⁾.

On applique le corollaire 1 à Ψ et à ses deux sous-catégories ouvertes, Ψ/a , Ψ/b (isomorphes à Δ^1), et à leur intersection $\{0\} \simeq \Delta^0 = e$. Comme ces trois catégories ont un objet final (contrairement à Ψ elle-même, qui n'a qu'un objet initial ...), elles sont totalement W -asphériques. Le corollaire s'applique, l'existence des rétractions r'_0, r''_0 étant ici évidente.

C'est surtout la partie b) (rectifiée) de la page 9 qui assure l'existence de catégories totalement W -asphériques autres que celles ayant un objet final ⁽⁷³⁾. Il est vrai qu'en sens inverse il faudrait quand même s'assurer qu'un objet X W -asphérique de Cat n'est pas *toujours* totalement W -asphérique! Le contre-exemple n'est pas tellement évident finalement -

[page 101]

j'ai passé des heures avant d'en trouver un et d'y voir un peu clair! Il suffit en somme d'exhiber un exemple d'une flèche dans Cat

$$f : X \longrightarrow Y$$

telle que

⁷¹Plus généralement, si I est une catégorie *ordonnée finie*, ayant un objet initial, alors

⁷²**Faux**, Ψ n'est *pas* totalement W -asphérique.

⁷³Je conjecture à présent que ce sont les seules! ⁽⁷⁴⁾

⁷⁴Faux, il y a les catégories filtrantes (si W satisfait l'axiome des limites).

a) $\pi_0(f) \stackrel{\text{déf}}{=} \pi_0(X/Y) \xrightarrow{\sim} Y$, i.e. les $\pi_0(y \setminus X)$ [plutôt les $y \setminus X$] sont 0-connexes (pour $y \in \text{Ob } Y$),

et telle que de plus

b) X est W -sphérique, et Y non.

La difficulté est la suivante, quand on cherche des contre-exemples ‘idiots’ : c’est que l’hypothèse a) implique déjà, quand X est W_∞ -sphérique (ou seulement 1-connexe) que Y est 1-connexe : le foncteur

$$Y' \mapsto X' = X \times_Y Y'$$

de la catégorie des revêtements étales Y' de Y vers celle des revêtements étales X' de X est pleinement fidèle (vérification immédiate), d’où le résultat annoncé. Donc un contre-exemple doit faire appel à l’existence d’un $\pi_i(Y, y)$ non nul, avec $i \geq 2$. Cela implique

[page 102]

qu’il n’y a pas de contre-exemple avec des catégories de la forme $Y = Z/F$ (déduites d’un foncteur $q : X \rightarrow Z$ en prenant $F = q_!(e_X) = \pi_0(X/Z)$), où Z est une catégorie telle que Δ^1 (?), Φ , Ψ , ou  (ayant le type d’homotopie du cercle) etc., car les composantes

connexes de telles catégories Y sont des $K(\pi, 1)$ - les π_i supérieures ($i \geq 2$) sont nuls.

Cette difficulté vue, le contre-exemple devient évident. Je pars d’un objet 1-connexe *quelconque* Y de X [plutôt de Cat], et je prends $y_0 \in \text{Ob } Y$,

$$X = \underline{\text{Ch}}(Y; y_0, -) \xrightarrow{f} Y.$$

On sait que X est W_∞ -sphérique, et que f est W_∞ -parfait, donc les inclusions

$$X_y \rightarrow y \setminus X$$

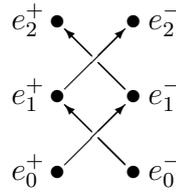
sont des W_∞ -équivalences. L’hypothèse a) que les $y \setminus X$ soient 0-connexes équivaut donc à la même hypothèse sur les fibres X_y , ou

[page 103]

encore sur une seule fibre (f étant parfait, donc une W_∞ -fibration, et Y 0-connexe), soit

$$X_{y_0} \simeq \Omega(Y, y_0).$$

Sa 0-connexité équivaut à l’hypothèse de 1-connexité de Y (on n’a utilisé encore que celle de 0-connexité). Donc pour un contre-exemple, il suffit de prendre Y 1-connexe et non ∞ -connexe. Le cas le plus simple est celui où Y a le type d’homotopie de la sphère S^2 , réalisé p. ex. par la catégorie ordonnée ci-contre [ci-dessous] à 6 sommets.



[de plus, $e_0^+ \leq e_1^+ \leq e_2^+$, $e_0^- \leq e_1^- \leq e_2^-$] (⁷⁵). Je résume le résultat obtenu.

Proposition 10. *Soit Y une petite catégorie 1-connexe ($y_0 \in \text{Ob } Y$). Alors $\underline{\text{Ch}}(Y; y_0, -)$ est W_∞ -asphérique, mais n'est pas totalement W_∞ -asphérique si Y elle-même n'est ∞ -connexe, i.e. W_∞ -asphérique. (⁷⁶).*

On peut se demander si Y W_∞ -asphérique implique que $\underline{\text{Ch}}(Y; y_0, -)$ est totalement W_∞ -asphérique. J'en doute fort!

[page 104]

Revenons maintenant à la situation du début de la section, diagramme (*), p. 87,

$$(*) \quad \begin{array}{ccccc} U & \xrightarrow{i} & X & \xleftarrow{j} & T = \{t\} \\ p \downarrow & & q \downarrow & & \downarrow \text{iso} \\ U' & \xrightarrow{i'} & X' & \xleftarrow{j'} & T' = \{t'\}. \end{array}$$

Nous pouvons donner maintenant un exemple où i est dans W (et même W -asphérique) sans que i' le soit :

$$(**) \quad i \in W, \quad i' \notin W.$$

On peut même supposer que t soit objet final de X (ce qui signifie que l'objet H de U^\wedge est isomorphe à e_U , l'objet final), et t' objet final de X' (i.e. $p_!(e_U) = e_{U'}$, i.e. les $u' \setminus U$ sont 0-asphériques). Dans ce cas, comme X, X' sont W -asphériques, les relations (**) équivalent à

$$(***) \quad U \text{ est } W\text{-asphérique, et } U' \text{ non,}$$

ce qui est justement la situation que nous venons de construire (p. 101-103).

On aimerait aussi trouver un exemple où dans (*) on ait $p \in W, q \notin W$.

⁷⁵C'est en somme cet exemple (à homotopie topologique près) que je réalise (sans d'abord m'en apercevoir dans l'Appendice p. 10-12, mais avec des catégories finies).

⁷⁶Mais un exemple plus percutant est $\Psi = a \begin{array}{l} \nearrow b \\ \searrow c \end{array}$, qui est W_∞ -asphérique, mais pas totalement!

[page 105]

Je prendrai encore $(X, U, \{t\})$ tel que t soit objet final de X , mais si on veut $q \notin W$, on ne peut supposer t' élément final de X' . Au lieu de cela, je vais supposer

- a) U, U' (et aussi X , ayant objet final t) W -asphériques, donc $i \in W$ (et même i W -asphérique), $p \in W$, mais
- b) X' non W -asphérique, donc $i', q \notin W$.

Pour ceci, notons que

$$U'/t' \simeq U'/p!(e_U) \stackrel{\text{déf}}{=} \pi_0(U/U').$$

Le corollaire de la proposition 7 (cf. p. 85), non encore démontré, nous dit que $i' \in W$ (i.e. ici, X' W -asphérique) si et seulement si i' est W -asphérique, i.e. U'/t' est W -asphérique. Nous allons l'admettre ici. Tout revient donc à trouver une flèche

$$p : U \longrightarrow U'$$

dans Cat avec les propriétés suivantes.

- a) U et U' sont W -asphériques,
- b) $\pi_0(U/U')$ n'est pas W -asphérique.

Nous allons reprendre l'exemple précédent

$$f : X \longrightarrow Y$$

(p. 101-103), en prenant

$$U = X, \quad \pi_0(U/U') = Y,$$

[page 106]

donc tout revient, à partir de l'exemple donné $X \xrightarrow{f} Y$, à construire une flèche

$$(*) \quad \pi : Y \longrightarrow U'$$

dans Cat qui satisfasse les conditions

- a) π est un isomorphisme local,
- b) U' est W -asphérique.

On prendra alors

$$p = \pi f.$$

Mais par la façon dont X a été construit à partir d'un Y 1-connexé et non ∞ -connexé, par ailleurs quelconque, on est ramené finalement à trouver $(*)$ satisfaisant a), b), et de plus

c) Y est 1-connexe, mais non ∞ -connexe.

(NB On suppose maintenant $W = W_\infty$.) Il revient au même de trouver

| U' objet *asphérique* de Cat , $F \in \text{Ob } U'^{\wedge}$ tels que U'/F soit 1-connexe et non ∞ -connexe.

On songe par exemple à prendre simplement une sous-catégorie ouverte U'_0 de U' , qui soit 1-connexe et non ∞ -connexe. Partons d'une telle catégorie U'_0 - par exemple une réalisation homotopique dans Cat , de la sphère S^2 . On l'immerge comme ouvert dans un U' asphérique, en lui ajoutant un objet final. On a gagné.

[page 107]

Faisons un énoncé en forme.

Proposition 11. *On peut trouver une situation (*) (p. 124 [plutôt 104]) avec*

- a) t objet final de X .
- b) U, U' (et X) W_∞ -asphériques, donc $i, p \in W_\infty$ (et même i W_∞ -asphérique).
- c) X' non W_∞ -asphérique, donc $i', q \notin W_\infty$.

Il suffit pour cela de partir d'un objet 1-connexe Y de Cat , de lui adjoindre un objet final u'_0 , ce qui donne U' , de prendre $U = \text{Ch}(Y; y_0, -)$, $p : U \rightarrow U'$ le composé $U \xrightarrow{\text{but}} Y \xrightarrow[\text{can.}]{\text{incl.}} U'$, et X déduit de U en lui ajoutant un objet final t . On a alors $U'/t' \simeq Y$, d'où

$$X' \text{ } W_\infty\text{-asphérique (i.e. } i' \in W_\infty) \iff Y \text{ } W_\infty\text{-asphérique.}$$

On a le contre-exemple cherché en prenant Y (1-connexe mais) non ∞ -connexe.

2.4 Application aux immersions ouvertes dwyériennes.

Donnons quand même l'énoncé *positif* auquel nous en avons.

Théorème 3. *Soient (X, U, T) un triple $\in \mathcal{T}$ (U ouvert de X dans Cat , $T = X \setminus U$), et pour toute flèche $p : U \rightarrow U'$ flèche de Cat , le carré cocartésien dans Cat*

$$\begin{array}{ccccc} U & \xrightarrow{i} & X & \dashleftarrow{\quad} & T \\ p \downarrow & & q \downarrow & & \downarrow \text{iso} \\ U' & \xrightarrow{i'} & X' & \dashleftarrow{\quad} & T' \end{array}$$

[page 108]

Supposons que pour tout $t \in \dot{T} = \dot{U}$, le préfaisceau d'ensembles

$$i^*(t) = (u \mapsto \text{Hom}(u, t)) \in U^\wedge$$

soit totalement W -asphérique (déf. 1, p. 88) ⁽⁷⁷⁾ - p. ex. que la catégorie U/t soit totalement W -asphérique (prop. 8, page 93). (NB le cas où les U/t ont un objet final, cf. prop. 9 a), i.e. celui où l'inclusion $U \rightarrow \bar{U}$ admet un adjoint à droite, est celui envisagé par Dwyer, celui des immersions ouvertes de Dwyer ⁽⁷⁸⁾.) Alors pour toute $p : U \rightarrow U'$, l'immersion ouverte

$$i'_0 : U' \rightarrow \bar{U}'$$

est W -asphérique (et même, tout comme i_0 , strictement W -asphérique), et a fortiori elle est [dans] W . Par suite (prop. 6 [p. 81]) on a ceci.

- (a) $i \in W \iff i' \in W$ moyennant W(7 bis).
 (b) $p \in W \iff q \in W$ moyennant W(7). ⁽⁷⁹⁾

Corollaire 1. Supposons W(7). Si $i : U \hookrightarrow X$ est une immersion ouverte telle que $i_0 : U \hookrightarrow \bar{U}$ soit totalement [il suffit strictement] W -asphérique, alors $i : U \rightarrow X$ est une W -cofibration ('ultraforte'), par quoi j'entends ceci : pour toute flèche $U' \xrightarrow{f} U''$ dans $U \setminus \text{Cat}$,

[page 109]

telle que $f \in W$, la flèche $g : X' \rightarrow X''$ qui s'en déduit par cochangement de base à partir de l'objet X de $U \setminus \text{Cat}$, est aussi dans W .

DÉMONSTRATION DU COROLLAIRE : on applique le théorème 3 à l'immersion ouverte $U' \xrightarrow{i'} X'$ déduite de $U \xrightarrow{i} X$ par le cochangement de base $U \xrightarrow{f} U'$, en notant de plus que l'hypothèse du théorème 3 sur i est préservée en passant de i à i' .

Il faut quand même introduire une terminologie adéquate :

Définition 2 :

- a) Une flèche $f : X \rightarrow Y$ est dite *strictement W -asphérique* si pour toute $y \in \text{Ob } Y$, $f^*(y) = (x \mapsto \text{Hom}_Y(f(x), y))$ est un objet totalement W -asphérique de X^\wedge (cf. déf. 1, page 88). Elle est dite *totalement W -asphérique* si pour tout $y \in \text{Ob } Y$, X/y ($\simeq X/f^*(y)$) est un objet totalement W -asphérique de Cat .

⁷⁷NB On dit sous ces conditions que $i_0 : U \rightarrow \bar{U}$ est *strictement W -asphérique* (cf. déf. 2 page suivante).

⁷⁸Je ne connais pas d'autre cas où th. 3 s'applique - faute de connaître de catégorie totalement W -asphérique qui n'ait un objet final, ni d'objet F d'une catégorie U^\wedge qui soit totalement W -asphérique sans être représentable, i.e. U/F a un objet final. À présent, je sais que les catégories *filtrantes* sont totalement W -asphériques si W satisfait l'axiome des limites inductives.

⁷⁹Démonstration page 112.

b) Une immersion ouverte $i : U \rightarrow X$ est dite *W-dwyérienne* (resp. *totalelement [W-] dwyérienne*) si l'immersion induite $i_0 : U \rightarrow \bar{U}$ est strictement (resp. totalelement) *W*-asphérique. Une immersion fermée $j : T \rightarrow X$ est dite *W-dwyérienne* (resp. *totalelement W-dwyérienne*) si et seulement si $j^\circ : T^\circ \rightarrow X^\circ$ est une immersion ouverte *W*-dwyérienne (resp totalement *W*-dwyérienne).

c) Une flèche $i : U \rightarrow X$ de Cat (pas nécessairement une immersion)

[page 110]

est appelée une *W-cofibration*, si pour toute flèche $f : U' \rightarrow U''$ dans $U \setminus \text{Cat}$, la flèche $g : X' \rightarrow X''$ qui s'en déduit par le cochage de base par X (objet de $U \setminus \text{Cat}$) est dans W quand f l'est.

NB Cette notion de *W-cofibration* est stable par composition et par cochage de base, et les isomorphismes de Cat sont des *W-cofibrations*. Si f est une *W-cofibration*, f° l'est et inversement.

(Le corollaire s'énonce en disant qu'une immersion ouverte ou fermée qui est *W-dwyérienne* est une *W-cofibration*.)

d) Une flèche $i : U \rightarrow X$ dans Cat est appelée une *W-cofibration triviale*, ou une *W-équivalence couniverselle*, si pour toute U' dans $U \setminus \text{Cat}$, i.e. toute flèche $p : U \rightarrow U'$ dans Cat , la flèche déduite de i ,

$$i' : U' \rightarrow X' = U' \amalg_U X' \quad [\text{plutôt } U' \amalg_U X] ,$$

est dans W . (NB Il est immédiat que cela implique bien que i est une *W-cofibration*.)

(Cette notion de *W-cofibration triviale* est elle aussi stable par composition et par cochage de base, et les isomorphismes dans Cat en sont.)

[page 111]

Corollaire 2. (Moyennant $W(7)$.) *Soit $i : U \rightarrow X$ une immersion ouverte W-dwyérienne. Pour que i soit une W-cofibration triviale, il faut et il suffit que $i \in W$, ou ce qui revient au même (cf. page 82), que $\dot{T} \hookrightarrow T$ soit dans W .*

C'est évidemment nécessaire, et la suffisance résulte du théorème 3 a).

Questions ouvertes.

a) J'ignore si une immersion ouverte i qui est une *W-cofibration*, voire une *W-cofibration triviale*, est forcément *W-dwyérienne* ⁽⁸⁰⁾. Mais par le corollaire de la proposition 7 (p. 85), je sais que c'est le cas si on suppose T isomorphe à la catégorie finale e . Il s'ensuit toute au moins ceci : Pour que non seulement $i : U \rightarrow X$, mais aussi toutes les immersions ouvertes $i_1 : U \rightarrow X_1$ qui s'en déduisent par le procédé de prop. 7 b) au moyen de flèches quelconques $T_1 \rightarrow T$ de but T dans Cat , soient des *W-cofibrations*, il faut et il suffit que i soit *dwyérienne*.

⁸⁰et peut-être même une immersion de Dwyer?

b) Y-a-t-il une bonne notion d'immersion dwyérienne, applicable à toutes les immersions

[page 112]

et incluant le cas des immersions ouvertes et des immersions fermées?

DÉMONSTRATION du théorème 3 (p. 107). Il suffit de prouver que si i est W -dwyérienne (i.e. i_0 strictement W -asphérique). alors i' l'est également - car il en résultera que i' est W -asphérique et a fortiori $\in W$. Il faut donc vérifier que pour tout $t' \in \dot{U}' = \dot{T}$, l'élément $i^*(t') = (u' \mapsto \text{Hom}_{X'}(u', t'))$ de U'^{\wedge} est totalement W -asphérique. Or t' provient d'un unique élément t de \dot{T} , et on sait qu'on a

$$i'^*(t) = p_!(i^*(t)) \quad [\text{plutôt } i'^*(t) = p_!(i^*(t))], \quad \text{où } p_! : U^{\wedge} \longrightarrow U'^{\wedge}.$$

Par hypothèse, $F = i^*(t)$ est un élément totalement W -asphérique de U^{\wedge} , ce qui signifie que pour toute flèche $p : U \longrightarrow U'$ dans Cat de souce U , $p_!(F)$ est un élément W -asphérique de U' . En fait, on a le lemme immédiat (par transitivité $(p'p)_! \simeq p'_!(p_!)$).

Lemme. Soit U dans Cat , et F dans U^{\wedge} . Si F est totalement W -asphérique (resp. si U/F est totalement W -asphérique), alors pour toute flèche $p : U \longrightarrow U'$ dans Cat de source U , $F' = p_!(F)$ est un objet totalement W -asphérique de U'^{\wedge} (resp.

[page 113]

U'/F' est un objet totalement W -asphérique de Cat .)

Corollaire 3 (du théorème 3). Si $i : U \longrightarrow X$ est une immersion ouverte ou fermée W -dwyérienne (resp. totalement W -dwyérienne), alors pour toute flèche $p : U \longrightarrow U'$ dans Cat , $i' : U' \longrightarrow X' = U' \sqcup_U X'$ [plutôt $U' \sqcup_U X$] l'est aussi.

(NB Le cas non respé est essentiellement le théorème 3. Il ne dépend d'aucun axiome supplémentaire sur W , mais n'a d'intérêt qu'en vue des équivalences (a) et (b) (p. 108) qui en résultent, et qui sont valables moyennant W(7 bis) resp. W(7) seulement.)

Commentaire de motivation : les immersions ouvertes ou fermées W -dwyériennes, ou totalement W -dwyériennes, sont stables par cochangement de base (d'après le corollaire précédent), mais n'ont pas du tout l'air de l'être par composition. À cet égard, les 'immersions de Dwyer' (où on suppose l'existence de l'adjoint à droite de $i_0 : U \longrightarrow \bar{U}$, dans le cas d'une immersion ouverte) se comportent mieux, étant stables par composition. (NB Il ne semble pas

[page 114]

non plus clair que les flèches strictement W -asphériques, ou les totalement W -asphériques, soient stables par composition - sorry!) Ma motivation pour m'échiner sur la notion W -dwyérienne est double.

a) J'aimerais avoir des conditions à la fois compréhensibles, et aussi générales que possible, sur une immersion (ouverte p. ex), pour que ce soit une W -cofibration, propriété visiblement importante (toute comme la notion duale de W -fibration).

b) J'ai envie, pour des applications ultérieures, de disposer d'une classe d'immersions ouvertes ayant les propriétés suivantes :

1°) Ce sont des W -cofibrations, et

2°) Si $U \xrightarrow{i} X$ est dans la classe, et si $\varepsilon \xrightarrow{j} I$ est l'inclusion 'source-but' de la catégorie discrète $\{0, 1\}$ dans l'intervalle

$$\Phi_n = 0 \longrightarrow 1 \longleftarrow 2 \longrightarrow \dots 2n - 1 \longleftarrow 2n$$

($j(0) = 0, j(1) = 2n$), $n \geq 2$, l'inclusion α de $(U \times I) \cup (X \times \varepsilon)$ dans $X \times I$ est dans la classe.

Or cette dernière propriété de stabilité n'est *pas* vérifiée par les immersions de Dwyer. (Prendre $i : \{0\} \longrightarrow \Delta^1 = \{0, 1\}$, l'inclusion α n'est pas immersion de Dwyer.)

[page 115]

2.5 Complément : critère d'asphéricité totale d'une catégorie W -propre sur une autre.

Soit

$$f : X \longrightarrow I$$

une catégorie propre sur une catégorie d'indices I . Si I a un objet final i_0 , alors X/i_0 s'identifie à X , et par suite l'inclusion

$$X_{i_0} \longrightarrow X$$

de la fibre de X en i_0 est W -asphérique [plutôt W -coasphérique], et a fortiori est dans W . Donc X est asphérique si et seulement si X_{i_0} l'est. Nous voulons étendre ce résultat en un critère de *totale* W -asphéricité, de façon précise prouver la

Proposition 11 : *Soit $f : X \longrightarrow I$ W -propre, et soit i_0 un objet final de I . Si X_{i_0} est totalement W -asphérique (déf. 1, page 88), il en est de même de X . (Sous réserve que W satisfasse l'axiome de connexité W(5).)*

La démonstration sera donnée plus bas, après quelques préliminaires ayant un intérêt indépendant. Tout d'abord, rappelons que si X est W -propre sur I , alors il donne naissance à un foncteur

$$\begin{aligned} I &\longrightarrow \text{Hot}_W \\ i &\longmapsto \text{hot}_W(X_i) (\simeq \text{hot}_W(X/i)); \end{aligned}$$

en le composant avec le foncteur

$$\pi_0 : \text{Hot}_W \longrightarrow \text{Ens}$$

(sous réserve que l'axiome de connexité W(5) (p. 10) soit satisfait)

[page 116]

on trouve un foncteur

$$i \mapsto \underbrace{\pi_0(X_i)}_{\simeq \pi_0(X/i)} : I \longrightarrow \text{Ens.}$$

Ceci posé, on a le résultat sorital

Proposition 12 : *Soit $f : X \rightarrow I$ W -propre, et supposons que W satisfasse l'axiome de connexité $W(5)$ (sinon, la W -propreté ne nous sera d'aucune utilité ...) ⁽⁸¹⁾. On a alors une bijection canonique*

$$(*) \quad \pi_0(X) \xleftarrow{\sim} \varinjlim_I \pi_0(X_i),$$

où la flèche est induite par les applications canoniques $\pi_0(X_i) \rightarrow \pi_0(X)$.

DÉMONSTRATION. Passant à $f^\circ : X^\circ \rightarrow I^\circ$, on est ramené à prouver le même résultat pour X W -lisse sur I , avec la seule différence que le foncteur

$$i \mapsto \pi_0(X_i)$$

sur I sera contravariant, i.e. un préfaisceau, ce qui offre l'avantage de l'intuition attachée au formalisme des préfaisceaux. Soit

$$g : I \rightarrow e, \quad \text{d'où } gf = p : X \rightarrow e,$$

il est immédiat, par le calcul standard

$$p_!(F) = \pi_0(X/F) \quad (F \in \text{Ob } X^\wedge)$$

(où on a identifié e^\wedge à (Ens)), qu'on a

$$\pi_0(X) = p_!(e_X) = g_!(f_!(e_X)).$$

Or le préfaisceau

$$i \mapsto \pi_0(X_i) \quad (\simeq \pi_0(i \setminus X), \text{ car } X \text{ } W\text{-lisse sur } I)$$

[page 117]

n'est autre que $f_!(e_X)$. D'autre part, pour un préfaisceau quelconque G sur I , on a

$$g_!(G) \simeq \pi_0(I/G) \simeq \varinjlim_I G(i),$$

et appliquant ceci à $f_!(e_X)$, on trouve la formule (*) de la proposition 12.

Revenons à la situation avec f W -propre, et considérons un foncteur

$$p : X \rightarrow Y,$$

nous sommes intéressés à 'calculer'

$$p_!(e_X) = (y \mapsto \pi_0(y \setminus X)) \in \text{Ob } Y^\wedge.$$

Considérons pour ceci le diagramme suivant

⁸¹Il vaut mieux dire : Soit f W_0 -propre, où W_0 est le localiseur de la 0-connexité ...

$$\begin{array}{ccccc}
 y \backslash X_i & \longrightarrow & y \backslash X & \longrightarrow & y \backslash Y \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 X_i & \longrightarrow & X & \xrightarrow{p} & Y \\
 \downarrow & & \downarrow f & & \\
 \{i\} & \longrightarrow & I & , & \\
 \simeq e & & & &
 \end{array}$$

où les trois carrés sont cartésiens. Comme $y \backslash Y \rightarrow Y$ est W -propre, il en est de même de $y \backslash X \rightarrow X$ par changement de base, donc du composé $y \backslash X \rightarrow X \rightarrow I$ par transitivité. Le diagramme montre d'autre part que la fibre de $y \backslash X$ en $i \in \text{Ob } I$ s'identifie à $y \backslash X_i$.

[page 118]

La proposition 12 nous donne donc la formule

$$\pi_0(y \backslash X) = \varinjlim_I \pi_0(y \backslash X_i),$$

laquelle formule ne peut s'empêcher d'être fonctorielle en y , tout comme celle de prop. 12 l'est dans $\underline{\text{Prop}}_W I$. Or pour y variable dans Y , le préfaisceau sur Y

$$y \mapsto \pi_0(y \backslash X_i)$$

n'est autre que $p_{i!}(e_{X_i})$, où

$$p_i : X_i \rightarrow Y$$

est le composé $X_i \rightarrow X \xrightarrow{p} Y$ (induit par p). On a ainsi prouvé

Corollaire 1 (de prop. 12). *Soit $f : X \rightarrow I$ W -propre ⁽⁸²⁾, et $p : X \rightarrow Y$ un foncteur quelconque. Soit, pour tout $i \in \text{Ob } I$, $p_i : X_i \rightarrow Y$ le foncteur induit sur la fibre X_i de X en i . On a alors une loi fonctorielle naturelle*

$$i \mapsto p_{i!}(e_{X_i}) : I \rightarrow Y^\wedge,$$

et on a la formule

$$(*) \quad p!(e_X) \xleftarrow{\sim} \varinjlim_I p_{i!}(e_{X_i}),$$

où la flèche est induite par les morphismes canoniques

$$p_{i!}(e_{X_i}) \rightarrow p!(e_X)$$

⁸²dire W_0 -propre ...

[page 119]

induites par les inclusions $X_i \rightarrow X$.

La loi fonctorielle de $p_{i!}(e_{X_i})$ en i a été explicitée en cours de démonstration.

Notons que lorsque X sur I est cofibrée et scindée, i.e. provient d'un foncteur

$$i \mapsto X_i, \quad I \rightarrow \text{Cat},$$

alors la loi fonctorielle de $p_{i!}(e_{X_i})$ en i s'explicité de façon particulièrement agréable : à une flèche

$$\alpha : i \rightarrow j, \quad \text{d'où } \alpha_* : X_i \rightarrow X_j,$$

est associé

$$p_!(\alpha) : p_{i!}(e_{X_i}) \rightarrow p_{j!}(e_{X_j}),$$

en notant qu'on a un diagramme

$$\begin{array}{ccc} X_i & \xrightarrow{\alpha_*} & X_j \\ & \searrow p_i & \swarrow p_j \\ & & Y \end{array} \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{\lambda_\alpha} \\ \xrightarrow{\lambda_\alpha} \end{array}$$

avec une flèche de commutativité

$$\lambda_\alpha : p_i \rightarrow p_j \alpha_*$$

(pas [un] isomorphisme en général), d'où

$$p_{i!}(e_{X_i}) \xrightarrow{(\lambda_\alpha)_!} p_{j!} \underbrace{\alpha_*!(e_{X_i})}_{\rightarrow e_{X_j}} \rightarrow p_{j!}(e_{X_j}),$$

plus de doute c'est lui! ⁽⁸³⁾.

[page 120]

Corollaire 2 : *Sous les conditions du corollaire 1, supposons que I ait un objet final i_0 . Alors*

$$(p_{i_0})!(e_{X_{i_0}}) \rightarrow p_!(e_X)$$

est un isomorphisme dans Y^\wedge .

D'où aussitôt la proposition 11 : si X_{i_0} est totalement W -asphérique, alors X l'est, car pour tout $p : X \rightarrow Y$, $p_!(e_X) \simeq p_{i_0!}(X_{i_0})$, et ce dernier élément de Y^\wedge est W -asphérique par hypothèse sur X_{i_0} .

Notons le cas particulier :

Corollaire 3. *Soit Z un objet totalement W -asphérique dans Cat . Alors son produit $Z \times I$ par toute I dans Cat ayant un objet final est aussi totalement W -asphérique.*

⁸³Cette flèche [la flèche $(\lambda_\alpha)_!$] devrait être explicitée avec soin!

[page 121]

3 Sommes amalgamées et intégration $\int X_0 \begin{matrix} \nearrow X_1 \\ \searrow X_2 \end{matrix}$

3.1 Réduction canonique au cas d'un diagramme d'immersions fermées

Considérons un diagramme

$$(*) \quad \begin{matrix} & & X_1 \\ & \nearrow^{\alpha_1} & \\ X_0 & & \\ & \searrow_{\alpha_2} & \\ & & X_2 \end{matrix}$$

dans Cat . Nous pouvons le regarder comme un contrafoncteur

$$\Phi^\circ \longrightarrow \text{Cat},$$

où

$$\Phi = \left(\begin{matrix} & & 1 \\ & \nearrow & \\ 0 & & \\ & \searrow & \\ & & 2 \end{matrix} \right),$$

donc comme définissant une catégorie fibrée (scindée) \mathcal{X} sur Φ . Il est parfois commode de représenter cette catégorie \mathcal{X} par le 'signe d'intégration'

$$\int X_0 \begin{matrix} \nearrow X_1 \\ \searrow X_2 \end{matrix},$$

et la regarder comme une sorte de 'somme amalgamée homotopique' de X_1 et X_2 sous X_0 , ou comme une 'limite inductive homotopique' du diagramme de départ (*).

[page 122]

Il faut entendre par là que (pour $W \subseteq \text{Fl}(\text{Cat})$ donné) l'image $\text{hot}_W(\mathcal{X})$ de \mathcal{X} dans Hot_W a un 'sens homotopique' remarquable en termes de (*), de façon précise, le diagramme (*) définit un objet ξ de $\text{HOT}_W(\Phi)$ (qui est une catégorie de fractions de la catégorie de tous les diagrammes du type (*)) ...), et si

$$\pi : \Phi \longrightarrow e$$

désigne la projection absolue de Φ , on a

$$\pi_!(\xi) = \text{hot}_W(\mathcal{X}),$$

d'après le calcul connu du foncteur $\pi_!$, adjoint à gauche du foncteur π^*

$$\mathrm{HOT}_W(e) \stackrel{\text{déf}}{=} \mathrm{Hot}_W \longrightarrow \mathrm{HOT}_W(\Phi)$$

(⁸⁴). Or pour tout objet I dans Cat , de projection absolue $p_I : I \longrightarrow e$, le foncteur

$$p_{I!} : \mathrm{HOT}_W(I) \longrightarrow \mathrm{HOT}_W(e) = \mathrm{Hot}_W$$

doit être regardé comme l'équivalent 'homotopique' du foncteur limite inductive \varinjlim_I des diagrammes de type I° dans la catégorie Hot_W - lesquelles limites inductives *n'existent pas* dans Hot_W (sauf

[page 123]

pour des catégories très particulières - les seules que je connaisse sont les catégories discrètes (qu'il faut peut-être même supposer finies en plus)).

Notons qu'on a un diagramme de foncteurs canoniques

$$(*) \quad \begin{array}{ccc} & X_0 & \\ \alpha_1 \swarrow & & \searrow \alpha_2 \\ X_1 & \text{non} & X_2 \\ & \text{commuta-} & \\ & \text{tif!} & \\ i_1 \searrow & & \swarrow i_2 \\ & \mathcal{X} & \end{array}$$

lequel diagramme n'a rien de commutatif dans Cat . *Il est cependant commutatif dans Hot_W* (quel que soit le localiseur fondamental W), et même dans $\mathrm{Cat hot}$, car si on désigne par

$$i_0 : X_0 \longrightarrow \mathcal{X}$$

l'inclusion canonique, on a des homomorphismes canoniques

$$i_1 \alpha_1 \longrightarrow i_0 \longleftarrow i_2 \alpha_2,$$

ce qui montre que $i_1 \alpha_1$ et $i_2 \alpha_2$ sont homotopes, donc définissent la même flèche dans Hot_W .

[page 124]

Considérons dans Φ les deux fermés isomorphes à Δ^1

$$\begin{aligned} F_1 &= 1 \setminus \Phi = \{0, 1\} \\ F_2 &= 2 \setminus \Phi = \{0, 2\}, \end{aligned}$$

on a

$$F_1 \cap F_2 = 0 \setminus \Phi = \{0\}, \quad F_1 \cup F_2 = \Phi.$$

⁸⁴Cela suppose qu'on a $W(2)$, non seulement $W(2 \text{ bis})$.

Soient

$$1 \setminus \mathcal{X} = \mathcal{X} \times_{\Phi} 1 \setminus \Phi = \mathcal{X} \times_{\Phi} F_1$$

$$2 \setminus \mathcal{X} = \mathcal{X} \times_{\Phi} 2 \setminus \Phi = \mathcal{X} \times_{\Phi} F_2$$

les images inverses de F_1, F_2 dans \mathcal{X} , on a donc

$$1 \setminus \mathcal{X} \cap 2 \setminus \mathcal{X} = X_0, \quad 1 \setminus \mathcal{X} \cup 2 \setminus \mathcal{X} = \mathcal{X},$$

donc le diagramme

$$(**) \quad \begin{array}{ccc} & X_0 & \\ \alpha'_1 \swarrow & & \searrow \alpha'_2 \\ 1 \setminus \mathcal{X} & & 2 \setminus \mathcal{X} \\ i'_1 \swarrow & & \searrow i'_2 \\ & \mathcal{X} & \end{array}$$

déduit du diagramme similaire

$$\begin{array}{ccc} & \{0\} & \\ \swarrow & & \searrow \\ F_1 & & F_2 \\ \swarrow & & \searrow \\ & \Phi & \end{array}$$

est (comme ce dernier) un carré d'immersions fermées à la fois cartésien et cocartésien. D'autre part, on a un homomorphisme

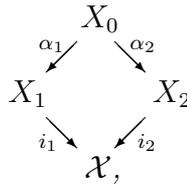
[page 125]

canonique du diagramme (*) dans (**), qui est l'identité sur les sommets X_0 et \mathcal{X} , et qui sur X_1, X_2 est donné par les inclusions canoniques

$$\underbrace{X_1}_{\mathcal{X}_1 \text{ fibre de } \mathcal{X} \text{ en } 1} \longrightarrow 1 \setminus \mathcal{X}, \quad \underbrace{X_2}_{\mathcal{X}_2 \text{ fibre de } \mathcal{X} \text{ en } 2} \longrightarrow 2 \setminus \mathcal{X}.$$

Ces inclusions, on le sait, sont W -asphériques (elles ont même un adjoint à droite), a fortiori elles sont dans W . Donc le diagramme non commutatif (*) est isomorphe, en tant que diagramme dans Hot_W , au diagramme commutatif cartésien et cocartésien (**) formé d'immersions fermées. Comme \mathcal{X} est bel et bien somme amalgamée de ses deux fermées $1 \setminus \mathcal{X}, 2 \setminus \mathcal{X}$ sous leur intersection X_0 , cela étaye l'intuition qui voit \mathcal{X} comme une 'somme amalgamée homotopique'. Donnons tout de suite l'application suivante :

Proposition 13. Soit un diagramme $\begin{array}{ccc} & X_1 & \\ \alpha_1 \nearrow & & \\ X_0 & & \\ \alpha_2 \searrow & & \\ & X_2 & \end{array}$ dans Cat , d'où le diagramme (*), p. 123,



[page 126]

commutatif dans Hot_W (mais non dans Cat , sauf si $X_0 = \emptyset$). Supposons que W satisfait W(7 bis) (axiome du carré cocartésien, cf. p. 75). Alors on a

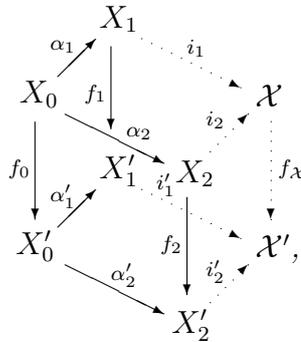
$$\begin{cases} \alpha_1 \in W & \iff & i_2 \in W \\ \alpha_2 \in W & \iff & i_1 \in W. \end{cases} \quad (85)$$

DÉMONSTRATION. Utilisant l'homomorphisme précédent de (*) dans (**), on voit que chacune des flèches $\alpha_1, \alpha_2, i_1, i_2$ est dans W , si et seulement si la flèche correspondante $\alpha'_1, \alpha'_2, i'_1$ ou i'_2 l'est. Donc les équivalences ci-dessus équivalent à

$$\begin{aligned} \alpha'_1 \in W & \iff i'_2 \in W \\ \alpha'_2 \in W & \iff i'_1 \in W, \end{aligned}$$

lesquelles sont vraies en vertu de W(7 bis) (formulation duale) appliqué à \mathcal{X} et aux deux fermés $1 \setminus \mathcal{X}, 2 \setminus \mathcal{X}$ de \mathcal{X} .

Corollaire : *Considérons deux diagrammes de type Φ° , et un homomorphisme $f = (f_0, f_1, f_2)$ de l'un dans l'autre (cf. diagramme en traits pleins ci-contre [ci-dessous]):*



d'où un homomorphisme

[page 127]

$$f_{\mathcal{X}} = \int f : \quad \mathcal{X} = \int X_0 \begin{array}{l} \nearrow X_1 \\ \searrow X_2 \end{array} \quad \longrightarrow \quad \mathcal{X}' = \int X'_0 \begin{array}{l} \nearrow X'_1 \\ \searrow X'_2 \end{array}$$

⁸⁵**NB** Pour l'implication \implies on n'a besoin que de la forme directe de W(7 bis), i.e. (avec les notations de XVI) de Loc(6'a).

s'insérant dans un diagramme cubique (cf. diagramme précédent complété par des pointillés). Considérons les conditions suivantes.

- a) $f_0 \in W$.
- b) f_1 et f_2 sont [dans] W .
- c) $f_{\mathcal{X}} = f(f_0, f_1, f_2) \in W$.

Supposons l'axiome W(7) ('lemme des 5', cf. page 76) satisfait. Alors deux parmi les conditions a), b), c) impliquent la troisième

$$\left\{ \begin{array}{l} a \ \& \ b \implies c \\ b \ \& \ c \implies a \\ c \ \& \ a \implies b. \end{array} \right.$$

En effet, on a un homomorphisme du diagramme cubique ci-dessus dans le diagramme similaire, où X_1, X_2, X'_1, X'_2 sont remplacés respectivement pas les fermés $1 \setminus \mathcal{X}, 2 \setminus \mathcal{X}$ de \mathcal{X} , et $1 \setminus \mathcal{X}', 2 \setminus \mathcal{X}'$ de \mathcal{X}' , les deux carrés supérieur et inférieur étant des inclusions d'ouverts [plutôt de fermés] de \mathcal{X} resp. de \mathcal{X}' . Ainsi, les conditions a), b), c) sont équivalentes respectivement aux conditions similaires pour le nouveau diagramme cubique

[page 128]

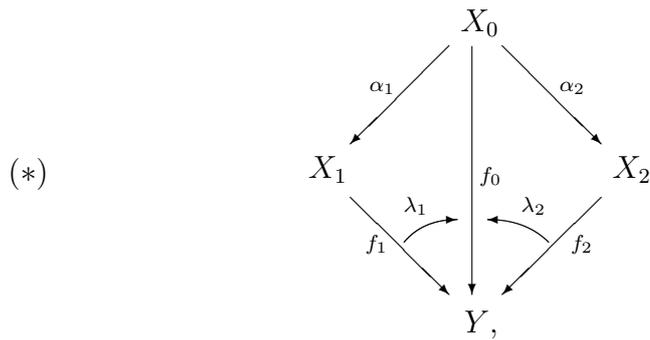
(a) et c) n'ayant d'ailleurs pas changé, et b) donnant

$$b') \ f'_1 : \mathcal{X}/1 \longrightarrow \mathcal{X}'/1 \ \text{et} \ f'_2 : \mathcal{X}/2 \longrightarrow \mathcal{X}'/2 \ \text{sont dans } W.$$

[plutôt $f'_1 : 1 \setminus \mathcal{X} \longrightarrow 1 \setminus \mathcal{X}'$ et $f'_2 : 2 \setminus \mathcal{X} \longrightarrow 2 \setminus \mathcal{X}'$]). Alors la conclusion du corollaire est équivalente à W(7) (formulation duale) dans le cas du nouveau diagramme cubique, q.e.d.

3.2 Comparaison de $\int X_0 \begin{array}{l} \nearrow X_1 \\ \searrow X_2 \end{array}$ avec une somme amalgamée ordinaire.
Carrés W -homotopiquement cocartésiens.

La catégorie intégrée $\mathcal{X} = \int X_0 \begin{array}{l} \nearrow X_1 \\ \searrow X_2 \end{array}$ est solution du problème universel suivant, variante 2-catégorique de celui qui définit la limite inductive des diagrammes. Il s'agit, pour Y objet variable dans Cat , de considérer les systèmes de trois foncteurs f_0, f_1, f_2 et des deux homomorphismes fonctoriels λ_1, λ_2 :



$$\lambda_1 : f_1 \alpha_1 \longrightarrow f_0$$

$$\lambda_2 : f_2 \alpha_2 \longrightarrow f_0.$$

[page 129]

Se donner une flèche de Cat

$$\mathcal{X} \longrightarrow Y$$

‘revient au même’ que de se donner un système $(f_0, f_1, f_2, \lambda_1, \lambda_2)$ comme dessus, et ceci ‘fonctoriellement en Y ’. C’est là le cas particulier de la détermination générale des foncteurs de la catégorie fibrée ‘intégrée’ d’un contrafoncteur

$$I^\circ \longrightarrow \text{Cat}, \quad \begin{array}{l} i \longmapsto X_i \\ u \longmapsto u^* \end{array}$$

vers une catégorie Y , en termes d’un système de foncteurs

$$X_i \xrightarrow{f_i} Y,$$

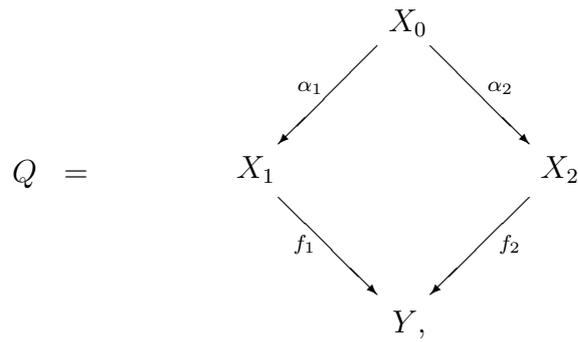
et d’homomorphismes fonctoriels

$$f_i \circ u^* \xrightarrow{\lambda_u} f_j$$

pour $u : i \longrightarrow j$, d’où $u^* : X_j \longrightarrow X_i$, avec des conditions de transitivité pour des flèches composées, dont on n’a pas à tenir compte dans le cas actuel, vu qu’il n’y a pas de flèches composées à regarder dans $I = \Phi$ (sauf des composées avec une flèche identique, qu’on peut se dispenser de regarder ici ...).

[page 130]

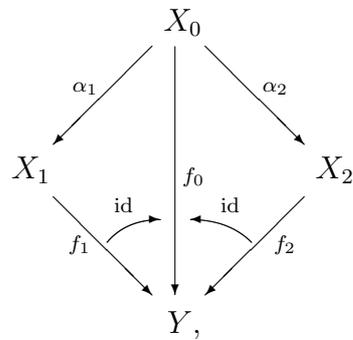
Si en particulier on a un diagramme *commutatif* dans Cat



on peut le compléter par

$$f_0 \stackrel{\text{déf}}{=} f_1\alpha_1 = f_2\alpha_2$$

en un diagramme

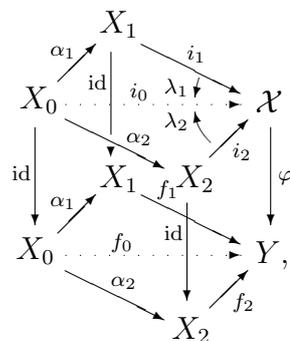


ce qui montre qu'on a une donnée du type (*) ci-dessus, définissant donc une flèche

$$\varphi_Q : \mathcal{X} = \int X_0 \begin{array}{l} \nearrow X_1 \\ \searrow X_2 \end{array} \longrightarrow Y$$

qui donne lieu à un diagramme cubique

[page 131]



commutatif sauf le carré supérieur, i.e. on a

$$\varphi i_1 = f_1, \quad \varphi i_2 = f_2, \quad \text{et de plus } \varphi i_0 = f_0,$$

φ transformant de plus les homomorphismes fonctoriels

$$\lambda_1 : i_1 \alpha_1 \longrightarrow i_0, \quad \lambda_2 : i_2 \alpha_2 \longrightarrow i_0$$

en les homomorphismes fonctoriels identiques pertinents.

Définition 3. On dit que le diagramme commutatif

$$(*) \quad \begin{array}{ccc} & X_0 & \\ \alpha_1 \swarrow & & \searrow \alpha_2 \\ X_1 & & X_2 \\ f_1 \searrow & & \swarrow f_2 \\ & Y & \end{array}$$

est *W-homotopiquement cocartésien* ⁽⁸⁶⁾ si l'homomorphisme canonique

$$\mathcal{X} = \int X_0 \begin{array}{c} \nearrow X_1 \\ \searrow X_2 \end{array} \xrightarrow{\varphi} Y$$

qu'il définit est dans *W*. ⁽⁸⁷⁾

[page 132]

On a alors le :

Corollaire 1. *Supposons W(7 bis). Si le carré (*) est W-homotopiquement cocartésien, alors*

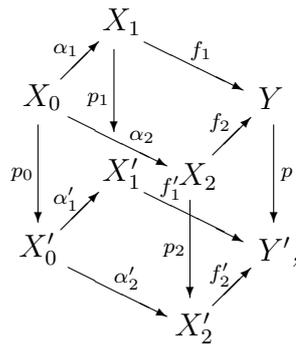
$$\begin{cases} \alpha_1 \in W & \iff & f_2 \in W \\ \alpha_2 \in W & \iff & f_1 \in W. \end{cases}$$

Cela résulte aussitôt du diagramme cubique de la page précédente, où toutes les flèches verticales sont dans *W*, et de l'énoncé similaire concernant la face supérieure du cube, donné dans la proposition 13, p. 125.

Corollaire 2. *Supposons W(7). Considérons un diagramme cubique*

⁸⁶ou simplement *W*-cocartésien, ou qu'il définit *Y* comme somme amalgamée *W*-homotopique de etc.

⁸⁷Introduire φ dans une proposition en forme, et donner ses propriétés essentielles : flèches strictement cartésiennes sont transformées en flèches *identiques* + lemmes 1 et 2 des p. 152, 154.



où les deux faces inférieure et supérieure du cube sont des carrés W -homotopiquement cocartésiens. Considérons les conditions

[page 133]

- a) $p_0 \in W$.
- b) p_1 et $p_2 \in W$.
- c) $p \in W$.

Alors deux de ces conditions impliquent la troisième.

Résulte aussitôt de la définition 3, et du résultat similaire (cor. page 126) pour le di-

agramme cubique similaire, avec Y, Y' remplacées par $\mathcal{X} = \int X_0 \begin{matrix} \nearrow X_1 \\ \searrow X_2 \end{matrix}$ et $\mathcal{X}' =$

$$\int X'_0 \begin{matrix} \nearrow X'_1 \\ \searrow X'_2 \end{matrix} .$$

3.3 Intégration propre versus intégration lisse. Énoncé d'équivalence entre les deux points de vue. Commentaires sur le cas des limites W -homotopiques quelconques.

La définition 3, et les corollaires précédents, n'ont d'intérêt que dans la mesure où on dispose de critères maniables, permettant d'affirmer qu'un carré commutatif est bel et bien homotopiquement cocartésien. C'est ce qu'on va essayer de faire tantôt. Il y a aussi une perplexité, concernant le rôle privilégié joué, dans la théorie développée ici, par les immersions fermées, à l'exclusion des immersions ouvertes. Nous avons en somme ramené, du

[page 134]

point de vue homotopique, les diagrammes quelconques $X_0 \begin{matrix} \nearrow X_1 \\ \searrow X_2 \end{matrix}$ dans Cat , au cas d'un diagramme d'immersions fermées, où la somme amalgamée prend des allures familières. Mais pourquoi pas aussi bien le ramener au cas d'immersions ouvertes? On considérerait alors le diagramme de départ comme définissant une catégorie *cofibrée* sur

$$\Phi^\circ = \Psi = 0 \begin{matrix} \nearrow 1 \\ \searrow 2, \end{matrix}$$

soit $\tilde{\mathcal{X}}$. On a dans Ψ les deux ouverts

$$\underbrace{\Psi/1}_{=\{0,1\}} = U_1, \quad \underbrace{\Psi/2}_{=\{0,2\}} = U_2, \quad U_1 \cap U_2 = \{0\},$$

d'où dans $\tilde{\mathcal{X}}$ deux ouverts images inverses

$$\tilde{\mathcal{X}}/1, \quad \tilde{\mathcal{X}}/2, \quad \text{avec } \tilde{\mathcal{X}}/1 \cap \tilde{\mathcal{X}}/2 = X_0,$$

d'où un diagramme commutatif d'inclusions ouvertes

$$(*) \quad \begin{array}{ccc} & X_0 & \\ \alpha'_1 \swarrow & & \searrow \alpha'_2 \\ \tilde{\mathcal{X}}/1 & & \tilde{\mathcal{X}}/2 \\ i'_1 \searrow & & \swarrow i'_2 \\ & \tilde{\mathcal{X}} & \end{array}$$

[page 135]

lequel reçoit le diagramme non commutatif

$$\begin{array}{ccc} & X_0 & \\ \alpha_1 \swarrow & \vdots & \searrow \alpha_2 \\ X_1 & i_0 & X_2 \\ i_1 \searrow & \swarrow \tilde{\lambda}_1 \quad \tilde{\lambda}_2 & \swarrow i_2 \\ & \tilde{\mathcal{X}} & \end{array}$$

les flèches

$$X_1 \longrightarrow \tilde{\mathcal{X}}/1, \quad X_2 \longrightarrow \tilde{\mathcal{X}}/2$$

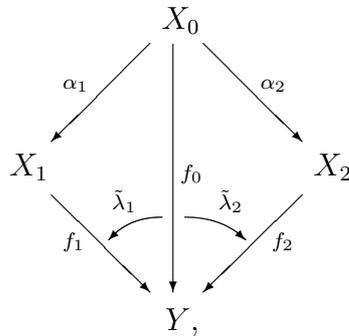
étant dans W (et même W -coasphériques - elles ont même un adjoint à gauche).

Donc on trouve, comme précédemment

$$\begin{cases} \alpha_1 \in W & \iff i_2 \in W \\ \alpha_2 \in W & \iff i_1 \in W, \end{cases}$$

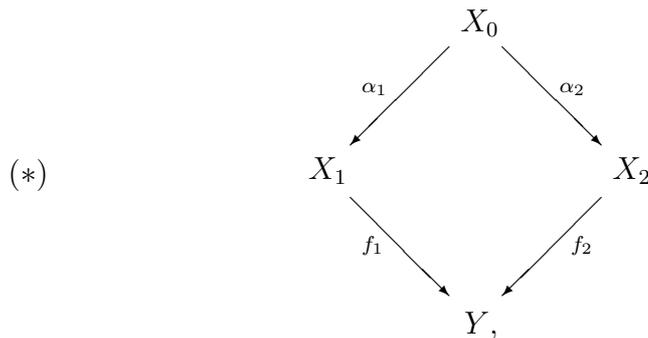
et de même on peut formuler un 'lemme des cinq' comme le corollaire page 125 [plutôt 126], mais avec $\tilde{\mathcal{X}}, \tilde{\mathcal{X}}'$ au lieu de $\mathcal{X}, \mathcal{X}'$.

De plus, $\tilde{\mathcal{X}}$ est la solution d'un problème universel dans Cat , en termes de données



[page 136]

la seule différence avec celui formulé à la page 128 étant la direction opposée des flèches λ_1, λ_2 . Pour tout carré commutatif



on trouve encore une flèche canonique

$$\tilde{\varphi} : \tilde{\mathcal{X}} \longrightarrow Y.$$

Il serait tout aussi raisonnable de dire que le carré (*) est W -homotopiquement co-cartésien, lorsque $\tilde{\varphi}$ est [dans] W , que d'adopter la définition 3, page 131 - on trouverait exactement les mêmes corollaires. Les deux définitions seraient elles équivalentes??

Je note que $\tilde{\mathcal{X}}$ étant cofibrée sur $\Psi = \Phi^\circ$, $\tilde{\mathcal{X}}^\circ$ est fibrée sur $\Psi^\circ = \Phi$. De façon précise, on aura

$$\tilde{\mathcal{X}}^\circ = \int (X_0)^\circ \begin{array}{l} \nearrow^{\alpha_1^\circ} (X_1)^\circ \\ \searrow_{\alpha_2^\circ} (X_2)^\circ \end{array}$$

[page 137]

et il s'agit donc de comparer les deux intégrales

$$\mathcal{X} = \int X_0 \begin{array}{l} \nearrow^{\alpha_1} X_1 \\ \searrow_{\alpha_2} X_2 \end{array}, \quad \tilde{\mathcal{X}}^\circ = \int (X_0)^\circ \begin{array}{l} \nearrow^{\alpha_1^\circ} (X_1)^\circ \\ \searrow_{\alpha_2^\circ} (X_2)^\circ \end{array},$$

notamment comme objets de $\text{HOT}_W(\Phi)$. Pour cela, je reprends la construction du foncteur

$$X \mapsto \Phi(X) : \text{Cat} \longrightarrow \text{Cat}$$

de I, p. 72-75, mais je préfère ici noter ce foncteur $\Sigma(X)$ (car Φ désigne déjà une petite

catégorie $0 \begin{array}{l} \swarrow 1 \\ \searrow 2 \end{array}$). On utilisera les homomorphismes fonctoriels en X :

$$\begin{array}{ccc} & \Sigma(X) & \\ p_X \swarrow & & \searrow q_X \\ X & & X^\circ \end{array}$$

qui sont W -asphériques, donc $\in W$. De plus, $\Sigma(X^\circ) = \Sigma(X)$, $p_{X^\circ} = q_X$, $q_{X^\circ} = p_X$. Ainsi, si

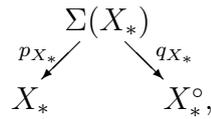
$$\begin{aligned} X_* &= \begin{array}{ccc} & X_1 & \\ \alpha_1 \nearrow & X_0 & \searrow \alpha_2 \\ & X_2 & \end{array} \in \text{Hom}(\Phi^\circ, \text{Cat}) \\ X_*^\circ &= \begin{array}{ccc} & (X_1)^\circ & \\ \alpha_1^\circ \nearrow & (X_0)^\circ & \searrow \alpha_2^\circ \\ & (X_2)^\circ & \end{array} \in \text{Hom}(\Phi^\circ, \text{Cat}), \end{aligned}$$

[page 138]

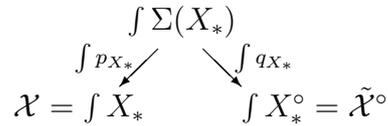
on trouve

$$\Sigma(X_*) = \left(\begin{array}{ccc} & \Sigma(X_1) & \\ \Sigma(\alpha_1) \nearrow & \Sigma(X_0) & \searrow \Sigma(\alpha_2) \\ & \Sigma(X_2) & \end{array} \right)$$

et les flèches

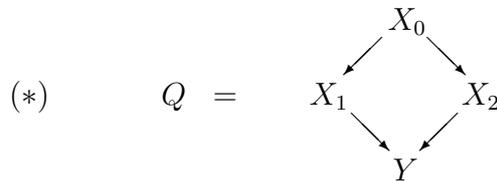


dans $\underline{\text{Hom}}(\Phi^\circ, \text{Cat})$. Ces flèches sont dans W terme à terme, donc les homomorphismes dans Cat

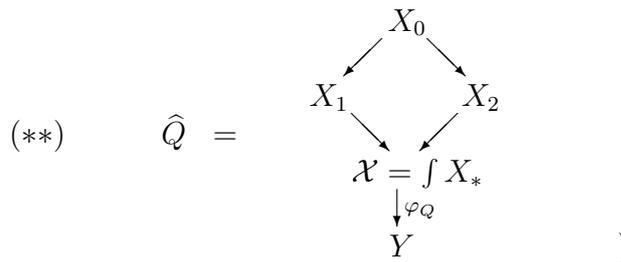


sont dans W .

Finalement, l'innocent carré commutatif



(et le diagramme correspondant

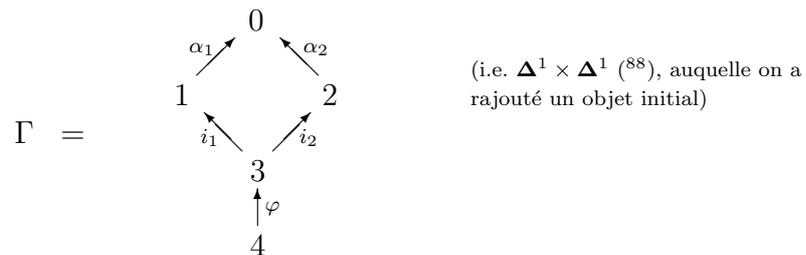


donne naissance, en le transformant

[page 139]

par $X \mapsto X^\circ$ et par $X \mapsto \Sigma(X)$, et en tenant compte des homomorphismes fonctoriels en

$\begin{array}{ccc} & \Sigma(X) & \\ X & \swarrow \quad \searrow & X^\circ \\ X & & \end{array}$, à trois diagrammes du type (**), i.e. modélés sur la catégorie opposée de



(⁸⁹), savoir

$$\widehat{Q}, \quad \Sigma(\widehat{Q}), \quad \widehat{Q}^\circ,$$

et deux homomorphismes de diagrammes ([dans] $\underline{\text{Hom}}(\Gamma^\circ, \text{Cat})$)

$$(***) \quad \begin{array}{c} \Sigma(\widehat{Q}) \\ \swarrow \quad \searrow \\ \widehat{Q} \quad \widehat{Q}^\circ \end{array} \quad (\text{dédit de } \begin{array}{c} \Sigma(Q) \\ \swarrow \quad \searrow \\ Q \quad Q^\circ \end{array}),$$

lesquels sont dans W terme à terme (i.e. sont dans $W_\Gamma \subseteq \text{Fl}(\underline{\text{Hom}}(\Gamma^\circ, \text{Cat}))$). Explicitement, en les sommets $i = 0, 1, 2$, resp. 4 de Γ , (***) n'est autre que

$$D_i = \left(\begin{array}{c} \Sigma(X_i) \\ \swarrow p_{X_i} \quad \searrow q_{X_i} \\ X_i \quad X_i^\circ \end{array} \right) \quad \text{resp.} \quad \begin{array}{c} \Sigma(Y) \\ \swarrow p_Y \quad \searrow q_Y \\ Y \quad Y^\circ \end{array},$$

en le sommet 3 c'est

$$\begin{array}{c} f \Sigma(X_*) \\ \swarrow f p_{X_*} \quad \searrow f q_{X_*} \\ \mathcal{X} = f X_* \quad f X_*^\circ = \tilde{\mathcal{X}}^\circ \end{array},$$

obtenu par intégration des flèches

$$\begin{array}{c} \Sigma(X_*) \\ \swarrow p_{X_*} \quad \searrow q_{X_*} \\ X_* \quad X_*^\circ \end{array}.$$

[page 140]

Regardant la restriction des deux morphismes de diagrammes (***) aux parties des trois diagrammes de type Γ° au dessus de la queue $\{3, 4\}$ de Γ on trouve le diagramme en traits pleins voici

$$\begin{array}{ccccc} & f \Sigma(X_*) & & \Sigma \tilde{\mathcal{X}} & \\ & \swarrow W \quad \searrow W & & \swarrow W \quad \searrow W & \\ \mathcal{X} & & \tilde{\mathcal{X}}^\circ & & \tilde{\mathcal{X}} \\ \downarrow \varphi_Q & \downarrow \varphi_{\Sigma(Q)} & \downarrow \varphi_{Q^\circ} = (\tilde{\varphi}_Q)^\circ & \downarrow \Sigma \tilde{\varphi}_Q & \downarrow \tilde{\varphi}_Q \\ & \Sigma(Y) & & \Sigma(Y) & \\ & \swarrow W \quad \searrow W & & \swarrow W \quad \searrow W & \\ Y & & Y^\circ & & Y \end{array}$$

⁸⁸faux, car le carré n'est pas commutatif

⁸⁹On a $\alpha_1 i_1 \neq \alpha_2 i_2$, mais la relation $\alpha_1 i_1 \varphi = \alpha_2 i_2 \varphi$.

qu j'ai complété par un deuxième volet en pointillés. Dans ce diagramme de quatre carrés accolés, les côtés horizontaux des carrés représentent des flèches de Cat qui sont dans W . On trouve ainsi :

$$\varphi_Q \in W \iff \varphi_{\Sigma Q} \in W \iff (\varphi_{Q^\circ} = \tilde{\varphi}_Q^\circ) \in W \iff \Sigma \tilde{\varphi}_Q \in W \iff \tilde{\varphi}_Q \in W.$$

On trouve aussi que les cinq flèches verticales sont isomorphes, en tant que flèches de Hot_W . Pour résumer :

Proposition 14. *Considérons un diagramme (carré commutatif)*

$$Q = \begin{array}{ccc} & X_0 & \\ & \swarrow \quad \searrow & \\ X_1 & & X_2 \\ & \swarrow \quad \searrow & \\ & Y & \end{array}$$

dans Cat , et le diagramme 'opposé' déduit par $X \mapsto X^\circ$

$$Q^\circ = \begin{array}{ccc} & X_0^\circ & \\ & \swarrow \quad \searrow & \\ X_1^\circ & & X_2^\circ \\ & \swarrow \quad \searrow & \\ & Y^\circ & \end{array},$$

[page 141]

et les flèches correspondantes

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_Q : \mathcal{X}_Q = \left(\int X_0 \begin{array}{l} \nearrow X_1 \\ \searrow X_2 \end{array} \right) \longrightarrow Y \\ \varphi_{Q^\circ} : \mathcal{X}_{Q^\circ} = \left(\int X_0^\circ \begin{array}{l} \nearrow X_1^\circ \\ \searrow X_2^\circ \end{array} \right) \longrightarrow Y^\circ. \end{array} \right.$$

Enfin, considérons aussi les flèches $\tilde{\varphi}_Q, \tilde{\varphi}_{Q^\circ}$ canoniques, relative à l'intégrale propre \int_{pr}

(au lieu de l'intégrale lisse $f = f_{\text{lis}}$)

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\varphi}_Q : \tilde{\mathcal{X}}_Q = \left(\int_{\text{pr}} X_0 \begin{array}{l} \nearrow X_1 \\ \searrow X_2 \end{array} \right) \longrightarrow Y \\ \tilde{\varphi}_{Q^\circ} : \tilde{\mathcal{X}}_{Q^\circ} = \left(\int_{\text{pr}} X_0^\circ \begin{array}{l} \nearrow X_1^\circ \\ \searrow X_2^\circ \end{array} \right) \longrightarrow Y^\circ. \end{array} \right.$$

On a alors ce qui suit :

(a) $\varphi_{Q^\circ} \simeq (\tilde{\varphi}_Q)^\circ$, $\varphi_Q \simeq (\tilde{\varphi}_{Q^\circ})^\circ$ (d'où résulte déjà que $\left\{ \begin{array}{l} \varphi_Q \in W \iff \tilde{\varphi}_{Q^\circ} \in W \\ \varphi_{Q^\circ} \in W \iff \tilde{\varphi}_Q \in W \end{array} \right.$ (90)).

(b) Les relations

$$\varphi_Q \in W, \quad \varphi_{Q^\circ} \in W, \quad \tilde{\varphi}_Q \in W, \quad \tilde{\varphi}_{Q^\circ} \in W$$

sont équivalentes, en d'autres termes : pour que le carré soit W -homotopiquement cocartésien (version intégrale lisse), il faut et il suffit que le carré opposé Q° le soit, et ces conditions équivalent aussi aux conditions correspondantes en termes des intégrales propres (au lieu des intégrales lisses).

(c) Les quatre flèches $\varphi_Q, \varphi_{Q^\circ}, \tilde{\varphi}_Q, \tilde{\varphi}_{Q^\circ}$ de Cat en tant que flèches dans Hot_W , sont isomorphes dans $\underline{\text{Fl}}(\text{Hot}_W)$. Plus précisément, en tant que flèches de Cat ,

[page 142]

elles définissent des objets isomorphes de $\text{HOT}_W(\Delta^1)$.

(d) Plus précisément encore, les quatre diagrammes dans Cat de type Γ° , où

$$\Gamma = \begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & \alpha_1 \swarrow & & \searrow i_1 & \\ 0 & & & & 3 \xleftarrow{\varphi} 4 \\ & \searrow \alpha_2 & & \swarrow i_2 & \\ & & 2 & & \end{array}$$

$\alpha_1 i_1 \varphi = \alpha_2 i_2 \varphi$, dans lesquels s'insèrent les quatre flèches qu'on vient d'envisager, savoir

$$\hat{Q} = X_0 \begin{array}{l} \nearrow X_1 \\ \searrow X_2 \end{array} \begin{array}{l} \nearrow i_1 \\ \searrow i_2 \end{array} \mathcal{X}_Q \xrightarrow{\varphi_Q} Y,$$

⁹⁰et que les flèches φ_Q et $\tilde{\varphi}_{Q^\circ}$ d'une part, φ_{Q° et $\tilde{\varphi}_Q$ d'autre part, sont isomorphes comme flèches dans Hot_W .

$$\widehat{Q}^\circ = X_0^\circ \begin{array}{c} \nearrow^{\alpha_1^\circ} X_1^\circ \\ \dots \\ \searrow_{\alpha_2^\circ} X_2^\circ \end{array} \begin{array}{c} \nearrow^{i'_1} \\ \dots \\ \searrow_{i'_2} \end{array} \mathcal{X}_{Q^\circ} \rightarrow Y^\circ,$$

$$\widehat{Q}^\sim = X_0 \begin{array}{c} \nearrow X_1 \\ \dots \\ \searrow X_2 \end{array} \mathcal{X}_Q \rightarrow Y,$$

$$\widehat{Q}^\circ \sim = X_0^\circ \begin{array}{c} \nearrow X_1^\circ \\ \dots \\ \searrow X_2^\circ \end{array} \mathcal{X}_{Q^\circ} \rightarrow Y^\circ,$$

⁽⁹¹⁾ sont isomorphes dans $\text{Hot}_W(\Gamma)$. De façon plus précise encore, on a les isomorphismes dans $\underline{\text{Hom}}(\Gamma^\circ, \text{Cat})$

$$(\widehat{Q}^\sim)^\circ \simeq \widehat{Q}^\circ,$$

d'où en l'appliquant à Q° au lieu de Q ,

$$(\widehat{Q}^\circ)^\sim \simeq \widehat{Q}^\sim,$$

ce qui implique (via les isomorphismes canoniques valables dans $\text{HOT}_W(S)$ pour tout objet S dans Cat et tout $X_* \in \text{Ob } \underline{\text{Hom}}(S, \text{Cat})$, $X_* \simeq X_*^\circ$ ⁽⁹²⁾), qu'on a les isomorphismes canoniques

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{Q} \simeq \widehat{Q}^\sim \\ \widehat{Q}^\circ \simeq \widehat{Q}^\circ \sim \end{array} \right\} \text{ dans } \text{HOT}_W(\Gamma),$$

mais aussi directement

$$\widehat{Q} \simeq \widehat{Q}^\circ, \quad \widehat{Q}^\sim \simeq \widehat{Q}^\circ \sim \quad \text{dans } \text{HOT}_W(\Gamma)$$

[page 143]

(et il reste à vérifier qu'on a ainsi un système transitif d'isomorphismes canoniques dans $\text{HOT}_W(\Gamma)$, entre les quatre objets envisagés, ce qui doit être essentiellement sorital ...).

Remarques.

- 1) Ce qu'on vient de dire dans le cas des diagrammes dans Cat de type $\Phi^\circ = \Psi$, a l'air de garder un sens pour les diagrammes de type quelconque

$$X_* : S^\circ \longrightarrow \text{Cat}, \quad s \longmapsto X_s$$

⁹¹**NB** On devrait encore compléter ces diagrammes (non commutatifs) par les flèches en pointillés ...

⁹²via le foncteur Σ utilisé plus haut ...

(S un objet de Cat). On peut l'intégrer de façon lisse, $\int X_* = \int_{\text{lis}} X_*$, obtenant une catégorie fibrée (scindée) sur S , ou de façon propre, $\int_{\text{pr}} X_*$, obtenant une catégorie cofibrée scindée sur S° . On peut également considérer X_*° , composé de X_* avec l'automorphisme $Y \mapsto Y^\circ$ dans Cat , et l'intégrer de façon soit propre, soit lisse. Dans tous ces cas, on trouve un diagramme de type \widehat{S}° , où \widehat{S} est déduit de S en ajoutant un élément qui s'envoie par une flèche 'canonique' (donnée) dans chacun des autres (*sans* relations de commutation!) Un

[page 144]

systeme inductif de morphismes dans Cat

$$f \quad X_s \xrightarrow{f_s} Y$$

donne alors un morphisme

$$\int_{\text{lis}} X_* \xrightarrow{\varphi_Q} Y,$$

où Q désigne le diagramme, de type \widehat{S}° , formé des X_s , de Y , des $u^* : X_t \rightarrow X_s$ (pour $u : s \rightarrow t$ dans S) et des f_s . De même on aura

$$\int_{\text{prop}} X_* \xrightarrow{\tilde{\varphi}_Q} Y,$$

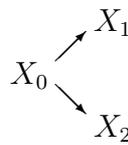
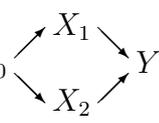
et si

$$\Gamma = (\widehat{S} + \text{objet initial}),$$

on trouve des diagrammes \widehat{Q} , \widetilde{Q} de type Γ° dans Cat . Sauf erreur, les relations entre \widehat{Q} , \widetilde{Q} , \widehat{Q}° , \widetilde{Q}° sont les mêmes que celles explicitées dans la proposition 14 ci-dessus. Je ne vais pas m'arrêter là-dessus avec le soin requis, sauf en cas de besoin. On dira qu'un diagramme Q définit Y comme $\varinjlim_I W$ -homotopique [où $I = S^\circ$]

si $\varphi_Q \in W$. Il revient au même de dire que $\varphi_{Q^\circ} \in W$, ou que $\tilde{\varphi}_Q \in W$ ou que $\tilde{\varphi}_{Q^\circ} \in W \dots$

[page 145]

2) Le cas 'universel', pour X_0  donné, d'un carré commutatif $Q = X_0$  dans Cat , donnant naissance à

$$\varphi_Q : \left(\int X_0 \begin{array}{c} \nearrow X_1 \\ \searrow X_2 \end{array} \right) \longrightarrow Y,$$

est celui de $Y = X_1 \amalg_{X_0} X_2$, donnant naissance à

$$Q_0 = Q(X_*) = X_0 \begin{array}{c} \nearrow X_1 \\ \searrow X_2 \end{array} \rightarrow X_1 \amalg_{X_0} X_2.$$

Le cas général s'y ramène, car on aura un diagramme commutatif

$$\left(\int X_0 \begin{array}{c} \nearrow X_1 \\ \searrow X_2 \end{array} \right) \begin{array}{c} \xrightarrow{\varphi_{Q_0} = \varphi_Q(X_*)} X_1 \amalg_{X_0} X_2 \\ \searrow \varphi_Q \\ \downarrow \alpha_Q \\ Y. \end{array}$$

Mais il doit y avoir des cas intéressants où φ_{Q_0} n'est pas dans W , i.e. le carré Cat-

cocartésien $X_0 \begin{array}{c} \nearrow X_1 \\ \searrow X_2 \end{array} \rightarrow X_1 \amalg_{X_0} X_2$ n'est pas W -homotopiquement cocartésien, et où

pourtant on peut trouver un carré commutatif Q

[page 146]

complétant X_* , de telle façon que ce carré soit W -homotopiquement commutatif [plutôt cocartésien], i.e. que $\varphi_Q = \alpha_Q \varphi_{Q_0}$ soit dans W . C'est d'autant plus plausible que dans Cat , les sommes amalgamées ont tendance à ne pas avoir des bonnes propriétés homotopiques, même si l'une des flèches α_1, α_2 est [un] monomorphisme (voire une immersion ouverte), contrairement à ce qui se passe dans Δ^\wedge , et plus généralement dans les catégories de la forme Z^\wedge (Z dans Cat).

3.4 Critères pour les carrés homotopiquement cocartésiens.

Les critères que j'ai dégagés sont tous contenus dans l'énoncé suivant :

Théorème 4 (^{93, 94}). *Considérons un diagramme carré commutatif dans Cat*

$$(*) \quad Q = \begin{array}{ccc} X_0 & \xrightarrow{\alpha_1} & X_1 \\ \alpha_2 \downarrow & \searrow f_0 & \downarrow f_1 \\ X_2 & \xrightarrow{f_2} & Y, \end{array}$$

⁹³**NB** Dans ce théorème, et les corollaires 1, 2, 3, on n'a besoin que de la *forme faible* de W(7 bis), savoir $i_0 \in W \implies i \in W$ (cf. p. 79) (Loc(6'a) avec les notations de XVI).

⁹⁴**NB** Au total, le théorème (partie directe) est valable sans hypothèse W(7 bis) ou W(7 bis faible) sur W , et il en est de même de ses corollaires 1 à 3 (à l'exclusion des corollaires 4, 5, qui eux utilisent W(7 bis) dans toute sa force).

et considérons le morphisme canonique

$$\varphi_Q : \mathcal{X} = \left(\int X_0 \begin{array}{l} \nearrow^{\alpha_1} X_1 \\ \searrow_{\alpha_2} X_2 \end{array} \right) \longrightarrow Y,$$

[page 147]

l'intégrale étant l'intégrale lisse. (Il y a un énoncé dual concernant l'intégrale propre de

$$\begin{array}{c} X_1 \\ \nearrow \\ X_0 \\ \searrow \\ X_2 \end{array} .)$$

- a) Pour que φ_Q soit W -lisse, il faut et il suffit que f_1, f_2 et $f_0 = f_1\alpha_1 = f_2\alpha_2$ le soient. (Moyennant W(7 bis) ⁽⁹⁵⁾).
- b) La fibre de φ_Q en un élément y de Y est isomorphe à

$$(**) \quad \int X_{0y} \begin{array}{l} \nearrow X_{1y} \\ \searrow X_{2y} \end{array} \quad (\simeq \mathcal{X}_y).$$

Corollaire 1. ⁽⁹⁷⁾ Supposons f_1, f_2 et $f_1\alpha_1 = f_2\alpha_2$ W -lisses, et les catégories intégrées $(**)$ W -asphériques pour tout $y \in \text{Ob} Y$. (NB Il s'agit encore de l'intégrale lisse, mais peu importe au fond, car on a vu (cf. partie supérieure du diagramme p. 140, qui implique que \mathcal{X} [est] W -asphérique si et seulement si \tilde{X} l'est) que l'une est W -asphérique si et seulement si l'autre l'est.) Alors $\varphi_Q \in W$, i.e. le carré $(*)$ est W -homotopiquement cartésien [plutôt cocartésien]. Par dualité, même conclusion si on suppose $f_1, f_2, f_1\alpha_1 = f_2\alpha_2$ propres au lieu de lisses. (Car Q W -homotopiquement trivial [plutôt cocartésien], si et seulement si Q° l'est, par [1a] prop. 14.)

[page 148]

En effet, un morphisme dans Cat qui est W -lisse et à fibres W -asphériques est dans W (et c'est même une W -équivalence universelle ...).

Corollaire 2. On suppose que W satisfait W(7 bis) (axiome du carré cocartésien) ⁽⁹⁸⁾.

⁹⁵Pour la partie directe (f_0, f_1, f_2 lisses $\implies \varphi_Q$ lisse), on n'a besoin que de W(7 bis) ⁽⁹⁶⁾, forme faible. Ce n'est que pour la réciproque (qui ne m'a encore jamais servie) qu'on a besoin de W(7 bis), dans toute sa force.

⁹⁶On n'a pas même besoin de W(7 bis) faible, cf. annotation page 156. On utilise une hypothèse restrictive sur W dans la réciproque seulement (φ_Q lisse $\implies f_0, f_1, f_2$ lisses).

⁹⁷Valable sans hypothèse sur W (autre que Loc(1,2,3 bis)).

⁹⁸inutile.

Supposons le carré Q cocartésien dans Cat ⁽⁹⁹⁾, et que α_1 soit une immersion ouverte (resp. fermée) et f_1 lisse (resp. propre). Alors Q est W -homotopiquement cocartésien. ⁽¹⁰⁰⁾

Il suffit d'établir le résultat non respé, l'autre en résultera par dualité (puisque Q est W -cocartésien si et seulement si Q° l'est). Par hypothèse f_1 est W -lisse, d'autre part α_1 et f_2 sont des immersions ouvertes, donc W -lisses, donc $f_1\alpha_1$ est W -lisse aussi. (D'ailleurs α_2 aussi, car le carré est aussi cartésien, donc α_2 déduit de f_1 (qui est W -lisse par hypothèse) par changement de base $X_2 \rightarrow Y$.) Donc φ_Q est $[W-]$ lisse, et il suffit de voir que ses fibres sont W -asphériques. Le calcul (***) donne, pour y dans $Y \setminus X_2$,

$$\mathcal{X}_y \simeq \int \emptyset \begin{array}{l} \nearrow e \\ \searrow \emptyset \end{array} \simeq e, \quad \text{O.K.}$$

Et pour y dans X_2

$$\mathcal{X}_y \simeq \int X_{0y} \begin{array}{l} \nearrow X_{1y} \\ \searrow e \end{array}.$$

[page 149]

Comme $X_{0y} \rightarrow X_{1y}$ est un isomorphisme, donc est dans W , il s'ensuit que $e \rightarrow \mathcal{X}_y$ l'est aussi (prop. 13, p. 125), moyennant W(7 bis), donc \mathcal{X}_y est W -asphérique, O.K. ⁽¹⁰¹⁾.

Corollaire 3. (Moyennant W(7 bis) ⁽¹⁰²⁾.) Soit X dans Cat , U_1, U_2 deux ouverts de X tels que $X = U_1 \cup U_2$, $U_0 = U_1 \cap U_2$ l'ouvert intersection. Alors le carré d'immersions ouvertes

$$\begin{array}{ccc} U_0 & \hookrightarrow & U_1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ U_2 & \hookrightarrow & X \end{array}$$

est W -cocartésien. (Énoncé dual pour deux fermés T_1, T_2 tels que $T_1 \cup T_2 = X$, avec $T_0 = T_1 \cap T_2$.)

On applique le corollaire 2. On sait que le carré est cocartésien dans Cat ⁽¹⁰³⁾, de plus $U_1 \hookrightarrow X$ est bien W -lisse, étant une immersion ouverte.

⁹⁹NB On n'utilise pas vraiment que Q soit cocartésien, plutôt que Q est cartésien, et f_2 (donc aussi α_1) une immersion ouverte (resp. fermée), et que pour $y \in Y \setminus X_2$, X_{1y} soit W -asphérique. (Dans le cas où Q est cocartésien, X_{1y} est $\simeq e$.)

¹⁰⁰On a besoin ici de W(7 bis), forme directe, i.e. de Loc(6'a) (notation de XVI).

¹⁰¹On n'a besoin que de la forme directe de W(7 bis), i.e. (notation de XVI) de Loc(6'a).

¹⁰²inutile.

¹⁰³On n'a pas même besoin de le savoir, cf. annotation marginale du corollaire 2.

Corollaire 4. (Moyennant W(7 bis) ⁽¹⁰⁴⁾.) Soit $U \hookrightarrow^i X$ une immersion ouverte telle que $T = X \setminus U$ soit isomorphe à la catégorie ponctuelle e . Pour que $i \in W$, il faut et il suffit que i soit W -asphérique, i.e. que U/t (où t est l'unique objet de T) soit W -asphérique.

Il suffit bien sûr de prouver que

$$i \in W \implies U/t \text{ } W\text{-asphérique.}$$

[page 150]

Considérons le carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} U/t & \hookrightarrow^{i/t} & X/t \\ p \downarrow & & \downarrow q \\ U & \hookrightarrow^i & X, \end{array}$$

nous allons prouver qu'il est W -cocartésien. Moyennant W(7 bis), il s'ensuivra que $i \in W$ implique $i/t \in W$, et comme X/t est W -asphérique (ayant un objet final), cela signifie que U/t est W -asphérique, ce qu'on veut prouver.

Il suffit, en vertu du corollaire 2, de prouver que le carré est cocartésien dans Cat , puisque i/t est une immersion ouverte (i l'étant), et $X/t \rightarrow X$ est un isomorphisme local, donc W -lisse. On voit que $(X/t) \setminus (U/t) \simeq e$ (catégorie ponctuelle), d'ailleurs l'unique élément de $(X/t) \setminus (U/t)$ est l'élément final $t_0 : t \xrightarrow{\text{id}_t} t$ de X/t . Ainsi $H_{t_0} \simeq e_{U/t}$ (préfaisceau final), et $p_!(H_{t_0}) \simeq H'_t \stackrel{\text{déf}}{=} (u \mapsto \text{Hom}_X(u, t))$, ce qui caractérise la somme amalgamée dans Cat ...

Le corollaire 4 n'est autre que le corollaire non démontré de la proposition 7 (p. 85).

Voici une variante du corollaire 4.

Corollaire 5. (Moyennant W(7 bis) ⁽¹⁰⁵⁾.) Soit $i : U \hookrightarrow X$ une immersion ouverte, soit $t_0 \in \text{Ob } T$ un point fermé de $T = X \setminus U$, tel que $\{t_0\}$

[page 151]

soit isomorphe à la catégorie ponctuelle, i.e. $\text{Hom}_X(t_0, t_0) = \{\text{id}\}$. Supposons que pour tout $t \in T \setminus \{t_0\}$, U/t soit W -asphérique. Pour que l'on ait $i \in W$, il faut et il suffit que i soit asphérique, i.e. que U/t_0 soit également W -asphérique.

Il faut prouver que $i \in W$ implique que U/t_0 est W -asphérique. Considérons l'inclusion

$$i_0 : U \longrightarrow U' \stackrel{\text{déf}}{=} X \setminus \{t_0\},$$

l'hypothèse sur les U/t , pour $t \in T \setminus \{t_0\}$, signifie que i_0 est W -asphérique. Donc i_0 est dans W , et comme le composé $i : U \xrightarrow{i_0} U' \xrightarrow{i'} X$ est dans W , cela implique que

¹⁰⁴Ici on a besoin de W(7 bis) forme forte, i.e. $i_0 \in W \iff i \in W$ (cf. annotation th. 4).

¹⁰⁵forme forte.

$i' : U' \rightarrow X$ est dans W . Nous sommes maintenant dans la situation du corollaire 4, qui implique que i' est W -asphérique. Donc $i = i' i_0$ est W -asphérique, comme composé de deux morphismes W -asphériques, q.e.d.

DÉMONSTRATION DE TH. 4.

(a) Critère de lissité de $\varphi_Q : \mathcal{X} = \int X_0 \begin{matrix} \nearrow X_1 \\ \searrow X_2 \end{matrix} \rightarrow Y$.

Comme $\{1\}, \{2\}$ sont des ouverts de $\Phi = 0 \begin{matrix} \nearrow 1 \\ \searrow 2 \end{matrix}$, $i_1 : X_1 \rightarrow \mathcal{X}$ et $i_2 : X_2 \rightarrow \mathcal{X}$ sont des immersions ouvertes. Comme $\varphi_Q \circ i_1 = f_1$,

[page 152]

$\varphi_Q \circ i_2 = f_2$, on voit déjà que

f_1 et f_2 lisses $\iff \varphi_Q$ lisse sur l'ouvert réunion de $i_1(X_1)$ et $i_2(X_2)$, i.e. sur $\mathcal{X} \setminus i_0(X_0)$.

Il reste à exprimer la lissité de φ_Q en les points x_0 de $i_0(X_0)$. Soient x_1, x_2, y les images de x_0 dans X_1, X_2, Y respectivement. Il faut exprimer que les fibres de

(*) $(\varphi_Q)/x_0 : \mathcal{X}/x_0 \rightarrow Y/y$

sont asphériques. Nous allons pour cela expliciter \mathcal{X}/x_0 et la flèche (*) en termes du carré commutatif

$$(**) \quad \begin{array}{ccc} X_0/x_0 & \xrightarrow{\alpha_1/x_0} & X_1/x_1 \\ \alpha_2/x_0 \downarrow & & \downarrow f_1/x_1 \\ X_2/x_2 & \xrightarrow{f_2/x_2} & Y/y, \end{array}$$

induit par Q . Je dis

Lemme 1. *Soit un carré commutatif*

$$Q = \begin{array}{ccc} X_0 & \xrightarrow{\alpha_1} & X_1 \\ \alpha_2 \downarrow & & \downarrow f_1 \\ X_2 & \xrightarrow{f_2} & Y \end{array}$$

dans Cat , $x_0 \in \text{Ob } X_0$, x_1, x_2, y ses images dans X_1, X_2, Y respectivement, Q/x_0 le carré

(**) ci-dessus, induit par Q sur les localisées X_0/x_0 etc., $\mathcal{X} = \int X_0 \begin{matrix} \nearrow X_1 \\ \searrow X_2 \end{matrix}$. On a alors un

[page 153]

isomorphisme canonique

$$\mathcal{X}/x_0 \simeq \int X_0/x_0 \begin{array}{l} \nearrow X_1/x_1 \\ \searrow X_2/x_2 \end{array},$$

et la flèche $(\varphi_Q)/x_0$, localisée de $\varphi_Q : \mathcal{X} \rightarrow Y$ en x_0 , s'identifie à la flèche $\varphi_{(Q/x_0)} :$

$$\varphi_{(Q/x_0)} : \int X_0/x_0 \begin{array}{l} \nearrow X_1/x_1 \\ \searrow X_2/x_2 \end{array} \longrightarrow Y/y.$$

DÉMONSTRATION du Lemme. On sait que

$$\mathcal{X}/x_0 \longrightarrow \mathcal{X}$$

est Cat-fibrée (scindée) (à fibres discrètes), et comme

$$\mathcal{X} \longrightarrow \Phi$$

est aussi Cat-fibrée (scindée), il s'ensuit qu'il en est de même de la flèche composée

$$\mathcal{X}/x_0 \longrightarrow \Phi.$$

Donc pour 'calculer' \mathcal{X}/x_0 , en tant que catégorie sur Φ , il faut expliciter ses trois fibres, et les deux foncteurs de changement de base qui les relient. On trouve aussitôt que ces fibres sont canoniquement isomorphes à

$$X_0/x_0, \quad X_1/x_1, \quad X_2/x_2,$$

et on admettra (!) que les foncteurs changement de base

[page 154]

$$X_0/x_0 \longrightarrow X_1/x_1, \quad X_0/x_0 \longrightarrow X_2/x_2$$

(définis à isomorphisme unique près) ne sont autres que les localisés α_1/x_0 et α_2/x_0 de $\alpha_1 : X_0 \rightarrow X_1$ et $\alpha_2 : X_0 \rightarrow X_2$. Cela montre donc qu'on a un isomorphisme

$$\mathcal{X}/x_0 \simeq \int X_0/x_0 \begin{array}{l} \nearrow X_1/x_1 \\ \searrow X_2/x_2 \end{array},$$

et l'on admettra aussi que la flèche $(\varphi_Q)/x_0 : \mathcal{X}/x_0 \rightarrow Y/y$ s'identifie à $\varphi_{(Q/x_0)}$.

Pour exprimer la W -lissité de φ_Q en $x_0 \in \text{Ob } X_0 \subseteq \text{Ob } \mathcal{X}$, on est donc ramené à exprimer la W -asphéricité des fibres de

$$\varphi_{(Q/x_0)} : \int X_0/x_0 \begin{array}{l} \nearrow X_1/x_1 \\ \searrow X_2/x_2 \end{array} \longrightarrow Y/y.$$

Pour expliciter ces fibres, on a besoin d'un autre lemme auxiliaire

Lemme 2 ⁽¹⁰⁶⁾. *Soit un carré commutatif dans Cat*

$$Q = \left(\begin{array}{ccc} X_0 & \xrightarrow{\alpha_1} & X_1 \\ \alpha_2 \downarrow & & \downarrow f_1 \\ X_2 & \xrightarrow{f_2} & Y \end{array} \right),$$

d'où

$$\varphi_Q : \left(\int X_0 \begin{array}{l} \nearrow X_1 \\ \searrow X_2 \end{array} \right) \longrightarrow Y,$$

[page 155]

et soit $y \in \text{Ob } Y$. Alors la fibre de φ_Q en y

$$\mathcal{X}_y = \varphi_Q^{-1}(\underbrace{\{y\}}_{\text{catégorie ponctuelle}})$$

est donnée par (comme catégorie au dessus de Φ)

$$\mathcal{X}_y \simeq \int X_{0y} \begin{array}{l} \nearrow X_{1y} \\ \searrow X_{2y} \end{array}.$$

DÉMONSTRATION. Il est immédiat qu'on a

$$\mathcal{X}_y \cap \underbrace{\mathcal{X}_s}_{X_s} \simeq (X_s)_y \quad \text{pour } s \in \text{Ob } \Phi = \{0, 1, 2\},$$

¹⁰⁶NB C'est le b) du th. 4.

et (le hasard fait bien les choses) les foncteurs changement de base

$$X_0 \longrightarrow X_1, \quad X_0 \longrightarrow X_2$$

envoient la sous-catégorie (non pleine) X_{0y} de X_0 dans les sous-catégories (non pleines) X_{1y} et X_{2y} de X_1 et X_2 respectivement.

$$\begin{array}{ccccc}
 X_{sy} & \longrightarrow & \mathcal{X}_y & \longrightarrow & \{y\} \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & \text{cart.} & & \text{cart.} & \\
 X_s & \longrightarrow & \mathcal{X} & \longrightarrow & Y \\
 \downarrow & & \downarrow & & \\
 & \text{cart.} & & & \\
 \{s\} & \longrightarrow & \Phi & &
 \end{array}$$

On a donc une sous-catégorie fibrée de \mathcal{X} , sous réserve de vérifier que les flèches strictement cartésiennes

$$x_0 \longrightarrow \alpha_1(x_0), \quad x_0 \longrightarrow \alpha_2(x_0)$$

dans \mathcal{X} , pour x_0 dans X_{0y} , sont dans \mathcal{X}_y , i.e. sont au-dessus de la flèche identique de y . Or c'est là la propriété essentielle

[page 156]

du foncteur $\varphi_Q : \mathcal{X} \longrightarrow Y$, qu'on a oublié d'expliciter dans 3.2. Ça a vraiment l'air de marcher (comme sur des roulettes!)

Appliquons le Lemme 2 au diagramme carré Q/x_0 et à $\varphi_{(Q/x_0)}$ (page 154), on voit donc que les fibres à examiner en les $u \in \text{Ob } Y/y$ ($u : y' \longrightarrow y$) peuvent s'écrire comme les intégrales

$$\mathcal{X}(x_0, u) \stackrel{\text{déf}}{=} \int (X_0/x_0)_u \begin{array}{l} \nearrow (X_1/x_1)_u \\ \searrow (X_2/x_2)_u \end{array} .$$

Utilisons maintenant le fait que f_1, f_2 sont W -lisses (exprimant que φ_Q est W -lisse dans $\mathcal{X} \setminus X_0$), donc que $(X_1/x_1)_u$ et $(X_2/x_2)_u$ sont W -asphériques. Dans le carré W -cocartésien

$$\begin{array}{ccc}
 & (X_1/x_1)_u & \\
 \alpha_1(x_0, u) \nearrow & & \searrow i_1(x_0, u) \\
 (X_0/x_0)_u & & (\mathcal{X}/x_0)_u \simeq \mathcal{X}(x_0, u) \\
 \alpha_2(x_0, u) \searrow & & \nearrow i_2(x_0, u) \\
 & (X_2/x_2)_u &
 \end{array}$$

⁽¹⁰⁷⁾, il faut exprimer que $(\mathcal{X}/x_0)_u$ est W -asphérique, sachant que $(X_1/x_1)_u$ et $(X_2/x_2)_u$ le sont. Donc cela équivaut à

$$i_1(x_0, u) \in W \quad (\text{ou } i_2(x_0, u) \in W),$$

donc aussi (moyennant W(7 bis)) à

[page 157]

$$\alpha_1(x_0, u) \in W, \quad \text{i.e. } (X_0/x_0)_u \text{ } W\text{-asphérique.}$$

Dire que c'est vrai pour tout u dans Y/y , signifie que $f_0 : X_0 \rightarrow Y$ est lisse en u [plutôt en x_0].

Donc on a prouvé a), sous la forme plus précise :

Corollaire 6. Soit $x \in \text{Ob } \mathcal{X}$ (où $\mathcal{X} = \int X_0 \begin{matrix} \nearrow X_1 \\ \searrow X_2 \end{matrix}$.) On veut exprimer la W -lissité de $\varphi_Q : \mathcal{X} \rightarrow Y$

en x .

- a) Si $x \in \text{Ob } X_i$ ($i \in \{1, 2\}$), φ_Q est W -lisse en x si et seulement si $f_i : X_i \rightarrow Y$ l'est.
- b) Supposons W(7 bis) ⁽¹⁰⁸⁾. Soit $x_0 \in \text{Ob } X_0$, et supposons f_1, f_2 lisses en x_1, x_2 . Alors φ_Q est W -lisse en x_0 si et seulement si $f_0 : X_0 \rightarrow Y$ l'est.

Donc (moyennant W(7 bis)) dans les trois cas $x \in \text{Ob } X_i$ ($i \in \{0, 1, 2\}$) on trouve que φ_Q est W -lisse en x si et seulement si $f_i : X_i \rightarrow Y$ l'est [pas vraiment pour $i = 0$].

ⓑ) Quant à b) du théorème 4, c'est le lemme 2 ci-dessus. Donc tout est prouvé!

[page 158]

3.5 Applications aux sommes amalgamées dans une catégorie X^\wedge (avec $X \in \text{Ob Cat}$).

D'abord une caractérisation des sommes amalgamées impliquant une immersion ouverte :

Proposition 15. Soit

¹⁰⁷attention, ce n'est pas un carré commutatif. Dire plutôt que $(\mathcal{X}/x_0)_u \simeq \int \mathcal{X}$ est lisse sur Φ à fibres W -asphériques (si f_0, f_1, f_2 sont lisses), donc W -asphérique puisque Φ l'est.

¹⁰⁸Inutile pour la partie directe, en supposant [phrase incomplète].

$$Q : \begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{i} & X \\ p \downarrow & & \downarrow q \\ U' & \xrightarrow{i'} & X' \end{array}$$

un carré commutatif dans Cat . Pour que ce carré soit cocartésien dans Cat , avec i (donc i') une immersion ouverte, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient satisfaites :

- a) Q est cartésien.
- b) i' est une immersion ouverte (donc i aussi).
- c) Si $T' = X' \setminus U'$, et $T = X \times_{X'} T' = X \setminus U$, $T \rightarrow T'$ est un isomorphisme.
- d) Pour tout $t \in T$, si t' est son image dans T' , le foncteur induit par p

$$p/t : \underbrace{U/t}_{=V_t} \rightarrow \underbrace{U'/t'}_{=V'_t}$$

satisfait à $(p/t)_!(e_{U/t}) \simeq e_{U'/t'}$, ou ce qui revient au même, les 'fibres locales' de p/t , $v' \setminus V'_t$, avec v' dans V'_t , sont 0-connexes.

[page 159]

Démonstration immédiate - ça devrait plutôt remonter au §1.

Corollaire 1. Soit Q un carré cartésien (cf. page 158), avec i' une immersion ouverte (donc i aussi), et q W -lisse (donc p aussi). On suppose que W satisfait l'axiome $W(5)$ de connexité⁽¹⁰⁹⁾. Soit $T' = X' \setminus U'$, $T = X \setminus U$, supposons que $T' \rightarrow T$ soit un isomorphisme. Alors Q est cocartésien.

Il suffit de prouver la condition d) de prop. 15. Considérons le carré

$$(*) \quad \begin{array}{ccc} U/t & \xrightarrow{i/t} & X/t \\ p/t \downarrow & & \downarrow q/t \\ U'/t' & \xrightarrow{i'/t'} & X'/t', \end{array}$$

je dis qu'il est *cartésien*. Cela résulte de la seule hypothèse que Q soit cartésien, sans hypothèse de lissité sur q ni que i' soit une immersion ouverte, et se voit p. ex. en regardant le diagramme cubique :

¹⁰⁹Donc il suffit que q soit W_0 -lisse, où $W_0 = \{f \in \text{FlCat} \mid \pi_0(f) \text{ bijectif}\}$.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & U/t & \longrightarrow & X/t \\
 & \swarrow & \downarrow & & \swarrow \\
 U'/t' & \longrightarrow & X'/t' & & \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & U & \longrightarrow & X \\
 \downarrow & \swarrow & \downarrow & \swarrow & \\
 U' & \longrightarrow & X' & &
 \end{array}$$

⁽¹¹⁰⁾. Dans ce diagramme, la face antérieure et postérieure du cube est cartésienne, par définition de U/t et de U'/t'

[page 160]

respectivement, et la base l'est par hypothèse. Il en résulte que la face supérieure du cube est également un carré cartésien.

Ceci vu, comme q est lisse, il en est de même de q/t dans le carré cartésien (*), donc aussi de p/t par changement de base. D'autre part, la lissité de q implique que q/t est à fibres W -asphériques, donc par changement de base il en est de même de p/t (qui est donc une W -équivalence universelle, i.e. une W -fibration triviale). De plus, à cause de la lissité de p/t , pour v' dans U'/t' , l'inclusion

$$(U/t)_{v'} \longrightarrow v' \setminus (U/t)$$

est dans W , donc (par W(5)) définit une bijection sur les π_0 . Comme $(U/t)_{v'}$ est W -asphérique par ce qui précède, il s'ensuit (par W(5)) que son π_0 est de cardinal 1, donc il en est de même de $v' \setminus (U/t)$, i.e. celui-ci est 0-connexe. Or c'est là la condition d) de la proposition 15, qu'il fallait établir.

[page 161]

Corollaire 2. Soit Q un carré cartésien (p. 158), avec i' (donc aussi i) une immersion ouverte, et q (donc aussi p) un isomorphisme local. Soit $T = X \setminus U$, $T' = X' \setminus U'$ (donc $T \simeq X \times_{X'} T'$), et supposons $T' \longrightarrow T$ isomorphisme. Alors Q est cocartésien.

C'est un cas particulier du corollaire 1, mais sans référence explicite à un localiseur W . On peut prendre $W = W_\infty$, ou $W = W_0$, pour se ramener au corollaire 1. Mais il est plus raisonnable de dire que dans le carré cartésien (*), l'hypothèse que q soit un isomorphisme local implique que q/t est un isomorphisme, donc p/t l'est aussi. Il en résulte bien que les $v' \setminus (U/t)$ sont 0-connexes, cette catégorie étant isomorphe à $v' \setminus (U'/t')$, donc a un objet initial.

Soit maintenant X un objet de Cat , et considérons un diagramme cocartésien dans X^\wedge :

$$(*) \quad \begin{array}{ccc}
 G & \xrightarrow{i} & F \\
 p \downarrow & & \downarrow q \\
 G' & \xrightarrow{i'} & F'
 \end{array}$$

¹¹⁰NB Ici t est un élément quelconque de $\text{Ob } X$, t' son image dans X' .

[page 162]

où i est un monomorphisme. On sait que le caractère cocartésien du carré se vérifie ‘argument par argument’ par le caractère cocartésien de

$$(*) \quad \begin{array}{ccc} G(x) & \xrightarrow{i(x)} & F(x) \\ p(x) \downarrow & & \downarrow q(x) \\ G'(x) & \xrightarrow{i'(x)} & F'(x), \end{array}$$

dans \mathbf{Ens} , $\forall x$ dans X . Or un tel carré cocartésien dans \mathbf{Ens} , avec $i(x)$ [un] monomorphisme, est aussi cartésien. Cela implique que le carré Q dans X^\wedge est également cartésien.

Considérons, d’autre part, le foncteur canonique

$$\varphi_X : F \mapsto X/F : X^\wedge \longrightarrow \mathbf{Cat}.$$

Il vaut mieux, d’ailleurs, le regarder comme un foncteur

$$\varphi_X : X^\wedge \longrightarrow \mathbf{Cat}/X,$$

et je rappelle, pour mémoire, que ce foncteur est pleinement fidèle, et que son image essentielle est formée des catégories X' sur X telles que

$$X' \longrightarrow X$$

[page 163]

soit un isomorphisme local, ou ce qui revient au même, que X' soit *fibrée* sur X à fibres discrètes :

$$\varphi_X : X^\wedge \xrightarrow{\simeq} \underbrace{\mathbf{Fib\ disc\ } X}_{\substack{\text{catégories fibrées} \\ \text{à fibres discrètes}}}.$$

Notons que toute flèche $X' \longrightarrow X''$ dans $\mathbf{Fib\ disc\ } X$ est un isomorphisme local (tautologique sur $X'/x' \longrightarrow X''/x''$), ce qui montre que si on a un diagramme

$$\begin{array}{ccc} X'/x' & \longrightarrow & X''/x'' \\ \text{iso.} \searrow & & \swarrow \text{iso.} \\ & X/x & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} X_1 & & X_2 \\ & \searrow & \swarrow \\ & X_0 & \end{array}$$

dans $\mathbf{Fib\ disc\ } X$, le produit fibré $X_3 = X_1 \times_{X_0} X_2$ dans \mathbf{Cat} est tel que $X_3 \longrightarrow X_2$ est un isomorphisme local, donc aussi $X_3 \longrightarrow X$. C’est-à-dire $\mathbf{Fib\ disc}(X)$ est stable par produits fibrés. Ceci implique que les produits fibrés existent dans $\mathbf{Fib\ disc\ } X$, et que ce sont les produits fibrés dans \mathbf{Cat} , ou dans \mathbf{Cat}/X .

[page 164]

De même pour les produits finis dans $\underline{\text{Fib disc}} X$, ce sont les produits finis dans Cat/X .
Bref

Lemme 1. *La sous-catégorie pleine $\underline{\text{Fib disc}} X$ de Cat/X est stable par \varprojlim finies, donc les \varprojlim existent dans $\underline{\text{Fib disc}} X$ et le foncteur d'inclusion*

$$\underline{\text{Fib disc}} X \longrightarrow \text{Cat}/X$$

y commute, et en particulier transforme carrés cartésiens de $\underline{\text{Fib disc}} X$ en carrés cartésiens de Cat/X , ou ce qui revient au même, de Cat . De plus, en vertu de l'équivalence

$$\varphi_X : X^\wedge \xrightarrow{\sim} \underline{\text{Fib disc}} X \hookrightarrow \text{Cat}/X,$$

le foncteur φ_X de X^\wedge dans Cat/X est exacte à gauche, en particulier il transforme carrés cartésiens de X^\wedge en carrés cartésiens de Cat/X , ou encore de Cat .

[page 165]

Notons aussi qu'étant exact à gauche, le foncteur φ_X de X^\wedge dans Cat/X transforme monomorphismes en monomorphismes. D'autre part :

Lemme 2. *Les monomorphismes qui sont des isomorphismes locaux sont exactement les immersions ouvertes. Donc dans $\underline{\text{Fib disc}} X$, les monomorphismes sont les immersions ouvertes, et le foncteur $\varphi_X : F \mapsto X/F$ transforme monomorphismes en immersions ouvertes.*

Revenons alors au diagramme cocartésien (*) (p. 161), et au diagramme correspondant dans Cat (et même dans $\underline{\text{Fib disc}} X$)

$$\begin{array}{ccccc} X/G \hookrightarrow & \xrightarrow{X/i} & X/F & \longleftarrow \dots \supset & T \\ \downarrow X/p & & \downarrow X/q & & \downarrow \dots \\ X/G' \hookrightarrow & \xrightarrow{X/i'} & X/F' & \longleftarrow \dots \supset & T' \end{array}$$

Comme (*) est cartésien, le carré précédent est cartésien, par ce qui précède. Je veux prouver qu'il est également cocartésien

[page 166]

(dans Cat/X , ou dans Cat , cela revient au même), et pour ceci j'applique le corollaire 2 de la proposition 15 (p. 161), compte tenu que X/q est un isomorphisme local, et X/i' (étant un isomorphisme local [et un] monomorphisme) une immersion ouverte. Il suffit de prouver que, T' et T étant les sous-catégories fermées complémentaires des ouverts X/G' de X/F' et de X/G de X/F , que $T \longrightarrow T'$ est [un] isomorphisme.

[Maintenant, F et G , et F' et G' , mais pas p et q , échangent leur rôles.]

La vérification est immédiate : T est la catégorie des flèches $x \longrightarrow G$ dans X^\wedge (de source x dans X) qui ne se factorisent pas par G [plutôt par F], T' celle des flèches $x \longrightarrow G'$

qui ne se factorisent pas par F' , le foncteur $T \rightarrow T'$ étant le foncteur composition de $x \rightarrow G$ avec $G \xrightarrow{q} G'$

$$\begin{array}{ccc} F & \hookrightarrow & G \\ \downarrow & & \downarrow \\ F' & \hookrightarrow & G' \end{array}$$

(NB Le composé ne se factorise pas par F' , car autrement, à cause du caractère cartésien de Q , $x \rightarrow G$ se factoriserait par F .) Mais pour x donné, la donnée de $x \rightarrow G$ ne se factorisant pas par F est celle d'un élément

[page 167]

de $G(x) \setminus F(x)$, et à cause du caractère cocartésien de Q ,

$$(G(x) \setminus F(x)) \rightarrow (G'(x) \setminus F'(x))$$

est bijectif, i.e. 'il revient au même' de se donner $x \rightarrow G$ ne se factorisant pas par F , ou $x \rightarrow G'$ ne se factorisant pas par F' .

Ainsi on a prouvé le

Théorème 5. *Soit X dans Cat , et*

$$Q : \begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{i} & G \\ p \downarrow & & \downarrow q \\ F' & \xrightarrow{i'} & G' \end{array}$$

un carré cocartésien dans X^\wedge , avec i [un] monomorphisme. Alors i' est [un] monomorphisme, le carré Q est aussi cartésien, et le carré correspondant dans Cat/X ou dans Cat

$$\begin{array}{ccc} X/F & \xrightarrow{X/i} & X/G \\ X/p \downarrow & & \downarrow X/q \\ X/F' & \xrightarrow{X/i'} & X/G' \end{array}$$

[page 168]

est à la fois cartésien et cocartésien. De plus, si W est un localiseur fondamental dans Cat , satisfaisant $W(7 \text{ bis})$ (en plus de $W(1,2,3)$), alors le carré X/Q dans Cat est W -cocartésien.

Ce dernier énoncé résulte de ce qui précédait et du corollaire 2 du théorème 4, compte tenu que X/q est un isomorphisme local, donc est W -lisse.

Corollaire : ⁽¹¹¹⁾ *On a (moyennant W(7 bis)) les équivalences*

$$\begin{aligned} i \in W_X &\iff i' \in W_X \\ p \in W_X &\iff q \in W_X, \end{aligned}$$

où

$$W_X \subseteq Fl(X^\wedge)$$

est défini par (cf. *Pursuing Stacks* ...)

$$u \in W_X \iff X/u : X/F \longrightarrow X/G \text{ est dans } W.$$

Ainsi, dans une catégorie X^\wedge , les sommes amalgamées impliquant un monomorphisme se comportent de façon parfaite du point de vue homotopique, plus exactement pour les localiseurs W_X , pourvu

[page 169]

seulement que W satisfasse à W(7 bis). Notamment, les monomorphismes dans X^\wedge sont des ' W_X -cofibrations', en un sens similaire de celui de la définition 2 c) (pages 99, 100 [plutôt 109, 110]).

[page 170 n'existe pas.]

¹¹¹**NB** Si on veut seulement $i \in W_X \implies i' \in W_X, p \in W_X \implies q \in W_X$, il suffit que l'on ait W(7 bis) faible, i.e. $i_0 \in W \implies i \in W$ dans l'énoncé de W(7 bis), p. 76 (Loc(6'a) avec les notations de XVI).