[page 171]

VI Critère de W_∞-asphéricité pour les $\Omega^n(X, x)$.

1 Cogitations sur W_n.

On va définir, pour $n \in \mathbf{N}$,

$$W_n \subseteq \mathrm{Fl(Cat)}$$

par les conditions suivantes (où $f : X \longrightarrow Y$ est une flèche dans Cat).

$f \in W_0 \iff$ a) $\pi_0(f)$ bijectif.

$\iff$ b) Pour tout préfaisceau d'ensembles F *constant* sur Y, $H^0(Y, F) \longrightarrow H^0(X, f^*F)$ est bijectif.

$\iff$ c) Le foncteur $F \longmapsto f^*F$ des préfaisceaux d'ensembles *constants* sur Y vers les faisceaux d'ensembles constants sur X est pleinement fidèle.

[Les termes de faisceau ou de préfaisceau sont utilisés ici indifféremment.]

NB Si F_0 est un ensemble, $F_{0\,Y}$ le faisceau d'ensembles constant défini par F sur Y, on a

$$\begin{array}{rcll} H^0(Y, F_{0\,Y}) & \simeq & \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ens}}(\pi_0(Y), F_0) & \text{(fonctoriel en } Y) \\ \mathrm{Hom}_{Y^\wedge}(F_{0\,Y}, G_{0\,Y}) & \simeq & \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ens}}(\pi_0(Y), \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ens}}(F_0, G_0)) & \text{(fonctoriel en } Y), \end{array}$$

ce qui implique que a) $\Longrightarrow$ c) $\overset{\text{tautologiquement}}{\underset{\substack{\text{en prenant} \\ \mathrm{Hom}_{Y^\wedge}(e_Y, F)}}{\Longrightarrow}}$ b) $\Longrightarrow$ a).

$f \in W_1 \iff$ a) $\pi_0(f)$ bijectif, et pour tout $x \in \mathrm{Ob}\, X$, $\pi_1(f, x) : \pi_1(X, x) \longrightarrow \pi_1(Y, f(x))$ est bijectif. (NB Il suffit de le vérifier pour *un* x dans chaque composante connexe de X.)

$\iff$ a′) $\Pi(X) \xrightarrow{\Pi f} \Pi(Y)$ est une équivalence de catégories.

$\iff$ b) $H^0(Y, F) \longrightarrow H^0(X, f^*F)$ bijectif pour tout faisceau d'ensembles *localement constant* sur Y, et $H^1(Y, F) \longrightarrow H^1(X, f^*F)$ bijectif si de plus F est un faisceau en groupes.

$\iff$ b′) Comme b), mais pour le H^1 on se borne à F *constant*, et on exige $H^1(f)$ *surjectif* seulement.

$\iff$ c) Le foncteur $F \longmapsto f^*F$ de la catégorie des faisceaux d'ensembles localement constants sur Y vers celle des faisceaux localement constants sur X est une équivalence de catégories.

`[page 172]`

NB Le groupe $\pi_1(X,x)$ est défini via la théorie du groupoïde fondamental. On sait qu'il est en bijection canonique avec $\pi_0(\Omega(X,x))$, où $\Omega(X,x) = \underline{\mathrm{Ch}}(X;x,x)$ (ce qui permet d'avoir une loi de composition monoïdale sur $\Omega(X,x)$, donnant la loi de groupe sur le π_0), ou au choix $\Omega(X,x) = \underline{\mathrm{Ch}}_\infty(X;x,x)$ (plus commode dans certaines situations, mais ne donnant pas directement la loi de composition dans $\pi_0(\Omega(X,x))$).

Je vais poser, pour $n \in \mathbf{N}$,

$$\pi_n(X,x) = \pi_0(\Omega^n(X,x)),$$

Ω^n désignant l'itéré n-ième du foncteur $(X,x) \longmapsto \Omega(X,x)$ de la catégorie $\mathrm{Cat}_\bullet$ des objets ponctués de Cat dans elle-même. Je préfère ici travailler avec la théorie $\underline{\mathrm{Ch}}$ au lieu de $\underline{\mathrm{Ch}}_\infty$. Tôt ou tard il faudra donner un énoncé de comparaison ...

Théorème 1 ([112]). *Soit $f : X \longrightarrow Y$ dans* Cat*, et soit $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$, S une partie de* $\mathrm{Ob}\, X$ *telle que le composé $S \longrightarrow \mathrm{Ob}\, X \longrightarrow \pi_0(X)$ soit* `[un]` *épimorphisme. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

a) $\pi_i(f,x)$ isomorphe pour tout $x \in \mathrm{Ob}\, X$ et tout $i \in [0,n]$.

a′) Comme a), mais avec $x \in S$.

b) On a

$$\begin{array}{llll} H^0(Y,F) & \xrightarrow{\sim} & H^0(X,f^*F) & \text{pour } F \text{ faisceau d'ensembles} \\ & & & \text{localement constant sur } Y. \\ H^1(Y,F) & \xrightarrow{\sim} & H^1(X,f^*F) & \text{si de plus } F \text{ faisceau en groupes.} \\ H^i(Y,F) & \xrightarrow{\sim} & H^i(X,f^*F) & \text{si de plus } F \text{ faisceau abélien, } i \in [2,n]. \end{array}$$

`[page 173]`

NB L'équivalence de a) et a′) devrait être triviale, mais pour cela il faut avoir défini les $\pi_n(X,x)$, pour x variable dans $\mathrm{Ob}\, X$, comme système local sur X, chose que je n'ai pas faite encore. Je vais essayer de le faire dans un courant d'air. Tout d'abord, les $\Omega(X,x)$ sont les fibres d'une W_ω-fibration parfaite ([113]), s'insérant dans le carré cartésien

$$\begin{tikzcd} \underline{\mathrm{Ch}}(X) \arrow[d, "p_X=(\sigma_X,\beta_X)"'] & \Omega(X,-) \arrow[l] \arrow[d] \\ X \times X & X. \arrow[l, "\mathrm{diag}_X"] \arrow[ul, dotted, "i_X"'] \end{tikzcd}$$

[112]Sans doute *faux.* On doit avoir a) $\Longrightarrow$ b), mais b) $\Longrightarrow$ a) `[est]` sans doute faux déjà pour $n = 2$ (sauf le cas X, Y 1-connexes). Cf. énoncé rectifié `[p. 178]`.

[113]**NB** W_ω est le plus petit localiseur de Cat (satisfaisant W(1, 2 bis, 3)).

On sait alors que l'on a un foncteur

$$(*) \qquad \begin{array}{ccc} \Pi X & \longrightarrow & \mathrm{Hot}_{W_\omega} \\ x & \longmapsto & \mathrm{hot}_{W_\omega}(\Omega(X,x)). \end{array}$$

Or on a, pour $i \geq 1$,

$$\pi_i(X,x) = \pi_{i-1}(\underbrace{\Omega(X,x)}_{\text{objet ponctué}}).$$

Cela donne le système local cherché des π_i, si seulement on avait un foncteur un peu plus précis que $(*)$, savoir

$$\Pi X \longrightarrow \mathrm{Hot}_{\bullet W_\omega} \qquad \text{(catégorie } W_\omega\text{-homotopique } \textit{ponctuée}\text{)}$$

([114]). Or la flèche $i_X : X \longrightarrow \underline{\mathrm{Ch}}X$ relevant p_X donne une section canonique de $\Omega(X,-)$ sur X -

[page 174]

celle justement qui associe à tout $x \in X$ le point marqué 1_x de $\Omega(X;x,x)$ ('lacet vide en x'). La question est donc celle-ci :

> On a une W-fibration $\Omega \longrightarrow X$, avec une section donné σ. Cela définit-il un foncteur canonique
> $$X \longrightarrow \mathrm{Hot}_{\bullet W},$$
> transformant toute flèche en [un] isomorphisme?

L'idée naturelle est de prendre

$$x \longmapsto \mathrm{hot}_{\bullet W}(\Omega/x)$$

en ponctuant Ω/x par le point marqué $\sigma(x)$ de $\Omega_x \hookrightarrow \Omega/x$. L'ennui, c'est que les morphismes de transition $\Omega/x \longrightarrow \Omega/x'$ (pour $x \xrightarrow{u} x'$ dans X) ne sont pas compatibles avec les points marqués. Mais on a une flèche (savoir $\sigma(u)$) allant

[page 175]

de l'image $\sigma(x)/x'$ du point marqué de Ω/x vers le point marqué $\sigma(x')/x'$ de Ω/x'. Ceci doit suffire pour définir la flèche

$$(\Omega/x, \sigma(x)/x) \longrightarrow (\Omega/x', \sigma(x')/x')$$

comme flèche dans $\mathrm{Hot}_{\bullet W}$, avec transitivité pour une composée $x \xrightarrow{u} x' \xrightarrow{v} x''$ dans X. Je vais pour l'instant me borner

[114] Mais il faut aussi vérifier que les $\pi_n(X,x)$ $(n \geq 1)$ sont des foncteurs sur $\mathrm{Hot}_{\bullet W_\infty}$, i.e. transforment W_∞-équivalences en itou. Cela résulte de W(4a) pour W_∞, qui implique que $(X,x) \longrightarrow \Omega(X,x)$ se factorise par $\mathrm{Hot}_{\bullet W_\infty}$ (en tant que foncteur à valeurs dans $\mathrm{Hot}_{\bullet W_\infty}$).

[page 176]

à une indication, quitte à faire des vérifications circonstanciées par la suite. Au besoin, j'utiliserai dès maintenant que pour $i \in \mathbf{N}$, $i \geq 1$,

$$\pi_i(f,x) : \pi_i(X,x) \longrightarrow \pi_i(Y,f(x))$$

peuvent s'interpréter comme provenant d'un homomorphisme de systèmes locaux

$$\underset{\sim}{\pi}_i(X,-) \longrightarrow f^*(\underset{\sim}{\pi}_i(Y,-))$$

sur X. La condition a) du théorème 1 s'interprète en disant que cet homomorphisme est un *isomorphisme* pour $i \in [1,n]$, et la condition a′) se borne alors à rappeler qu'il suffit de tester qu'il en est ainsi pour *un* point de chaque composante connexe de X.

L'énoncé du théorème 1 garde un sens pour $n = 1$, et dans ce cas a été 'rappelé' précédemment (et est $\pm$ tautologique). Cela va nous permettre de procéder par récurrence sur n, en supposant que le théorème est prouvé pour $n-1$. Cela signifie que l'on peut supposer que les conditions a) *et* b) sont satisfaites par f pour $i \in [1, n-1]$, et se borner à prouver que, sous ces conditions, la condition a) (ou a′), pour $i = n$, équivaut à la condition b) pour $i = n$.

[page 177]

Donc il faut prouver simplement ceci :

Lemme ([115]). *Supposons que* $\pi_i(f,x)$ [est un] *isomorphisme pour* $i \in [0, n-1]$ *et b) satisfait pour* $i \in [0, n-1]$*, où* $n \in \mathbf{N}$*,* $n \geq 2$*, est fixé. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) $\pi_n(f,x) : \pi_n(X,x) \longrightarrow \pi_n(Y,f(x))$ [est un] *isomorphisme pour tout* $x \in \mathrm{Ob}\, X$*.*

b) $H^n(Y,F) \xrightarrow{\sim} H^n(X, f^*F)$ [est un] *isomorphisme pour tout faisceau abélien localement constant sur* Y*.*

Notons que f induit une flèche dans $\mathrm{Cat}_\bullet$,

$$\Omega(f,x) : \Omega(X,x) \longrightarrow \Omega(Y,f(x)),$$

d'où

$$\begin{tikzcd}
\pi_i(\Omega(X,x)) \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\wr|"] & \pi_i(\Omega(Y,f(x))) \arrow[d, phantom, "\wr|"] \\
\pi_{i+1}(X,x) \arrow[r] & \pi_{i+1}(Y,f(x)),
\end{tikzcd}$$

s'identifiant à $\pi_{i+1}(f,x)$:

$$\pi_i(\Omega(f,x)) \simeq \pi_{i+1}(f,x).$$

[115] Sans doute faux.

L'hypothèse a) du lemme implique que $\pi_i(\Omega(X,x)) \xrightarrow{\sim} \pi_i(\Omega(Y,y))$ pour $i \in [0,n-1]$. Il s'agit ici des π_i basés en les points unités. On devra sans doute prouver que, du fait qu'il s'agit d'un morphisme de monoïdes dans Cat (satisfaisant certaines conditions?) ça reste vrai pour les π_i en *tout* point ξ de $\Omega(X,n)$. Par l'hypothèse de récurrence, on saura donc que $\Omega(X,x) \longrightarrow \Omega(Y,y)$

`[page 178]`

induit un isomorphisme pour la cohomologie à coefficients localement constants, jusqu'en dimension $n-1$ inclus.

Finalement, je me suis $\pm$ convaincu que l'énoncé du théorème 1 est faux tel quel. Voici un énoncé que j'éspère vrai, et que je vais essayer de prouver dans un esprit 'utilitaire', en utilisant tout ce que je sais en homotopie et cohomologie (et pas seulement ce que j'ai développé 'from scratch' dans le modélisateur Cat).

Théorème 1 rectifié. *Considérons, pour un entier $n \geq 2$ donné, les conditions suivantes sur une flèche $f : X \longrightarrow Y$ dans* Cat *(ou une application continue d'espaces topologiques, ou un morphisme dans $\mathbf{\Delta}^\wedge$ etc. etc.) :*

a_n) *Si Z est une 'fibre homotopique' de f (NB il y en a essentiellement une par composante connexe de Y), alors Z est n-connexe, i.e.*

`[page 179]`

(p. ex) $\pi_i(Z) = 0$ pour $i \in [0,n]$.

b_n) $\pi_0(f)$ *est bijectif, et $\forall\ x \in X$, $\pi_i(f,x) : \pi_i(X,x) \longrightarrow \pi_i(Y,f(x))$ est* `[un]` *isomorphisme pour $i \in [1,n]$. (***NB** *Il suffit de le dire pour* un *point x de chaque composante connexe de X.)*

c_n) $H^i(Y,F) \longrightarrow H^i(X,f^*F)$ `[est un]` *isomorphisme pour F faisceau localement constant sur Y (avec F abélien si $i \geq 2$, F faisceau en groupes si $i = 1$).*

On a alors

$$a_n \implies b_n \implies (^{116})\ c_n \implies (^{117})\ a_{n-1}$$

(et je présume que chacune de ces implications est stricte).

Démonstration. $\mathrm{a}_n \implies \mathrm{b}_n$ est conséquence immédiate de la suite exacte d'homotopie pour une Hot-fibration $\bar{X} \xrightarrow{\bar{f}} Y$ qui factorise $X \xrightarrow{f} Y$ en $f = \bar{f} \circ i$, $i \in W_\infty$. En fait, a_n *équivaut* à b_n + la surjectivité des $\pi_{n+1}(X,x) \longrightarrow \pi_{n+1}(Y,f(x))$, laquelle bien sûr ne résulte *pas* de b_n, i.e. de la bijectivité des $\pi_i(f,x)$ pour $i \leq n$ (prendre des $K(\pi,n+1)$). Donc l'implication est bien stricte.

[116] si X, Y 1-connexes, c'est vraiment prouvé, sinon, il y a des vérifications à faire (qui ont l'air soritales ...).

[117] **NB** Même si X, Y 1-connexes, il n'est pas clair que $\mathrm{c}_n \implies \mathrm{b}_n$, car il faut montrer que $\pi_n(Z) \longrightarrow \pi_n(X)$ est nul, et on trouve seulement que le composé avec $\pi_n(X) \longrightarrow H_n(X)$ est nul. Je présume qu'il y a des contre-exemples.

`[page 180]`

$b_n \Longrightarrow c_n$. On peut supposer que f est une Hot-fibration (et même Hot-parfait si ça nous chante ...). On sait déjà que pour

$$(*) \qquad H^i(Y,F) \longrightarrow H^i(X, f^*F)$$

tout est O.K. si $i \in \{0,1\}$. Donc on peut supposer F abélien. Si ça nous avance, on peut supposer, par récurrence, (que l'implication $b_{n-1} \Longrightarrow c_{n-1}$ est connue, donc) que $(*)$ est `[un]` isomorphisme pour $i < n$. Reste à le voir pour $i = n$. On est ramené bien sûr, comme $\pi_0(f)$ est bijectif, au cas où X, Y sont 0-connexes, donc il y a essentiellement une seule fibre Z. La suite exacte d'homotopie nous apprend que

$$\pi_i(Z,z) = 0 \qquad \text{pour } i \leq n-1 \ (Z \text{ est } (n-1)\text{-connexe})$$

et de plus

$$\pi_n(Z,z) \longrightarrow \pi_n(X,z) \qquad \text{est nul}$$

(car $\pi_n(X,z) \longrightarrow \pi_n(Y,y)$ `[est un]` isomorphisme donc `[un]` monomorphisme), donc

$$\pi_{n+1}(Y,y) \longrightarrow \pi_n(Z,z) \qquad \texttt{[est un]}\ \text{épimorphisme.}$$

Comme Z est $(n-1)$-connexe (donc aussi 1-connexe), on a

$$(*) \qquad H^i(Z,G) = 0\ , \qquad \text{si } 0 < i < n\ ,$$

pour G localement constant (donc constant) sur Z.

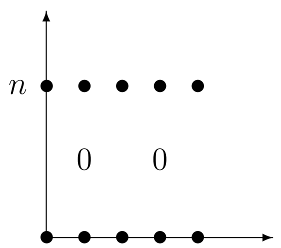
`[page 181]`

Écrivons la suite spectrale de Leray pour $f : X \longrightarrow Y$ et $f^*F = F_X$:

$$H^*(X, f^*F) \Longleftarrow E_2^{pq} = H^p(Y, H^q(Z, f^*F)),$$

où '$H^q(Z)$' doit être vu comme un système local sur Y. Donc par $(*)$ on a

$$E_2^{pq} = 0 \qquad \text{si } 0 < q < n,$$



,

donc on trouve la suite exacte

$$0 \longrightarrow H^n(Y,F) \longrightarrow H^n(X,F_X) \xrightarrow{\alpha} H^0(Y, \underbrace{H^n(Z, \overbrace{F_Z}^{M_Z})}_{\substack{= \ \mathrm{Hom}(\pi_n(Z,z),M) \\ \text{par [le] th. de Hurewicz}}}) \longrightarrow H^{n+1}(Y,F).$$

Ici je fixe un point x de X, Z désigne la fibre de f en $y = f(x)$, et M celle de F en y, $M = F_y$. Le groupe $\pi_1(Y)$ y opère, d'ailleurs $\pi \overset{\text{déf}}{=} \pi_1(X,x) \simeq \pi_1(Y,y)$ aussi. Le $H^0(Y, H^n(Z, F_Z))$ peut s'interpréter, sauf erreur, comme

$$\mathrm{Hom}_\pi(\pi_n(Z,x), M),$$

en tenant compte de l'opération de $\pi = \pi_1(X,x)$ sur $\pi_n(Z,x)$ également. (À vérifier.) Il faut interpréter la flèche

$$H^n(X, F_X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_\pi(\pi_n(Z,x), M),$$

via l'application composée `[où` $z = x$`, vu comme point de` Z`]`

$$(*) \qquad \pi_n(Z,z) \longrightarrow \pi_n(X,x) \longrightarrow H_n(X, \mathbf{Z}).$$

Si F est *constant* sur Y (p. ex. si Y `[est]` 1-connexe), donc de valeur M, on a les flèches canoniques

$$(*') \qquad H^n(X, F_X) = H^n(X, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}(H_n(X, \mathbf{Z}), M) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\pi_n(Z,z), M)\text{(}^{118}\text{)}$$

`[lire :` Hom_π`]`,

`[page 182]`

et sûrement (en dehors de toute hypothèse de type b_n ou autre) l'application canonique directe 'de localisation sur Y', suivi de …,

$$(**) \qquad H^n(X, F_X) \longrightarrow H^0(Y, H^n(Z, F_Z)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_\pi(\pi_n(Z), M)$$

n'est autre que la composée des applications canoniques ci-dessus. Dans le cas actuel où on suppose b_n, la deuxième flèche dans $(**)$ est `[un]` isomorphisme, donc la composée 'n'est autre' que la flèche de localisation elle-même. D'autre part $\pi_n(Z,z) \longrightarrow \pi_n(X,x)$ dans $(*)$ est nul, donc aussi $\pi_n(Z,z) \longrightarrow H_n(X, \mathbf{Z})$, donc aussi la flèche composée $(*')$ qui s'en déduit. Revenons alors à la suite exacte de Leray (page précédente), on trouve que $H^n(Y, F) \xrightarrow{\sim} H^n(X, F_X)$.

Comment récupérer le cas où F n'est *pas* constant? Dans le cas $n = 2$, cela marchait, en passant aux revêtements universels $\tilde{X}$, $\tilde{Y}$ de X, Y (par rapport aux points x, y choisis), et en écrivant les suites spectrales

$$\begin{array}{ccccc} H^*(Y, F) & \Longleftarrow & E_2^{pq} & = & H^p(\pi, H^q(\tilde{Y}, F_{\tilde{Y}})) \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ H^*(X, F_X) & \Longleftarrow & E_2'^{pq} & = & H^p(\pi, H^q(\tilde{X}, F_{\tilde{X}})). \end{array}$$

L'hypothèse b_n est conservée en passant de $f : X \longrightarrow Y$ à $\tilde{f} = \tilde{f}_x : \tilde{X} \longrightarrow \tilde{Y}$, donc on sait que

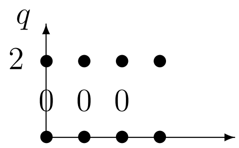
118 grâce à la composition avec $(*)$.

`[page 183]`

$$(*) \qquad E_2^{pq} \xrightarrow{\sim} E_2'^{pq} \qquad \texttt{[est un]} \text{ isomorphisme si } q \leq n.$$

Dans le cas $n = 2$, utilisant que

$$E_2^{p1} = E_2'^{p1} = 0 \qquad \text{car } H^1(\tilde{X}) = H^1(\tilde{Y}) = 0,$$



,

on trouve deux suites exactes

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^2(\pi, H^0(\tilde{Y})) \arrow[r] \arrow[d, "\text{iso}"] & H^2(Y) \arrow[r] \arrow[d] & H^0(\pi, H^2(\tilde{Y})) \arrow[r] \arrow[d, "\text{iso}"] & H^3(\pi, H^0(\tilde{Y})) \arrow[d, "\text{iso}"] \\
0 \arrow[r] & H^2(\pi, H^0(\tilde{X})) \arrow[r] & H^2(X) \arrow[r] & H^0(\pi, H^2(\tilde{X})) \arrow[r] & H^3(\pi, H^0(\tilde{X})),
\end{tikzcd}$$

et un homomorphisme de l'une dans l'autre, qui permet de conclure par le lemme des 5 que $H^2(Y, F) \longrightarrow H^2(X, F_X)$ est `[un]` isomorphisme. Mais pour n quelconque, la relation $(*)$ sur les termes E_2 (pour $q \leq n$) ne me semble pas impliquer la relation similaire pour les E_n supérieures, et de là pour les termes E_∞, ce qui permettrait de conclure.

Je reviens donc à la suite exacte p. 181, avec F faisceau *tordu.* J'ai envie de trouver une application canonique

$$H^n(X, G) \longrightarrow \overbrace{\mathrm{Hom}_\pi(\pi_n(X, x), G_x)}^{\text{Homs \textit{additifs} bien sûr, i.e. de } \mathbf{Z}[\pi]\text{-modules}} \qquad ,$$

où G est un faisceau abélien localement constant quelconque sur X, et $\pi = \pi_1(X, x)$. Si j'interprète

`[page 184]`

$\pi_n(X, x)$ par des classes d'homotopie d'applications ponctuées

$$(S^n, x_0) \xrightarrow{\varphi} (X, x)$$

j'ai bien, pour une telle application φ,

$$\varphi^* : H^n(X, G) \longrightarrow H^n(S^n, \overbrace{\varphi^* G}^{\simeq (G_x)_{S^n}}) \simeq G_x$$

(tenant compte que S^n est 1-connexe, et que sa n-cohomologie à valeurs dans un faisceau constant M est M.) Sûrement l'application

$$H^n(X, G) \longrightarrow G_x$$

ainsi définie ne dépend que de la classe d'homotopie ponctuée de φ, d'où

$$\pi_n(X,x) \times H^n(X,G) \longrightarrow G_x,$$

et il faut de plus prouver a) que c'est compatible avec les opérations de $\pi = \pi_1(X,x)$, et b) que c'est additif en $\pi_n(X,x)$, pour avoir l'application cherchée

$$H^n(X,G) \longrightarrow \mathrm{Hom}_\pi(\pi_n(X,x), G_x).$$

Si j'admets ceci, il n'y a qu'un pas pour admettre aussi que la flèche qui nous intéresse vraiment (dans la suite exacte p. 181)

`[page 185]`

$$H^n(X,F_X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_\pi(\pi_n(Z,z), \underbrace{M}_{=F_y})$$

n'est autre que la composée de la flèche précédente (page précédente) pour $G = F_X$, avec

$$\mathrm{Hom}_\pi(\pi_n(X,x), M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_\pi(\pi_n(Z,x), M)$$

déduite de

$$\pi_n(Z,x) \longrightarrow \pi_n(X,x).$$

Or cette flèche est nulle, par l'hypothèse b_n. Donc la flèche α dans la suite exacte page 181 est nulle, donc $H^n(Y,F) \longrightarrow H^n(X,F_X)$ est `[un]` isomorphisme, q.e.d. (mais il y a pas mal de travail de vérification à faire ...).

$\mathrm{c}_n \Longrightarrow \mathrm{a}_{n-1}$. On peut procéder par récurrence sur n. (NB L'enoncé a un sens même pour $n = 1$, où il est prouvé, et même $\mathrm{c}_1 \Longrightarrow \mathrm{b}_1$, et $\mathrm{b}_1 \Longrightarrow \mathrm{a}_0$, plus généralement $\mathrm{b}_n \Longrightarrow \mathrm{a}_{n-1}$, immédiat par `[la]` suite exacte d'homotopie.) Donc on sait déjà, en plus de l'hypothèse c_n, qu'on a a_{n-2}, i.e. Z est $(n-2)$-connexe. Il faut prouver qu'il est même $(n-1)$-connexe, i.e. $\pi_{n-1}(Z) = 0$. Le cas $n = 2$ demande

`[page 186]`

peut-être une attention particulière, car on ne sait pas même encore que Z est 1-connexe. Mais on sait que c_2 implique c_1, qui équivaut `[?]` à b_1, donc on a

$$\pi_1(X,x) \longrightarrow \pi_1(Y,y) \qquad \text{isomorphisme,}$$

donc

$$\pi_1(Z,x) \longrightarrow \pi_1(X,x) \qquad \texttt{[est]}\ \textit{nul,}$$

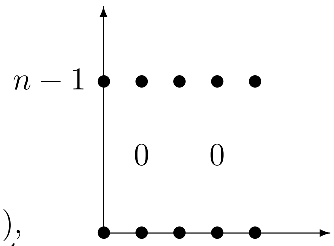
donc

$$\pi_2(Y,y) \longrightarrow \pi_1(Z,x) \qquad \texttt{[est un]}\ \text{épimorphisme,}$$

ce qui implique tout au moins que $\pi_1(Z,x)$ est *abélien.* Il faut le voir comme un π-module, et prouver sa nullité comme tel (moyennant c_2).

Passons au cas général. On a pour F localement constant abélien sur Y

$$H^*(X, F_X) \Longleftarrow \underbrace{E_2^{pq} = H^p(Y, H^q(Z, F_Z))}_{\substack{= 0 \text{ si } 0 < q < n-1 \\ \text{car } Z \text{ est } (n-2)\text{-connexe}}},$$



,

D'où

$$0 \longrightarrow H^{n-1}(Y, F) \longrightarrow H^{n-1}(X, F_X) \longrightarrow \underbrace{H^0(Y, H^{n-1}(Z, F_Z))}_{\substack{\mathrm{Hom}_\pi(\pi_{n-1}(Z,x), F_x) \\ \text{par Hurewicz}}} \longrightarrow H^n(Y, F) \longrightarrow H^n(X, F_X).$$

L'hypothèse c_n implique qu'on a

`[page 187]`

$$\mathrm{Hom}_\pi(\pi_{n-1}(Z, x), \underbrace{M}_{= F_x}) = 0$$

et ceci *quel que soit le π-module M,* puisque $\pi = \pi_1(X, x) \xrightarrow{\sim} \pi_1(Y, y)$. Cela implique (en prenant p. ex. $M = \pi_{n-1}(Z, x)$!) que $\pi_{n-1}(Z, x) = 0$. (Mais en faisant attention, dans le cas $n = 2$, qu'on sait déjà que $\pi_1(Z, x)$ est abélien).

Donc le théorème rectifie page 178 a bien l'air vrai. Il est un peu triste, puisque dans chacune des implications

$$\mathrm{a}_n \implies \mathrm{b}_n \implies \mathrm{c}_n \implies \mathrm{a}_{n-1}$$

on perd un chouia, et en fin de compte on sort avec la magnifique implication

$$\mathrm{a}_n \implies \mathrm{a}_{n-1}.$$

De toutes façons, il est $\pm$ clair que le "bon" localiseur W_n, celui qui doit définir les "n-types d'homotopie" comme objets de Hot_{W_n}, est défini par la condition a_n.

2 Critère de W_n-asphéricité.

Je vais essayer de faire mieux quand Y est réduit à un point. Cette fois, je

[page 188]

veux être strict, et donner (si je peux) des démonstrations complètes dans le cadre où je me place à présent, celui du modéliseur Cat, et en n'utilisant que ce que je sais y démontrer directement à présent, sans me référer à la théorie semi-simpliciale ou topologique.

Théorème 2 (?). *Soit X dans* Cat, $n \in \mathbf{N}$ *un entier* ≥ 1. *Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

a_n) X est 0*-connexe, et si x est dans X, $\pi_i(X, x) = 0$ pour $i \in [1, n]$ (condition qui ne dépend pas du choix de x), i.e. les $\Omega^i(X, x)$ pour $i \in [1, n]$ sont* 0*-connexes.*

b_n) Pour tout groupe G, $G \longrightarrow H^0(X, G_X)$ est un isomorphisme, et $H^1(X, G_X) = 0$. De plus, si G est abélien, on a aussi $H^i(X, G_X) = 0$, pour $i \in [1, n]$.

Démonstration. Pour $n = 1$ cette équivalence est $\pm$ tautologique et a été rappelée (sous une forme légèrement différente) au début (p. 71). On procède par récurrence. On peut donc supposer que $n \geq 2$, que X satisfait a_{n-1}, b_{n-1}, et prouver qu'alors a_n, b_n sont équivalentes, i.e. $\pi_n(X, x) = 0$ équivaut à $H^n(X, M) = 0$ pour tout groupe abélien M.

[page 189]

On utilise la W_∞-fibration (parfaite)

$$\begin{array}{ll} E = \underline{\mathrm{Ch}}(X; x, -) & \qquad E\ W_\infty\text{-asphérique} \\ \big\downarrow & \\ X & \end{array}$$

de fibre Z en x égale à $\Omega(X, x)$.

Supposons a_n) pour X, donc a_{n-1}) pour $\Omega(X, x)$. Par hypothèse de récurrence, on a donc

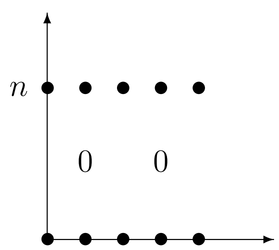
$$H^i(Z, M) = 0 \qquad \text{pour } i \in [1, n-1],$$

M groupe abélien. Donc dans la suite spectrale de Leray,

$$H^*(E, M) \Longleftarrow E_2^{pq} = H^p(X, H^q(Z, M))$$

on a

$$E_2^{pq} = 0 \qquad \text{si } q \in [1, n-1],$$



.

On a donc la suite exacte

$$0 \longrightarrow H^n(X,M) \longrightarrow H^n(E,M)$$

et comme E est W_∞-asphérique, on a $H^n(E,M)=0$, donc $H^n(X,M)=0$.

Inversement, supposons b$_n$), prouvons a$_n$). On sait déjà qu'on a a$_{n-1}$), donc a$_{n-2}$ pour $\Omega(X,x)$, ce qui implique

$$H^i(Z,M)=0 \qquad \text{pour } i\in[1,n-2],$$

donc

$$E_2^{pq}=0 \qquad \text{si } q\in[1,n-2].$$

On a donc la suite exacte

[page 190]

$$0 \longrightarrow \underbrace{H^{n-1}(X,M)}_{=0} \longrightarrow \underbrace{H^{n-1}(E,M)}_{=0} \longrightarrow H^0(X,H^{n-1}(Z,M)) \longrightarrow \underbrace{H^n(X,M)}_{=0} \longrightarrow H^n(E,M),$$

donc

$$H^0(X,\ \underbrace{H^{n-1}(Z,M)}_{\substack{\text{système local}\\ \textit{constant} \text{ sur } X,\\ \text{car } X \text{ est 1-connexe}}}\ )=0,$$

donc

$$H^{n-1}(Z,M)=0,$$

ce qui, par hypothèse de récurrence, implique $\pi_{n-1}(Z,z)=0$, donc $\pi_n(X,x)=0$, q.e.d.

Corollaire. *Pour que X soit W_∞-asphérique, i.e. pour qu'on ait $G \xrightarrow{\sim} H^0(X,G)$, $H^1(X,G)=0$* [pour] *tout groupe* [G], *et $H^i(X,G)=0$ si $i\geq 2$ pour G abélien, il faut et il suffit que* 1°) *X soit* 0*-connexe, et (x étant un point de X)* 2°) *les $\Omega^i(X,x)$* [soient] 0*-connexes pour $i\geq 1$.*

[page 191]

3 Sur la philosophie des fibres homotopiques.

Le critère d'asphéricité (pour W_∞) que je viens d'obtenir, grâce aux foncteur $\underline{\mathrm{Ch}}(X)$ (ou au choix, $\underline{\mathrm{Ch}}_\infty(X)$) et ses dérivés $\Omega(X,x)$ et les itérés, enlève tout doute (s'il pouvait en rester encore) que les 'espaces de chemins' que j'ai construit (assez péniblement!) sont bel et bien 'les bons'. Je voudrais maintenant me rendre compte de façon la plus précise possible de leur 'canonicité', dans quelle mesure ces constructions sont indépendant d'un choix (p.ex. celui entre la théorie $\underline{\mathrm{Ch}}$, et $\underline{\mathrm{Ch}}_\infty$).

Tout revient, finalement, à des questions de factorisation d'une flèche quelconque

$$f: X \longrightarrow Y$$

de Cat en
$$X \xrightarrow{i_f} \bar{X} \xrightarrow{\bar{f}} Y,$$
avec
$$i_f \in W, \qquad \bar{f} \in W\text{-fib}$$
(le fait que $\bar{f}$ puisse même être choisie W_ω-parfait, ne me paraissant pas essentiel ici).

C'est bien de cela qu'il s'agit pour construire

`[page 192]`

un objet 'chemins dans X'
$$\underline{\mathrm{Ch}}(X),$$
en factorisant l'application diagonale
$$X \xrightarrow{\mathrm{diag}_X} X \times X,$$
et aussi quand on construit $\Omega(X, x)$ comme fibre en x d'une W-fibration
$$E(X, x) \longrightarrow (X, x)$$
qui factorise l'inclusion
$$\{x\} \longrightarrow X$$
(donc $E(X, x)$ étant W-asphérique).

On peut être plus ou moins exigeant, et regarder, soit pour un 'but' Y (ou plutôt un S) fixé dans Cat, une factorisation fonctorielle
$$C : \mathrm{Cat}/S \longrightarrow \underline{\mathrm{Fib}}_W S \hookrightarrow \mathrm{Cat}/S$$
du morphisme structural $X \longrightarrow S$ d'un objet, en
$$X \xrightarrow{i_X} C(X) \longrightarrow S,$$
i.e. on se donne le foncteur C, *plus*

`[page 193]`

le morphisme fonctoriel
$$i_C : \mathrm{id}_{\mathrm{Cat}/S} \longrightarrow C$$
avec
$$(i_X : X \longrightarrow C(X)) \in W \qquad \forall\ X \text{ dans } \mathrm{Cat}/S,$$
soit être encore plus exigeant et faire varier en même temps la source et le but de $f : X \longrightarrow Y (= S)$, et demander un foncteur
$$\begin{aligned} C : \underline{\mathrm{Fl}}(\mathrm{Cat}) &\longrightarrow \mathrm{Cat} \\ f &\longmapsto C(f), \end{aligned}$$

avec des morphismes fonctoriels en f

$$\underbrace{s(f)}_{=X} \xrightarrow{i_f} \underbrace{C(f)}_{=\bar{X}} \xrightarrow{p_f} \underbrace{b(f)}_{=Y}$$

(i, p des flèches dans $\underline{\mathrm{Hom}}(\underline{\mathrm{Fl}}(\mathrm{Cat}), \mathrm{Cat})$), avec

$$i_f \in W, \qquad p_f \in W\text{-fib}$$

pour toute flèche f dans Cat.

`[page 194]`

Dans les deux points de vue, dans quel sens a-t-on *unicité* d'une telle construction?

Prenons d'abord le premier point de vue, factorisation des flèches à but fixé S, donc `[c'est une]` question dans Cat/S. J'ai oublié une propriété importante, mais elle résulte de ce qui a été dit : le foncteur

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, mapsto] & C(X) : & \mathrm{Cat}/S \arrow[rr] \arrow[dr, dotted] & & \mathrm{Cat}/S \\ & & & \underline{\mathrm{Fib}}_W S \arrow[ur, hook, dotted] & \end{tikzcd}$$

transforme `[les]` *flèches* `[de]` W *en itou*, comme on voit sur le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i_X"] \arrow[d, "f"'] & C(X) \arrow[d, "C(f)"] \\ Y \arrow[r, "i_Y"] & C(Y), \end{tikzcd}$$

où i_X, i_Y sont dans W, donc

$$f \in W \qquad \Longleftrightarrow \qquad C(f) \in W.$$

Soit

$$(C', i')$$

un deuxième foncteur, $\mathrm{Cat}/S \longrightarrow \mathrm{Cat}/S$,

`[page 195]`

muni d'un morphisme

$$i' : \mathrm{id}_{\mathrm{Cat}/S} \longrightarrow C'$$

qui est dans W argument par argument, et tel que C' se factorise par $\underline{\mathrm{Fib}}_W S$. On peut comparer C et C' moyennant $C \circ C'$, car

$$\begin{tikzcd} & C \circ C' & \\ C = C \circ \mathrm{id} \arrow[ur, "C * i'"] & & C' = \mathrm{id} \circ C', \arrow[ul, "i * C'"'] \end{tikzcd}$$

i.e. on a, pour tout X dans Cat/S,

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & C(C'(X)) & \\ C(X) \arrow[ur, "C(i'_X)"] & & C'(X), \arrow[ul, "i_{C'(X)}"'] \end{tikzcd}$$

le deux flèches étant dans W (celle de gauche parce que $C(W) \subseteq W$). Ce sont des flèches dans $\underline{\mathrm{Fib}}_W S$, et si on suppose que W satisfait W(4b), elles induisent des W-équivalences en chaque fibre. Cela montre donc déjà

[page 196]

qu'à isomorphisme (peut-être non-canonique) près, le foncteur composé défini par C,

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, mapsto] & C(X) \arrow[r, mapsto] & (s \longmapsto \mathrm{hot}_W(C(X)_s)) \\ \mathrm{Cat}/S \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "\varphi_C"'] & \underline{\mathrm{Fib}}_W S \arrow[r] & \underline{\mathrm{Hom}}(S^\circ, \mathrm{Hot}_W), \end{tikzcd}$$

ne dépend pas du choix particulier de C, i.e. deux tels foncteurs 'fibres homotopiques' (correspondant à deux choix C, C') sont toujours isomorphes. Mais au lieu d'utiliser $C \circ C'$ pour définir un tel isomorphisme, on aurai pu utiliser $C' \circ C$, ou quelque autre procédé. On aimerait comprendre s'il y a unicité véritable, une caractérisation intrinsèque de ces isomorphismes $\varphi_C \xrightarrow{\sim} \varphi_{C'}$, indépendamment de telle construction ou de telle autre.

Je présume que $C \circ C'$ est lui aussi muni de

$$\mathrm{id}_{\mathrm{Cat}/S} \longrightarrow C \circ C',$$

[page 197]

et même a priori de deux façons possible

$$\begin{tikzcd} & C(C'(X)) & \\ C(X) \arrow[ur, "C(i'_X)"] & & C'(X) \arrow[ul, "i_{C'(X)}"'] \\ & X, \arrow[ul, "i_X"] \arrow[ur, "i'_X"'] \arrow[uu, dotted] & \end{tikzcd}$$

soit par $C(i'_X) \circ i_X$, soit par $i_{C(X)} \circ i'_X$, heureusement elles sont égales, car pour toute flèche $X \xrightarrow{i'} X'$ dans Cat/S, le carré

$$\begin{tikzcd} & C(X') & \\ C(X) \arrow[ur, "C(i')"] & & X' \arrow[ul, "i_{X'}"'] \\ & X \arrow[ul, "i_X"] \arrow[ur, "i'"'] & \end{tikzcd}$$

est commutatif (par fonctorialité de $i_X : X \longrightarrow C(X)$), et on applique ceci au cas de $X' = C'(X)$, $i' = i'_X$.

Cette remarque nous encourage à faire un saut dans l'abstraction, et d'introduire la catégorie

[page 198]

$$(*) \qquad \mathcal{C} = \mathcal{C}_S = \begin{cases} \text{catégorie des couples } (C, i), \text{ avec} \\ C : \mathrm{Cat}/S \longrightarrow \mathrm{Cat}/S \text{ se factorisant par } \underline{\mathrm{Fib}}_W S, \\ i : \mathrm{id}_{\mathrm{Cat}/S} \longrightarrow C \text{ tel que } i_X \in W \ \forall\ X \text{ dans } \mathrm{Cat}/S, \end{cases}$$

une flèche

$$(C, i) \longrightarrow (C', i')$$

étant une flèche

$$C \xrightarrow{u} C' \qquad (\text{dans } \underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{Cat}/S, \mathrm{Cat}/S))$$

rendant commutatif le carré `[lire : le diagramme]`

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{id}_{\mathrm{Cat}/S} \arrow[dl, "i"'] \arrow[dr, "i'"] & \\ C \arrow[rr, "u"] & & C'. \end{tikzcd}$$

En d'autres termes, $\mathcal{C}$ est défini comme une sous-catégiorie pleine de

$$\mathrm{id}_{\mathrm{Cat}/S} \backslash \underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{Cat}/S, \mathrm{Cat}/S),$$

à savoir celle dont les objets (C, i) satisfont les deux conditions $(*)$ plus haut (impliquant l'une et l'autre le localiseur W).

[page 199]

Ces conditions impliquent ceci

a) $\forall\ X$ dans Cat/S, $(u_X : C(X) \longrightarrow C'(X)) \in W$, puisque

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "i_X \in W"'] \arrow[dr, "i'_X \in W"] & \\ C(X) \arrow[rr, "u_X"] & & C'(X), \end{tikzcd}$$

et

b) si W satisfait W(4b), de sorte que $u_X \in W_S^{\mathrm{f}}$, alors ce définit un *isomorphisme* entre $\varphi_C(X)$ et $\varphi_{C'}(X)$

$$\begin{tikzcd} s \arrow[r, mapsto] & \mathrm{hot}_W(C(X)_s) \arrow[d, "\wr\ u_{X,s}"] \\ s \arrow[r, mapsto] & \mathrm{hot}_W(C'(X)_s). \end{tikzcd}$$

Mieux encore, dans ce cas, le foncteur composé

$$\mathcal{C} \times \mathrm{Cat}/S \longrightarrow \underline{\mathrm{Fib}}_W S \longrightarrow \mathrm{HOT}_W^{\mathrm{lc}}(S)$$

donne naissance à

$$\mathcal{C} \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{Cat}/S, \mathrm{HOT}_W^{\mathrm{lc}}(S))$$

qui transforme toute flèche de $\mathcal{C}$ en [un] *isomorphisme,* donc se factorise par le groupoïde fondamental de $\mathcal{C}$,

$$\Pi\mathcal{C} \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{Cat}/S, \mathrm{HOT}_W^{\mathrm{lc}}(S)).$$

[page 200]

Quant au foncteur envisagé tantôt

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \longrightarrow & \underbrace{\underline{\mathrm{Hom}}\,(\mathrm{Cat}/S, \underline{\mathrm{Hom}}(S^\circ, \mathrm{Hot}_W))}_{\simeq \underline{\mathrm{Hom}}((\mathrm{Cat}/S)\times S^\circ, \mathrm{Hot}_W)} \\ C & \longmapsto & ((X,s) \longmapsto \mathrm{hot}_W(C(X)_s))\,, \end{array}$$

il se déduit du précédent en composant avec

$$\begin{tikzcd} \mathrm{HOT}_W(S) \arrow[r] \arrow[dr, dotted] & \underline{\mathrm{Hom}}(S^\circ, \mathrm{Hot}_W), \\ & \underline{\mathrm{Hom}}(\Pi S^\circ, \mathrm{Hot}_W) \arrow[u, dotted] \end{tikzcd}$$

plus exactement, avec le foncteur qui s'en déduit

$$\underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{Cat}/S, \mathrm{HOT}_W(S)) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{Cat}/S, \underline{\mathrm{Hom}}(S^\circ, \mathrm{Hot}_W)).$$

On voit poindre ici un principe plausible de canonicité d'isomorphismes, en ce qui concerne les foncteurs

$$C_W : \mathrm{Cat}/S \longrightarrow \mathrm{HOT}_W^{\mathrm{lc}}(S)$$

définis par les $C \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, par la relation

$$\Pi\mathcal{C} \approx \text{ catégorie ponctuelle, i.e. } \mathcal{C} \text{ est 1-connexe.}$$

De plus, les arguments utilisés jusqu'ici sont de nature à tel point formelle, que les aspects spécifiques du Modéliseur Cat

[page 201]

semblent n'y jouer pratiquement aucun rôle, ou un rôle très effacé.

Le carré de la page 197 montre surtout que la catégorie $\mathcal{C}$ est filtrante - (C, i), (C, i') s'envoient l'un et l'autre dans (C'', i''), avec $C'' = C \circ C'$, et $i'' = (C * i') \circ i = (i * C') \circ i'$. Il y a même une loi de composition dans $\mathcal{C}$, nullement commutative ni unitaire c'est sûr, mais sûrement associative, et (si cette composition est notée $*$) avec des morphismes fonctoriels

$$\xi \xrightarrow{\alpha_{\xi,\xi'}} \xi * \xi' \xleftarrow{\beta_{\xi,\xi'}} \xi'$$

qui assurent le caractère filtrant croissant de $\mathcal{C}$. Ces flèches semblent remplacer en quelque sorte l'unité bilatère absente, et on s'attend à ce qu'elles aient les mêmes excellentes propriétés que si on avait une telle unité, concernant les composés doubles $(\xi * \xi') * \xi'' \simeq \xi * (\xi' * \xi'')$,

[page 202]

$$(\xi * \xi') * \xi'' \xrightarrow{\sim} \xi * (\xi' * \xi'').$$

Il y a deux façons d'envoyer un produit binaire

$$\xi * \xi', \qquad \xi' * \xi'', \qquad \xi * \xi''$$

dans le produit ternaire, et bien elles doivent dans chacun des trois cas, être égales. Et de même il y a, ceci admis, encore deux façons d'envoyer ξ dans le produit ternaire, en factorisant soit par $\xi * \xi'$, soit par $\xi * \xi''$, et de même pour les deux autres foncteurs ξ', ξ''; et là encore, ces deux façons doivent être égales, dans chacun de ces trois cas - donc $3 + 3 = 6$ égalités en tout à écrire et à vérifier - on a vu pire!

La philosophie calculatoire devrait être celle-ci : Si on a un produit n-uple

$$\xi_1 * \xi_2 * \cdots * \xi_n$$

(où je me dispense de mettre des parenthèses ...), pour tout produit m-uple partiel $(m \in [1, n-1])$

[page 203]

$$\xi_{i_1} * \xi_{i_2} * \cdots * \xi_{i_m} \qquad\qquad (i_1 < i_2 < \cdots < i_m),$$

en utilisant à tour de bras les isomorphismes d'associativité et les $\alpha_{\xi,\xi'}$, $\beta_{\xi,\xi'}$, il n'y a pourtant qu'une seule façon de l'envoyer dans le produit n-uple. J'ai bien l'impression que ça doit être vrai. (Est-ce que ça implique déjà que $\mathcal{C}$ est 1-connexe?)

En fait, il y a bien une unité bilatère, mais elle n'est pas dans $\mathcal{C}$, mais dans la catégorie plus grande

$$\mathrm{id}_{\mathrm{Cat}/S} \backslash \underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{Cat}/S, \mathrm{Cat}/S),$$

qui elle, comme toute catégorie

$$\mathrm{id}_{\mathcal{X}} \backslash \underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{X}, \mathcal{X}),$$

est une catégorie monoïdale, i.e. avec produit associatif *et* unitaire. Les flèches $\alpha_{\xi,\xi'}$, $\beta_{\xi,\xi'}$ sont les flèches qui résultent de la présence de cette unité (vu que $\mathcal{C}$ est une sous-catégorie pleine), et alors il doit devenir clair qu'on a les compatibilités dites.

[page 204]

Mais même une catégorie monoïdale, est elle 1-connexe? Par exemple B_G, pour G un groupe disons, est bien une catégorie monoïdale et même 'groupale', une G-catégorie (tout ce qu'il y a de strict), et pourtant elle n'est *pas* 1-connexe!

Bien sûr, on peut court-circuiter la question de la 1-connexité de $\mathcal{C}$, en notant qu'après tout on a déjà a priori un objet privilégié dans

$$\underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{Cat}/S, \mathrm{HOT}^{\mathrm{lc}}_W(S)),$$

i.e. un foncteur canonique

$$\mathrm{Cat}/S \longrightarrow \mathrm{HOT}^{\mathrm{lc}}_W(S),$$

savoir le foncteur composé

$$(*) \qquad \mathrm{Cat}/S \underbrace{\longrightarrow}_{\substack{\text{localisation}\\ \text{par } W_S}} (\mathrm{Cat}/S)W_S^{-1} \longrightarrow \underbrace{\mathrm{HOT}^{\mathrm{lc}}_W(S)}_{\overset{\text{déf}}{=} (\underline{\mathrm{Fib}}_W S)(W_S^{\mathrm{f}})^{-1}} ,$$

où la deuxième flèche est définie comme le quasi-inverse de

$$(**) \qquad (\underline{\mathrm{Fib}}_W S)(W_S^{\mathrm{f}})^{-1} \longrightarrow (\mathrm{Cat}/S)W_S^{-1}$$

[page 205]

déduit de l'inclusion

$$(\underline{\mathrm{Fib}}_W S, W_S^{\mathrm{f}}) \hookrightarrow (\mathrm{Cat}/S, W_S).$$

Le fait que $(*)$ soit une équivalence, se prouve justement par le fait de l'existence d'un foncteur $C : \mathrm{Cat}/S \longrightarrow \mathrm{Cat}/S$ et d'un $i : \mathrm{id}_{\mathrm{Cat}/S} \longrightarrow C$, ayant les propriétés qu'on sait, i.e. du fait que $\mathcal{C} \neq \emptyset$. De plus, la donnée d'un objet C de $\mathcal{C}$ donne un moyen commode d'expliciter le quasi-inverse dudit foncteur. Mais ce quasi-inverse a une existence canonique et indépendante du choix d'un C, i.e. d'un mode de calcul. Le fait que le foncteur composé φ dans $(*)$ puisse se 'relever' (à isomorphisme près) en un foncteur

$$C : \mathrm{Cat}/S \longrightarrow \underline{\mathrm{Fib}}_W S$$

entre $\varphi(X) = \mathrm{hot}_{W,S}(X)$ et $\mathrm{hot}_{W,S}(C(X))$ et que l'isomorphisme puisse s'expliciter, lui aussi, par une flèche X-fonctorielle

$$i_X : X \longrightarrow C(X), \qquad i_X \in W,$$

dans Cat/S lui-même (et non seulement dans le localisé $(\mathrm{Cat}/S)W_S^{-1}$),

`[page 206]`

est une vertu particulière du `[mot illisible]`, qui ne doit pas pour autant faire oublier le caractère intrinsèque des flèches (∗), indépendamment de tout mode de calcul.

La clef de la situation, et des questions de canonicité, me semble être dans le fait que (∗∗) est une équivalence de catégories - et il faut avouer que, tout familier et quasiment banal qu'il soit finalement devenu pour moi, c'est là un fait tout à fait remarquable et nullement évident a priori. (Mais sans doute peut-on l'avoir aussi par les fourbis généraux à la Quillen-Thomason, sans se battre avec un formalisme de chemins ...) Les 'isomorphismes canoniques' qu'on peut établir entre une 'théorie C ' et une 'théorie C' ' (via deux constructions différentes, p. ex., de catégories de chemins, ou via l'approche de Quillen-Thomason, sans chemins) doivent toujours revenir à ceux

`[page 207]`

qu'on peu définir via la comparaison de la 'théorie C ' d'une part, la 'théorie C' ' de l'autre, avec ce que nous donne directement la flèche composée (∗) (p. 204). Finalement, il me semble que *l'existence* d'une théorie des 'fibres homotopiques' (ou 'W-homotopiques') d'une flèche $X \longrightarrow S$ dans Cat, résulte de l'équivalence (∗∗) (p. 204), et cette théorie pourrait sans doute dans une certaine mesure se développer à partir de là, sans choix d'un foncteur C ni d'une structure de catégorie de modèles au sens de Quillen.

4 Axiomatisation des 'fibres W-homotopiques'.

La reflexion de hier me fait revenir sur l'axiomatique dans des 'catégories de modèles'

$$(\mathcal{M}, W)$$

([119]) plus générales que Cat, dans l'esprit de VI (cf. théorème-scholie 2, p. 108-113). Pour le moment, on va supposer seulement $\mathcal{M}$ stable par produits fibrés (on n'a pas besoin d'objet final). On introduit l'ensemble

$$\mathrm{Fib}_W \subseteq \mathrm{Fl}(\mathcal{M})$$

`[page 208]`

des *W-fibrations* (sous-entendu 'ultrafortes'!) par la condition

> $f : X \longrightarrow Y$ est dans Fib_W si et seulement si le foncteur changement de base par X,
>
> $$\begin{array}{ccc} Y' & \longmapsto & X' = X \times_Y Y' \\ \mathcal{M}/Y & \longrightarrow & \mathcal{M}/X \end{array}$$

[119] W satisfait l'axiome de saturation faible : les isomorphismes `[sont]` dans W, et si deux parmi f, g, gf `[sont]` dans W, le troisième aussi.

transforme W_X dans W_Y, où $W_X \subseteq \mathrm{Fl}(\mathcal{M}/X)$ `[est]` défini par

$u \in W_X \iff \sigma(U) \in W$ ($\sigma : \mathcal{M}/X \longrightarrow \mathcal{M}$ le foncteur 'source', ou 'oubli de X').

([120]). Posons, pour tout S dans $\mathcal{M}$,

$$\mathrm{Ho}^!_W(S) = (\mathcal{M}/S)W_S^{-1},$$

qui joue le rôle d'une catégorie de W-types d'homotopie relatifs *localement constants* sur S. On aimerait décrire une loi contravariante en S pour $\mathrm{Ho}^!_W(S)$, i.e. pour

$$f : S' \longrightarrow S$$

flèche quelconque dans $\mathcal{M}$, définir

$$(*) \qquad f^*_W : \mathrm{Ho}^!_W(S) \xrightarrow{?} \mathrm{Ho}^!_W(S').$$

La difficulté est, bien sûr, que le foncteur changement de base

$$f^* : \mathcal{M}/S \longrightarrow \mathcal{M}/S'$$

n'est *pas* en général compatible avec les

`[page 209]`

localiseurs W_S, $W_{S'}$. La notion de W-fibration sert donc en premier lieu à dégager la condition la plus évidente sur une flèche $f : S' \longrightarrow S$ dans $\mathcal{M}$, pour que le foncteur changement de base soit compatible avec les localiseurs W_S, $W_{S'}$ (c'est *ça* la définition), donc induit $(*)$ sur les localisées.

Le *'problème des fibres homotopiques'* est justement de définir $(*)$ pour *toute* flèche dans $\mathcal{M}$, pas seulement pour les W-fibrations, de tellle façon que les $\mathrm{Ho}^!_W(S)$ forment, pour S variable, les fibres d'une catégorie fibrée remarquable sur $\mathcal{M}$. Quand $\mathcal{M}$ admet un objet final, de sorte que l'on peut regarder les flèches

$$p : e \longrightarrow S \qquad (p \text{ comme 'point'})$$

dans $\mathcal{M}$ comme des 'points' de S, la 'fibre W-homotopique' d'un objet quelconque X/S de $\mathcal{M}/S$ en ledit point sera par définition l'élément de

$$\mathrm{Ho}_W = \mathrm{Ho}_W(\mathcal{M}) \simeq \mathrm{Ho}^!_W(e)$$

défini par

$$p^*(\mathrm{ho}^!_{W/S}(X/S)),$$

[120]**NB** Donner ici la proposition: Fib_W *stable par composition et par changement de base, et contient les isomorphismes, stable par facteurs directs.*

[page 210]

où

$$\mathrm{ho}^!_{W/S} : \mathcal{M}/S \longrightarrow \mathrm{Ho}^!_W(S) \overset{\text{déf}}{=} (\mathcal{M}/S)(W_S)^{-1}$$

est le foncteur de localisation canonique.

Pour tout S dans $\mathcal{M}$, soit

$$\underline{\mathrm{Fib}}_W S \subseteq \mathcal{M}/S$$

la sous-catégorie pleine formée des objets X/S de $\mathcal{M}/S$ tels que $X \longrightarrow S$ soit W-fibrant. On va définir une variante

$$\mathrm{Ho}^{\mathrm{lc}}_W(S)$$

de $\mathrm{Ho}^!_W(S)$, comme

$$\mathrm{Ho}^{\mathrm{lc}}_W(S) \overset{\text{déf}}{=} (\underline{\mathrm{Fib}}_W S)(W^{\mathrm{u}}_S)^{-1},$$

où

> $W^{\mathrm{u}}_S \subseteq \mathrm{Fl}(\underline{\mathrm{Fib}}_W S)$ est le localiseur formé des flèches $u : X \longrightarrow Y$ qui sont 'universellement sur S dans W', i.e. telles que pour toute flèche $S' \longrightarrow S$ de $\mathcal{M}$ de but S, la flèche déduite par changement de base,
>
> $$u' : X' = X \times_S S' \longrightarrow Y' = Y \times_S S'$$
>
> est dans $W_{S'}$.

On a 'fait ce qu'il fallait' pour que $\mathrm{Ho}^{\mathrm{lc}}_W(S)$ soit contravariant en S pour des flèches *quelconques* $f : S' \longrightarrow S$ de $\mathcal{M}$, elles définissent

$$(**) \qquad f^{*\,\mathrm{lc}}_W : \mathrm{Ho}^{\mathrm{lc}}_W(S) \longrightarrow \mathrm{Ho}^{\mathrm{lc}}_W(S'),$$

[page 211]

puisque les W-fibrations sont stables par changement de base, et que par suite $f^* : \mathcal{M}/S \longrightarrow \mathcal{M}/S'$ induit

$$f^*_{\underline{\mathrm{Fib}}_W} : \underline{\mathrm{Fib}}_W S \longrightarrow \underline{\mathrm{Fib}}_W S'$$

qui, par définition de W^{u}_S et $W^{\mathrm{u}}_{S'}$, est compatible avec les localiseurs

$$f^*_{\underline{\mathrm{Fib}}_W} : (\underline{\mathrm{Fib}}_W S, W^{\mathrm{u}}_S) \longrightarrow (\underline{\mathrm{Fib}}_W S', W^{\mathrm{u}}_{S'}),$$

et passe donc aux catégories des fractions en une flèche $(*)$.

On peut se demander pourquoi ne pas être plus généreux, et définir $\mathrm{Ho}^{\mathrm{lc}}_W(S)$ comme $(\mathcal{M}/S)(W^{\mathrm{u}}_S)^{-1}$, en définissant W^{u}_S dans $\mathcal{M}/S$ de la même façon que tantôt dans $\underline{\mathrm{Fib}}_W S$ - ce qui ne coûte pas plus cher. Une première réponse est d'expérience le localiseur W^{u}_S dans $\mathcal{M}/S$ tout entier s'avère pratiquement inutilisable, d'une part parce que l'appartenance à W^{u}_S (pour une flèche entre objets de $\mathcal{M}/S$ qui ne sont pas très particuliers, p.ex. W-fibrés sur S) est invérifiable (sauf pour des isomorphismes et des choses comme ça . . .), et que d'autre part la catégorie de fractions est prohibitivement

`[page 212]`

grosse et ne peut servir (semble-t-il) à rien. Une autre réponse, c'est qu'on veut que la catégorie obtenue réponde bien à l'intuition de types d'homotopie relatifs *localement constants* sur S - et on veut donc que pour un changement de base quelconque $f : S' \longrightarrow S$ par un

S' dans $\mathcal{M}/S$, d'où un foncteur composé

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}_S(W_S^{\mathrm{u}})^{-1} \arrow[r, "f_W^{*\,\mathrm{lc}}"] \arrow[rr, bend right, "\varphi_{S'}"'] & \mathcal{F}_{S'}(W_{S'}^{\mathrm{u}})^{-1} \arrow[r] & \mathrm{Ho}_W \end{tikzcd}$$

([121]) déduit des foncteurs de catégories avec localiseurs

$$(\mathcal{F}_S, W_S^{\mathrm{u}}) \xrightarrow{f^*} (\mathcal{F}_{S'}, W_{S'}^{\mathrm{u}}) \xrightarrow{\text{oubli de } S'} (\mathcal{M}, W)$$

(foncteur composé $\varphi_{S'}$ qui peut être vu comme le foncteur *'fibre homotopique en l'objet S' sur S'*, cet objet étant visualisé comme un 'point' de S 'à valeurs dans S' ' suivant le yoga fonctoriel général ...), le foncteur

$$\begin{array}{ccc} S' & \longmapsto & \varphi_{S'}(\xi) \qquad \text{pour } \xi \text{ dans } \mathcal{F}_S(W_S^{\mathrm{u}})^{-1} \\ \mathcal{M}/S & \longrightarrow & \mathrm{Ho}_W \end{array}$$

transforme flèches dans W_S en isomorphismes : la 'fibre W-homotopique' en S'/S d'un objet de $\mathcal{F}_S(W_S^{\mathrm{u}})^{-1}$ (vu comme W-type d'homotopie *localement constant* sur S) doit être 'la même', si S' remplacé par S'' avec $S'' \longrightarrow S'$ donné et dans W_S. C'est pour cela qu'il est raisonnable de prendre $\mathcal{F}_S$ 'assez petit' (savoir $\underline{\mathrm{Fib}}_W S$, qui est

`[page 213]`

exactement ajusté pour cela), plutôt que de prendre $\mathcal{M}/S$ tout entier.

On peut donc dire que la catégorie $\underline{\mathrm{Fib}}_W S$, et le localiseur W_S^{u} ont été construits ad-hoc, le plus simplement possible, pour donner lieu à un localisé $\mathrm{Ho}_W^{\mathrm{lc}}(S)$ qui réponde à l'intuition de W-types d'homotopie relatifs localement constants des deux façons suivantes :

1°) Il y a spontanément une loi contravariante en S, pour des flèches quelconques $S' \longrightarrow S$ dans Cat (on a défini W_S^{u} juste exprès en conséquence).

2°) que la notion de 'fibre W-homotopique en S'/S' d'un objet ξ de $\mathrm{Ho}_W^{\mathrm{lc}}$ satisfasse à la condition précédente, i.e. une flèche $S'' \longrightarrow S'$ dans $\mathcal{M}/S$ qui est dans W_S définisse un *isomorphisme* (dans Ho_W) des fibres homotopiques

$$\underbrace{\xi_{S''}}_{\varphi_{S''}(\xi)} \longrightarrow \underbrace{\xi_{S'}}_{\varphi_{S'}(\xi)}$$

(et on a choisi $\mathcal{F}_S = \underline{\mathrm{Fib}}_W(S)$ juste exprès pour ça).

[121] $\mathcal{F}$ désigne ici une sous-catégorie fibrée de $\mathcal{M}/\mathcal{M} = \underline{\mathrm{Fl}}(\mathcal{M})$ sur $\mathcal{M}$, substitut éventuel de celle formée de $\underline{\mathrm{Fib}}_W S$ ou de $\mathcal{M}/S$ tout entier.

On a donc une excellente notion de fibres W-homotopiques pour des X W-fibrés sur S - cette fois excellente pour des changements de base *quelconque* - et il n'y a aucun mérite à ça puisqu'on a tout défini exprès pour ça!

`[page 214]`

Pour le dire autrement, on a défini *deux* notions de W-types d'homotopie relatifs sur S, l'une de façon à donner un tel type d'homotopie $\mathrm{ho}^!_{W,S}(X)$ pour *tout* objet de $\mathcal{M}/S$, mais il n'y a a priori une bonne notion de changement de base que pour les changements de base $S' \longrightarrow S$ qui sont W-fibrés, l'autre, qui correspond plus directement à l'intuition d'un W-type d'homotopie localement constant sur S, n'associe un tel type $\mathrm{ho}^{\mathrm{lc}}_{W,S}(X)$ qu'aux X de $\mathcal{M}/S$ qui sont W-fibrés sur S, en revanche cette notion admet une bonne notion d'image inverse et de 'fibre W-homotopique' pour des changements de base quelconques.

Une 'bonne' théorie des fibres W-homotopiques doit réunir en une seule les deux notions précédentes, de sorte que les avantages des deux s'ajoutent, et les désavantages s'éliminent! Elle s'obtient à l'aide d'un axiome draconien sur la situation (alors que jusqu'à maintenant on n'a rien utilisé sur $W \subseteq \mathrm{Fl}(\mathcal{M})$, si ce n'est tout au plus la saturation faible, en plus de l'existence des produits fibrés) :

`[page 215]`

a) (*Axiome de la fibre homotopique.*) Pour tout objet S dans $\mathcal{M}$, le foncteur canonique

$$\mathrm{Ho}^{\mathrm{lc}}_W(S) \longrightarrow \mathrm{Ho}^!_W(S)$$

déduit de l'inclusion

$$(\underline{\mathrm{Fib}}_W(S), W^{\mathrm{u}}_S) \longrightarrow (\mathcal{M}/S, W_S)$$

est une *équivalence de catégories.*

Cet axiome implique que dans $\underline{\mathrm{Fib}}_W S$, W^{u}_S et le localiseur induit par W_S (que je désigne encore par W_S par abus de notation) ont même saturé fort. En fait, il est naturel de compléter l'axiome précédent par le suivant.

b) (Axiome adjoint de l'axiome de la fibre homotopique.) Sur $\underline{\mathrm{Fib}}_W S$, les localiseurs W^{u}_S et W_S coïncident, i.e. on a ceci :

> Soient X, Y dans $\underline{\mathrm{Fib}}_W S$, $X \xrightarrow{u} Y$ un S-morphisme tel que $u \in W_S$, alors $u \in W^{\mathrm{u}}_S$ (i.e. le morphisme $u' : X' \longrightarrow Y'$ déduit par tout changement de base $S' \longrightarrow S$ est encore dans W).

`[page 216]`

Je présume que a) sera rarement satisfait sans que b) le soit (et inversement d'ailleurs), et que la démonstration de a) et b) se fera pratiquement en une seule haleine.

Si $\mathcal{M} = \mathrm{Cat}$, W un localiseur fondamental, alors la notion adaptée ici de W-fibration (lire : 'ultraforte', dans la terminologie spécifique développée dans Cat) est à tel point forte, qu'elle implique déjà pratiquement b) (moyennant W(4a$'$), il est vrai, cf. p. 53), et

a) n'est guère vérifiable que si on a W(4a) ([122]) (loc. cit.). Donc ici c'est 'l'axiome des fibrations' sur W, sous sa forme forte W(4a), qui est la clef de voûte d'une bonne théorie des fibres homotopiques.

Une telle théorie (revenant au cas général) revient à dire, pour l'essentiel, qu'il y a 'assez' de W-fibrations ('ultrafortes') pour pouvoir décrire *tout* objet d'un $\mathcal{M}/S$, à W_S-équivalence près, comme un objet W-fibrant sur S. Dans les cas à ma connaissance, on a de plus ceci : on

`[page 217]`

a pour tout S dans $\mathcal{M}$ une sous-catégorie $\mathcal{F}_{0\,S}$ de $\underline{\mathrm{Fib}}_W S$ (je pense par exemple à $\underline{\mathrm{Parf}}_W S$, voire $\underline{\mathrm{Parf}}_{W_\omega} S$, dans le cas où $\mathcal{M} = \mathrm{Cat}$), telle que pour toute sous-catégorie pleine $\mathcal{F}$ de $\mathcal{M}/S$ telle que

$$\mathcal{F}_{0\,S} \subseteq \mathcal{F} \subseteq \mathcal{M}/S$$

(a fortiori, pour une $\mathcal{F}$ pleine telle que $\underline{\mathrm{Fib}}_W S \subseteq \mathcal{F} \subseteq \mathcal{M}/S$), les inclusions induisent des équivalences de catégories

$$\mathcal{F}_{0\,S}(W_S)^{-1} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}(W_S)^{-1} \xrightarrow{\sim} \underbrace{(\mathcal{M}/S)(W_S)^{-1}}_{\overset{\text{déf}}{=} \mathrm{Hot}^!_W(S)}.$$

Le choix de $\mathcal{F}_{0\,S}$ ne semble pas pouvoir se fixer de façon 'la meilleure possible', une fois pour toutes dans le contexte axiomatique adopté ici. C'est un élément de structure supplémentaire dans $\mathcal{M}$ (en plus du localiseur W), au même titre que la donnée des classes de Q-fibrations et Q-cofibrations, à la Quillen. J'ignore si les axiomes a), b) ci-dessus (axiome de la fibre homotopique) impliquent déjà

`[page 218]`

la variante de (a) :

(c) Pour toute sous-catégorie pleine $\mathcal{F}$ de $\mathcal{M}/S$ telle que

$$\underline{\mathrm{Fib}}_W S \subseteq \mathcal{F} \subseteq \mathcal{M}/S$$

les inclusions induisent des équivalences

$$\underbrace{(\underline{\mathrm{Fib}}_W S)(W_S)^{-1}}_{\substack{=\ \mathrm{Ho}^{\mathrm{lc}}_W(S) \\ \text{moyennant a)}}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}(W_S)^{-1} \xrightarrow{\sim} \underbrace{(\mathcal{M}/S)(W_S)^{-1}}_{=\mathrm{Ho}^!_W(S)}.$$

Mais je présume que pratiquement, quand on pourra vérifier (a), on pourra vérifier (c) également ([123]).

[122] Non, il me semble que W(4b) doit suffire ...

[123] Cf. page 240 ff. Il faudrait ici développer un peu plus le formalisme de $\mathrm{Ho}^{\mathrm{lc}}_W(S)$ et les fibres homotopiques, sous l'hypothèse (a) (b) plus haut.

5 Axiomatique des W-types d'homotopie relatifs non localement constants $\mathrm{Ho}_W^{\mathcal{L}}(S)$.

On n'a rien dit jusqu'à ce point d'éventuels W-types d'homotopie relatifs (sur un objet S de $\mathcal{M}$) qui ne seraient *pas* "localement constants". Il en était question pourtant dans loc. cit. (VI, théorème-scholie 2, partie II du théorème pages 109-113.) Je profite de l'occasion pour revenir là dessus. Il faut introduire, dans chaque $\mathcal{M}/S$, un deuxième localiseur

$$W_S^0 \subseteq \mathrm{Fl}(\mathcal{M}/S), \qquad W_S^0 \subseteq W_S$$

(plus fin que W_S), ce qui permettra de définir

[page 219]

$$\mathrm{Ho}_W(S) \overset{\text{déf}}{=} (\mathcal{M}/S)(W_S^0)^{-1}.$$

Qu'il n'y ait pas de choix *canonique* qui s'impose ici, déduit de la seule structure $(\mathcal{M}, W)$, est claire sur l'exemple de (Cat, W), auquel cas on trouve *deux* choix symétriques, transformés l'un en l'autre par l'involution

$$X \longmapsto X^\circ : (\mathrm{Cat}, W) \xrightarrow{\sim} (\mathrm{Cat}, W),$$

à savoir W_S^{g} et W_S^{d}. Le choix de l'un ou de l'autre, disons (pour fixer les idées) de W_S^{g}, est associé à une notion d'*isomorphisme local* (ou de 'coisomorphisme local' dans le cas de W_S^{d}) que je voudrais axiomatiser. Il semble bien que pour les principales catégories de modèles pour Hot (et pour ses variantes), on dispose de façon assez naturelle d'une telle notion d'isomorphisme local (sans l'embarras, le plus souvent, d'un automorphisme involutif fournissant une notion symétrique ...).

On supposera donc, comme dans loc. cit. p. 94-96, donné une classe

$$\mathcal{L} \subseteq \mathrm{Fl}(\mathcal{M})$$

de morphismes, jounant le rôle de 'flèches de

[page 220]

localisation' ou 'd'isomorphismes locaux', satisfaisant les conditions suivantes.

(∗) $\mathcal{L}$ contient les isomorphismes, est stable par composition, et par changement de base.

On pose, pour S dans $\mathcal{M}$,

$\mathcal{L}_S \subseteq \mathcal{M}/S$ sous-catégorie pleine des S'/S telle que $S' \longrightarrow S$ `[soit]` dans $\mathcal{L}$.

On définit alors pour tout S dans $\mathcal{M}$

$$W_S^{\mathcal{L}} \subseteq \mathrm{Fl}(\mathcal{M}/S)$$
$$(X \xrightarrow{u} Y) \in W_S^{\mathcal{L}} \iff \forall\, S' \in \mathcal{L}_S,\ (u_{S'} : X \times_S S' \longrightarrow Y \times_S S') \text{ est dans } W.$$

C'est donc une variante du localiseur W_S^{u}, où maintenant on ne prend comme changements de base que les flèches '$\mathcal{L}$-localisantes', i.e. $\in \mathcal{L}$. On a donc

$$W_S^{\mathrm{u}} \subseteq W_S^{\mathcal{L}} \subseteq W_S$$

en tant que parties de $\mathrm{Fl}(\mathcal{M}/S)$, et de même dans toute sous-catégorie pleine $\mathcal{F}$ de $\mathcal{M}/S$. Dans le cas de $\underline{\mathrm{Fib}}_W S$, moyennant l'axiome b ci-dessus ($W_S^{\mathrm{u}} = W_S$ dans $\underline{\mathrm{Fib}}_W S$), les trois localiseurs coïncident.

On pose

$$\mathrm{Ho}_W^{\mathcal{L}}(S) \text{ (ou } \mathrm{Ho}_W(S)) \overset{\text{déf}}{=} (\mathcal{M}/S)(W_S^{\mathcal{L}})^{-1},$$

et on a donné dans loc. cit. (partie II du théorème-scholie) un résultat intéressant sur cet invariant, pour S fixé. Mon propos

[page 221]

présent est de voir ce qui se passe pour S variable. Visiblement, une notion de W-type d'homotopie relatif sur un objet quelconque S de $\mathcal{M}$ n'est satisfaisante, que si elle permet des images inverses par des flèches *quelconques*

$$f : S' \longrightarrow S$$

dans $\mathcal{M}$, qui doivent définir absolument

$$f_W^{*\mathcal{L}} \text{ ou } f_W^* : \mathrm{Ho}_W^{\mathcal{L}}(S) \longrightarrow \mathrm{Ho}_W^{\mathcal{L}}(S').$$

On est donc confronté à la même perplexité que tantôt - et ce n'est *pas,* cette fois, l'introduction de $\underline{\mathrm{Fib}}_W(S)$ qui va sauver la situation, car

$$(\underline{\mathrm{Fib}}_W S)(\underbrace{W_S^{\mathcal{L}}}_{\substack{= W_S \\ = W_S^{\mathrm{u}}}})^{-1} \longrightarrow (\mathcal{M}/S)(W_S^{\mathcal{L}})^{-1}$$

n'a aucune envie, cette fois, d'être une équivalence de catégories, mais bien plutôt une inclusion (pleinement fidèle) des W-types d'homotopie relatifs constants sur S, dans les W-types d'homotopie quelconques. Il faut visiblement un axiome qui remplace l'axiome 'de la fibre homotopique'.

[page 222]

Dans le cas de Cat, la classe $\mathcal{L}$ des isomorphismes locaux (disons) permet de définir, comme ci-dessus, le localiseur $W_S^{\mathcal{L}} = W_S^{\mathrm{g}}$ dans les Cat/S, comme formé des $u : X \longrightarrow Y$ sur S qui sont dans W et le restent par tout changement de base $S' \longrightarrow S$ qui est dans $\mathcal{L}$. Mais il y a lieu de *saturer* $\mathcal{L}$, en regardant la classe $\mathcal{L}^\wedge$ des flèches $f : S \longrightarrow S'$ de Cat telles que le changement de base

$$f^* : \mathrm{Cat}/S \longrightarrow \mathrm{Cat}/S'$$

envoie W_S^{g} dans $W_{S'}^{\mathrm{g}}$. Ce $\mathcal{L}^\wedge$ est tautologiquement stable par composition, et contient les isomorphismes (mieux, contient $\mathcal{L}$ = ensemble des isomorphismes locaux). Il n'est pas clair, par la définition donnée ici, qu'il soit stable par changement de base - on va renforcer la définition en conséquence, en exigeant, pour que $f : S' \longrightarrow S$ soit dans $\mathcal{L}^\wedge$, que pour tout T sur S, considérons $f_T : T' = S' \times_S T \longrightarrow T$, $f_T^* : \mathrm{Cat}/T \longrightarrow \mathrm{Cat}/T'$ soit compatible avec les localiseurs W_T^{g}, $W_{T'}^{\mathrm{g}}$. Alors $\mathcal{L}^\wedge$ est (tout comme $\mathcal{L}$) stable par composition et par changement de base, et de plus il contient $\mathcal{L}$. De plus, pour tout S, on a $W_S^{\mathcal{L}} = W_S^{\mathcal{L}^\wedge}$. Ce petit sorite pourrait se faire bien sûr pour tout modéliseur $(\mathcal{M}, W)$. Mais la chose intéressante ici, c'est que $\mathcal{L}^\wedge$ contient l'ensemble Liss_W des flèches W-lisses. (J'ignore s'il est égal.) On aurait donc pu

`[page 223]`

aussi bien partir de l'ensemble de flèches Liss_W, pour définir les localiseurs W_S^{g} comme

$$W_S^{\mathrm{g}} = W_S^{\mathrm{Liss}_W} \qquad \text{au lieu de } W_S^{\mathrm{g}} = W_S^{\mathrm{Isoloc}},$$

ce qui est équivalent.

D'autre part, en travaillant avec les localisés $\mathrm{HOT}_W^\circ(S) = (\mathrm{Cat}/S)(W_S^{\mathrm{g}})^{-1}$, le rôle de $\underline{\mathrm{Fib}}_W S$ pour la théorie des $\mathrm{HOT}_W^{\mathrm{lc}}(S)$ est joué ici par $\underline{\mathrm{Prop}}_W(S)$. On voit donc que dans la théorie des W-types d'homotopie relatifs non localement constants, mode HOT_W°, les ensembles de flèches Liss_W et Prop_W jouent un rôle en quelque sorte complémentaire : les flèches $f : S' \longrightarrow S$ de Liss_W sont (pratiquement) celles qui permettent directement de définir

$$f_W^{*\circ} : \mathrm{HOT}_W^\circ(S) \longrightarrow \mathrm{HOT}_W^\circ(S')$$

comme induit par

$$f^* : (\mathrm{Cat}/S, W_S^{\mathrm{g}}) \longrightarrow (\mathrm{Cat}/S', W_{S'}^{\mathrm{g}}),$$

tandis que les flèches de Liss_W permettent de définir pour tout S dans Cat la sous-catégorie pleine

$$\underline{\mathrm{Prop}}_W S \subsetneq \mathrm{Cat}/S,$$

donnant lieu à une équivalence de catégories

$$\begin{cases} (\underline{\mathrm{Prop}}_W S)(W_S^{\mathrm{u}})^{-1} \xrightarrow{\sim} \underbrace{(\mathrm{Cat}/S)(W_S^{\mathrm{g}})^{-1}}_{= \mathrm{HOT}_W^0(S)} \\ \text{avec} \\ W_S^{\mathrm{u}} = W_S^{\mathrm{g}} \text{ sur } \underline{\mathrm{Prop}}_W S \end{cases}$$

(ce qui visiblement est le substitut annoncé de "l'axiome de la fibre W-homotopique"). Cette

`[page 224]`

équivalence, qui permet de décrire $\mathrm{Hot}_W^\circ(S)$ en termes de $\underline{\mathrm{Prop}}_W S \subsetneq \mathrm{Cat}/S$ et d'un localiseur W_S^{u} *stable par* **tout** *changement de base,* permet d'autre part de définir la loi contravariante attendue pour $\mathrm{HOT}_W^\circ(S)$.

D'autre part, quand on échange le rôle de Liss_W et Prop_W, on trouve la théorie complémentaire du $\mathrm{HOT}_W(S)$,

$$\begin{cases} \mathrm{HOT}_W(S) \overset{\text{déf}}{=} (\mathrm{Cat}/S)(W_S^{\mathrm{d}})^{-1} \xleftarrow{\sim} (\underline{\mathrm{Liss}}_W S)(W_S^{\mathrm{u}})^{-1}, \\ \text{sur } \underline{\mathrm{Liss}}_W S,\ W_S^{\mathrm{d}} = W_S^{\mathrm{u}}, \end{cases}$$

la description de $\mathrm{HOT}_W(S)$ en termes de $\underline{\mathrm{Liss}}_W S$ et de W_S^{u} permet d'en définir le caractère contravariant en S, pour *toute* flèche $f : S' \longrightarrow S$ dans Cat. Tandis que si on veut pouvoir passer aux catégories de fractions sur Cat/S et Cat/S' tout entier (via W_S^{d}, $W_{S'}^{\mathrm{d}}$), il faut se limiter aux changements de base W-propres.

Du coup, me vient la perplexité si cette complémentaire, voire cette dualité, entre deux ensembles de flèches, les 'lisses' et les 'propres', ne serait pas un fait général qui se retrouvait tout au moins dans les catégories de modèles proche de la description de HOT ou d'un Hot_W.

[page 225]

Il se pourrait bien que dans $\mathbf{\Delta}^\wedge$ on ait une dualité parfaite entre ces deux espèces de notions (il faudra que j'examine la chose), peut-être même dans toute catégorie $\mathcal{A}^\wedge$ (mais dans $\mathbf{\Delta}^\wedge$ il y a un automorphisme involutif $K \longmapsto K^\circ$, correspondant au $X \longmapsto X^\circ$ dans Cat . . .). Et après tout, même dans le contexte des espaces topologiques, les notions de propreté d'une part, d'asphéricité locale d'autre part, pour une flèche $X \longrightarrow Y$, sont bien définies, et pourraient bien s'ajuster comme le font les notions correspondantes dans Cat, et (qui sait) donner lieu à deux versions complémentaires, ou 'duales' l'une de l'autre, d'une notion de type d'homotopie relatif.

N'en ayant pas le cœur net, je suis un peu indécis comment présenter une description axiomatique de la théorie des $\mathrm{Ho}_W^{\mathcal{L}}(S)$, pour une catégorie de modèles générale $(\mathcal{M}, W)$. Dois-je me donner d'emblée

$$\mathrm{Liss}, \mathrm{Prop} \subseteq \mathrm{Fl}(\mathcal{M}),$$

stables par composition, par changement de base, contenant les isomorphismes, et tels que (peut-être)

$$\mathrm{Liss} \cap \mathrm{Prop} \subseteq \mathrm{Fib}_W,$$

[page 226]

mais surtout ils permettent de définir, pour S de $\mathcal{M}$

$$\begin{cases} W_S^{\mathrm{g}} \overset{\text{déf}}{=} W_S^{\mathrm{Liss}} \subseteq \mathcal{F}(\mathcal{M}/S) \\ W_S^{\mathrm{d}} \overset{\text{déf}}{=} W_S^{\mathrm{Prop}} \subseteq \mathcal{F}(\mathcal{M}/S) \end{cases}$$

avec les propriétés suivantes :

(a) Si $f : S' \longrightarrow S$ est dans Prop (resp. Liss), alors $f^* : \mathcal{M}/S \longrightarrow \mathcal{M}/S'$ transforme W_S^{d} dans $W_{S'}^{\mathrm{d}}$ (resp. W_S^{g} dans $W_{S'}^{\mathrm{g}}$), ce qui est une pure tautologie, et ne concerne pas encore les relations de Prop avec Liss, mais par contre :

b

$$\begin{cases} (\underline{\mathrm{Liss}}S)(W_S^{\mathrm{u}})^{-1} \xrightarrow{\sim} (\mathcal{M}/S)(W_S^{\mathrm{d}})^{-1} \texttt{ [est] } \text{une équivalence} \\ \text{et } W_S^{\mathrm{u}} = W_S^{\mathrm{d}} \text{ sur } \underline{\mathrm{Liss}}S, \end{cases}$$

et dualement

$$\begin{cases} (\underline{\mathrm{Prop}}S)(W_S^{\mathrm{u}})^{-1} \xrightarrow{\sim} (\mathcal{M}/S)(W_S^{\mathrm{g}})^{-1} \texttt{ [est] } \text{une équivalence} \\ \text{et } W_S^{\mathrm{u}} = W_S^{\mathrm{g}} \text{ sur } \underline{\mathrm{Prop}}S. \end{cases}$$

De plus, il y a lieu d'énoncer c deux propriétés d'adjonction (duales l'une de l'autre), pour lesquelles je renvoie à VI, théorème-scholie 2, p. 108-113. Il se pose ici la question subsidiaire de simplifier les conditions de validité de la formule d'adjonction, un peu hétéroclites dans loc. cit.

Il se pose d'autre part la question de faire la théorie des lois covariantes $f_!$ et f_* pour $\mathrm{Ho}_W^{\mathrm{lc}}(S)$ et pour $\mathrm{Ho}_W^{\mathrm{Prop}}(S)$, $\mathrm{Ho}_W^{\mathrm{Liss}}(S)$.

`[page 227]`

J'ai bon espoir que le foncteur $f_!$ peut être décrit, et son adjonction avec f^* établie, à aussi bon compte dans ce contexte général que dans Cat. Mais je n'ai pas envie de m'y arrêter à présent.

6 Cofibre W-homotopique dans Cat.

Par contre, j'ai envie de regarder ici sous quelles conditions sur le localiseur fondamental W, il existe dans (Cat, W) une théorie duale de celle de la fibre W-homotopique.

La question-clef est, bien sûr, celle d'avoir une bonne prise sur les W-cofibrations. Or je ne connais jusqu'à présent *que* les immersions ouvertes de Dwyer, les immersions fermées de Dwyer, et ce qui s'en déduit par composition etc. Le travail de Thomason peut motiver l'espoir que la connaissance de ces immersions-là, qui semblent ici jouer un rôle similaire (dual) à celui des morphismes W-parfaits, suffira pour faire une bonne théorie des 'cofibres W-homotopiques'.

Je suppose dans toute cette section que W satisfait W(7 bis) (axiome des carrés cocartésiens), pour avoir des bonnes propriétés des immersions ouvertes de Dwyer ([124]), et plus généralement, pour les W-cofibrations.

124

a) Ce sont des W-cofibrations (résulte de b) et c)).

b) Si

`[page 228]`

Il se pose donc la question de la factorisation duale d'une flèche $f : X \longrightarrow Y$ de Cat en

$$X \underset{i_f}{\overset{W\text{-cofibration}}{\hookrightarrow}} \tilde{Y} \underset{p_f}{\xrightarrow{\in W}} Y.$$

Les résultats de Thomason assurent que ça existe, avec i une immersion ouverte de Dwyer, et p une W-fibration - du moins dans le cas $W = W_\infty$. Je vais essayer de le voir directement, en calquant dualement la construction de Cartan-Serre.

Il s'agit donc d'abord de factoriser

$$X \amalg X \xrightarrow{\mathrm{codiag}_X} X,$$

et pour ceci je choisis un intervalle fixe

$$I \;=\; \Phi_n \;=\; (0 \longrightarrow 1 \longleftarrow 2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow 2n-1 \longleftarrow 2n)$$

avec

$$n \geq 2$$

de sorte que l'inclusion

$$\varepsilon = \text{catégorie discrète } \{0,1\} \xrightarrow{\partial} I, \qquad \partial(0) = 0, \quad \partial(1) = 2n,$$

soit une immersion ouverte de Dwyer. Cette propriété est stable par changement de base Cat-fibrant, en particulier en prenant un produit

$$\underbrace{X \times \varepsilon}_{\simeq X \amalg X} \xrightarrow{i_X} X \times I,$$

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "p"'] & X \arrow[d, "q"] \\ U' \arrow[r, hook, "i'"] & X' \end{tikzcd}$$

avec i immersion ouverte de Dwyer, alors

$$\begin{aligned} i \in W &\iff i' \in W \\ p \in W &\iff q \in W, \end{aligned}$$

j'ai donc besoin de W(7 bis) *et* même de W(7) pour la deuxième implication.

c) Les immersions ouvertes de Dwyer `[sont]` stables par cochangement de base et par composition, contiennent les isomorphismes.

[page 229]

d'autre part

$$X \times I \xrightarrow{\mathrm{pr}_1} X$$

est W_ω-parfait, d'où la factoriastion cherchée

$$X \amalg X \xrightarrow{i_X} X \times I \xrightarrow{p_X = \mathrm{pr}_1^X} X$$

- il n'y a pas plus simple! Comment l'utiliser pour construire la factorisation d'une flèche $f : X \longrightarrow Y$ quelconque, en dualisant les constructions relatives aux espaces de chemins? On définit $Z(f)$ par le carré cocartésien dans Cat

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, dotted, "\mathrm{inj}_1^X"'] & X \times I \arrow[r, "f'"] & Z(f) \arrow[d, dotted, bend left, "p_f"] \\
& X \arrow[u, hook, "\mathrm{inj}_0^X"'] \arrow[r, "f"] & Y, \arrow[u, hook, "W"']
\end{tikzcd}$$

on a

$$Z(f) \xrightarrow{\alpha} Y \qquad \text{induit par } \mathrm{pr}_1 : X \times I \longrightarrow X,$$

et la factorisation cherchée de f est

$$X \xrightarrow{i_f = f' \circ \mathrm{inj}_1^X} Z(f) \xrightarrow{p_f} Y.$$

Je dis que

$$\begin{cases} i_f \text{ est immersion ouverte de Dwyer, donc une } W\text{-cofibration.} \\ p_f \in W. \end{cases}$$

[page 230]

On voit sur le diagramme plus complet

$$\begin{tikzcd}
& X \times I \arrow[r, "f'"] \arrow[dd, dotted, bend left, "\mathrm{pr}_1"] \arrow[dr, phantom, "\substack{\text{cocart.}\\ \text{et cart.}}"] & Z(f) \arrow[dd, dotted, bend left=60, "p_f"] \\
X \arrow[ur, dotted, "\mathrm{inj}_1^X"] \arrow[r, hook, "i_1^X"] & X \amalg X \arrow[u, hook, "i_X"'] \arrow[r, "f \amalg \mathrm{id}_X"] \arrow[dr, phantom, "\substack{\text{cocart.}\\ \text{et cart.}}"] & Y \amalg X \arrow[u, hook, "j"'] \\
& X \arrow[u, hook, "i_0^X"'] \arrow[r, "f"] & Y, \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

$$i_f = f' \circ \mathrm{inj}_1^X = f' i_X i_1^X = j \underbrace{(f \amalg \mathrm{id}_X) i_1^X}_{\substack{\text{inclusion canonique} \\ \text{de } X \text{ dans} \\ Y \amalg X}} ,$$

c'est [une] immersion ouverte de Dwyer, comme composé de $Y \longrightarrow Y \amalg X$ et $j : Y \amalg X \longrightarrow Z(f)$ qui le sont (j obtenu par cochangement de base à partir de i_X, qui est immersion ouverte de Dwyer).

D'autre part, $X \xrightarrow{\mathrm{inj}_0^X} X \times I$ est [une] immersion ouverte de Dwyer et dans W, donc coüniversellement dans W, donc $Y \longrightarrow Z(f)$ est elle aussi dans W, donc aussi la rétraction p_f.

D'autre part, la proposition duale de

$$\underline{\mathrm{Fib}}_W S \cap W_S = W^{\mathrm{u}}_{S\,\mathrm{univ}}$$

est valable pour les W-cofibrations :

[page 231]

Proposition 16 ([125]). *Sur la sous-catégorie pleine* $\underline{\mathrm{Cofib}}_W(S)$ *de* $S\backslash\mathrm{Cat}$*, le localiseur* ${}_SW$ *est égal au* $({}_SW)^{\mathrm{univ}}$ *(W-équivalences couniverselles), i.e. on a ceci : Soient*

$$S \longrightarrow X, \qquad S \longrightarrow Y$$

des W-cofibrations, et soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme de $S\backslash\mathrm{Cat}$ *tel que $f \in W$. Alors pour tout cochangement de base $S \longrightarrow S'$, la flèche correspondante*

$$f' : X' = X \amalg_S S' \longrightarrow Y' = Y \amalg_S S'$$

est dans W.

Démonstration. On factorise $S \longrightarrow S'$ en

$$S \xrightarrow{i} S'_0 \xrightarrow{j} S',$$

avec i immersion ouverte de Dwyer (donc W-cofibration), et $j \in W$. On a donc le diagramme à carrés cocartésiens

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[r] \arrow[d, hook, "i"'] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook] & Y \arrow[d, hook] \\
S'_0 \arrow[r] \arrow[d, "\in W"'] & X'_0 \arrow[r, "f'_0", "W"'] \arrow[d, "W"] & Y'_0 \arrow[d, "W"] \\
S' \arrow[r] & X' \arrow[r, "f'"] & Y'.
\end{tikzcd}$$

Comme i est une W-cofibration et $f \in W$, on a $f'_0 \in W$. D'autre part, comme $S \longrightarrow X$, donc $S'_0 \longrightarrow X'_0$ est

[125] N'a rien à voir avec Cat - une chose générale quand il y a assez de W-cofibrations.

[page 232]

une W-cofibration, $X'_0 \longrightarrow X'$ est dans W, et pour la même raison, $Y'_0 \longrightarrow Y$ l'est aussi. Donc f' l'est aussi.

NB Ici, c'est un argument formel, valable (sous forme duale) dans tout $(\mathcal{M}, W)$ où on a un énoncé de factorisation pour une flèche quelconque $f : X \longrightarrow Y$ en $X \xrightarrow{i_f} \bar{X} \xrightarrow{\alpha} Y$, avec $i_f \in W$ et α une W-fibration. Alors, si X, Y sont W-fibrés sur S, toute S-flèche de X dans Y qui est dans W, est dans W^{u}_S. Et dualement, si toute flèche $X \longrightarrow Y$ se factorise en $X \longrightarrow \tilde{Y} \longrightarrow Y$, avec $X \longrightarrow \tilde{Y}$ une W-cofibration et $\tilde{Y} \longrightarrow Y$ dans W.

Il me vient ici une (petite) inquiétude : ai-je au moins prouvé que si

$$S \longrightarrow X$$

est une W-cofibration, alors pour toute flèche $S' \longrightarrow S$ dans Cat, le carré cocartésien dans Cat

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\ S' \arrow[r] & X' \end{tikzcd}$$

est aussi W-cocartésien ([126])? Autrement,

[page 233]

à quoi ce carré-là serait-il bon?! Pour le prouver, factorisons encore $S \longrightarrow S'$ en

$$\underset{\substack{\text{immersion}\\ \text{ouverte de}\\ \text{Dwyer}}}{S \hookrightarrow} S'_0 \xrightarrow[\in W]{} S',$$

d'où le diagramme de 2 carrés cocartésiens

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\mathrm{Cof}_W"] \arrow[d, hook, "D_W"'] & X \arrow[d, hook, "D_W"] \\ S'_0 \arrow[r, "\mathrm{Cof}_W"] \arrow[d, "\in W"'] & X'_0 \arrow[d, "\in W"] \\ S' \arrow[r, "\mathrm{Cof}_W"] & X', \end{tikzcd}$$

où $X'_0 \longrightarrow X'$ est $\in W$ d'après l'hypothèse sur X sous S. Il faut donc vérifier :

[126]dans le sens ancien, spécial à Cat (déf. 3, p. 131). Pour le comparer avec la théorie générale, cf. prop. 20, p. 262.

a) Un carré cocartésien construit sur une flèche qui est `[une]` immersion de Dwyer, est W-cocartésien.

b) Un carré commutatif dans lequel deux côtés opposés sont dans W, est W-cocartésien.

c) Le composé de deux carrés W-cocartésiens est W-cocartésien.

Admettons provisoirement b) et c), et prouvons a), pour un carré cocartésien

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "p"'] & X \arrow[d, "q"] \\
U' \arrow[r, hook, "i'"] & X',
\end{tikzcd}$$

où i est immersion ouverte de Dwyer. On procède encore comme tantôt, en factorisant p en $U \overset{j}{\hookrightarrow} U'_0 \xrightarrow{p'} U'$, où j est `[une]` immersion ouverte de Dwyer, $p' \in W$. On a donc un diagramme de deux carrés cocartésiens accolés

`[page 234]`

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, hook, "i \in D_W"] \arrow[d, hook, "D_W"'] & X \arrow[d, hook] \\
U'_0 \arrow[r, hook, "D_W"] \arrow[d, "p' \in W"'] & X'_0 \arrow[d, "q' \in W"] \\
U' \arrow[r, hook] & X',
\end{tikzcd}$$

où le premier carré est formé d'immersions ouverts. On sait alors qu'il est W-cocartésien. Dans le deuxième, on a $p' \in W$, donc $q' \in W$ puisque i est une immersion de Dwyer, donc une W-cofibration. Donc il est également W-cocartésien. On conclut alors grâce à c) ci-dessus.

Prouvons b), pour
$$\begin{tikzcd}
X_0 \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "i_2 \in W"'] & X_1 \arrow[d, "f_1 \in W"] \\
X_2 \arrow[r, "f_2"] & Y
\end{tikzcd}$$
en l'insérant dans
$$\begin{tikzcd}
X_0 \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "i_2 \in W"'] & X_1 \arrow[d, "j_1"] \arrow[ddr, "f_1"] & \\
X_2 \arrow[r, "j_2"] \arrow[drr, "f_2"'] & \mathcal{X} \arrow[dr, "\varphi"] & \\
& & Y
\end{tikzcd}$$
où $\mathcal{X} = \int X_0 \begin{smallmatrix} \nearrow X_1 \\ \searrow X_2 \end{smallmatrix}$.

Comme $i_2 \in W$, on sait qu'il en résulte $j_1 \in W$, et comme $f_1 \in W$, il en résulte que $\varphi \in W$, q.e.d.

Reste à prouver c). Je vais le déduire d'une

Proposition 17. *Soit un carré commutatif*

$$Q \quad = \quad \begin{tikzcd} X_0 \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "i_2"'] & X_1 \arrow[d, "f_1"] \\ X_2 \arrow[r, "f_2"] & Y \end{tikzcd}$$

dans Cat*, et* $\mathcal{X}_Q$ *la catégorie fibrée sur*

$$\tilde{\Phi} \quad (\simeq \mathbf{\Delta}^1 \times \mathbf{\Delta}^1) \quad = \quad \begin{tikzcd} 0 & 1 \arrow[l] \\ 2 \arrow[u] & 3 \arrow[l] \arrow[u] \end{tikzcd}$$

qui l'intègre. Soit $\mathcal{X}$ *l'image inverse du fermé* $\begin{tikzcd} 0 & 1 \arrow[l] \\ 2 \arrow[u] & \end{tikzcd}$

[page 235]

dans $\mathcal{X}_Q$*, qui intègre le diagramme* $\begin{tikzcd} & X_1 \\ X_0 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & X_2 \end{tikzcd}$*. Pour que Q soit W-cocartésien, il faut et il suffit que l'inclusion*

$$i : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}_Q$$

soit dans W*.*

Comme $\mathcal{X}_Q$ est lisse sur $\tilde{\Phi}$, et 3 est objet initial de $\tilde{\Phi}$, il s'ensuit que l'inclusion de la fibre de $\mathcal{X}_Q$ en le sommet 3 de $\tilde{\Phi}$ est dans W,

$$Y \xrightarrow{i_Y} \mathcal{X}_Q \qquad \in W.$$

Considérons alors le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathcal{X} \arrow[rr, "\varphi_Q"] \arrow[dr, "i"'] & \arrow[d, phantom, "\alpha"] & Y \arrow[dl, "i_Y \in W"] \\ & \mathcal{X}_Q. & \end{tikzcd}$$

Ce diagramme n'est pas commutatif, mais il y a une flèche de commutativité

$$\alpha : i_Y \varphi_Q \longrightarrow i.$$

On sait que ceci implique que

$$i \in W \qquad \Longleftrightarrow \qquad (i_Y \varphi_Q) \in W$$

(cf. lemme p. 2), et comme $i_Y \in W$,

$$(i_Y \varphi_Q) \in W \qquad \Longleftrightarrow \qquad \varphi_Q \in W,$$

d'où

$$i \in W \qquad \Longleftrightarrow \qquad \varphi_Q \in W,$$

q.e.d.

Nous pouvons maintenant prouver

`[page 236]`

Proposition 18 ([127]). (Moyennant W(7 bis).) *Considérons un diagramme commutatif*

$$(*) \qquad \begin{tikzcd} X_0 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "1"] & X_1 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "2"] & X_2 \arrow[d] \\ X'_0 \arrow[r] & X'_1 \arrow[r] & X'_2 \end{tikzcd}$$

d'où un carré composé

$$\begin{tikzcd} X_0 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "3"] & X_2 \arrow[d] \\ X'_0 \arrow[r] & X'_2. \end{tikzcd}$$

Supposons que le carré 1 *soit* W*-cocartésien. Alors le carré* 2 *est* W*-cocartésien si et seulement si le carré* 3 *l'est.*

Démonstration.

`[Maintenant,` X_i `et` X'_i `échangent leurs rôles.]`

[127] devrait être vrai dans toute catégorie de modèles ayant assez de cofibrations.

Soit

$$I \quad = \quad \left(\begin{tikzcd} 0 \arrow[d] & 1 \arrow[l] \arrow[d] & 2 \arrow[l] \arrow[d] \\ 0' & 1' \arrow[l] & 2' \arrow[l] \end{tikzcd}\right)$$

et soit $\mathcal{X}$ l'intégrale du diagramme $(*)$, catégorie fibrée sur $\mathcal{X}$. On désigne par $\mathcal{X}_{010'}$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{X}$ image inverse de la sous-catégorie pleine

$$\underbrace{I_{010'}}_{=\{0,1,0'\}} \subseteq I,$$

et de même pour toute autre partie A de $\operatorname{Ob} I = \{0, 1, 2, 0', 1', 2'\}$, donnant une sous-catégorie pleine $\mathcal{X}_A$ de $\mathcal{X}$. On pose

$$U \quad = \quad \begin{tikzcd} 0 \arrow[d] & 1 \arrow[l] & 2 \arrow[l] \\ 0' & & \end{tikzcd} , \qquad V \quad = \quad \begin{tikzcd} 0 \arrow[d] & 1 \arrow[l] \arrow[d] & 2 \arrow[l] \\ 0' & 1' \arrow[l] & \end{tikzcd} ,$$

d'où

$$\mathcal{X}_U = \mathcal{X}_{0120'}, \qquad \mathcal{X}_V = \mathcal{X}_{0120'1'}.$$

Les flèches entre les $\mathcal{X}_A$ sont les inclusions

[page 237]

déduites d'inclusions $A \hookrightarrow A'$ dans $\mathfrak{P}(\operatorname{Ob} I)$. Ainsi, le caractère W-cocartésien des carrés 1, 2, 3 s'exprime respectivement par la condition que les inclusions

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_{010'} &\xrightarrow{\varphi_1} \mathcal{X}_{010'1'} \\ \mathcal{X}_{121'} &\xrightarrow{\varphi_2} \mathcal{X}_{121'2'} \\ \mathcal{X}_{020'} &\xrightarrow{\varphi_1} \mathcal{X}_{020'2'} \end{aligned}$$

soient dans W. Considérons alors le diagramme de flèches d'inclusion

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{X}_{020'} \arrow[r, "\varphi_3"] \arrow[d, "\alpha"'] & \mathcal{X}_{020'2'} \arrow[d, "\beta"] \\
\mathcal{X}_U \arrow[r, "\psi_3"] \arrow[d, "\psi_1"'] & \mathcal{X} \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\
\mathcal{X}_V \arrow[r, "\psi_2"] & \mathcal{X} \\
\mathcal{X}_{121'} \arrow[r, "\varphi_2"] \arrow[u, "\alpha'"] & \mathcal{X}_{121'2'}. \arrow[u, "\beta'"']
\end{tikzcd}$$

Je dis que dans ce diagramme on a

$$(*) \qquad \alpha, \beta, \alpha', \beta' \in W$$

et

$$(**) \qquad \varphi_1 \in W \ \text{(i.e. carré 1 } W\text{-cocartésien)} \quad \Longleftrightarrow \quad \psi_1 \in W.$$

Les relations $(*)$ impliquent déja que

$$\varphi_2 \in W \iff \psi_2 \in W$$
$$\varphi_3 \in W \iff \psi_3 \in W,$$

et sous l'hypothèse W-cocartésienne $(**)$, impliquant $\psi_1 \in W$,

`[page 238]`

on trouve

$$\psi_2 \in W \qquad \Longleftrightarrow \qquad \psi_3 \in W,$$

d'où

$$\varphi_2 \in W \qquad \Longleftrightarrow \qquad \varphi_3 \in W,$$

ce qu'il fallait prouver.

Il reste à établir $(*)$ et $(**)$. Les relations $(*)$ proviennent de la remarque que si $i : A \longrightarrow A'$ est une inclusion de sous-catégories pleines de I, telle que i soit W-*asphérique* (i.e. A/j W-asphérique pour $j \in \operatorname{Ob} A' \backslash \operatorname{Ob} A$), alors $\mathcal{X}_A \longrightarrow \mathcal{X}_{A'}$ l'est aussi (changement de base lisse), donc est `[dans]` W. On doit vérifier la W-asphéricité pour les quatre inclusions

$$\begin{array}{rcll}
\{0,2,0'\} & \longrightarrow & U = \{0,1,2,0'\} & \mathbf{\Delta}^0 \\
\{0,2,0',2'\} & \longrightarrow & I & \mathbf{\Delta}^0/\mathbf{\Delta}^1 \\
\{1,2,1'\} & \longrightarrow & V = \{0,1,2,0',1'\} & \mathbf{\Delta}^1,\ \Phi \\
\{1,2,1',2'\} & \longrightarrow & I & \mathbf{\Delta}^1,\ \mathbf{\Delta}^1 \times \mathbf{\Delta}^1.
\end{array}$$

(NB J'ai marqué en marge les catégories qu'on obtient comme A/j, à isomorphisme près, dans les quatre cas envisagés - elles ont toutes un objet initial, donc sont W-asphériques.)

Reste à prouver $(**)$. Soit

$$U' = \{0,1,0',1'\}, \qquad \text{donc } V = U \cup U',\ \ U \cap U' = \{0,1,0'\},$$

où U, U' sont des *fermés* de V qui recouvrent V. Donc on aura de même

$$\mathcal{X}_V = \mathcal{X}_U \cup \mathcal{X}_{U'}, \qquad \mathcal{X}_U \cap \mathcal{X}_{U'} = \mathcal{X}_{010'},$$

`[page 239]`

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{X}_{U\cap U'} \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_1"] & \mathcal{X}_U \arrow[d, "\psi_1"] \\
\mathcal{X}_{U'} \arrow[r] & \mathcal{X}_V .
\end{tikzcd}$$

Donc par W(7 bis) (cas dual des immersions fermées), on a

$$\varphi_1 \in W \qquad \Longleftrightarrow \qquad \psi_1 \in W,$$

q.e.d.

Notons pour mémoire le corollaire qui nous avait motivé.

Corollaire. *Supposons* W(7 bis) (comme dans toute cette section). *Soit un carré cocartésien dans* Cat

$$\begin{tikzcd}
X_0 \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "i_2"'] & X_1 \arrow[d] \\
X_2 \arrow[r] & X_3 ,
\end{tikzcd}$$

avec i_1 (ou i_2) une W-cofibration (p.ex. une immersion de Dwyer). Alors ce carré est W-cocartésien.

Cette digression (p. 232 ff.) n'est pas nécessaire d'ailleurs pour formuler dès maintenant la conclusion de nos cogitations sur les cofibres W-homotopiques : *Il y a une telle théorie dans* Cat*,* pourvu seulement que W satisfasse à W(7 bis). En effet, tout résulte du fait que toute flèche $f : X \longrightarrow Y$ dans Cat se factorise en

$$X \xrightarrow{i_f} \tilde{Y} \xrightarrow{p_f} Y,$$

avec i_f une W-cofibration (et même une imm-

[page 240]

ersion ouverte de Dwyer), et $p_f \in W$.

7 Retour sur l'axiomatique de la fibre W-homotopique.

Je reviens sur la réflexion du n° 4. Finalement, pour

$$(\mathcal{M}, W \subseteq \mathrm{Fl}(\mathcal{M}))$$

donnés avec W faiblement saturé, il apparaît qu'une excellente théorie des fibres W-homotopiques, satisfaisant aux conditions a b c du n° 4 (pages 215-218), existe dès que l'axiome d'apparence anodine suivant est satisfait (en plus de l'existence de l'objet final et des produits fibrés ([128])).

Factorisation gauche : ([129],[130]). Toute flèche $f : X \longrightarrow Y$ de $\mathcal{M}$ se factorise en

$$X \xrightarrow{i_f} \bar{X} \xrightarrow{p_f} Y,$$

avec

$$i_f \in W, \qquad p_f \in \mathrm{Fib}_W.$$

L'axiome dual donne lieu à une bonne théorie des cofibres W-homotopiques.

Factorisation droite : Toute flèche $f : X \longrightarrow Y$ dans $\mathcal{M}$ se factorise en

$$X \xrightarrow{j_f} \tilde{Y} \xrightarrow{q_f} Y,$$

avec

$$q_f \in W, \qquad j_f \in \mathrm{Cofib}_W.$$

[page 241]

Je voudrais à présent développer quelque peu le formalisme des fibres W-homotopiques, sous l'hypothèse (disons) que W satisfait l'axiome de factorisation gauche.

Considérons un diagramme cartésien

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[d, "p_1"'] & Y \arrow[l, "q_2"'] \arrow[d, "q_1"] \\ S & X_2 \arrow[l, "p_2"] \end{tikzcd}$$

[128] et encore! il me semble qu'il suffit de supposer que les $X \longrightarrow Y$ qui sont W-fibrants sont 'quarrables'.

[129] Sous ces conditions, $\mathcal{M}$ muni de (W, F_W) est une catégorie à cofibrations de K.S. Brown-Anderson, et 'tout est O.K.', mais il faudrait vérifier a) b) c) ci-dessus (p. 215, 218), je ne suis pas sûr de l'avoir fait.

[130] **NB** L'axiome de factorisation gauche n'est suffisant pour l'existence d'une bonne théorie des fibres homotopiques (semble-t-il) que dans le cas où tout X dans $\mathcal{M}$ est W-fibrant, i.e. est dans $\underline{\mathrm{Fib}}_W e$.

dans $\mathcal{M}$. Si p_1 est dans Fib_W, alors Y sur X_2 peut s'interpréter comme la fibre W-homotopique de X_1/S en X_2/S. Plus précisément, il en est ainsi de la classe $\mathrm{ho}^{\mathrm{lc}}_{W,X_2}(Y)$,

$$(*) \qquad \mathrm{ho}^{\mathrm{lc}}_{W,X_2}(Y) \simeq p_2^*(\mathrm{ho}^{\mathrm{lc}}_{W,S}(X_1/S)).$$

Mais en tant qu'objet sur X_1, Y peut s'interpréter également comme fibre W-homotopique de X_2/S en X_1/S :

$$(**) \qquad \mathrm{ho}^{\mathrm{lc}}_{W,X_1}(Y/X_1) \simeq p_1^*(\mathrm{ho}^{\mathrm{lc}}_{W,S}(X_2/S)).$$

À dire vrai, il faudrait le prouver. Pour ceci, considérons une factorisation

$$X_2 \xrightarrow{i_2} \bar{X}_2 \xrightarrow{\bar{p}_2} S \qquad i_2 \in W \ p_2 \in \mathrm{Fib}_W,$$

de sorte qu'on trouve un diagramme de carrés cartésiens

$$\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[d] & \bar{Y} \arrow[l, "\bar{q}_2"'] \arrow[d] & Y \arrow[l, "j_2", "W"'] \arrow[d] \\
S & \bar{X}_2 \arrow[l, "\bar{q}_2"'] & X_2. \arrow[l, "i_2", "W"']
\end{tikzcd}$$

[page 242]

Par définition de p_1^*, on a

$$p_1^*(\mathrm{ho}^{\mathrm{lc}}_{W,S}(X_2/S)) \simeq \mathrm{ho}^{\mathrm{lc}}_{W,X_1}(\bar{Y}/X_1),$$

d'autre part, comme $X_1 \longrightarrow S$ est dans Fib_W, et $i_2 \in W$, on a $j_2 \in W$, donc

$$\mathrm{ho}^{\mathrm{lc}}_{W,X_1}(Y/X_1) \xrightarrow{\sim} \mathrm{ho}^{\mathrm{lc}}_{W,X_1}(\bar{Y}/X_1),$$

d'où la formule $(**)$.

Ainsi, l'objet Y a deux interprétations homotopiques différentes, suivant qu'on le regarde comme étant sur X_1, ou sur X_2. On aimerait alors une interprétation qui englobe les deux à la fois. On va considérer le diagramme

$$\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[d] & \\
S & X_2 \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

de type Ψ°, ou

$$\Psi \quad = \quad \begin{tikzcd}
1 & \\
0 \arrow[u] \arrow[r] & 2
\end{tikzcd} \qquad \text{ou} \qquad \begin{tikzcd}
 & 1 \\
0 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & 2
\end{tikzcd} \ ,$$

dont Y se déduit par produit fibré, en complétant ce diagramme en un diagramme de type $\tilde{\Psi}^\circ$, où

$$\tilde{\Psi} = \begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small] & 1 \arrow[dr] & \\ 0 \arrow[ur] \arrow[dr] & & 3 \\ & 2 \arrow[ur] & \end{tikzcd} \qquad (\simeq \mathbf{\Delta}^1 \times \mathbf{\Delta}^1).$$

[page 243]

Pour toute catégorie I, soit

$$\mathrm{Ho}_{\mathcal{M},W}(I) \ \text{ ou } \ \mathrm{Ho}_W(I) \overset{\text{déf}}{=} \mathcal{M}(I)W(I)^{-1},$$

où

$$\begin{cases} \mathcal{M}(I) & = & \underline{\mathrm{Hom}}(I^\circ, \mathcal{M}) \\ W(I) & \subseteq & \mathrm{Fl}(\mathcal{M}(I)) \text{ est formé des } u : F \longrightarrow G \text{ telles que} \\ & & u_i : F(i) \longrightarrow G(i) \text{ dans } W \text{ pour tout } i \text{ dans } \mathrm{Ob}\, I. \end{cases}$$

Ainsi, le diagramme $\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small] & X_1 \arrow[dl] \\ S & \\ & X_2 \arrow[ul] \end{tikzcd}$ définit un objet ξ de $\mathcal{M}(\Psi)$, donc de $\mathrm{Ho}_W(\Psi)$, et le diagramme $\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small] & X_1 \arrow[dl] & \\ S & & Y \arrow[ul] \arrow[dl] \\ & X_2 \arrow[ul] & \end{tikzcd}$ peut de même s'interpréter comme un objet $\tilde{\xi}$ de $\mathrm{Ho}_W(\tilde{\Psi})$, dont la restriction à Ψ est ξ.

Ceci posé, j'aimerais définir un foncteur

$$i_* : \mathrm{Ho}_W(\Psi) \longrightarrow \mathrm{Ho}_W(\tilde{\Psi})$$

(où

$$i : \Psi \longrightarrow \tilde{\Psi}$$

est l'inclusion, qui est une immersion ouverte), lequel doit correspondre, dans le cas d'un objet $\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small] & X_1 \arrow[dl] \\ S & \\ & X_2 \arrow[ul] \end{tikzcd}$ de $\mathrm{Ho}_W(\Psi)$ avec $p_1 \in \mathrm{Fib}_W$ [: $X_1 \longrightarrow S$], à l'opération de produit fibré ([131]).

[131]**NB** Cette construction, qui se fait ici assez lourdement, devient immédiate, et aussi ses principales propriétés, si on admet que la catégorie à fibrations $(\mathcal{M}, W, \mathrm{Fib}_W)$ définit un *dérivateur* sur le domaine des ensembles ordonnés finis, ce qui se prouve en effet assez simplement (avec pas plus de mal que je ne me donne ici).

[page 244]

La construction de ce foncteur i_* devrait être essentiellement sorital, avec ce dont nous disposons. Nous allons définir d'abord, pour S *fixé,* un foncteur canonique

$$(*) \qquad \mathrm{Ho}^{\mathrm{lc}}_W(S) \times \mathrm{Ho}^{\mathrm{lc}}_W(S) \longrightarrow \mathrm{Ho}_{W,S}(\Psi),$$

où le deuxième membre est défini, par analogie avec les $\mathrm{Ho}_W(I)$, par

$$\mathrm{Ho}_{W,S}(I) \overset{\text{déf}}{=} ((\mathcal{M}/S)(I))(W_S(I))^{-1}$$

- i.e. c'est la même définition, sauf que $(\mathcal{M}, W)$ est remplacé par $(\mathcal{M}/S, W_S)$. Quant à

$$\Phi = \begin{tikzcd}[row sep=small] 1 \arrow[dr] & \\ & 3 \\ 2 \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

, on le considère comme une sous-catégorie fermée de $\tilde{\Psi}$, qui s'en déduit en lui rajoutant un objet initial 0 (tout comme $\tilde{\Psi}$ se déduit de Ψ en lui rajoutant un objet final 3). D'autre part, on a un foncteur tautologique

$$(*') \qquad \mathrm{Ho}_{W,S}(\Phi) \longrightarrow \mathrm{Ho}_W(\tilde{\Psi}),$$

qui sur les objet consiste à compléter un diagramme $\begin{tikzcd}[row sep=small] X_1 & \\ & Y \arrow[ul] \arrow[dl] \\ X_2 & \end{tikzcd}$ de $\mathcal{M}/S$ en le diagramme carré $\begin{tikzcd}[row sep=small] & X_1 \arrow[dl] & \\ S & & Y \arrow[ul] \arrow[dl] \\ & X_2 \arrow[ul] & \end{tikzcd}$ de $\mathcal{M}$.

[page 245]

Le composé de $(*)$ et de $(*')$ donnera donc un foncteur

$$(**) \qquad \mathrm{Ho}^{\mathrm{lc}}_W(S) \times \mathrm{Ho}^{\mathrm{lc}}_W(S) \longrightarrow \mathrm{Ho}_W(\tilde{\Psi}),$$

très proche déjà du foncteur i_* à construire. Pour construire $(*)$, on interprète (à équivalence de catégories près) le premier membre comme

$$(\underline{\mathrm{Fib}}_W S \times \underline{\mathrm{Fib}}_W S)(W_S \times W_S)^{-1},$$

donc il faut construire un foncteur

$$\underline{\mathrm{Fib}}_W S \times \underline{\mathrm{Fib}}_W S \longrightarrow \mathrm{Ho}_{W,S}(\Phi),$$

qui transforme flèches dans $W_S \times W_S$ en isomorphismes. On prendra le foncteur

$$(X_1, X_2) \longmapsto \left(\begin{tikzcd} X_1 & X_1 \times_S X_2 \arrow[l] \arrow[d] \\ & X_2 \end{tikzcd} \right),$$

et il faut seulement vérifier que si

$$X_1 \xrightarrow{\alpha_1} X_1', \qquad X_2 \xrightarrow{\alpha_2} X_2'$$

sont deux flèches dans $\underline{\mathrm{Fib}}_W S$, d'où

$$X_1 \times_S X_2 \xrightarrow{\alpha=\alpha_1\times_S\alpha_2} X_1' \times_S X_2',$$

alors

$$\alpha_1 \in W,\ \alpha_2 \in W \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha \in W,$$

ce qui est immédiat sur la factorisation

$$X_1 \times_S X_2 \quad \underbrace{\longrightarrow}_{\substack{\in W \\ \text{car } X_2 \in \underline{\mathrm{Fib}}_W S}} \quad X_1' \times_S X_2 \quad \underbrace{\longrightarrow}_{\substack{\in W \\ \text{car } X_1' \in \underline{\mathrm{Fib}}_W S}} \quad X_1' \times_S X_2'.$$

[page 246]

On a prouvé la

Proposition 18. *Soit S dans $\mathcal{M}$. Il existe, à isomorphisme unique près, un foncteur et un seul*

$$\mathrm{Ho}_W^{\mathrm{lc}}(S) \times \mathrm{Ho}_W^{\mathrm{lc}}(S) \xrightarrow{\pi} \mathrm{Ho}_{W,S}(\Phi)$$

donnant lieu à un carré commutatif à isomorphisme près

$$\begin{array}{ccc}
 & (X_1,X_2) \longmapsto \left(X_1 \leftarrow X_1\times_S X_2 \to X_2 \right) & \\
\underline{\mathrm{Fib}}_W S \times \underline{\mathrm{Fib}}_W S & \longrightarrow & (\mathcal{M}/S)(\Phi) \\
\Big\downarrow & & \Big\downarrow \\
\mathrm{Ho}_W^{\mathrm{lc}}(S) \times \mathrm{Ho}_W^{\mathrm{lc}}(S) & \longrightarrow & \mathrm{Ho}_{W,S}(\Phi) \\
(= (\mathcal{M}/S)(W_S)^{-1} \times (\mathcal{M}/S)(W_S)^{-1}) & & (= \mathcal{M}/S(\Phi)(W_S(\Phi))^{-1}).
\end{array}$$

Pour X_1, X_2 dans $\mathcal{M}/S$, le diagramme

$$\pi(X_1,X_2) \overset{\text{déf}}{=} \pi(\mathrm{ho}_{W,S}^{\mathrm{lc}}(X_1), \mathrm{ho}_{W,S}^{\mathrm{lc}}(X_2))$$

se 'calcule' ainsi, à isomorphisme canonique près : on choisit

$$X_1 \xrightarrow{\alpha_1} \bar{X}_1, \qquad X_2 \xrightarrow{\alpha_2} \bar{X}_2 \qquad \textit{flèches dans } \mathcal{M}/S$$

avec

$$\alpha_1, \alpha_2 \in W_S, \qquad \bar{X}_1, \bar{X}_2 \in \mathrm{Ob}\,\underline{\mathrm{Fib}}_W S,$$

ce qui définit

$$\pi(\alpha_1,\alpha_2) : \pi(X_1,X_2) \xrightarrow{\sim} \pi(\bar{X}_1,\bar{X}_2) = \mathrm{ho}_{S,W,\Phi}\begin{pmatrix} \bar{X}_1 & \longleftarrow & \bar{X}_1 \times_S \bar{X}_2 \\ & & \Big\downarrow \\ & & \bar{X}_2 \end{pmatrix}.$$

[page 247]

Corollaire. *Description du foncteur*

$$(\xi_1, \xi_2) \longmapsto \xi_1 \times_S \xi_2 : \mathrm{Ho}^{\mathrm{lc}}_W(S) \times \mathrm{Ho}^{\mathrm{lc}}_W(S) \longrightarrow \mathrm{Ho}^{\mathrm{lc}}_W(S).$$

Ce foncteur est bel et bien un produit cartésien dans $\mathrm{Ho}^{\mathrm{lc}}_W(S)$ ([132]), *où les produits finis existent* ([133]).

Pour prouver ce dernier point, posant

$$\mathcal{H} = \mathrm{Ho}^{\mathrm{lc}}_W(S),$$

il faut montrer que les foncteurs

$$\mathcal{H} \underset{\pi}{\overset{\delta}{\rightleftarrows}} \mathcal{H} \times \mathcal{H}$$

sont adjoints, avec

$$\begin{array}{rclcccc} \delta & = & \mathrm{diag}_{\mathcal{H}} & : & \xi & \longmapsto & (\xi, \xi) \\ \pi & = & \text{‘produit’} & : & (\xi_1, \xi_2) & \longmapsto & \xi_1 \times_S \xi_2. \end{array}$$

On va définir les homomorphismes d'adjonction

$$\begin{array}{rclcrcl} \mathrm{id}_{\mathcal{H}} & \xrightarrow{\alpha} & \pi\delta & \text{i.e.} & \xi & \xrightarrow{\alpha_\xi} & \xi \times_S \xi \\ \mathrm{id}_{\mathcal{H}\times\mathcal{H}} & \xleftarrow{\beta} & \delta\pi & \text{i.e.} & (\xi_1, \xi_2) & \xleftarrow{\beta_{\xi_1,\xi_2}} & (\xi_1 \times_S \xi_2, \xi_1 \times_S \xi_2). \end{array}$$

Pour ceci, on décrit $\mathcal{H}$ comme

$$\mathcal{H} = (\underline{\mathrm{Fib}}_W S)(W_S)^{-1}$$

et on note que δ, π proviennent de foncteurs adjoints au niveau de $\mathcal{H}_0 = \underline{\mathrm{Fib}}_W S$

$$\mathcal{H}_0 \underset{\pi_0}{\overset{\delta_0}{\rightleftarrows}} \mathcal{H}_0 \times \mathcal{H}_0,$$

lesquels donnent lieu à α_0, β_0

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{id}_{\mathcal{H}_0} & \xrightarrow{\alpha_0} & \pi_0\delta_0 \\ \mathrm{id}_{\mathcal{H}_0\times\mathcal{H}_0} & \xleftarrow{\beta_0} & \delta_0\pi_0. \end{array}$$

[132] mais c'est un cas particulier des cas de Ho_W (si $\mathcal{M}$ a des produits binaires), en remplaçant $\mathcal{M}$ par $\mathcal{M}/S$.

[133] Dire aussi que les foncteurs $f^* : \mathrm{Ho}^{\mathrm{lc}}_W(S) \longrightarrow \mathrm{Ho}^{\mathrm{lc}}_W(S')$ (pour $f : S' \longrightarrow S$) commutent aux produits finis.

`[page 248]`

On définit α, β par passage aux catégories de fractions pour α_0, β_0. Les 2 compatibilités, étant vérifiées pour α_0, β_0, le sont aussi pour α, β. Q.e.d.

Je dégage ici le

Lemme. *Soit* $\mathcal{X} \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} \mathcal{Y}$ *un couple de foncteurs adjoint, et soient* Σ, Σ' *des localiseurs dans* $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ *tels que* $f(\Sigma) \subseteq \Sigma'$, $g(\Sigma') \subseteq \Sigma$, *de sorte qu'on a un couple de foncteurs*

$$\mathcal{X}\Sigma^{-1} \underset{\bar{g}}{\overset{\bar{f}}{\rightleftarrows}} \mathcal{Y}\Sigma'^{-1}.$$

Alors $\bar{f}$, $\bar{g}$ *sont adjoints, les flèches d'adjonction étant déduites de celles pour* f, g.

Corollaire. *Soit* $(\mathcal{M}, W)$ *une catégorie de modèles, supposons que dans* $\mathcal{M}$ *les produits binaires (resp. les produits finis) existent, et que pour* $u_1 : X_1 \longrightarrow X_1'$ *et* $u_2 : X_2 \longrightarrow X_2'$, *si* $u_1, u_2 \in W$, *alors* $u_1 \times u_2 : X_1 \times X_2 \longrightarrow X_1' \times X_2'$ *est dans* W. *Alors dans* $\mathcal{M}W^{-1}$ *les produits binaires (resp. produits finis) existent, et le foncteur localisation* $\mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}W^{-1}$ *y commute.*

On applique le lemme à

$$\mathcal{M} \underset{\pi}{\overset{\delta}{\rightleftarrows}} \mathcal{M} \times \mathcal{M} \quad \text{et } W,\, W \times W,$$

et pour l'objet final,

$$\mathcal{M} \underset{\bullet}{\overset{e}{\rightleftarrows}} e \qquad\qquad \text{et } W,\, W_0 = \{\mathrm{id}_e\}.$$

`[page 249]`

Je vais maintenant construire le foncteur

$$i_* : \mathrm{Ho}_W(\Psi) \longrightarrow \mathrm{Ho}_W(\tilde{\Psi}).$$

Il me faut d'abord prouver le

Lemme 1. *Soit* $\mathcal{F}$ *la sous-catégorie pleine de* $\mathcal{M}(\Psi)$, *catégorie des diagrammes* $S \begin{smallmatrix} \xleftarrow{p_1} X_1 \\ \xleftarrow{p_2} X_2 \end{smallmatrix}$ *dans* S `[plutôt dans` $\mathcal{M}$`, sur` S`]`, *formée de ceux pour lesquels* p_1, p_2 *sont dans* Fib_W. *Soit* $W_{\mathcal{F}}$ *le localiseur induit sur* $\mathcal{F}$ *par* $W(\Psi)$ *(*W*-équivalences terme à terme). Alors*

$$\mathcal{F}W_{\mathcal{F}}^{-1} \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}(\Psi)W(\Psi)^{-1} \ (\overset{\text{déf}}{=} \mathrm{Ho}_W(\Psi)).$$

Nous allons prouver ce lemme plus bas. En l'admettant, pour construire i_*, il suffit de construire
$$\mathcal{F} \longrightarrow \mathrm{Ho}_W(\tilde{\Psi})$$
qui applique $W_{\mathcal{F}}$ en des isomorphismes. Je prendrai, bien sûr,

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & X_1 \arrow[dl] & & & & X_1 \arrow[dl] & \\ S & & \longmapsto & & S & & X_1 \times_S X_2 \arrow[ul] \arrow[dl] \\ & X_2 \arrow[ul] & & & & X_2 \arrow[ul] & \end{tikzcd}$$
$$\mathcal{F} \quad \longrightarrow \quad \mathrm{Ho}_W(\Psi).$$

Vérifions qu'il transforme flèches de $W_{\mathcal{F}}$ en isomorphismes.

`[page 250]`

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & X_1 \times_S X_2 \arrow[dl] \arrow[dd] & & X'_1 \times_{S'} X'_2 \arrow[ll, "f_3"'] \arrow[dl] \arrow[dd] \\ X_1 \arrow[dd] & & X'_1 \arrow[ll, "f_1"'] \arrow[dd] & \\ & X_2 \arrow[dl] & & X'_2 \arrow[ll, "f_2"'] \arrow[dl] \\ S & & S' \arrow[ll, "f_0"'] & \end{tikzcd}$$

Il faut prouver que si $f_0, f_1, f_2 \in W$, alors $f_3 \in W$. Mais considérons l'image inverse du carré cartésien Q par $f_0 : S' \longrightarrow S$, d'où un carré cartésien $Q_{S'}$ et une factorisation

$$\begin{tikzcd} Q & Q_{S'} \arrow[l, "\tilde{f}"'] & Q' \arrow[l, "g"'] \arrow[ll, bend left, "f"] \end{tikzcd}$$

de $Q' \longrightarrow Q$. Comme $f_0 \in W$, et que X_1, X_2, $X_1 \times_S X_2$ sont dans $\underline{\mathrm{Fib}}_W S$, les flèches horizontales réalisant $Q_{S'} \longrightarrow Q$ sont toutes dans W. Ceci, plus le fait que $f_1, f_2 \in W$, impliquent que dans le morphisme g, les flèches g_1, g_2 sont dans W. Il en résulte que la flèche
$$g_3 : X'_1 \times_{S'} X'_2 \longrightarrow (X_1 \times_S X_2) \times_S S'$$
l'est aussi (théorie du produit dans $\underline{\mathrm{Fib}}_W S'$ et $\mathrm{Ho}^{\mathrm{lc}}_W(S)$), donc $f_3 = \tilde{f}_3 g_3 \in W$, q.e.d.

`[page 251]`

Notons qu'on a un isomorphisme canonique

$$(*) \qquad \alpha : i^* i_* \xrightarrow{\sim} \mathrm{id}_{\mathrm{Ho}_W(\Phi)}.$$

J'ai envie de prouver que les foncteurs

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ho}_W(\Phi) \arrow[r, shift right, "i_*"'] & \mathrm{Ho}_W(\tilde{\Phi}) \arrow[l, shift right, "i^*"'] \end{tikzcd}$$

sont adjoints, et que $(*)$ est une des flèches d'adjonction. Il faut définir l'autre flèche d'adjonction

$$(**) \qquad \beta : i_* i^* \longleftarrow \mathrm{id}_{\mathrm{Ho}_W(\tilde{\Phi})}.$$

Mais pour ceci, je dois utiliser le

Lemme 2. Soit $\mathcal{G}$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{M}(\tilde{\Phi})$, formée des
$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[d, "p_1"'] & X_3 \arrow[l, "q_2"'] \arrow[d, "q_1"] \\ S & X_2 \arrow[l, "p_2"] \end{tikzcd}$$
tels que $p_1, p_2 \in \mathrm{Fib}_W$ et soit $W_{\mathcal{G}}$ le localiseur induit par $W(\tilde{\Phi})$ (W-équivalences terme à terme). Alors l'inclusion $\mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{M}(\tilde{\Phi})$ induit une équivalence

$$\mathcal{G}W_{\mathcal{G}}^{-1} \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}(\tilde{\Phi})W(\tilde{\Phi})^{-1} \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{Ho}_W(\tilde{\Phi}).$$

Je vais pour le moment admettre ce

[page 252]

lemme, tout comme le lemme 1 (p. 249). Je vais considérer i^*, i_* comme des flèches entre les categories $\mathcal{F}W_{\mathcal{F}}^{-1}$, $\mathcal{G}W_{\mathcal{G}}^{-1}$. Elles sont induites par les flèches

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F} \arrow[r, shift right, "i_{0*}"'] & \mathcal{G} \arrow[l, shift right, "i_0^*"'] \end{tikzcd}$$

entre $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ eux mêmes,

$$i_0^* : \quad \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{F} : \quad \begin{tikzcd} X_1 \arrow[d] & X_3 \arrow[l] \arrow[d] \\ S & X_2 \arrow[l] \end{tikzcd} \quad \longmapsto \quad \begin{tikzcd} X_1 \arrow[d] & \\ S & X_2 \arrow[l] \end{tikzcd}$$

$$i_{0*} : \quad \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} : \quad \begin{tikzcd} X_1 \arrow[d] & \\ S & X_2 \arrow[l] \end{tikzcd} \quad \longmapsto \quad \begin{tikzcd} X_1 \arrow[d] & X_1 \times_S X_2 \arrow[l] \arrow[d] \\ S & X_2. \arrow[l] \end{tikzcd}$$

Ces deux foncteurs sont adjoints l'un de l'autre, et compatibles aux localiseurs $W_{\mathcal{F}}$, $W_{\mathcal{G}}$. Donc les foncteurs déduits de i_0^*, i_{0*} par passage aux catégories de fractions sont également adjoints (cf. lemme p. 248).

Ainsi, modulo la démonstration des lemmes 1 et 2, on a prouvé ceci :

[page 253]

Théorème. *Soit $(\mathcal{M}, W)$ une catégorie de modèles ($W \subseteq Fl\mathcal{M}$) satisfaisant l'axiome de factorisation gauche (p. 240), donnant donc lieu à une bonne théorie des fibres W-homotopiques. Soient*

$$\Psi = \begin{tikzcd}[row sep=small] & 1 \\ 0 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & 2 \end{tikzcd} \xrightarrow{i} \tilde{\Psi} = \begin{tikzcd}[row sep=small] & 1 \arrow[dr] & \\ 0 \arrow[ur] \arrow[dr] & & 3 \\ & 2 \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

(immersions ouvertes dans Cat*), et considérons le foncteur restriction*

$$i^* : \mathrm{Ho}_W(\tilde{\Psi}) \longrightarrow \mathrm{Ho}_W(\Psi).$$

Ce foncteur admet un adjoint à droite

$$i_* : \mathrm{Ho}_W(\Psi) \longrightarrow \mathrm{Ho}_W(\tilde{\Psi}).$$

Ce foncteur i_* se 'calcule' ainsi : sa valeur en $\begin{tikzcd} & X_1 \arrow[d, "p_1"'] \\ S & X_2 \arrow[l, "p_2"] \end{tikzcd}$ *est canoniquement isomorphe (dans $\mathrm{Ho}_W(\tilde{\Psi})$) à* $\begin{tikzcd} X_1 \arrow[d] & X_1 \times_S X_2 \arrow[l] \arrow[d] \\ S & X_2 \arrow[l] \end{tikzcd}$*, si on suppose que p_1 ou p_2 est une W-fibration. Dans le cas général il se calcule en factorisant p_1 en*

$$X_1 \xrightarrow{i_1} \bar{X}_1 \xrightarrow{p_1'} S, \qquad i_1 \in W,\ p_1' \in Fib_W,$$

et en prenant $\begin{tikzcd} \bar{X}_1 \arrow[d] & \bar{X}_1 \times_S X_2 \arrow[l] \arrow[d] \\ S & X_2 \arrow[l] \end{tikzcd}$*, ou en*

[page 254]

procédant de façon symétrique, ou en factorisant simultanement p_1 et p_2, et prenant

$$\begin{tikzcd} \bar{X}_1 \arrow[d] & \bar{X}_1 \times_S \bar{X}_2 \arrow[l] \arrow[d] \\ S & \bar{X}_2. \arrow[l] \end{tikzcd}$$

La loi fonctorielle s'obtient à l'aide du lemme 1 p. 249, qui permet de se borner aux arguments $\begin{tikzcd} & X_1 \arrow[d, "p_1"'] \\ S & X_2 \arrow[l, "p_2"] \end{tikzcd}$ *tels que* $p_1, p_2 \in Fib_W$*, de sorte que l'on trouve un foncteur*

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[d] & \\ S & X_2 \arrow[l] \end{tikzcd} \longmapsto \begin{tikzcd} X_1 \arrow[d] & X_1 \times_S X_2 \arrow[l] \arrow[d] \\ S & X_2, \arrow[l] \end{tikzcd}$$

compatible aux localiseurs, et passant aux catégories de fractions $\mathrm{Ho}_W(\Psi)$ *et* $\mathrm{Ho}_W(\tilde{\Psi})$ *respectivement.*

NB En procédant de façon similaire, plus simple (sans besoin d'un recours au lemme 1), on trouve l'existence d'un *adjoint à gauche* $i_!$ de $i^* : \mathrm{Ho}_W(\Psi) \longrightarrow \mathrm{Ho}_W(\tilde{\Psi})$, sous réserve de l'existence d'un objet initial φ dans $\mathcal{M}$. Cet foncteur $i_!$ est donné par

`[page 255]`

$$i_! \left(\begin{tikzcd} X_1 \arrow[d] & \\ S & X_2 \arrow[l] \end{tikzcd} \right) = \left(\begin{tikzcd} X_1 \arrow[d] & \varphi \arrow[l] \arrow[d] \\ S & X_2 \arrow[l] \end{tikzcd} \right),$$

la loi fonctorielle étant évidente.

Ce n'est pas encore la fin du sorite! Il faut encore interpréter le foncteur composé

$$\mathrm{Ho}_W(\Psi) \xrightarrow{i_*} \mathrm{Ho}_W(\tilde{\Psi}) \xrightarrow{\varepsilon_3^*} \mathrm{Ho}_W(e) = \mathrm{Ho}_W,$$

où

$$\varepsilon_3 : e \xrightarrow{\sim} \{3\} \longrightarrow \begin{tikzcd} & 1 \arrow[dl] & \\ 3 & & 0 \arrow[ul] \arrow[dl] \\ & 2 \arrow[ul] & \end{tikzcd}$$

est l'inclusion du sommet 3 dans $\tilde{\Psi}$. Si $\mathrm{Ho}_W(\Psi)$ est interprété, conformément au lemme 1, comme $\mathcal{F}W_{\mathcal{F}}^{-1}$, ce foncteur composé n'est autre que

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[d] & \\ S & X_2 \arrow[l] \end{tikzcd} \longmapsto X_1 \times_S X_2$$

(pour $\left(\begin{tikzcd} X_1 \arrow[d, "p_1"'] & \\ S & X_2 \arrow[l, "p_2"] \end{tikzcd}\right) \in \operatorname{Ob}\mathcal{F}$, i.e. $p_1, p_2 \in \mathrm{Fib}_W$.)

On veut interpréter ce foncteur comme un $\varprojlim$ W-homotopique, i.e. vu comme un 'produit fibré W-homotopique'. De façon précise, on a ceci :

[page 256]

Corollaire 1. *Considérons $p_\Psi : \Psi \longrightarrow e$, et le foncteur*

$$p_\Psi^* : \mathrm{Ho}_W(e) = \mathrm{Ho}_W \longrightarrow \mathrm{Ho}_W(\Psi),$$

déduit par passage aux catégories de fractions du foncteur

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M} & \longrightarrow & \mathcal{M}(\Psi) \\ X & \longrightarrow & \left(\begin{tikzcd} X \arrow[d] & \\ X & X \arrow[l] \end{tikzcd}\right). \end{array}$$

Ce foncteur admet le foncteur $\varepsilon_3^* i_*$ précédent comme adjoint à droite, i.e.

$$p_{\Psi *} = \varepsilon_3^* i_* : \mathrm{Ho}_W(\Psi) \longrightarrow \mathrm{Ho}_W.$$

Démonstration. On peut regarder p_ψ comme le composé

$$\Psi \xrightarrow{i} \tilde{\Psi} \xrightarrow{p_{\tilde{\Psi}}} e,$$

et on a donc

$$p_\Psi^* \simeq i^*(p_{\tilde{\Psi}})^*.$$

Donc l'existence et la détermination d'un adjoint à droite pour p_Ψ^* résultera de l'existence et de la détermination d'adjoints à droite i_*, $(p_{\tilde{\Psi}})_*$ de i^*, $(p_{\tilde{\Psi}})^*$, via

$$(p_\Psi)_* \simeq (p_{\tilde{\Psi}})_* i_*.$$

[page 257]

Donc le corollaire 1 résulte de la formule

$$p_{\tilde{\Psi} *} = \varepsilon_3^*,$$

qui elle-même est un cas particulier du

Lemme. *Soit I dans* Cat*, avec objet final e, considérons l'inclusion*

$$\varepsilon : e \longrightarrow I, \qquad \text{et } p : I \longrightarrow e.$$

Soit $(\mathcal{M}, W)$ une catégorie de modèles, et considérons

$$\mathrm{Ho}_W(I) \xleftarrow{p^*} \mathrm{Ho}_W.$$

Ce foncteur admet un adjoint à gauche `[plutôt à droite]` *p_*, lequel est isomorphe à ε^*.*

Démonstration. Considérons le couple de foncteurs adjoints

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M}(I) \arrow[r, shift right, "p_* = \varprojlim_I"'] & \mathcal{M} \arrow[l, shift right, "p^*"'] \end{tikzcd} ;$$

comme I admet l'objet final e, le foncteur p_* est isomorphe à ε^*. Ces foncteurs p^*, ε^* sont compatibles aux localiseurs $W(I)$, W, donc on conclut par le lemme page 248.

Il ne reste plus qu'à prouver les lemmes 1 et 2. Je le ferai demain.

`[page 258]`

Aujourd'hui, j'ai envie encore de donner les sorites des carrés W-cartésiens dans une

Proposition 19 : *Soit*
$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[d, "p_1"'] & X_3 \arrow[l, "f_1"'] \arrow[d, "f_2"] \\ S & X_2 \arrow[l, "p_2"] \end{tikzcd}$$
un carré commutatif dans $\mathcal{M}$. Considérons des factorisations de p_1, p_2 en

$$X_1 \xrightarrow{i_1} \bar{X}_1 \xrightarrow{\bar{p}_1} S, \qquad X_2 \xrightarrow{i_2} \bar{X}_2 \xrightarrow{\bar{p}_2} S,$$

$i_1, i_2 \in W$, $\bar{p}_1, \bar{p}_2 \in F_W$ `[`$=$ `Fib`$_W$`]`*, et considérons les flèches induites par $X_3 \longrightarrow X_1 \times_S X_2$ (déduite de Q) via*

$$\begin{tikzcd} & \bar{X}_1 \times_S X_2 \\ X_1 \times_S X_2 \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & \bar{X}_1 \times_S \bar{X}_2 \\ & X_1 \times_S \bar{X}_2 \end{tikzcd}$$

de sorte qu'on trouve un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} & \bar{X}_1 \times_S X_2 \arrow[d, "j_2"'] \\ X_3 \arrow[ur, "\pi_1"] \arrow[r, "\pi_0"] \arrow[dr, "\pi_2"] & \bar{X}_1 \times_S \bar{X}_2 \\ & X_1 \times_S \bar{X}_2, \arrow[u, "j_1"] \end{tikzcd}$$

où $j_1 = i_1 \times_S \mathrm{id}_{\bar{X}_2}$ et $j_2 = \mathrm{id}_{\bar{X}_1} \times i_2$ sont dans W (car i_1 et i_2 le sont, et $\bar{X}_1$ et $\bar{X}_2$ sont dans $\underline{\mathrm{Fib}}_W S$). On a donc

$$(\pi_1 \in W) \qquad \Longleftrightarrow \qquad (\pi_2 \in W) \qquad\qquad (\Longleftrightarrow\ \pi_0 \in W),$$

ce qui prouve que la condition $\pi_1 \in W$, qui semble dépendre du choix de la factorisation par i_1, n'en dépend pas, et idem pour $\pi_2 \in W$, et pour $\pi_0 \in W$ (qui semble dépendre à la fois de i_1, et de i_2).

[page 259]

Définition. *Quand ces conditions sont satisfaites, on dit que le carré Q est W-cartésien.*

Corollaire 1. *Si Q est W-cartésien, alors l'image de Q dans $\mathrm{Ho}_W(\tilde{\Psi})$ est dans l'image essentielle de*

$$i_* : \mathrm{Ho}_W(\Psi) \longrightarrow \mathrm{Ho}_W(\tilde{\Psi}),$$

i.e. la flèche canonique dans $\mathrm{Ho}_W(\tilde{\Psi})$

$$Q \longrightarrow i_* i^* Q$$

est [un] *isomorphisme. La réciproque est vraie si W est fortement saturé.*

Corollaire 2. *Considérons un diagramme commutatif dans $\mathcal{M}$*

$$\text{(D)} \qquad \begin{tikzcd} X'_0 \arrow[d] & X'_1 \arrow[l] \arrow[d] \arrow[dl, phantom, "1"] & X'_2 \arrow[l] \arrow[d] \arrow[dl, phantom, "2"] \\ X_0 & X_1 \arrow[l] & X_2, \arrow[l] \end{tikzcd}$$

d'où deux carrés commutatifs 1, 2, et un carré composé

$$\begin{tikzcd} X'_0 \arrow[d] & X'_2 \arrow[l] \arrow[d] \arrow[dl, phantom, "3"] \\ X_0 & X_2. \arrow[l] \end{tikzcd}$$

Supposons le carré 1 W-cartésien. Alors le carré 2 est W-cartésien si et seulement si le carré 3 l'est.

Démonstration. Considérons une factorisation de $\begin{matrix} X'_0 \\ \downarrow \\ X_0 \end{matrix}$ en

$$\begin{tikzcd} \bar{X}'_0 \arrow[dr] & X'_0 \arrow[l] \arrow[d] \\ & X_0 \end{tikzcd}$$

avec $(X'_0 \longrightarrow \bar{X}'_0) \in W$, et $(\bar{X}'_0 \longrightarrow X_0) \in \mathrm{Fib}_W$. On peut alors remplacer dans (D) X'_0 par $\bar{X}'_0$, obtenant un diagramme $(\bar{D})$, et on voit aussitôt

[page 260]

que chacun des carrés 1(D), 2(D), 3(D) est W-cartésien si et seulement si le carré correspondant $1(\bar{D})$, $2(\bar{D})$ ou $3(\bar{D})$ l'est. Cela montre qu'on peut supposer $X_0 \longrightarrow S$ dans $\mathrm{Fib}_W S$. Considérons alors le diagramme commutatif déduit de (D)

$$\begin{tikzcd}
X'_0 \arrow[d] & \tilde{X}'_1 \overset{\text{déf}}{=} X'_0 \times_{X_0} X_1 \arrow[l] \arrow[d] & X'_1 \arrow[l, "\alpha"'] & X'_2 \arrow[l] \arrow[d] \\
X_0 & X_1 \arrow[l] & & X_2, \arrow[ll]
\end{tikzcd}$$

où $\alpha \in W$ en vertu de l'hypothèse W-cartésienne sur le carré 1. On voit encore que le carré 2 est W-cartésien si et seulement si le carré correspondant avec X'_1 remplacé par $\tilde{X}'_1$ l'est, quant aux carrés 1, 3, ils ne changent pas par cette modification. Cela montre qu'on peut supposer le carré 1 *cartésien.* Considérons alors le diagramme

$$\begin{tikzcd}
X'_0 \arrow[d, "\mathrm{Fib}_W"'] \arrow[dr, phantom, "\text{cart.}"] & X'_1 \arrow[l] \arrow[d, "\mathrm{Fib}_W"] \arrow[dr, phantom, "\text{cart.}"] & \tilde{X}'_2 \overset{\text{déf}}{=} X'_1 \times_{X_1} X_2 \arrow[l] \arrow[d, "\mathrm{Fib}_W"] & X'_2 \arrow[l, "\beta"'] \\
X_0 & X_1 \arrow[l] & X_2. \arrow[l] &
\end{tikzcd}$$

Alors la proposition 19 et la définition montrent que le carré 2 est W-cartésien si et seulement si $\beta \in W$, et de même pour le carré 3. Ce qui achève la démonstration.

Corollaire 2. *Soit*
$$\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[d, "p_1"'] & X_3 \arrow[l, "f_2"'] \arrow[d, "f_1"] \\
S & X_2 \arrow[l, "p_2"]
\end{tikzcd}$$
un carré W-cartésien. Alors

$$p_1 \in W \implies f_1 \in W$$

$$p_2 \in W \implies f_2 \in W,$$

plus précisément, si $p_i \in W$, alors Q est W-cartésien si et seulement si $f_i \in W$.

[page 261]

Supposons $p_1 \in W$. Alors dans la factorisation de p_1 en $X_1 \longrightarrow \bar{X}_1 \longrightarrow S$, on peut prendre $\bar{X}_1 = S$. Donc le carré est W-cartésien si et seulement si

$$(X_3 \longrightarrow \bar{X}_1 \times_S X_2 = X_2) \in W,$$

i.e. $f_1 \in W$, q.e.d.

Bien sûr, on ne peut en général affirmer les implications inverses : $f_i \in W$ n'implique nullement $p_i \in W$.

Tous ces résultats, et la notion de carré W-cartésien, se dualisent (moyennant l'axiome idoine de factorisation à droite, cf. page 240) en une théorie des sommes amalgamées W-homotopiques, et des carrés W-cocartésiens. Cette fois on travaille avec la catégorie

$$\Phi = \left(\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small] & 1 \arrow[dl] \\ 0 & \\ & 2 \arrow[ul] \end{tikzcd}\right) \qquad \overset{j}{\hookrightarrow} \qquad \tilde{\Phi} = \left(\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small] & 1 \arrow[dl] & \\ 0 & & 3 \arrow[ul] \arrow[dl] \\ & 2 \arrow[ul] & \end{tikzcd}\right),$$

j étant une immersion fermée. On a un foncteur restriction

$$j^* : \mathrm{Ho}_W(\tilde{\Phi}) \longrightarrow \mathrm{Ho}_W(\Phi),$$

dont on construit un adjoint à gauche

$$j_! : \mathrm{Ho}_W(\Phi) \longrightarrow \mathrm{Ho}_W(\tilde{\Phi}).$$

Et on trouve une notion naturelle de

`[page 262]`

carré W-cocartésien, qui paraît irréprochable à tout points de vue, et d'une simplicité parfaite.

Cela amène à revoir la notion en question dans Cat, où elle avait l'air très astucieuse, profonde et un peu obscure, avec des intégrales et tout ça. C'est le moment de se rendre compte que 'ce n'est que ça'. Donc de prouver la

Proposition 20. *Supposons $\mathcal{M} = \mathrm{Cat}$, W un localiseur fondamental satisfaisant W(7 bis). Considérons un carré commutatif dans* Cat

$$Q = \left(\begin{tikzcd} S \arrow[r] \arrow[d] & X_1 \arrow[d] \\ X_2 \arrow[r] & X_3 \end{tikzcd}\right).$$

Pour qu'il soit W-cartésien `[plutôt W-cocartésien]` *au sens de la théorie développée ici (pour des catégories de modèles générales), il faut et il suffit que*

$$\varphi_Q : \quad \mathcal{X}_Q = \left(\int S \begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small] & X_1 \arrow[dl] \\ {} & \\ & X_2 \arrow[ul] \end{tikzcd}\right) \longrightarrow X_3$$

`[plutôt`

$$\varphi_Q : \quad \mathcal{X}_Q = \left(\int S \begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small] & X_1 \\ {} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & X_2 \end{tikzcd}\right) \longrightarrow X_3]$$

soit dans W. (NB L'intérêt de ce critère est qu'il est 'intrinsèque' à Q, ne faisant pas appel à une factorisation de β_1 ou de β_2 `[où` $\beta_i : S \longrightarrow X_i$`]` en $S \xrightarrow{\in \mathrm{Cof}_W} \tilde{X}_i \xrightarrow{\in W} X_i$. Cf. application intéressante dans section V 3.4., p. 146 ff., th. 4 et corollaires.)

`[page 263]`

Démonstration. Considérons une factorisation de $S \longrightarrow X_1$ en

$$S \xrightarrow{i_1} \tilde{X}_1 \xrightarrow{p_1} X,$$

avec i_1 immersion ouverte de Dwyer, $p_1 \in W$. Donc on a un carré commutatif

$$\tilde{Q} = \left(\begin{tikzcd} S \arrow[r, hook, "\mathrm{Dw}"] \arrow[d] & \tilde{X}_1 \arrow[d] \\ X_2 \arrow[r] & X_3 \end{tikzcd} \right)$$

et un homomorphisme $\tilde{Q} \xrightarrow{\alpha} Q$ qui est l'identité sur les trois sommets distincts de $\tilde{X}_1$, et qui est p_1 en $\tilde{X}_1$. On en déduit un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathcal{X}_Q \arrow[rr, "\mathcal{X}_\alpha = \lambda"] \arrow[dr, "\varphi_Q"'] & & \mathcal{X}_{\tilde{Q}} \arrow[dl, "\varphi_{\tilde{Q}}"] \\ & X_3, & \end{tikzcd}$$

et on a $\lambda \in W$ (car c'est une Φ-flèche de catégories fibrées sur Φ, qui induit une W-équivalence sur chacune de trois fibres.) Donc $\varphi_Q \in W \iff \varphi_{\tilde{Q}} \in W$, d'autre part il est clair que Q est W-cocartésien si et seulement si $\tilde{Q}$ l'est. Donc on peut supposer que $S \hookrightarrow X_1$ est `[une]` immersion ouverte (de Dwyer) ([134]). Appliquant ceci

`[page 264]`

en changeant les rôles de X_1 et X_2, on voit qu'on peut supposer de plus que $S \longrightarrow X_2$ est également `[une]` immersion ouverte de Dwyer. Considérons alors

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] \arrow[dr, phantom, "Q'"] & X_1 \arrow[d, hook] & \\ X_2 \arrow[r, hook] & X_1 \amalg_S X_2 \arrow[r, "\pi"] & X_3 \\ & \mathcal{X}_Q \arrow[u, "\varphi_{Q'}"] \arrow[ur, "\varphi_Q"'] & \end{tikzcd}$$

[134]On utilise ici W(3) (forme forte), i.e. Loc(3 bis) avec les notations de XVI. Mais on peut s'en passer, cf. plus bas.

On a $\varphi_Q = \pi\varphi_{Q'}$, d'autre part on sait que $\varphi_{Q'} \in W$ (cor. 3, p. 149). Donc

$$\pi \in W \qquad \Longleftrightarrow \qquad \varphi_Q \in W,$$

où $\pi \in W$ signifie que Q est W-cocartésien, q.e.d.

`[page 265]`

8 Appendice : Retour sur les axiomes W(7), W(7 bis) (pages 75, 76).

([135]). On a vu (prop. 6, p. 78) que W(7 bis) implique W(7). Montrons une réciproque partielle.

Proposition. *Supposons* W(7 bis) (axiome du carré cocartésien) *satisfait, et plaçons nous sous les conditions de l'énoncé de* W(7), *et plus généralement, dans le cas d'un diagramme cubique*

$$\begin{tikzcd}
& X_2 \arrow[rr] \arrow[dd, "f_2"] & & X_3 \arrow[dd, "f_3"] \\
X_0 \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[dd, "f_0"'] & & X_1 \arrow[ur] \arrow[dd, "f_1"] & \\
& Y_2 \arrow[rr] & & Y_3 \\
Y_0 \arrow[ur] \arrow[rr] & & Y_1 \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

où les deux carrés X et Y (face supérieure et inférieure du cube) sont W-cocartésiens. Considérons les conditions suivantes sur ce diagramme

a) $f_0 \in W$.

b) f_1 *et* $f_2 \in W$.

c) $f_3 \in W$.

Alors on a les implications

$$a \;\&\; b \Longrightarrow c, \qquad b \;\&\; c \Longrightarrow a.$$

De plus, si W est stable par facteurs directs (p. ex. W fortement saturé), alors on a aussi

$$a \;\&\; c \Longrightarrow b,$$

donc la conjonction `[de]` *deux quelconques parmi les conditions a) b) c) implique la troisième.*

Démonstration. Utilisant la factorisation

[135]Reflexion provisoire, supplanté par XVI.

`[page 266]`

fonctorielle d'une flèche quelconque (ici les f_i) en pi, avec i immersion ouverte de Dwyer et $p \in W$ (p. 229), on est remené au cas où les f_i sont des immersions ouvertes de Dwyer. Mais pour toute flèche $g : S \longrightarrow T$ qui est dans Cof_W, soient $Z(g)$ son mapping-cone

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "g"] \arrow[dr] & T \arrow[dr, "\alpha(g)"] & \\ & e \arrow[r, "\bar{g}"] & Z(g), \end{tikzcd}$$

et

$$\alpha(g) : T = \mathrm{but}(g) \longrightarrow Z(g)$$

la flèche canonique ([136]). Celle-ci est fonctorielle en g, de sorte que le diagramme cubique donné se prolonge en un double cube

$$\begin{tikzcd}
& X_2 \arrow[rr] \arrow[dd, "f_2"] & & X_3 \arrow[dd, "f_3"] \\
X_0 \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[dd, "f_0"] & & X_1 \arrow[ur] \arrow[dd, "f_1"] & \\
& Y_2 \arrow[rr] \arrow[dd, "\alpha_2"] & & Y_3 \arrow[dd, "\alpha_3"] \\
Y_0 \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[dd, "\alpha_0"] & & Y_1 \arrow[ur] \arrow[dd, "\alpha_1"] & \\
& Z_2 \arrow[rr] & & Z_3 \\
Z_0 \arrow[ur] \arrow[rr] & & Z_1 \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

avec

$$Z_i = Z(f_i), \ \alpha_i = \alpha(f_i) \qquad \text{pour } i \in \{0,1,2,3\}.$$

Notons que W(7 bis) implique que si $g \in \mathrm{Cof}_W$,

`[page 267]`

on a

$$g \in W \qquad \Longleftrightarrow \qquad \bar{g} \in W, \qquad \text{i.e. } Z(g) \ W\text{-asphérique},$$

en particulier

$$f_i \in W \qquad \Longleftrightarrow \qquad Z_i \ W\text{-asphérique}.$$

Ainsi, l'énoncé à prouver sur le cube initial se ramène à un énoncé sur le carré

[136] C'est un peu vif, car il n'est pas clair que $X_1' \amalg_{X_0} X_2' \longrightarrow X_1 \amalg_{X_0} X_2$ soit `[dans]` W, sans utiliser déjà un des trois ingrédients de W(7) (savoir $f_0, f_1, f_2 \in W \implies f_3 \in W$). Il semble donc que notre argument ne marche que moyennant une hypothèse supplémentaire de cet ordre ... Mais il y a le *lemme de Brown,* cf. XVI §3, notamment p. 20.

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & Z_1 \arrow[dr] & \\ Z_0 \arrow[ur] \arrow[dr] & & Z_3, \\ & Z_2 \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

savoir que les trois conditions

a′) Z_0 W-asphérique.

b′) Z_1 et Z_2 W-asphériques.

c′) Z_3 W-asphérique.

donnant lieu aux implications

$$\text{a}' \;\&\; \text{b}' \Longrightarrow \text{c}', \qquad \text{b}' \;\&\; \text{c}' \Longrightarrow \text{a}',$$

et que si W est stable par facteurs directs, alors

$$\text{a}' \;\&\; \text{c}' \Longrightarrow \text{b}'.$$

C'est à peu de choses près le corollaire de la page 76, complété à la page 77 (corollaire), à cela près qu'on y suppose les flèches des immersions ouvertes, et le carré cartésien (donc aussi cocartésien) dans Cat, i.e. $Z_3 = Z_1 \cup Z_2$, $Z_0 = Z_1 \cap Z_2$. Mais

[page 268]

ce qui importe pour la validité de cet énoncé, c'est (on s'en doute) que Z_* soit W-cocartésien. Donc il faut d'abord prouver ceci.

Lemme. *Si le diagramme cubique p. 265 est tel que les faces X, Y soient W-cocartésiennes, et les f_i ($i \in \{0,1,2,3\}$) des W-cofibrations, alors le carré Z des cofibres des f_i est lui aussi W-cocartésien.*

Ce lemme résulte de la théorie du 'déploiement des diagrammes cubiques', relatif à une catégorie de modèles $(\mathcal{M}, W)$ admettant une théorie des cofibres W-homotopiques, qu'il me faudra bien écrire! (Mais l'existence pour (Cat, W) d'une telle théorie des cofibres W-homotopiques, et par suite de celle des déploiements des diagrammes dans $\mathcal{M}$ de type $(\boldsymbol{\Delta}^1)^I$, I ensemble d'indices fini, ne dépend que de W(7 bis) - on n'a pas à faire appel à W(7).)

[page 269]

Ce 'deploiement' est un diagramme infini dont toutes les suites infinies, dans les trois directions des axes de coordonnées, sont des 'suites de suspension'. Je reproduis la partie utile du déploiement.

$$\begin{tikzcd}
 & & & & & & U \arrow[dd, "\mu"] \\
 & X_2 \arrow[rr] \arrow[dd] & & X_3 \arrow[rr] \arrow[dd] & & T \arrow[ur] \arrow[dd] & \\
X_0 \arrow[rr] \arrow[ur] \arrow[dd] & & X_1 \arrow[rr] \arrow[ur] \arrow[dd] & & S \arrow[ur, "\lambda"] \arrow[dd] & & U' \arrow[dd] \\
 & Y_2 \arrow[rr] \arrow[dd] & & Y_3 \arrow[rr] \arrow[dd] & & T' \arrow[ur] \arrow[dd] & \\
Y_0 \arrow[rr] \arrow[ur] \arrow[dd] & & Y_1 \arrow[rr] \arrow[ur] \arrow[dd] & & S' \arrow[ur, "\lambda'"] \arrow[dd] & & U'' \\
 & Z_2 \arrow[rr] & & Z_3 \arrow[rr] & & T'' \arrow[ur] & \\
Z_0 \arrow[rr] \arrow[ur] & & Z_1 \arrow[rr] \arrow[ur] & & S'' \arrow[ur, "\lambda''"] & &
\end{tikzcd}$$

La condition que X soit W-cocartésien s'exprime par $\lambda \in W$, ou encore par $U \in \mathrm{Asph}_W$ (car U s'identifie à la cofibre homotopique $Z(\lambda)$ de λ ...), de même Y W-cocartésien s'exprime par $U' \in \mathrm{Asph}_W$, et Z W-cocartésien par $U'' \in \mathrm{Asph}_W$. Or $U'' \sim Z(\mu)$, où $\mu : U \longrightarrow U'$ est dans W si U, U' sont W-asphériques, donc $U'' = Z(\mu)$ est alors W-asphérique. Cela prouve le lemme.

Cela montre que, moyennant W(7 bis) (en fait, on a utilisé seulement la partie 'universelle' de W(7 bis)), savoir que dans

$$\begin{tikzcd}
T_0 \arrow[r] \arrow[dr, "i"'] & T_2 \arrow[dr, "i'"] & \\
 & T_1 \arrow[r] & T_3
\end{tikzcd}$$

diagramme cocartésien d'immersions ouvertes, $i \in W \Longrightarrow i' \in W$ (au lieu de $\Longleftrightarrow$),

`[page 270]`

la validité de W(7) se ramène au cas où le carré Y est le carré trivial

$$\begin{tikzcd}
 & e \arrow[dr] & \\
e \arrow[ur] \arrow[dr] & & e, \\
 & e \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

e l'objet final de Cat.

On peut maintenant conclure : On a (moyennant la partie directe de W(7 bis))

$$\mathrm{a}' \ \& \ \mathrm{b}' \Longrightarrow \mathrm{c}',$$

car si Z_0, Z_1 sont $\in \mathrm{Asph}_W$, alors $i_1 \in W$, donc $j_1 \in W$, et si de plus $Z_2 \in \mathrm{Asph}_W$, on a donc $Z_3 \in \mathrm{Asph}_W$.

$$\begin{tikzcd}
 & Z_1 \arrow[dr, "j_2"] & \\
Z_0 \arrow[ur, "i_1"] \arrow[dr, "i_2"'] & & Z_3 \\
 & Z_2 \arrow[ur, "j_1"'] &
\end{tikzcd}$$

Si on a aussi la partie inverse ('inhabituelle') de W(7 bis), alors

$$\mathrm{b}' \ \& \ \mathrm{c}' \Longrightarrow \mathrm{a}',$$

car si Z_1 et Z_3 sont W-asphériques, alors $j_2 \in W$, donc $i_2 \in W$, et si de plus Z_2 est W-asphérique, on conclut Z_0 W-asphérique.

Enfin, supposons que W soit *stable par facteurs directs,* et W(7 bis) satisfait sous forme directe. Je dis qu'alors

$$\mathrm{c}' \ \&\ \mathrm{a}' \Longrightarrow \mathrm{b}',$$

i.e.

$$Z_0 \text{ et } Z_3 \in \mathrm{Asph}_W \qquad \Longrightarrow \qquad Z_1 \text{ et } Z_2 \in \mathrm{Asph}_W .$$

Factorisant i_1 et i_2 en

$$Z_0 \xrightarrow{i_1'} Z_1' \xrightarrow{\alpha_1} Z_1,$$
$$Z_0 \xrightarrow{i_2'} Z_2' \xrightarrow{\alpha_2} Z_2,$$

avec i_1', i_2' des immersions ouvertes de Dwyer, et $\alpha_1, \alpha_2 \in W$, on est ramené au cas où

[page 271]

i_1, i_2 sont des *immersions ouvertes de Dwyer,* et où le carré est cocartésien (ce qui implique qu'il est W-cocartésien). Faisant alors le cochangement de base par $Z_0 \xrightarrow{p_0} Z_0' = e$, on trouve un homomorphisme de carrés cocartésiens

$$\begin{tikzcd}
& Z_1 \arrow[rr] \arrow[dd, "p_1"] & & Z_3 \arrow[dd, "p_3"] \\
Z_0 \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[dd, "p_0"'] & & Z_2 \arrow[ur] \arrow[dd, "p_2"] & \\
& Z_1' \arrow[rr] & & Z_3', \\
e = Z_0' \arrow[ur] \arrow[rr] & & Z_2' \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

où toutes les faces du cube sont W-cocartésiennes, et comme $p_0 \in W$ (Z_0 étant W-asphérique), les autres flèches verticales p_1, p_2, p_3 sont [dans] W, donc le carré Z_*' satisfait aussi Z_0' et Z_3' [W-]asphériques (et de plus $Z_0' = e$), et il faut prouver Z_1', Z_2' W-asphériques (d'où itou pour Z_1, Z_2). Donc, on est ramené au cas particulier où $Z_0 = e$.

Mais dans ce cas il existe une rétraction (triviale!) de Z_1 sur Z_0, donc aussi de Z_3 sur Z_2. Ainsi, Z_2 est un facteur

[page 272]

direct d'un objet W-asphérique, ce qui implique, par l'hypothèse sur W, que Z_2 est W-asphérique. Par symétrie, Z_1 l'est aussi. On a gagné!

NB En fait, ces arguments sont généraux, et donnent ceci :

Théorème. *Soit* $(\mathcal{M}, W)$ *une catégorie des modèles, admettant une théorie de la cofibre W-homotopique* ([137]) *(i.e. on a une factorisation de toute flèche $f : X \longrightarrow Y$ en pi, avec $i \in \mathrm{Cof}_W$, $p \in W$.) On a donc une notion de carré W-cocartésien dans $\mathcal{M}$* ([138])*. Soit*

[137] Mais on ne sait vérifier l'existence d'une telle théorie dans (Cat, W) que si on admet la forme faible de W(7), i.e. $f_0, f_1, f_2 \in W \implies f_3 \in W$, ou quelque cas particulier de celle-ci. Mais le *lemme de Brown* sauve la situation, cf. XV §3.

[138] à vérifier que la factorisation suffit, même si tous les objets ne sont pas fibrants sur e. Mais on peut alors remplacer $\mathcal{M}$ par $\mathcal{M}_f$, et développer ce formalisme des fibres homotopiques en conséquence ...

alors $f : X \longrightarrow Y$ *un homomorphisme d'un carré* W*-cocartésien* X *dans un autre* Y, $f = (f_0, f_1, f_2, f_3)$.

$$\begin{tikzcd}
 & X_2 \arrow[rr] \arrow[dd, "f_2"] & & X_3 \arrow[dd, "f_3"] \\
X_0 \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[dd, "f_0"'] & & X_1 \arrow[ur] \arrow[dd, "f_1"] & \\
 & Y_2 \arrow[rr] & & Y_3 \\
Y_0 \arrow[ur] \arrow[rr] & & Y_1 \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Considérons les conditions sur f

a) $f_0 \in W$.

b) f_1 *et* $f_2 \in W$.

c) $f_3 \in W$.

Alors

1°) a *&* $b \Longrightarrow c$.

[page 273]

2°) Supposons que $\mathcal{M}$ *ait un objet final* e. *Alors l'implication*

$$b \;\&\; c \Longrightarrow a$$

pour tout *homomorphisme* $f : X \longrightarrow Y$ *de carrés* W*-cocartésiens équivaut à l'axiome suivant sur* W *:*

Axiome des carrés W-cocartésiens conservatifs ([139]) : *Si*

$$\begin{tikzcd}
 & Z_1 \arrow[dr, "j_2"] & \\
Z_0 \arrow[ur, "i_1"] \arrow[dr, "i_2"'] & & Z_3 \\
 & Z_2 \arrow[ur, "j_1"'] &
\end{tikzcd}$$

est W*-cocartésien, alors* $j_1 \in W \Longrightarrow i_1 \in W$ *(donc en fait* $i_1 \in W \Longleftrightarrow j_1 \in W$ *et* $i_2 \in W \Longleftrightarrow j_2 \in W$*).*

Cet axiome est équivalent à la conjonction des deux axiomes suivants.

Cons 1. *Si on a un carré cocartésien*

[139] cf. argument page 78 qui montre que l'implication b & c $\Longrightarrow$ a entraine l'axiome conservatif.

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r] \arrow[dr] & T \arrow[dr] & \\ & e \arrow[r] & U, \end{tikzcd}$$

avec $f \in \mathrm{Cof}_W$*, alors* $U \in \mathrm{Asph}_W \Longrightarrow f \in W$ *(donc* $U \in \mathrm{Asph}_W \Longleftrightarrow f \in W$*).*

Cons 2. *Si on a un carré cartésien,*

$$\begin{tikzcd} & Z_1 \arrow[dr] & \\ Z_0 \arrow[ur, "i_1"] \arrow[dr, "i_2"'] & & Z_3, \\ & Z_2 \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

avec $i_1, i_2 \in \mathrm{Cof}_W$*, alors : Si* Z_1*,* Z_2*,* Z_3 *sont* W*-asphériques,* Z_0 *l'est aussi.*

`[page 274]`

3°) *Supposons que tout facteur direct d'un objet* W*-asphérique soit* W*-asphérique, ce qui est le cas notamment si* W *est lui-même stable par facteurs directs, a fortiori si* W *est fortement saturé. Supposons de plus que* $\mathcal{M}$ *ait* `[un]` *objet final. Alors on a (sous les conditions générales du début)*

$$c \ \&\ a \Longrightarrow b,$$

i.e. si f_0*,* f_3 *sont* `[dans]` W*, de même* f_1*,* f_2*.*

Cette dernière partie peut se déployer ainsi :

Corollaire 1. *Sous l'hypothèse supplémentaire* 3°) *sur* W*, la validité de* $c \ \&\ a \Longrightarrow b$ *(pour toute flèche* f *entre carrés* W*-cocartésiens) équivaut à chacun des deux autres axiomes suivants sur* W *(qui sont donc équivalents) :*

1) *Si on a un carré* W*-cocartésien*

$$\begin{tikzcd} & Z_1 \arrow[dr] & \\ Z_0 \arrow[ur] \arrow[dr] & & Z_3, \\ & Z_2 \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

alors Z_0 *et* Z_3 W*-asphériques* $\Longrightarrow$ Z_1 *et* Z_2 W*-asphériques.*

1′) *Comme 1), avec* $Z_0 = e$ *(dans le cas où on suppose que* $\mathcal{M}$ *admet* `[un]` *objet final* e*).*

`[page 275]`

Corollaire 2. *Supposons que* W *satisfasse l'axiome des carrés* W*-cocartésiens conservatifs, que tout facteur direct d'un objet* W*-asphérique soit* W*-asphérique (p. ex.* W *stable par facteurs directs), enfin que* $\mathcal{M}$ *admette un objet final. Alors pout tout homomorphisme* $f : X \longrightarrow Y$ *de carrés* W*-cocartésiens, la conjonction de deux parmi les conditions a) b) c) de p. 272 entraîne la troisième.*