# LES DÉRIVATEURS

**ALEXANDRE GROTHENDIECK**

## Chapitre XVIII

## Catégories et ensembles accessibles

Ce texte a été déchiffré et transcrit en $\LaTeX\,2_\varepsilon$ par M. Künzer. Il a été édité par M. Künzer, J. Malgoire, et G. Maltsiniotis. La transcription est aussi fidèle que possible au manuscrit. Seules quelques corrections mineures évidentes ont été effectuées. Pour les rares ajouts ou commentaires des éditeurs, ainsi que pour la numérotation originale des pages du manuscrit, les caractères de machine à écrire `[typewriter]` entre crochets sont utilisés. Quelques notes de bas de page ajoutées par les éditeurs sont signalées par « N. Éd. ». La numérotation des pages de ce chapitre commence à la page 50, car à l'origine ce chapitre était la suite du chapitre XIX qui se termine au milieu de la page 50.

Cette édition est provisoire. Les remarques, commentaires et corrections sont bienvenus. Envoyer un message à :

**georges.maltsiniotis@imj-prg.fr**

G. Maltsiniotis

`[page 50]`

# 4 Paratopos et l'opération $\mathcal{M} \boxtimes \mathcal{N}$

## 4.1 Pseudo-topos. Problème du produit.

J'appelle *catégorie pseudo-$\mathfrak{U}$-topos,* ou simplement *pseudo-topos,* une $\mathfrak{U}$-catégorie $\mathcal{M}$ stable par $\mathfrak{U}$-limites inductives, et qui admet une *petite* sous-catégorie $\mathcal{M}_0$ *strictement génératrice* (i.e. génératrice par épimorphismes stricts). Alors $\mathcal{M}$ admet aussi des $\mathfrak{U}$-limites projectives (SGA 4 I 8.12.7). (Mais l'exemple de (Gr), cf. loc. cit. 8.12.9, montre que $\mathcal{M}^\circ$ n'est par forcément, pour autant, un pseudo-$\mathfrak{U}$-topos, faute à $\mathcal{M}$ d'admettre une petite sous-catégorie strictement *co*génératrice. Mais le théorème 2.6 `[du chapitre XIX]` donne des conditions sur $\mathcal{M}$ (surtout du type exactitude)

`[page 51]`

pour que $\mathcal{M}$ admette assez d'injectifs – ce qui impliquera alors l'existence d'une petite sous-catégorie strictement cogénératrice, donc que $\mathcal{M}^\circ$ est également un pseudo-topos ([1]).

Je visualise les catégories pseudo-topos comme étant la catégorie des "faisceaux" sur un objet $\mathcal{X}$, visualisé comme une sorte d'"espace" que je distingue de la catégorie $\mathcal{M} = \mathrm{Fais}(\mathcal{X})$ des faisceaux sur $\mathcal{X}$. C'est $\mathcal{X}$ qui sera pour ceci le "pseudo-topos". Les pseudo-topos forment une 2-catégorie, la variance dans $\mathcal{X}$ étant opposée de celle dans $\mathrm{Fais}(\mathcal{X}) = \mathcal{M}$. De façon précise, si $\mathcal{X}$ correspond à $\mathcal{M}$, $\mathcal{Y}$ à $\mathcal{N}$, un morphisme $f$ de $\mathcal{X}$ dans $\mathcal{Y}$ sera donné par un foncteur

$$f^* : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{M} \tag{4.1.1}$$

en sens inverse, commutant aux $\varinjlim$ inductives quelconques ([2]). (**N.B.** si $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ sont même des topos, i.e. $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ des catégories-topos, et si on veut que $f$ soit un morphisme de topos, on exigera de plus que $f^*$ soit de plus *exact à gauche.* On dira qu'un *morphisme de pseudo-topos est exact* si de plus $f^*$ est exact à gauche.)

`[page 52]`

En vertu du dual de loc. cit. 8.12.7, cela équivaut au fait que $f^*$ admette un adjoint à droite $f_*$,

$$f_* : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N} , \tag{4.1.2}$$

lequel commute donc aux petites $\varprojlim$ . La donnée de $f_*$ satisfaisant à cette propriété détermine donc $f^*$ à isomorphisme unique près. Mais en général, il ne suffit pas de se donner un tel $f_*$, pour pouvoir affirmer qu'il corresponde à un $f^*$, i.e. qu'il admette un adjoint à droite ; pour ceci, il faudrait qu'on sache que les foncteurs $\mathcal{M} \longrightarrow \mathrm{Ens}$ qui commutent aux petites $\varprojlim$ sont représentables, ce qui sera le cas si $\mathcal{M}$ admet une petite sous-catégorie *co*génératrice, i.e. si $\mathcal{M}^\circ$ est également une catégorie pseudo-topos.

[1] C'est le cas notamment si $\mathcal{M}$ est un topos.

[2] Dire ici que les objets de $\mathcal{M}$ sont visualisés comme des "ouverts" généralisés de $\mathcal{X}$. On a $\mathcal{M} \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Hom}}^!(\mathcal{M}^\circ, \mathrm{Ens})$, i.e. $\mathcal{M}$ s'interprète bel et bien comme les "faisceaux" sur cette catégorie $\mathcal{M}$ d'ouverts ...

Il est sans doute judicieux de procéder comme dans le cas des topos, et d'appeler *morphisme de pseudo-topos* $f : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ un quadruple

$$(f^*, f_*, \alpha, \beta) \tag{4.1.3}$$

[page 53]

de deux foncteurs adjoints $(f^*, f_*)$, et des morphismes d'adjonction. Quand $f^*$ est une équivalence, ce qui équivaut à $f_*$ une équivalence, ou $\alpha$ et $\beta$ des isomorphismes, on dira qu'on a une *équivalence de pseudo-topos,* et à toutes fins pratiques, on pourra alors regarder $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ comme des objets essentiellement identiques.

Pour deux pseudo-topos $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$, j'ai envie d'introduire (comme dans le cas des topos) un pseudo-topos produit

$$\mathcal{X} \times \mathcal{Y}\ , \tag{4.1.4}$$

qui ait les propriétés d'un 2-produit dans la 2-catégorie des pseudo-topos ([3]). Je devrais préciser que par définition

$$\begin{aligned} \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{pstop}}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) &\simeq \underline{\mathrm{Hom}}_{!}(\mathcal{F}(\mathcal{Y}), \mathcal{F}(\mathcal{X}))^{\circ} \\ &\simeq \underline{\mathrm{Hom}}^{!'}(\mathcal{F}(\mathcal{X}), \mathcal{F}(\mathcal{Y})), \end{aligned} \tag{4.1.5}$$

où l'indice ! (resp. l'exposant !) indique la sous-catégorie pleine dans la catégorie $\underline{\mathrm{Hom}}$ envisagée formée des foncteurs qui commutent aux petites $\varinjlim$ (resp. aux petites

[page 54]

$\varprojlim$ ), et l'accent dans le $\underline{\mathrm{Hom}}^{!'}$ dans le dernier membre indique qu'on exige de plus que le foncteur en question ait un adjoint à gauche.

Soient donc

$$\mathcal{M} \ = \ \mathcal{F}(\mathcal{X})\ , \qquad \mathcal{N} \ = \ \mathcal{F}(\mathcal{Y})\ , \tag{4.1.6}$$

et soit $\mathcal{Z}$ un troisième pseudo-topos, décrit par

$$\mathcal{P} \ = \ \mathcal{F}(\mathcal{Z})\ . \tag{4.1.7}$$

On veut expliciter, à équivalence près, la catégorie produit $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{pstop}}(\mathcal{Z}, \mathcal{X}) \times \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{pstop}}(\mathcal{Z}, \mathcal{Y})$, i.e.

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{!}(\mathcal{M}, \mathcal{P})^{\circ} \ \times \ \underline{\mathrm{Hom}}_{!}(\mathcal{N}, \mathcal{Q})^{\circ}. \tag{4.1.8}$$

Je vais introduire pour cela une catégorie

[3] Il apparaît finalement que ce qu'on construit n'est *pas* un 2-produit dans la 2-catégorie envisagée, donc il vaut mieux le noter par un signe tel que $\mathcal{X} \boxtimes \mathcal{Y}$. Mais si $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ sont deux topos, $\mathcal{X} \boxtimes \mathcal{Y}$ est un 2-produit dans la 2-catégorie des topos.

[page 55]

$$\mathcal{M} \boxtimes \mathcal{N} \tag{4.1.9}$$

par la formule

$$\mathcal{M} \boxtimes \mathcal{N} \simeq \underline{\mathrm{Hom}}^{!!}(\mathcal{M}^\circ \times \mathcal{N}^\circ, \mathrm{Ens}) \ , \tag{4.1.10}$$

où le signe $\underline{\mathrm{Hom}}^{!!}$ désigne la sous-catégorie pleine de la catégorie $\underline{\mathrm{Hom}}$, formée des bi-contrafoncteurs

$$F \ : \ \mathcal{M}^\circ \times \mathcal{N}^\circ \longrightarrow \mathrm{Ens} \ , \tag{4.1.10.1}$$

tels que pour tout $x$ dans $\mathcal{M}$, le foncteur

$$y \longmapsto F(x,y) \ : \ \mathcal{N}^\circ \longrightarrow \mathrm{Ens} \tag{4.1.10.2}$$

soit dans $\underline{\mathrm{Hom}}^!(\mathcal{N}^\circ, \mathrm{Ens})$, i.e. transforme petites $\varinjlim$ en $\varprojlim$, et que, symétriquement, pour tout $y$ dans $\mathcal{N}$, le foncteur

$$x \longmapsto F(x,y) \ : \ \mathcal{M}^\circ \longrightarrow \mathrm{Ens} \tag{4.1.10.3}$$

soit dans $\underline{\mathrm{Hom}}^!(\mathcal{M}^\circ, \mathrm{Ens})$. Mais cela signifie aussi que ces foncteurs sont *représentables ;* donc on trouve aussi

$$\mathcal{M} \boxtimes \mathcal{N} \xleftarrow{\sim} \underline{\mathrm{Hom}}^!(\mathcal{N}^\circ, \mathcal{M}) \tag{4.1.11}$$

et

$$\mathcal{M} \boxtimes \mathcal{N} \xleftarrow{\sim} \underline{\mathrm{Hom}}^!(\mathcal{M}^\circ, \mathcal{N}) \tag{4.1.12}$$

[page 56]

en utilisant (dans chacune de ces formules) dans deux côtés les équivalences de catégories

$$\begin{cases} \mathcal{M} & \xrightarrow{\sim} & \underline{\mathrm{Hom}}^!(\mathcal{M}^\circ, \mathrm{Ens}) \\ \mathcal{N} & \xrightarrow{\sim} & \underline{\mathrm{Hom}}^!(\mathcal{N}^\circ, \mathrm{Ens}) \ . \end{cases} \tag{4.1.13}$$

On peut dire aussi que la catégorie $\mathcal{M} \boxtimes \mathcal{N}$ est équivalente à celle des *couples* de foncteurs

$$\begin{cases} \varphi & : & \mathcal{M}^\circ & \longrightarrow & \mathcal{N} \\ \psi & : & \mathcal{N}^\circ & \longrightarrow & \mathcal{M} \ , \end{cases} \tag{4.1.14}$$

munis de deux morphismes d'adjonction

$$\begin{cases} \psi\varphi^\circ & \xleftarrow{\alpha} & \mathrm{id}_{\mathcal{M}} \\ \varphi\psi^\circ & \xleftarrow{\beta} & \mathrm{id}_{\mathcal{N}} \end{cases} \tag{4.1.15}$$

satisfaisant les deux compatibilités habituelles exprimant l'adjonction de $\varphi^\circ$ et de $\psi$ (ou, de façon équivalente, de $\psi^\circ$ et de $\varphi$). Le foncteur

$$(\varphi, \psi) \longmapsto \varphi \qquad (\text{resp. } \ (\varphi,\psi) \longmapsto \psi)$$

donne une équivalence de la catégorie de ces couples avec $\underline{\mathrm{Hom}}^!(\mathcal{M}^\circ, \mathcal{N})$ (resp. avec $\underline{\mathrm{Hom}}^!(\mathcal{N}^\circ, \mathcal{M})$), de sorte qu'on a un carré commutatif d'équivalences canoniques de foncteurs :

`[page 57]`

(4.1.16)
$$
\begin{tikzcd}
 & \mathcal{M} \mathbin{\widetilde{\boxtimes}} \mathcal{N} \arrow[dl, "\wr"'] \arrow[dr, "\wr"] & \\
\underline{\mathrm{Hom}}^{!}(\mathcal{M}^{\circ}, \mathcal{N}) \arrow[dr, "\wr"'] & & \underline{\mathrm{Hom}}^{!}(\mathcal{N}^{\circ}, \mathcal{M}) \arrow[dl, "\wr"] \\
 & \underbrace{\mathcal{M} \boxtimes \mathcal{N}}_{\overset{\text{déf}}{=} \underline{\mathrm{Hom}}^{!!}(\mathcal{M}^{\circ} \times \mathcal{N}^{\circ}, \mathrm{Ens})} &
\end{tikzcd}
$$

`[où` $\mathcal{M} \mathbin{\widetilde{\boxtimes}} \mathcal{N}$ `est la catégorie des couples définie dans la page précédente.]`
Je dis que $\mathcal{M} \boxtimes \mathcal{N}$ *est une catégorie pseudo-topos.* Il est clair, `[en]` outre, qu'elle admet des petites $\varprojlim$, qui se calculent argument par argument dans $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{M}^{\circ} \times \mathcal{N}^{\circ}, \mathrm{Ens})$, ou au choix dans $\underline{\mathrm{Hom}}^{!}(\mathcal{M}^{\circ}, \mathcal{N})$, ou $\underline{\mathrm{Hom}}^{!}(\mathcal{N}^{\circ}, \mathcal{M})$. Comment construire des petites $\varinjlim$ ? Il n'est pas question d'invoquer un argument de cogénérateurs. Il faut d'ailleurs trouver aussi une petite sous-catégorie strictement génératrice. Visiblement, il y a quelque chose de non trivial à démontrer !

## 4.2 Cafouillages sur $\mathcal{M} \boxtimes \mathcal{N}$

Revenons à la situation générale d'un pseudo-topos $\mathcal{X}$, décrit par la catégorie pseudo-topos $\mathcal{M}$. Si $\mathcal{N}$ est une catégorie quelconque, on définit la catégorie

`[page 58]`

$$\mathrm{Fais}(\mathcal{X}, \mathcal{N}) \qquad \text{ou} \qquad \mathcal{F}(\mathcal{X}, \mathcal{N})$$

des faisceaux sur $\mathcal{X}$, à valeurs dans $\mathcal{N}$, par

(4.2.1)
$$\mathcal{F}(\mathcal{X}, \mathcal{N}) \overset{\text{déf}}{=} \underline{\mathrm{Hom}}^{!}(\mathcal{M}^{\circ}, \mathcal{N}) \ .$$

On a donc un foncteur pleinement fidèle

(4.2.2)
$$\mathcal{F}(\mathcal{X}, \mathcal{N}) \overset{\text{déf}}{=} \underline{\mathrm{Hom}}^{!}(\mathcal{M}^{\circ}, \mathcal{N}) \hookrightarrow \mathrm{Hom}^{!}(\mathcal{N}^{\circ}, \overline{\mathcal{M}}) \ ,$$

où $\overline{\mathcal{M}}$ désigne la sous-catégorie de $\mathcal{M}^{\wedge}$ (**N.B.** $\mathcal{M}^{\wedge}$ n'est pas en général une $\mathcal{U}$-catégorie qu'à cela ne tienne) formée des foncteurs *représentables* $\mathcal{M}^{\circ} \to \mathrm{Ens}$ (laquelle est une $\mathfrak{U}$-catégorie, équivalente à $\mathcal{M}$ par l'inclusion canonique $\mathcal{M} \hookrightarrow \overline{\mathcal{M}}$). Donc on a à isomorphisme unique près une factorisation de (4.2.2) en

(4.2.3)
$$\mathcal{F}(\mathcal{X}, \mathcal{N}) \xhookrightarrow{\text{pl. fid.}} \underline{\mathrm{Hom}}^{!}(\mathcal{N}^{\circ}, \mathcal{M}) \ ,$$

l'image essentielle étant formée des foncteurs

$$\psi \ : \ \mathcal{N}^{\circ} \longrightarrow \mathcal{M}$$

tels que pour tout $x$ dans $\mathcal{M}$,

$$y \longmapsto \mathrm{Hom}(y, \psi(x)) \ : \ \mathcal{N}^{\circ} \longrightarrow \mathrm{Ens}$$

soit représentable, i.e. des foncteurs qui

[page 59]

admettent un *adjoint à gauche.* Quand $\mathcal{N}$ lui-même est une catégorie pseudo-topos, cette condition est automatique (elle résulte de l'hypothèse que $\psi$ commute aux petites $\varprojlim$ ). Donc dans ce cas, (4.2.3) est une équivalence de catégories.

Soit maintenant $S$ ($S$ comme "site") une *petite* sous-catégorie de $\mathcal{M}$, génératrice par épimorphismes stricts. On sait que cela signifie que le foncteur composé

$$(4.2.4) \qquad \mathcal{M} \xrightarrow{\simeq} \underline{\mathrm{Hom}}^!(\mathcal{M}^\circ, \mathrm{Ens}) \xrightarrow{\text{restriction à } S} S^\wedge \ ( \overset{\text{déf}}{=} \underline{\mathrm{Hom}}(S^\circ, \mathrm{Ens}) \ )$$

est pleinement fidèle, et ceci implique plus généralement, que pour toute catégorie $\mathcal{N}$, le foncteur restriction

$$(4.2.5) \qquad \mathcal{F}(\mathcal{X}, \mathcal{N}) \overset{\text{déf}}{=} \underline{\mathrm{Hom}}^!(\mathcal{M}^\circ, \mathcal{N}) \xhookrightarrow{\text{pl. fid.}} \underline{\mathrm{Hom}}(S^\circ, \mathcal{N})$$

est pleinement fidèle. En effet, le deuxième membre, via le plongement pleinement fidèle

$$\mathcal{N} \xhookrightarrow{\text{pl. fid.}} \underline{\mathrm{Hom}}^!(\mathcal{N}^\circ, \mathrm{Ens}) \hookrightarrow \mathcal{N}^\wedge ,$$

se plonge dans

$$\underline{\mathrm{Hom}}(S^\circ, \underline{\mathrm{Hom}}^!(\mathcal{N}^\circ, \mathrm{Ens})) \simeq \mathrm{Hom}^!(\mathcal{N}^\circ, S^\wedge) ,$$

et la pleine fidélité de (4.2.5) équivaut donc à celle du foncteur composé

$$(4.2.6) \quad \mathcal{F}(\mathcal{X}, \mathcal{N}) \overset{\text{déf}}{=} \underline{\mathrm{Hom}}^!(\mathcal{M}^\circ, \mathcal{N}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}^!(\mathcal{N}^\circ, S^\wedge) \simeq \underline{\mathrm{Hom}}(S^\circ, \underline{\mathrm{Hom}}^!(\mathcal{N}^\circ, \mathrm{Ens})) .$$

[page 60]

Or on a commutativité dans le carré

$$(4.2.7) \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{F}(\mathcal{X}, \mathcal{N}) \overset{\text{déf}}{=} \underline{\mathrm{Hom}}^!(\mathcal{M}^\circ, \mathcal{N}) \arrow[r, "(4.2.5)"] \arrow[d, hook, "(4.2.3)"', "\text{pleinement fidèle}"] & \underline{\mathrm{Hom}}(S^\circ, \mathcal{N}) \arrow[d, hook, "\text{pleinement fidèle}"] \\ \underline{\mathrm{Hom}}^!(\mathcal{N}^\circ, \mathcal{M}) \arrow[r, hook, "(4.2.4)", "\text{pleinement fidèle}"'] & \underbrace{\underline{\mathrm{Hom}}^!(\mathcal{N}^\circ, S^\wedge)}_{\simeq \underline{\mathrm{Hom}}(S^\circ, \underline{\mathrm{Hom}}^!(\mathcal{N}^\circ, \mathrm{Ens}))} \end{tikzcd}$$

(où les flèches verticales sont des équivalences, si $\mathcal{N}$ est lui-même une catégorie pseudo-topos). Notons d'autre part que l'on a une équivalence

$$(4.2.8) \qquad \underline{\mathrm{Hom}}(S^\circ, \mathcal{N}) \xleftarrow{\simeq} \underline{\mathrm{Hom}}^!(S^{\wedge\circ}, \mathcal{N}) \overset{\text{déf}}{=} \mathcal{F}(\mathrm{Top}(S), \mathcal{N}) ,$$

où $\mathrm{Top}(S)$ est le pseudo-topos (en fait, un topos) défini par la catégorie pseudo-topos $S^\wedge$. Pour ceci, notons qu'on a

$$\underline{\mathrm{Hom}}^!(S^{\wedge\circ}, \mathcal{N}) \xrightarrow{\simeq} \underline{\mathrm{Hom}}_!(S^\wedge, \mathcal{N}^\circ)^\circ ,$$

et d'autre part le foncteur restriction à $S \hookrightarrow S^\wedge$ donne

$$\underline{\mathrm{Hom}}_!(S^\wedge, \mathcal{N}^\circ) \xrightarrow{\simeq} \underline{\mathrm{Hom}}(S, \mathcal{N}^\circ) ,$$

d'où

[page 61]

$$\underline{\mathrm{Hom}}(S^{\wedge\circ},\mathcal{N}) \xrightarrow{\ \sim\ } (\underline{\mathrm{Hom}}(S,\mathcal{N}^\circ))^\circ \xrightarrow{\ \sim\ } \underline{\mathrm{Hom}}(S^\circ,\mathcal{N}) ,$$

ce qui n'est autre que (4.2.8). Ainsi :

**Proposition 4.2.1.** *Soient $\mathcal{M} = \mathcal{F}(\mathcal{X})$ une catégorie pseudo-topos, munie d'une sous-catégorie pleine strictement génératrice $S$, $\mathcal{N}$ une $\mathfrak{U}$-catégorie quelconque, alors le foncteur "restriction à $S$" suivant est pleinement fidèle.*

$$\mathcal{F}(\mathcal{X},\mathcal{N}) \overset{\text{déf}}{=} \underline{\mathrm{Hom}}^!(\mathcal{M}^\circ,\mathcal{N}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(S^\circ,\mathcal{N}) \xleftarrow{\ \sim\ } \underbrace{\underline{\mathrm{Hom}}(S^{\wedge\circ},\mathcal{N})}_{\overset{\text{déf}}{=} \mathcal{F}(\mathrm{Top}(S),\mathcal{N})} , \tag{4.2.1.1}$$

*et il s'insère dans le carré commutatif (4.2.7) de foncteurs pleinement fidèles.*

**Corollaire 4.2.2.** *Supposons que $\mathcal{N} = \mathcal{F}(\mathcal{Y})$ soit également une catégorie pseudo-topos, munie d'une sous-catégorie pleine $T$ strictement génératrice. Alors*

$$\mathcal{F}(\mathcal{X},\mathcal{N}) \simeq \mathcal{F}(\mathcal{Y},\mathcal{M}) \simeq \underbrace{\underline{\mathrm{Hom}}^{!!}(\mathcal{M}^\circ\times\mathcal{N}^\circ,\mathrm{Ens})}_{=\mathcal{M}\boxtimes\mathcal{N}} ,$$

*et le foncteur restriction*

$$\begin{aligned} \mathcal{M}\boxtimes\mathcal{N} \overset{\text{déf}}{=} \underline{\mathrm{Hom}}^{!!}(\mathcal{M}^\circ\times\mathcal{N}^\circ,\mathrm{Ens}) \quad &\longrightarrow \quad \underline{\mathrm{Hom}}(S^\circ\times T^\circ,\mathrm{Ens}) \\ &\simeq \quad (S\times T)^\wedge \\ &\overset{\text{déf}}{=} \quad \mathcal{F}(\mathrm{Top}(S\times T)) \end{aligned} \tag{4.2.2.1}$$

*est pleinement fidèle.*

La première assertion a été vue dans 4.1. Pour la pleine fidélité de (4.2.2.1), on note que ce foncteur s'interprète, à équivalence de catégories près, comme le composé du foncteur pleinement fidèle (4.2.1.1), et du foncteur

[page 62]

similaire relatif à $\mathcal{N}$ (donc lui aussi pleinement fidèle)

$$\mathcal{F}(\mathcal{Y},S^\wedge) \overset{\text{déf}}{=} \underline{\mathrm{Hom}}^!(\mathcal{N}^\wedge,S^\wedge) \xrightarrow{\text{restr. à } T} \underbrace{\underline{\mathrm{Hom}}(T^\circ,S^\wedge)}_{\underline{\mathrm{Hom}}(S^\circ\times T^\circ,\mathrm{Ens})} , \tag{4.2.2.2}$$

compte tenu de l'équivalence de symétrie

$$\mathcal{F}(\mathcal{Y},S^\wedge) \overset{\text{déf}}{=} \underline{\mathrm{Hom}}^!(\mathcal{N}^\circ,S^\wedge) \simeq \underline{\mathrm{Hom}}^!(S^{\wedge\circ},\mathcal{N}) . \tag{4.2.2.3}$$

Au total, quand $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ sont tous deux des catégories pseudo-topos, munies de sous-catégories strictement génératrices $S$ resp. $T$, on a un plongement pleinement fidèle canonique

$$\mathcal{M}\boxtimes\mathcal{N} \overset{\rho}{\hookrightarrow} (S\times T)^\wedge , \tag{4.2.9}$$

qu'on interprète par la suite comme $(f_S^{\mathcal{M}} \times f_T^{\mathcal{N}})_*$, où

$$\text{(4.2.10)} \qquad \begin{cases} f_S^{\mathcal{M}} & : & \mathcal{X} & \longrightarrow & \mathrm{Top}\, S \\ f_T^{\mathcal{N}} & : & \mathcal{Y} & \longrightarrow & \mathrm{Top}\, T \end{cases}$$

sont les morphismes de pseudo-topos, donnés par les plongements pleinement fidèles (foncteurs image directe)

$$\text{(4.2.11)} \qquad \begin{cases} (f_S^{\mathcal{M}})_* & : & \mathcal{M} & \longrightarrow & S^\wedge \\ (f_T^{\mathcal{N}})_* & : & \mathcal{N} & \longrightarrow & T^\wedge \,, \end{cases}$$

lesquels admettent bel et bien des adjoints à gauche

[page 63]

$$\text{(4.2.12)} \qquad \begin{cases} (f_S^{\mathcal{M}})^* & : & S^\wedge & \longrightarrow & \mathcal{M} \\ (f_T^{\mathcal{N}})^* & : & T^\wedge & \longrightarrow & \mathcal{N} \,, \end{cases}$$

à savoir les prolongements canoniques (par commutativité aux petites $\varinjlim$ ) des foncteurs d'inclusion $S \hookrightarrow \mathcal{M}$, $T \hookrightarrow \mathcal{N}$.

La question essentielle, à présent, c'est visiblement de construire un adjoint à gauche pour le foncteur (4.2.9). Il revient au même, pour $(s,t)$ dans $S \times T$, de définir un objet

$$\text{(4.2.13)} \qquad s \boxtimes t \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{M} \boxtimes \mathcal{N} \,,$$

tel que l'on ait, pour $F$ variable dans $\mathcal{M} \boxtimes \mathcal{N}$, un isomorphisme fonctoriel en $F$,

$$\underbrace{\rho(F)(s,t)}_{\overset{\text{déf}}{=} F(s,t)} \simeq \mathrm{Hom}(s \boxtimes t, F) \,.$$

Donc il faut prouver ceci :

**Lemme 4.2.3** ([4]). *Soient $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ deux catégories pseudo-topos, et $s \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{M}$, $t \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{N}$, et considérons sur $\mathcal{M} \boxtimes \mathcal{N} \overset{\text{déf}}{=} \underline{\mathrm{Hom}}^{!!}(\mathcal{M}^\circ \times \mathcal{N}^\circ, \mathrm{Ens})$ le foncteur $F \longmapsto F(s,t)$. Ce foncteur est* représentable *(par un objet que je note $s \boxtimes t$).*

L'idée naturelle serait de définir $s \boxtimes t$ par

$$(s \boxtimes t)(x,y) = s(x) \times t(y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(x,s) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{N}}(y,t) \,,$$

[page 64]

ce qui définit bien un foncteur

$$\mathcal{M}^\circ \times \mathcal{N}^\circ \longrightarrow \mathrm{Ens} \,.$$

Malheureusement, pour un des arguments fixé, disons pour $y$ fixé, ce foncteur n'est *pas* compatible aux limites projectives, p.ex. il ne transforme pas l'objet final de $\mathcal{M}^\circ$ correspondant à l'objet initial de $\mathcal{M}$) en objet final de Ens, mais en $t(y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{N}}(y,t)$.

[4] Pas prouvé ; peut-être faux !

Néanmoins, je pense que $s \boxtimes t$ doit bel et bien se définir comme produit de deux objets de $\mathcal{M} \boxtimes \mathcal{N}$, dépendant fonctoriellement de $s$ resp. de $t$ ([5]). On est donc amené dès à présent, qu'on le veuille ou non, à essayer de définir des foncteurs canoniques, commutant aux petites $\varinjlim$ ,

$$\mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M} \boxtimes \mathcal{N} \longleftarrow \mathcal{N} \tag{4.2.13}$$

(lesquels seront les foncteurs image inverse pour les projections canoniques $\begin{tikzcd}[row sep=small] & \mathcal{X} \\ \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & \mathcal{Y} \end{tikzcd}$ ) ([6]).

## 4.3 L'opération $\mathcal{M} \boxtimes \mathcal{N}$ et l'axiome d'accessibilité

J'ai passé la journée hier, essayant d'établir l'existence des $x \boxtimes y$ dans $\mathcal{M} \boxtimes \mathcal{N}$, sans y parvenir – du moins pas sans faire une hypothèse supplémentaire d'accessibilité,

[page 65]

dont il devient évident à présent qu'il faut la faire de toutes façons. Je vais quand même énoncer le positif de mes perplexités.

**Proposition-perplexité 4.3.1.** *Soient $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ deux catégories pseudo-topos, d'où $\mathcal{M} \boxtimes \mathcal{N}$ comme dans 4.1. Soient $S \subset \mathcal{M}$, $T \subset \mathcal{N}$ deux petites sous-catégories strictement génératrices, et considérons l'inclusion pleinement fidèle correspondante :*

$$\underbrace{\mathcal{M} \boxtimes \mathcal{N}}_{\overset{\text{déf}}{=} \underline{\mathrm{Hom}}^{!!}(\mathcal{M}^\circ \times \mathcal{N}^\circ, \mathrm{Ens})} \begin{tikzcd} {} \arrow[r, hook, "\alpha"'] \arrow[r, dotted, bend right, leftarrow, "\varphi\,?"] & {} \end{tikzcd} S^\wedge \boxtimes T^\wedge \;\simeq\; (S \times T)^\wedge . \tag{4.3.1.1}$$

*Considérons les conditions suivantes :*

*a)* *$\mathcal{M} \boxtimes \mathcal{N}$ est un pseudo-topos.*

*b)* *Pour $x \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{M}$, $y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{N}$, $x \boxtimes y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{M} \boxtimes \mathcal{N}$ existe, i.e. le foncteur (commutant aux petites $\varprojlim$ )*

$$F \longmapsto F(x, y)\,, \qquad \mathcal{M} \boxtimes \mathcal{N} \longrightarrow \mathrm{Ens} \tag{4.3.1.2}$$

*est représentable.*

*b′)* *Comme b), avec $x \in \mathrm{Ob}\,S$, $y \in \mathrm{Ob}\,T$.*

*c)* *Le foncteur $\alpha$ (lequel commute aux petites $\varprojlim$ ) admet un adjoint à gauche*

$$\varphi \;:\; (S \times T)^\wedge \longrightarrow \mathcal{M} \boxtimes \mathcal{N}\,.$$

*On a alors les implications*

$$b \implies b' \iff c \implies a\,. \tag{4.3.1.3}$$

[5] également faux, cf. plus bas.

[6] Le cas où $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ sont des catégories-topos, nous montre que ces foncteurs devraient être décrits comme $x \longmapsto x \boxtimes e_{\mathcal{N}}$, $y \longmapsto e_{\mathcal{M}} \boxtimes y$. Mais il n'est pas clair qu'on ait en dehors du cas des topos, et même en admettant l'existence du $x \boxtimes y$, la formule (valable pour un topos) $x \boxtimes y \simeq (x \boxtimes e_{\mathcal{N}}) \times (e_{\mathcal{M}} \boxtimes y)$.

*De plus, si c est satisfait, on a ceci : pour $s \in S$, $t \in T$, considérons*

$$(s,t) \;\in\; (S \times T) \;\subset\; (S \times T)^\wedge \;\simeq\; S^\wedge \boxtimes T^\wedge \,,$$

*qui s'explicite aussi comme*

$$(4.3.1.4) \qquad \begin{cases} (s,t) \;=\; \mathrm{pr}_1^*(s) \times \mathrm{pr}_2^*(t) \;\simeq\; s \overset{S^\wedge, T^\wedge}{\boxtimes} t \in \mathrm{Ob}\,(S \times T)^\wedge \,, \\ \textit{i.e.}\ (s,t)(s',t') \;=\; s(s') \times t(t') \;=\; \mathrm{Hom}_S(s',s) \times \mathrm{Hom}_T(t',t) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad\;\; =\; \mathrm{Hom}_{S\times T}((s',t'),(s,t)) \,, \end{cases}$$

$$\begin{tikzcd} S \times T \arrow[r, "\mathrm{pr}_2"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"] & T \\ S \,, & \end{tikzcd}$$

[page 66]

*on a*

$$(4.3.1.4) \qquad s \overset{\mathcal{M},\mathcal{N}}{\boxtimes} t \;\simeq\; \varphi(s,t) \,,$$

*et $\varphi(S \times T) = \{s \boxtimes t \mid s \in S,\ t \in T\}$ est une partie strictement génératrice de $\mathcal{M} \boxtimes \mathcal{N}$ ([7]).*

**N.B.** Je ne connais pas d'exemple où les conditions envisagées ne soient satisfaites, mais doute pourtant à présent que même la plus faible le soit toujours, i.e. que $\mathcal{M} \boxtimes \mathcal{N}$ soit un pseudo-topos dès que $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ le sont.

Démonstration de 4.3.1. L'implication b $\Longrightarrow$ b$'$ est tautologique. L'implication b$'$ $\Longleftrightarrow$ c résulte du

**Lemme 4.3.2.** *Soient $\mathcal{E}$, $X$ des $\mathfrak{U}$-catégories avec $X$ petite, $\mathcal{E}$ stable par petites $\varprojlim$ ,*

$$\alpha \;:\; \mathcal{E} \longrightarrow X^\wedge$$

*un foncteur. Pour que $\alpha$ admette un adjoint à gauche $\varphi$, il faut et il suffit que pour tout $x \in \mathrm{Ob}\,X$, le foncteur*

$$\begin{cases} \xi \;\longmapsto\; \mathrm{Hom}_{X^\wedge}(x, \alpha(\xi)) \;=\; \alpha(\xi)(x) \\ \mathcal{E}^\circ \;\longrightarrow\; \mathrm{Ens} \end{cases}$$

*soit représentable.*

C'est évidemment nécessaire. La suffisance résulte du fait que $X \subset X^\wedge$ est stricte-

[7] **N.B.** On a bien sûr $(s,t) = s \overset{S^\wedge, T^\wedge}{\boxtimes} t$.

`[page 67]`

ment génératrice dans $X^\wedge$, i.e. que tout objet $F$ de $X^\wedge$ est limite inductive $F = \varinjlim_I F_i$, les $F_i$ dans $X$ (on prend $I = X/F$), d'où

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(F, \alpha(\xi)) &\simeq \varprojlim_I \underbrace{\mathrm{Hom}(F_i, \alpha(\xi))}_{\mathrm{Hom}(\rho(F_i),\xi)} \\ &\simeq \mathrm{Hom}(\varinjlim_I (\rho(F_i), \xi))\ , \end{aligned}$$

donc le foncteur $\xi \longmapsto \mathrm{Hom}(F, \alpha(\xi))$ est représenté par $\rho(F) \overset{\text{déf}}{=} \varinjlim_I \rho(F_i)$.

Prouvons c $\Longrightarrow$ a. Pour l'existence des petites $\varinjlim$ dans $\mathcal{M} \boxtimes \mathcal{N}$, et l'existence d'une partie strictement génératrice, on invoque le lemme général :

**Lemme 4.3.3.** *Soit $\alpha : \mathcal{E} \hookrightarrow \mathcal{F}$ un foncteur pleinement fidèle admettant un adjoint à gauche $\rho$.*

a) *Si les $\varinjlim$ d'un type donné $I$ existent dans $\mathcal{F}$, elles existent dans $\mathcal{E}$, et se calculent comme*

$$\varinjlim_I {}_{\mathcal{E}}\, \xi_i = \rho(\varinjlim_I {}_{\mathcal{F}}\, \alpha(\xi_i))\ . \tag{4.3.3.1}$$

b) *Si $U$ est une petite partie strictement génératrice de $\mathcal{F}$, $\rho(U)$ est une petite partie strictement génératrice dans $\mathcal{F}$.*

En effet, si $\xi$ désigne le deuxième membre `[de l'égalité 4.3.3.1]`, et $\eta$ un objet variable de $\mathcal{E}$, on aura

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(\xi, \eta) &\overset{\text{adj.}}{\simeq} \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(\varinjlim_I \alpha(\xi_i), \alpha(\eta)) \\ &\simeq \varprojlim_I \underbrace{\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(\alpha(\xi_i), \alpha(\eta))}_{\simeq\, \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(\xi_i,\eta) \ \text{car } \alpha \text{ pleinement fidèle}}\ . \end{aligned}$$

`[page 68]`

$$\simeq \varprojlim_I \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(\xi_i, \eta)\ ,$$

ce qui prouve que $\xi$ est une limite inductive des $\xi_i$ dans $\mathcal{E}$ ([8]).

Ceci prouve que (moyennant c)) $\mathcal{M} \boxtimes \mathcal{N}$ est stable par petites $\varinjlim$, donc il reste à prouver que $\mathcal{M} \boxtimes \mathcal{N}$ admet une petite famille strictement génératrice. Cela résultera du b) dans le lemme, puisque $S \times T$ engendre strictement $(S \times T)^\wedge$. Cela prouve en même temps la dernière assertion de la proposition, sous réserve de prouver la formule (4.1.3.4). Il faut donc prouver un isomorphisme fonctoriel en $F \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{M} \boxtimes \mathcal{N}$,

$$\mathrm{Hom}(\rho(s,t), F) \simeq F(s,t)\ ,$$

mais par adjonction on a

$$\mathrm{Hom}(\rho(s,t), F) \simeq \mathrm{Hom}((s,t), \alpha(F)) = \alpha(F)(s,t) = F(s,t)\ ,$$

OK.

[8]Pour prouver b), on note que la pleine fidélité de $\alpha$ implique que $\rho$ est essentiellement surjectif ; comme $\rho$ commute aux petites $\varinjlim$ et que tout objet de $\mathcal{F}$ est de la forme $\varinjlim_I x_i$, les $x_i$ dans $U$, on aura $\rho(x) = \varinjlim_I \rho(x_i)$, les $\rho(x_i)$ dans $\rho(U)$, on gagne.

[page 69]

**Proposition 4.3.4.** *Soit $\mathcal{M}$ une $\mathfrak{U}$-catégorie. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

*a) $\mathcal{M}$ est une catégorie $\mathfrak{U}$-pseudo-topos, i.e. elle est stable par $\mathfrak{U}$-limites inductives, et admet une $\mathfrak{U}$-petite sous-catégorie $S$ strictement génératrice.*

*b) Il existe une $\mathfrak{U}$-petite catégorie $S$, et un foncteur $i : \mathcal{M} \hookrightarrow S^\wedge$* pleinement fidèle, *ayant un adjoint à gauche.*

Démonstration. On a a) $\Longrightarrow$ b), car il suffit de prendre pour $S$ dans b) celui spécifié dans a), l'hypothèse sur $S$ implique que le foncteur canonique

$$\mathcal{M} \longrightarrow S^\wedge\,, \qquad \text{composé de } \mathcal{M} \hookrightarrow \mathcal{M}^\wedge \xrightarrow{\text{restriction}} S^\wedge$$

est pleinement fidèle. Qu'il admette un adjoint à gauche résulte du lemme 4.3.2. L'implication b) $\Longrightarrow$ a) résulte du lemme 4.3.3.

**Corollaire 4.3.5.** *Soit $\mathcal{M}$ une $\mathfrak{U}$-catégorie. Pour que $\mathcal{M}$ soit un $\mathfrak{U}$-pseudo-topos* accessible *(i.e. dont tous les objets sont accessibles), il faut et il suffit qu'il existe $S$ dans* Cat *et un foncteur pleinement fidèle et* accessible $\mathcal{M} \overset{\alpha}{\hookrightarrow} S^\wedge$, *admettant un adjoint à gauche $\rho$.*

[page 70]

Démonstration. Il suffit de noter que si $S$, $\alpha$ sont comme dans 4.3.4 b), alors $\alpha$ est accessible si et seulement si les $\rho(S)$ sont formées d'objets accessibles dans $\mathcal{M}$ ; comme cette partie est strictement génératrice, on sait que cela implique que *tout* objet de $\mathcal{M}$ est accessible. (Cf. SGA 4 I 9.9.)

Je vais essayer de donner un énoncé plus complet :

**Théorème 4.3.6.** *Soit $\mathcal{M}$ une $\mathfrak{U}$-catégorie. Conditions équivalentes :*

*a) $\mathcal{M}$ stable par petites $\varinjlim$, et elle admet une petite sous-catégorie pleine $S$, strictement génératrice, et formée d'objets accessibles de $\mathcal{M}$.*

*a′) $\mathcal{M}$ est une catégorie $\mathfrak{U}$-pseudo-topos faiblement accessible, i.e. satisfait a), avec en plus* tout *élément de $\mathcal{M}$ (pas seulement ceux de $S$) accessible dans $\mathcal{M}$.*

*b) Il existe une petite catégorie $S$, et un foncteur $\alpha : \mathcal{M} \hookrightarrow S^\wedge$* pleinement fidèle et accessible, *tel que $\alpha$ admette un adjoint à gauche.*

[page 71]

*c) $\mathcal{M}$ est stable par petites $\varinjlim$, est accessible, et admet une filtration cardinale* $(\mathrm{Filt}^\pi \mathcal{M})_{\pi \geqslant \pi_0}$.

*d) Il existe un cardinal $\pi_1$, une petite catégorie $\mathcal{M}_{\pi_1}$, stable par limites inductives de cardinal $\leqslant \pi_1$, tels qu'on ait une équivalence de catégories*

$$\mathcal{M} \xleftarrow{\sim} \mathrm{Ind}_{\pi_1}\mathcal{M}_{\pi_1}\,, \tag{4.3.6.1}$$

*où le deuxième membre désigne la sous-catégorie pleine de* $\mathrm{Ind}(\mathcal{M}_{\pi_1})$ *formée des ind-objets $(X_i)_{i\in I}$ de $\mathcal{M}_{\pi_1}$ tels que $I$ soit grand devant $\pi_1$.*

Démonstration de 4.3.6 ([9]). On a déjà vu a′ $\Longrightarrow$ a $\Longrightarrow$ b $\Longrightarrow$ a′, i.e. l'équivalence de a, a′, b, soit PTA cette condition. Nous allons prouver les implications

$$\text{PTA} \Longrightarrow \text{c} \Longrightarrow \text{d} \Longrightarrow \text{PTA}\,,$$

[9] Pour une démonstration complète (celle donnée ici canule à partir d'un certain moment), cf. §4.6 (p. 139-148).

ce qui établira le théorème.

*Prouvons PTA* $\Longrightarrow$ *c.* Soit $S$ une petite sous-catégorie pleine strictement génératrice. Ainsi,

[page 72]

pour tout $x$ dans $\mathcal{M}$ on a

(4.3.6.2) $$x = \varinjlim_{s \in S/x} s$$

(cf. SGA 4 I 7.2 (i)). Soit $\pi_0 = \mathrm{card}\,\mathrm{Fl}(S)$, et pour tout cardinal $\pi \geqslant \pi_0$, soit

(4.3.6.3) $\mathrm{Filt}^{\pi}\mathcal{M}$ = sous-catégorie pleine de $\mathcal{M}$ formée des objets $x$ tels que $\mathrm{card}\,(\mathrm{Fl}(S/x)) \leqslant \pi$ .

Je veux prouver que l'on trouve ainsi une filtration cardinale sur $\mathcal{M}$, i.e. que les conditions a) b) c) de SGA 4 I 9.12 sont satisfaites. C'est prouvé dans loc. cit. 9.13 sous des hypothèses légèrement différentes, la condition d'accessibilité de $\mathcal{M}$ étant remplacée par celle (beaucoup moins sympathique !) que les familles de flèches épimorphiques strictes dans $\mathcal{M}$ sont épimorphiques strictes universelles. Cette condition n'est utilisée que dans la démonstration de la condition b), à savoir la stabilité de $\mathrm{Filt}^{\pi}\mathcal{M}$ par $\varinjlim_{I}$ de cardinal $\leqslant \pi$ (sans avoir d'ailleurs à supposer $I$ filtrante, ni a fortiori grand devant $\pi_0$). Il faut d'ailleurs dire que la définition de $\mathrm{Filt}^{\pi}\mathcal{M}$ donnée dans loc. cit. n'est pas tout à fait la même que (4.3.6.3),

[page 73]

mais c'est

(4.3.6.3′) $\mathrm{Filt}'^{\pi}\mathcal{M}$ = sous-catégorie pleine de $\mathcal{M}$ formée des objets $x$ tels qu'il existe une famille épimorphique stricte $x_i \xrightarrow{\alpha_i} x$ de cardinal $\leqslant \pi$, avec $x_i \in S\ \forall\, i \in I$.

Ainsi on a

$$\mathrm{Filt}^{\pi}\mathcal{M} \subset \mathrm{Filt}'^{\pi}\mathcal{M}\,,$$

mais dans loc. cit. on prouve que pour $x$ dans $\mathrm{Filt}'^{\pi}\mathcal{M}$, on a

$$\mathrm{card}\,\mathrm{Fl}(S/x) \leqslant \pi^{\pi_0}\,,$$

d'où

$$\mathrm{Filt}^{\pi}\mathcal{M} \subset \mathrm{Filt}'^{\pi}\mathcal{M} \subset \mathrm{Filt}^{\pi^{\pi_0}}\mathcal{M}\,,$$

donc si $\pi = \pi^{\pi_0}$, p.ex. $\pi = 2^c$ avec $c \geqslant \pi_0$, alors on trouve

$$\mathrm{Filt}^{\pi}\mathcal{M} = \mathrm{Filt}'^{\pi}\mathcal{M}\,.$$

Donc les deux filtrations on l'air $\pm$ équivalentes. Mais la démonstration donnée de la stabilité de $\mathrm{Filt}'^{\pi}$ semble vraiment faire appel de façon essentielle à la condition d'universalité des familles épimorphiques strictes (donc épimorphiques effectives, avec les hypothèses faites impliquant l'existence de petites $\varprojlim$ ). Donc il me faut bon gré, mal gré, refaire le travail !

[page 74]

Condition a) : $\mathrm{Filt}^\pi$ équivalente à une petite catégorie. C'est immédiat, puisque par (4.3.6.2), $\mathrm{Filt}^\pi$ est formée de $\varprojlim\limits_I$ dans $\mathcal{M}$ d'objets de $S$ (petite catégorie), avec $I$ telle que $\operatorname{card}\operatorname{Fl} I \leqslant \pi$.

Condition b) : $\mathrm{Filt}^\pi$ stable par $\varprojlim\limits_I$, quand $\operatorname{card}\operatorname{Fl} I \leqslant \pi$ ([10]). Soit donc $(x_i)_{i\in I}$, où

$$\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathcal{M} \\ i & \longmapsto & x_i \end{array}$$

un système inductif dans $\mathcal{M}$, avec des $x_i$ dans $\mathrm{Filt}^\pi$. Considérons le produit fibré

$$\text{(4.3.6.4)} \qquad \begin{tikzcd} I \arrow[d, "\varphi"'] & S/I = J \arrow[l, "\text{cofibré}"'] \arrow[d] \arrow[dr, dotted, "\psi"] & & \\ \mathcal{M} & S/\mathcal{M} \arrow[l, "\text{but}", "\text{Cat-cofibré}"'] \arrow[r, "\text{source}"] & S \arrow[r, hook] & \mathcal{M} \, , \end{tikzcd}$$

où $J$ est Cat-cofibré sur $I$, sa fibre en $i \in \operatorname{Ob} I$ étant isomorphe à $S/x_i$, donc $\operatorname{card}\operatorname{Fl} J_i \leqslant \pi$. Comme par hypothèse $\operatorname{card}\operatorname{Fl} I \leqslant \pi$, on en conclut que $\operatorname{card}\operatorname{Fl} J \leqslant \pi^3 = \pi$. (**N.B.** L'ensemble des flèches $v : j_0 \longrightarrow j_1$ de $J$ au dessus d'une flèche $u : i_0 \longrightarrow i_1$ de $I$ est “contenu” dans l'ensemble produit $\operatorname{Ob} J_{i_0} \times \operatorname{Fl} J_{i_1}$, par l'application

$$v \longmapsto (\operatorname{source} v, v' : u_*(j_0) \longrightarrow j_1) \, ,$$

donc de cardinal majoré par $\pi^2$.) On

[page 75]

a alors

$$x \overset{\text{déf}}{=} \varinjlim_I x_i = \varinjlim_J \underbrace{\xi_j}_{= \psi(j)} \qquad ([11]) \, ,$$

où cette fois la limite est une limite d'objets de $S$, prise dans $\mathcal{M}$. Il s'ensuit que $x \in \mathrm{Filt}'^\pi$, ce n'est pas tout à fait $x \in \mathrm{Filt}^\pi$. (Ça implique $x \in \mathrm{Filt}^{\pi^{\pi_0}}$, donc $x \in \mathrm{Filt}^\pi$ si $\pi = \pi^{\pi_0}$, p.ex. $\pi = 2^c$ avec $c \geqslant \pi_0$.) Mais c'est le moment d'utiliser le fait que les objets de $S$ sont accessibles, et on prendra $\pi_0$ tel que les objets de $S$ soient $\pi_0$-accessibles, et cette fois on prendra quand même $I$ filtrante et grande devant $\pi_0$ (pour nous borner à ce qui est exigé dans la condition b) de loc. cit.). On doit prouver que $\operatorname{card}(\operatorname{Fl}(S/x)) \leqslant \pi$ (ce qui signifie $x \in \mathrm{Filt}^\pi$). Mais comme les objets de $S$ sont $\pi_0$-accessibles et $I$ grande devant $\pi_0$, on voit aussitôt que

$$S/x \simeq \varinjlim_i S/x_i \, ,$$

[10] quand $I$ filtrante et grande devant $\pi_0$ – je ne le prouve que dans ce cas, hélas !

[11] On utilise la propriété de distributivité des $\varinjlim$ , relative à un foncteur Cat-cofibrant

$$\begin{tikzcd} J \arrow[r] \arrow[dr] & I \\ & \mathcal{M} \, , \end{tikzcd}$$

explicitée dessus.

d'où

$$\mathrm{Fl}\, S/x \;\simeq\; \varinjlim_i \mathrm{Fl}\, S/x_i \ ,$$

donc

$$\operatorname{card} \mathrm{Fl}(S/x) \;\leqslant\; (\underbrace{\operatorname{card} I}_{\leqslant \pi})\underbrace{(\sup_i \operatorname{card} \mathrm{Fl}(S/x_i))}_{\leqslant \pi} \;\leqslant \pi^2 = \pi \ ,$$

q.e.d.

`[page 76]`

Prouvons c) ([12]), i.e. que pour tout $\pi' > \pi \geqslant \pi_0$ et tout $x \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{Filt}^{\pi'}$, on peut écrire

(4.3.6.5) $\qquad x \;=\; \varinjlim_I x_i \qquad I$ grande devant $\pi$, les $x_i$ dans $\mathrm{Filt}^{\pi}$, $\operatorname{card} I \leqslant \pi'^{\pi}$.

La démonstration se fait comme dans loc. cit. (p. 151-152), en changeant légèrement la définition de $I$, comme désignant l'ensemble des sous-catégories pleines $i$ de $S/x$ qui sont filtrantes, de cardinal $\leqslant \pi$ *et de plus grandes devant* $\pi_0$ ([13]). (On pourra supposer $S/x$ filtrante en augmentant $S$ de façon à ce que $S$ soit stable dans $\mathcal{M}$ par petites $\varinjlim$ finies, donc les catégories $S/x$ aussi, ce qui implique qu'elles sont filtrantes. Il est `[phrase incomplète]`)

On a donc prouvé PTA $\Longrightarrow$ c).

*Prouvons c) $\Longrightarrow$ d).* Soit

$$\pi_1 \;=\; 2^c \qquad \text{avec} \qquad c \;\geqslant\; \pi_0 \ .$$

On sait alors que

$$\mathrm{Filt}^{\pi_1}\mathcal{M} \;=\; \mathcal{M}_{\pi_1} \overset{\text{déf}}{=} \text{sous-catégorie pleine de } \mathcal{M} \text{ des objets } \pi_1\text{-accessibles de } \mathcal{M}$$

(loc. cit. 9.16), ce qui implique notamment que $\mathcal{M}_{\pi_1}$ est stable par $\varinjlim$ de cardinal $\leqslant \pi_1$, en vertu de loc. cit. 9.9 (page 145). De plus,

`[page 77]`

par loc. cit. 9.18 b) (p. 156), on a

$$\mathrm{Ind}_{\pi_1}(\mathcal{M}_{\pi_1}) \xrightarrow{\ \sim\ } \mathcal{M} \ ,$$

ce qui prouve d).

*Prouvons d) $\Longrightarrow$ PTA.* Par loc. cit. 9.18 a) (p. 156), on voit que les objets de $\mathcal{M}_{\pi_1}$ sont $\pi_1$-accessibles dans $\mathrm{Ind}_{\pi_1}(\mathcal{M}_{\pi_1})$, d'autre part il est clair que $\mathcal{M}_{\pi_1}$ est une sous-catégorie pleine strictement génératrice de $\mathrm{Ind}_{\pi_1}(\mathcal{M}_{\pi_1})$, donc il reste à voir que $\mathrm{Ind}_{\pi_1}(\mathcal{M}_{\pi_1})$ est stable par petites $\varinjlim$ , i.e. le

**Lemme 4.3.7.** *Soit $\mathcal{M}_\pi$ une $\mathfrak{U}$-catégorie stable par limites inductives de cardinal $\leqslant \pi$, où $\pi$ est un cardinal infini donné. Alors $\mathrm{Ind}_\pi \mathcal{M}_\pi$ est stable par petites limites inductives. De plus, $\mathcal{M} = \mathrm{Ind}_\pi \mathcal{M}_\pi$, munie de $\mathcal{M}_\pi \longrightarrow \mathcal{M}$, est solution d'un problème 2-universel, à savoir*

[12] *Démonstration canulé,* ne marche que si $\pi^{\pi_0} = \pi$ ! !

[13] Il n'est pas sûr que $I$ soit grande devant $\pi$, sauf si on suppose $\pi^{\pi_0} = \pi$ !

*que pour toute catégorie $\mathcal{N}$ stable par petites limites inductives, le foncteur restriction induit une équivalence*

$$\underline{\mathrm{Hom}}_!(\mathcal{M},\mathcal{N}) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Hom}}_{!\,\pi}(\mathcal{M}_\pi,\mathcal{N}) \ , \tag{4.3.7.1}$$

*où le signe $!$ (resp. $!\,\pi$) désigne la sous-catégorie pleine de la catégorie* $\underline{\mathrm{Hom}}$*, formée des foncteurs qui commutent aux petites* $\varinjlim$ *(resp. aux limites inductives de cardinal $\leqslant \pi$).*

[page 78]

Prouvons d'abord que les $\varinjlim$ de cardinal $\leqslant \pi$ *dans* $\mathcal{M}_\pi$ sont aussi des $\varinjlim$ *dans* $\mathcal{M} = \mathrm{Ind}_\pi \mathcal{M}_\pi$ ([14]). On a donc

$$x \xleftarrow{\sim} \varinjlim_I x_i \qquad \textit{dans } \mathcal{M}_\pi \ ,$$

i.e.

$$\mathrm{Hom}(x,y) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_I \mathrm{Hom}(x_i,y) \qquad \text{si } y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{M}_\pi \ , \tag{$*$}$$

prouvons que cela reste vrai pour $y$ dans $\mathcal{M}$, i.e. $y$ de la forme

$$y \;=\; \varinjlim_J y_j \ , \qquad J \text{ grande devant } \pi, \text{ les } y_j \text{ dans } \mathcal{M}_\pi.$$

On a en effet

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(x,y) &\simeq \varinjlim_J \mathrm{Hom}(x,y_j) \\ &\overset{(*)}{\simeq} \varinjlim_J \varprojlim_I \mathrm{Hom}(x_i,y_j) \\ &\overset{\text{SGA 4 I 9.8}}{\simeq} \varprojlim_I \varinjlim_J \mathrm{Hom}(x_i,y_j) \\ &\simeq \varprojlim_I \mathrm{Hom}(x_i,y) \ , \end{aligned}$$

au total

$$\mathrm{Hom}(x,y) \simeq \varprojlim_I \mathrm{Hom}(x_i,y),$$

q.e.d.

Pour prouver que les petites $\varinjlim$ sont représentables dans $\mathcal{M} = \mathrm{Ind}_\pi(\mathcal{M}_\pi)$, comme elles le sont dans $\mathrm{Ind}(\mathcal{M}_\pi)$ (SGA 4 I 8.9.5 b, on utilise l'hypothèse que les $\varinjlim$ *finies* sont représentables dans $\mathcal{M}_\pi$), il reste à voir que $\mathrm{Ind}_\pi(\mathcal{M}_\pi)$ est stable dans $\mathcal{M}_\pi$ par ces limites.

[page 79]

## 4.4 Étude de $\mathrm{Ind}_\pi(C)$ (pour $C$ petite catégorie stable par $\varinjlim$ de cardinal $\leqslant \pi$)

**4.4.1.** Finalement, la démonstration du lemme 4.3.7 n'est pas tellement évidente que je l'anticipais, et il me faut lui consacrer des préliminaires techniques, que je vais réunir ici. Dans toute la suite, $C$ représente une $\mathfrak{U}$-catégorie équivalente à une petite catégorie.

[14]Mais *attention*, $\mathcal{M}_\pi \longrightarrow \mathrm{Ind}(\mathcal{M}_\pi)$ ne commute *pas* à ces $\varinjlim$ !

**Proposition 4.4.2.** *Soit $F \in C^\wedge$ un foncteur ind-représentable, i.e. tel que $C/F$ soit filtrante. Soit d'autre part $i \longmapsto x_i$ un foncteur $I \longrightarrow C$, où $I$ est une petite catégorie filtrante, et soit*

$$\alpha \;:\; x \;=\; \varinjlim_{I}{}_{C^\wedge} x_i \longrightarrow F \qquad (4.4.2.1)$$ [15]

*un système projectif de flèches $x_i \longrightarrow F$ (**N.B.** la limite inductive $x$ est prise dans $C^\wedge$, et est calculée argument par argument), ce qui équivaut à une factorisation $\varphi_\alpha : I \longrightarrow C/F$ de $I \longrightarrow C$ en*

$$I \xrightarrow{\varphi_\alpha} C/F \underset{\psi}{\overset{can.}{\hookrightarrow}} C\ .$$

*Ceci dit, pour que $\alpha$ (4.4.2.1) soit un isomorphisme dans* $\mathrm{Ind}'(C) \subset C^\wedge$ *(sous-catégorie pleine des foncteurs ind-représentables sur $C$), il faut et il suffit que $\varphi_\alpha$ soit* cofinal*, ou ce qui revient au même, $I$ étant filtrante, qu'il satisfasse les deux conditions habituelles :*

F 1) $\forall\, \xi \in \mathrm{Ob}\, C/F$, $\exists\, i \in \mathrm{Ob}\, I$ *et une flèche* $\xi \longrightarrow \varphi_\alpha(i)$.

F 2) $\forall\, \xi \in \mathrm{Ob}\, C/F$, *et* $i \in \mathrm{Ob}\, I$, *et toute double flèche*

[page 80]

$$\xi \rightrightarrows \varphi_\alpha(i)\ ,$$

*il existe une flèche $i \xrightarrow{u} j$ dans $I$ telle que $\varphi_\alpha(u)$ égalise la double flèche.*

Démonstration. Si $\varphi_\alpha$ est cofinal, on en conclut par définition que $\varinjlim \varphi_\alpha \longrightarrow \varinjlim \psi\varphi_\alpha$ est un isomorphisme, or cette flèche n'est autre que $\alpha$. Inversement, supposons que cette flèche soit un isomorphisme, donc $C/F \xleftarrow{\sim} C/\varinjlim x_i$, et il reste à voir que le foncteur canonique

$$I \longrightarrow C/\varinjlim{}_{C^\wedge} x_i$$

est cofinal, i.e. satisfait F 1) et F 2). La vérification est $\pm$ tautologique, en utilisant le fait que pour tout $y$ dans $C$, on a

$$\mathrm{Hom}(y, \varinjlim{}_{C^\wedge} x_i) \xleftarrow{\sim} \varinjlim{}_{\mathrm{Ens}} \mathrm{Hom}(y, x_i),$$

et du “calcul” des limites inductives filtrantes dans Ens.

**Corollaire 4.4.3.** *Soit $\pi$ un ordinal infini. Pour que $F$ soit dans* $\mathrm{Ind}'_\pi(C)$ *(image essentielle de* $\mathrm{Ind}_\pi(C)$ *dans $C^\wedge$), il faut et il suffit qu'il existe une catégorie ordonnée grande devant $\pi$ $I$, et un foncteur cofinal $I \longrightarrow C/F$.*

Il nous faut donc donner des conditions, sur une catégorie $J$ ($= C/F$), pour qu'il existe une catégorie ordonnée $I$ grande devant $\pi$, et un foncteur cofinal $I \longrightarrow J$.

[page 81]

Une telle catégorie s'appellera *grande devant* $\pi$. (Il est immédiat que dans le cas où $J$ est elle-même ordonnée, cette terminologie est cohérente avec celle déjà adoptée pour les ensembles ordonnés, i.e. que s'il existe une application croissante cofinale $\varphi : I \longrightarrow J$, avec $I$ grand devant $\pi$, alors $J$ est lui-même grand devant $\pi$.) Une telle catégorie est automatiquement filtrante (SGA 4 I 8.1.3 b)). Notons aussi que si on a un foncteur cofinal $J \longrightarrow J'$, si $J$ est grande devant $\pi$, $J'$ l'est aussi (par transitivité de la cofinalité).

[15] La donnée de $\alpha$ équivaut aussi à celle d'un homomorphisme d'ind-objets $(x_i)_{i\in I} \longrightarrow F$, $F$ étant considéré comme ind-objet (généralisé) indexé par $C/F$.

**Proposition 4.4.4.** *Soient $J$ une $\mathfrak{U}$-catégorie, $\pi$ un cardinal infini. Conditions équivalentes :*

*a) $J$ est grande devant $\pi$, i.e. il existe un ensemble ordonné grand devant $\pi$ et un foncteur cofinal $\varphi : I \longrightarrow J$.*

*b) $J$ satisfait les deux conditions suivantes :*

PF$_\pi$ 1 Ord $J$ *est grande devant $\pi$, i.e. pour toute famille $(y_\alpha)_{\alpha\in A}$ d'objets de $J$, avec* card $A \leqslant \pi$, *il existe un majorant $y$ dans $J$ (i.e. un $y$ et des flèches $y_\alpha \xrightarrow{v_\alpha} y$).*

PF$_\pi$ 2 *Pour $y_0$, $y_1$ dans $J$ et tout ensemble $(u_\alpha)_{\alpha\in A}$ de flèches $y_0 \xrightarrow{u_\alpha} y_1$ avec* card $A \leqslant \pi$, *il existe une flèche $y_1 \xrightarrow{u'} y_2$ qui les égalise, i.e. telle que $u'u_\alpha = u'u_\beta \ \forall\, \alpha, \beta \in A$. (Il suffit de l'exiger quand* card $A \geqslant 2$.*)*

*c) Pour toute partie $A$ de* Fl $J$, *avec* card $A \leqslant \pi$, *existe une sous-catégorie $J'$ de $J$, avec* card Fl $J' \leqslant \pi$, *telle que $A \subset$ Fl $J'$ et que $J'$ admette un objet final.*

*d) Soit $I$ l'ensemble des sous-catégories $J'$ de $J$ telles que* card $J' \leqslant \pi$ *et ayant un objet final*

[page 82]

*et ordonnons $I$ par inclusion. Alors $I$ est grand devant $\pi$, de plus le foncteur canonique $I \longrightarrow J$ ($J' \longmapsto e_{J'}$ = objet final de $J'$) est cofinal* ([16],[17],[18]).

([19])

Démonstration.

a $\Longrightarrow$ b vérification immédiate, en utilisant le critère F 1, F 2 de la cofinalité pour $I$ filtrante.

b $\Longrightarrow$ c par AQT [âne qui trotte].

c $\Longrightarrow$ d par AQT [âne qui trotte].

d $\Longrightarrow$ a Considérons l'ensemble ordonné grand devant $\pi$ construit dans l'énoncé de d), et le *foncteur*

$$I \longrightarrow J$$

donné par $J' \longmapsto e_{J'}$ = objet final de $J'$. (Vérification que c'est un foncteur immédiate.) Ce foncteur est surjectif, donc satisfait la condition F 1 de cofinalité. La condition F 2 résulte aussi de d) en

[16] Introduire $I(J)$ avant l'énoncé de la proposition. **N.B.** La condition de cofinalité $I(J) \longrightarrow J$ n'est pas automatique, comme on voit en prenant $J = B_G$, $G = \{\pm 1\}$.

[17] **N.B.** L'hypothèse de cofinalité est superflue si $J$ est rigide, i.e. tout endomorphisme d'un objet de $J$ est identique.

[18] N. Éd. Dans cette condition (d), le "*de plus le foncteur ... est cofinal*" est ajouté par Grothendieck *a posteriori*, ce qui explique sa vaine tentative de l'établir dans l'implication d $\Longrightarrow$ a ci-dessous, implication qui devient évidente après cet ajout. Par ailleurs, les conditions (c) et (d) ne sont *pas* impliquées par les conditions équivalentes (a) et (b). Par exemple, si $J$ est la catégorie ayant un seul objet et un seul morphisme non identique $p$ tel que $p^2 = p$, alors $J$ satisfait aux conditions (a) et (b), mais *pas* aux conditions (c) et (d).

[19] Autres conditions :

e) Pour tout ensemble $A$ avec card $A \leqslant \pi$, $\mathrm{diag}_J : J \longrightarrow J^A$ est cofinal.

e′) (Si $A_0$ est un ensemble donné, de cardinal $= \pi$.) $J \longrightarrow J^{A_0}$ est cofinal.

Voir aussi 4.9.6.9.1 et 4.9.6.9.2, pages 237, 238.

regardant les trois objets $J'$, $j \xrightarrow{u_1} e_{J'}$, $j \xrightarrow{u_2} e_{J'}$ de $I$,

$$\begin{tikzcd} J', & e_{J'} \\ j \arrow[ur, shift left, "u_1"] \arrow[ur, shift right, "u_2"'] & \end{tikzcd}$$

et en prenant un $J''$ qui les majore tous trois, alors $e_{J'} \longrightarrow e_{J''}$ égalise $u_1$, $u_2$ ([20]).

**Corollaire 4.4.5.** *Soit $F \in \operatorname{Ob} C^\wedge$. Pour que $F$ appartienne à $\operatorname{Ind}'_\pi(C)$, il faut et il suffit que $C/F$ satisfasse à l'ensemble des quatre conditions équivalentes de 4.4.4.*

**Corollaire 4.4.6.** Soit $J$ une catégorie stable par $\varinjlim$ de cardinal $\leqslant \pi$. Alors $J$ est grande devant $\pi$.

En effet, les conditions $\mathrm{PF}_\pi\,1$, $\mathrm{PF}_\pi\,2$ sont visiblement vérifiées.

`[page 83]`

**4.4.6.** Je me donne un foncteur

$$J \xrightarrow{\varphi} \operatorname{Ind}'_\pi C\ , \tag{4.4.6.1}$$

$J$ une petite catégorie, et on cherche une $\varinjlim$ dans $\operatorname{Ind}'_\pi C$, en postulant au besoin l'existence des $\varinjlim$ de cardinal $\leqslant \pi$ dans $C$, et l'hypothèse $\operatorname{card} \operatorname{Fl} J \leqslant \pi$. Le procédé le plus naturel pour ramener la question de l'existence des $\varinjlim$ dans $\operatorname{Ind}'_\pi C$, à la question similaire dans $C$, est explicité dans SGA 4 I 8.8.3. On considère l'inclusion pleinement fidèle

$$C \overset{\alpha}{\hookrightarrow} \operatorname{Ind}'_\pi C\ , \tag{4.4.6.2}$$

laquelle commute aux $\varinjlim$ de cardinal $\leqslant \pi$ (celles qui sont représentables dans $C$, cf. p. 78 et référence à SGA 4 I 9.8), d'où

$$\underline{\operatorname{Hom}}(J, C) \overset{\alpha}{\hookrightarrow} \underline{\operatorname{Hom}}(J, \operatorname{Ind}'_\pi C) \tag{4.4.6.3}$$

également pleinement fidèle, et commutant aux $\varinjlim$ de cardinal $\leqslant \pi$ (représentables dans le premier membre). Cette flèche s'insère dans le carré commutatif relatif à la donnée d'un $j \in \operatorname{Ob} J$, et des foncteurs d'inclusion

$$e \xrightarrow{\varepsilon_j} J\ , \qquad e_j(e) = j\ ; \tag{4.4.6.4}$$

`[page 84]`

$$\begin{tikzcd} \underline{\operatorname{Hom}}(J, C) \arrow[r, "\alpha^J"] \arrow[d, "\varepsilon_j^*"] & \underline{\operatorname{Hom}}(J, \operatorname{Ind}'_\pi C) \arrow[d, "\varepsilon_j^{*\prime}"] & \ni \varphi \arrow[d, mapsto] \\ C \arrow[r, "\alpha"] & \operatorname{Ind}'_\pi(C) & \ni \varphi(j)\ , \end{tikzcd} \tag{4.4.6.2}$$ ([21])

[20]Un peu bref, le cas où $e_{J'} = j$ échappe à cet argument, et demande qu'on `[phrase incomplète]`

[21]Les foncteurs $\varepsilon_j^*$, $\varepsilon_j^{*\prime}$ sont les foncteurs évaluation en $j$.

lequel induit un foncteur

(4.4.6.3) $$\underbrace{\underline{\mathrm{Hom}}(J/C)/\varphi}_{\overset{\text{déf}}{=} I} \xrightarrow{\varepsilon_j^\varphi} C/\varphi(j) .$$

Si $C$ est stable par $\varinjlim$ relatives à un ensemble $K$ du type de conditions $\leqslant \pi$ (p.ex. $\varinjlim$ finies), il en est de même de $\underline{\mathrm{Hom}}(J,C)$, et aussi de $\underline{\mathrm{Hom}}(J,C)/\varphi$, et de $C/\varphi(j)$, en vertu du fait que $\alpha^J$ et $\alpha$ commutent aux $\varinjlim$ du type envisagé, de plus (4.4.6.3) commute aux limites en question. Supposons donc $C$ stable tout au moins par $\varinjlim$ finies, donc les catégories source et but dans (4.4.6.3) sont filtrantes. (Le fait que le foncteur commute aux $\varinjlim$ finies ne semble pas utile dans le contexte présent.) Cela nous servira pour avoir le critère commode de cofinalité SGA 4 I 8.1.3 b) par F 1, F 2.

`[page 85]`

Rappelons que la cofinalité des foncteurs (4.4.6.3), quand elle a lieu ( ?), implique le fait que $\varphi$ est une limite inductive du foncteur composé

(4.4.6.4) $$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "\psi_J"] \arrow[d, equal] & \underline{\mathrm{Hom}}(J,C) \arrow[r, "\alpha^J"] \arrow[dd, dotted, "\varepsilon_j^*"] & \underline{\mathrm{Hom}}(J,\mathrm{Ind}'_\pi(C)) \arrow[dd, dotted, "\varepsilon_j^{*\prime}"] \\ \underline{\mathrm{Hom}}(J,C)/\varphi \arrow[d, "\varepsilon_j^\varphi"'] & & \\ C/\varphi(j) \arrow[r, dotted, "\psi_j"] & C \arrow[r, dotted, "\alpha"] & \mathrm{Ind}'_\pi(C) \end{tikzcd} ,$$

suivant l'ensemble ordonné filtrant $I$, plus précisément que $\varphi$ est la $\varinjlim$ "argument par argument en $j$", ce qui signifie que pour tout $j \in \mathrm{Ob}\, J$, $\varphi(j) = \varepsilon_j^*(\varphi)$ est limite inductive de $\varepsilon_j^*(\alpha^J\psi) = (\alpha\psi_j)\varepsilon_j^\varphi$. (Or on sait en effet que $\varphi(j)$ est la limite de $\alpha\psi$, puisque $\varphi(j) \in \mathrm{Ob}\, C^\wedge$ est ind-représentable, donc aussi celle de $(\alpha\psi_j)\varepsilon_j^\varphi$ si $\varepsilon_j^\varphi$ est cofinal.)

Ainsi, admettant la cofinalité de (4.4.6.3) et interprétant $\psi_J$ dans (4.4.6.4)

`[page 86]`

$$\psi_J \ : \ I \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(J,C)$$

comme un foncteur

$$I \times J \xrightarrow{\Psi} C ,$$

on trouve la "représentation indicielle" de $\varphi$

$$\varphi(j) \ = \ \underbrace{\varinjlim_{i\in I} \psi(i,j)}_{\substack{\text{limite inductive} \\ \text{prise dans } \mathrm{Ind}'_\pi(C) \\ \text{d'objets de } C \hookrightarrow \mathrm{Ind}'_\pi(C)}} \qquad ,$$

d'où

$$\begin{aligned} \underbrace{\varinjlim_{j\in J}{}_{\mathrm{Ind}'_\pi C}\, \varphi(j)}_{\text{sous réserve d'existence}} \quad &= \quad \varinjlim_{j\in J} \varinjlim_{i\in I} \psi(i,j) \\ &= \quad \varinjlim_{i\in I} \varinjlim_{j\in J} \psi(i,j) , \end{aligned}$$

toutes les limites inductives étant prises dans $\mathrm{Ind}'_\pi(C)$. Mais si les $\varinjlim$ de type $J$ sont représentables dans $C$, et $\operatorname{card} J \leqslant \pi$, on sait que la $\varinjlim_{j\in J} \psi(i,j)$ *dans* $C$ est aussi leur $\varinjlim$ dans $\mathrm{Ind}'_\pi C$, et on trouve donc que $\varinjlim_{j\in J} \varphi(j)$ existe dans $\mathrm{Ind}'_\pi(C)$ si et seulement si $\varinjlim_{i\in I} \Psi(i)$ existe dans $\mathrm{Ind}'_\pi(C)$, où pour $i \in I$, on pose

$$\Psi(i) \;=\; \varinjlim_{j\in J} \psi(i,j) \qquad \textit{dans } C.$$

[page 87]

Résumons ce que nous avons obtenu :

**Lemme 4.4.7.** *Soit $C$ une petite catégorie, $\pi$ un cardinal infini, $J$ une catégorie telle que* $\operatorname{card} \mathrm{Fl}\, J \leqslant \pi$, *$\varphi : J \longrightarrow \mathrm{Ind}'_\pi(C)$ un foncteur. Supposons les $\varinjlim$ de type $J$ existant dans $C$, et que les foncteurs $\varepsilon^\varphi_j$ ($j \in \mathrm{Ob}\, J$) de (4.4.6.3) soient* cofinaux *(ce qui s'explicite de façon simple surtout si source et but sont filtrants, chose acquise si $C$ est stable par $\varinjlim$ finies). Alors $\varphi$ a une "représentation indicielle canonique"*

(4.4.7.1) $$\psi \;:\; I \times J \longrightarrow C$$

*avec*

(4.4.7.2) $$I \;=\; \underline{\mathrm{Hom}}(J,C)/\varphi\ ,$$

*i.e. on a l'isomorphisme fonctoriel en $j \in \mathrm{Ob}\, J$*

(4.4.7.3) $$\varphi(j) \;\simeq\; \varinjlim_I \psi(i,j) \qquad (^{22})\ .$$

*Posons pour tout $i \in \mathrm{Ob}\, I$*

(4.4.7.4) $$\Psi(i) \;=\; \varinjlim_J \psi(i,j) \qquad (^{23})\ .$$

*Alors $\varinjlim_{j\in J} \varphi(j)$ (dans $\mathrm{Ind}'_\pi C$) existe si et seulement si*

[page 88]

*la $\varinjlim_{i\in I} \Psi(i)$ existe (dans $\mathrm{Ind}'_\pi C$ également), et les deux sont égales.*

**Corollaire 4.4.8.** *Supposons que $C$ soit stable par $\varinjlim$ de cardinal $\leqslant \pi$ (pas seulement par celles de type $J$). Alors $\underline{\mathrm{Hom}}(J,C)$ et $I = \underline{\mathrm{Hom}}(J,C)/\varphi$ ont la même propriété, $I$ est grande devant $\pi$, et $\varinjlim_{j\in J} \varphi(j) \;=\; \varinjlim_{i\in I} \Psi(i)$ existe dans $\mathrm{Ind}'_\pi(C)$, sous réserve de cofinalité des foncteurs (4.4.6.3).*

Il suffit en effet de vérifier ce

**Lemme 4.4.8.1.** *Soit $I$ une catégorie grande devant $\pi$, et $\Psi : I \longrightarrow C$ un foncteur. Alors $\varinjlim_i \Psi(i)$ existe dans $\mathrm{Ind}'_\pi(C)$, et c'est la limite inductive dans $C^\wedge$, ou encore "c'est" l'ind-objet grand devant $\pi$ représenté par $\Psi$. (En d'autres termes* ($^{24}$), $\mathrm{Ind}'_\pi(C) \subset C^\wedge$ *est une sous-catégorie strictement pleine stable par $\varinjlim$ grandes devant $\pi$.)*

[22] limite inductive dans $\mathrm{Ind}'_\pi$ d'objets de $C$.

[23] limite inductive prise dans $C$, mais valable aussi dans $\mathrm{Ind}'_\pi C$.

[24] C'est abusif, cette stabilité est un énoncé nettement plus fort ! Je le prouve page 99.

[page 89]

Ce lemme est une tautologie : si $F$ désigne la limite inductive dans $C^\wedge$, il est clair par définition (en prenant un foncteur $I_0 \longrightarrow I$ cofinal, avec $I_0$ *ordonnée* grande devant $\pi$, de sorte que la $\varinjlim$ peut être prise suivant $I_0$) que $F$ est dans $\mathrm{Ind}'_\pi(C)$, et alors c'est a fortiori une $\varinjlim$ dans $\mathrm{Ind}'_\pi C$.

Pour vérifier l'existence des $\varinjlim$ de cardinal $\leqslant \pi$ dans $\mathrm{Ind}'_\pi C$, dans le cas où $C$ lui-même est stable par lesdites limites, il suffit donc, grâce au corollaire 4.4.8, de prouver la cofinalité des foncteurs (4.4.6.3). Cela va résulter du

**Lemme 4.4.9.** *Soient $C$ une petite catégorie, $\pi$ un cardinal infini, $J$ une petite catégorie telle que pour tous $j, j' \in \mathrm{Ob}\, J$, on ait* $\mathrm{card}\,\mathrm{Hom}(j,j') \leqslant \pi$. *Sous ces conditions, pour tout $j \in \mathrm{Ob}\, J$, le foncteur (4.4.6.3)* admet un adjoint à gauche, *donc a fortiori il est cofinal (car les catégories colocalisées au dessus de $C/\varphi(j)$ ont un objet initial, a fortiori elles sont* 0*-connexes).*

[page 90]

Démonstration de 4.4.8. Revenons au diagramme (4.4.6.2), dont on déduit (4.4.6.3), nous allons le réécrire de façon simplifiée :

(4.4.9.1)
$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\varepsilon"] & B' \arrow[d, "\varepsilon'"] & \ni y'_0 \arrow[d, mapsto] \\ C \arrow[r, "\gamma"] \arrow[u, dotted, bend left, "\lambda"] & C' \arrow[u, dotted, bend left, "\lambda'"] & \ni z'_0 \ . \end{tikzcd}$$

Je dis que $\varepsilon$, $\varepsilon'$ ont *des adjoints à gauche* $\lambda$ resp. $\lambda'$, et que l'homomorphisme canonique de "changement de base"

(4.4.9.2)
$$\lambda'\gamma \longrightarrow \beta\lambda$$

est un *isomorphisme.* En effet, l'existence des adjoints de $\varepsilon$, $\varepsilon'$, à savoir des foncteurs $\varepsilon_{j!}$ et $\varepsilon'_{j!}$ relatifs à l'inclusion

$$\varepsilon_j \ : \ e \longrightarrow J$$

et aux catégories de foncteurs $\underline{\mathrm{Hom}}(J, C)$ resp. $\underline{\mathrm{Hom}}(J, \mathrm{Ind}'_\pi C)$, résultant de l'existence des sommes de type $\mathrm{Hom}(j,j')$ ($j' \in \mathrm{Ob}\, J$) dans $C$ (déjà acquise), *et dans* $\mathrm{Ind}'_\pi C$ *;* et le fait que le foncteur $C \longrightarrow \mathrm{Ind}'_\pi C$ commute

[page 91]

auxdites sommes (chose également déjà acquise, puisque $\mathrm{card}\,(\mathrm{Hom}(j,j')) \leqslant \pi$) implique alors que (4.4.4.2) est un isomorphisme. Moyennant la vérification en suspens (l'existence des sommes de cardinal $\leqslant \pi$ dans $\mathrm{Ind}'_\pi(C)$), le lemme 4.4.9 résultera du résultat plus général :

**Lemme 4.4.10.** *Considérons un carré commutatif (4.4.9.1) (traits pleins) de catégories, où $\varepsilon$ admet un adjoint à gauche $\lambda$, $\varepsilon'$ un adjoint à gauche $\lambda'$, et la flèche de changement de base (4.4.9.2) est un isomorphisme. Alors pour tout $y'_0$ dans $B'$, posant $\varepsilon'(y'_0) = z'_0$, le foncteur induit par $(\varepsilon, \varepsilon')$,*

$$\overline{B} \ = \ B/y'_0 \xrightarrow{\overline{\varepsilon}} \overline{C} = C/z'_0 \ ,$$

*admet un adjoint à gauche $\overline{\lambda}$, donné par*

$$\overline{\lambda}(\gamma(z) \xrightarrow{v} z'_0) \quad = \quad \left( \begin{tikzcd} \lambda'\gamma(z) \simeq \beta(\lambda(z)) \arrow[r, "\lambda'(v)"] \arrow[ddr, "{\overline{\lambda}(v) = \text{composé} \atop \text{adj} \circ \lambda'(v)}"'] & \lambda'(z'_0) \arrow[d, equal] \\ & \lambda'\varepsilon'(y'_0) \arrow[d, "\text{adj.}"] \\ & y'_0 \end{tikzcd} \right) .$$

`[page 92]`

La démonstration se fait par un AQT `[âne qui trotte]` fastidieux (j'avoue ne pas avoir poussé jusqu'au dernier détail ...).

Pour terminer la démonstration de 4.4.9, il reste à prouver un dernier (?)

**Lemme 4.4.11.** *Soit $C$ une petite catégorie, stable par sommes de cardinal $\leqslant \pi$. Alors $\mathrm{Ind}'_\pi C$ est stable par sommes de cardinal $\leqslant \pi$ (et, pour mémoire, le foncteur $\alpha : C \longrightarrow \mathrm{Ind}'_\pi C$ y commute).*

Appliquant le corollaire 4.4.8 au lemme 4.4.7, on est ramené à prouver la cofinalité de (4.4.6.3) quand $J$ est discrète, plus le fait que $\underline{\mathrm{Hom}}(J, C)/\varphi$ est grande devant $\pi$, dans ce cas. Mais la donnée de $\varphi$ revient à celle d'une famille $(\varphi_j)_{j\in J}$ d'objets de $\mathrm{Ind}'_\pi(C)$, et le foncteur (4.4.6.3) s'explicite comme la projection

$$\prod_{j\in J}(C/\varphi_j) \longrightarrow C/\varphi_j$$

du produit total sur un des facteurs. Donc on est ramené à ceci :

`[page 93]`

**Lemme 4.4.12.** *Soit $(C_j)_{j\in J}$ une famille de petites catégories grandes devant $\pi$, indexée par un petit ensemble $J$. Alors $\prod C_j$ est grande devant $\pi$, et les projections (pour $j_0 \in J$) $\prod C_j \longrightarrow C_{j_0}$ sont cofinales.*

Prouvons d'abord la cofinalité, qui est le plus important pour nous. C'est évident si $J = \{j_0\}$, sinon on a $J = J' \cup \{j_0\}$, et $\prod_{j\in J} C_j \simeq C' \times C_{j_0}$, où $C' = \prod_{j\in J'} C_j$, donc il faut voir que $C' \times C_{j_0} \longrightarrow C_{j_0}$ est cofinal, i.e. que toute catégorie $\xi\backslash(C' \times C_{j_0})$ (pour $\xi \in \mathrm{Ob}\, C_{j_0}$) est 0-connexe, or elle est isomorphe à $C' \times (\xi\backslash C_{j_0})$, et $\xi\backslash C_{j_0}$ étant 0-connexe, il reste à voir que $C'$ est 0-connexe. On fera attention à cet égard qu'un produit *infini* de catégories 0-connexes n'est pas forcément 0-connexe, donc la cofinalité n'est pas totalement tautologique ! Mais si on prouve que la catégorie $\prod_{j\in J} C_j$ est

`[page 94]`

grande devant $\pi$, donc filtrante, cela implique qu'elle est 0-connexe, et on peut appliquer ce même résultat à $C' = \prod_{j\in J'} C_j$, et on gagne.

Donc on est ramené à prouver que $\prod C_j$ est grande devant $\pi$. Ceci se voit soit sur le critère $\mathrm{PF}_\pi\,1$, $\mathrm{PF}_\pi\,2$ de 4.4.4 b, soit en se ramenant au cas où les $C_j$ sont ordonnées, mais cela a l'air plus long. Notons que l'on prouve de même qu'un (petit) produit de catégories filtrantes est encore une catégorie filtrante.

**Remarques.**

1. Cet argument ne montre nullement (même si $C$ est stable par $\varinjlim$ de cardinal $\leqslant \pi$) que pour tout $\varphi \in \underline{\mathrm{Hom}}(J, \mathrm{Ind}(C))$, le foncteur similaire à (4.4.6.3)

$$\underline{\mathrm{Hom}}(J, C)/\varphi \longrightarrow C/\varphi(j)$$

soit cofinal, et je doute qu'il le soit toujours. La difficulté provient du fait que $C \longrightarrow \operatorname{Ind} C$ ne commute pas aux sommes de cardinal $\leqslant \pi$, seulement aux sommes finies,

[page 95]

donc le lemme 4.4.10 ne peut être invoqué.

2. Nous venons de prouver, via 4.4.8 et 4.4.9 (dont la démonstration est achevée avec 4.4.12), que si $C$ est une petite catégorie stable par $\varinjlim$ de cardinal $\leqslant \pi$, alors $\mathrm{Ind}_\pi C$ est également stable par ces limites. De plus, les systèmes inductifs de ce type $J$ dans $\mathrm{Ind}_\pi C$ admettent une représentation indicielle

$$\psi \;:\; I \times J \longrightarrow C\ ,$$

avec $I$ grande devant $\pi$. Et on peut toujours supposer, quitte à prendre $I' \longrightarrow I$ cofinal avec $I'$ ensemble ordonné grand devant $\pi$, que $I$ est de plus un ensemble ordonné.

C'est là le moyen donc, pour la démonstration du

**Théorème 4.4.13.** *Soit $C$ une catégorie équivalente à une petite catégorie, et stable par $\varinjlim$ de cardinal $\leqslant \pi$, où $\pi$ est un cardinal infini donné. Alors :*

[page 96]

*a) (Pour mémoire.) Le foncteur canonique*

$$C \longrightarrow \mathrm{Ind}_\pi(C) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Ind}'_\pi(C)$$

*commute aux $\varinjlim$ de cardinal $\leqslant \pi$.*

*b) (Pour mémoire.) Les systèmes inductifs de cardinal $\leqslant \pi$ dans $\mathrm{Ind}_\pi(C)$ (i.e. les foncteurs $\varphi : J \longrightarrow \mathrm{Ind}_\pi(C)$, avec $\operatorname{card} \mathrm{Fl}(J) \leqslant \pi$) admettent une représentation indicielle*

$$\psi \;:\; I \times J \longrightarrow C\ ,$$

*avec $I$ ensemble ordonné grand devant $\pi$, et admettent une limite inductive dans $\mathrm{Ind}_\pi C$ qui se calculent par*

$$\underbrace{\varinjlim_{j\in J} \varphi(j)}_{\text{dans } \mathrm{Ind}_\pi(C)} \;\simeq\; \text{“}\varinjlim_{i\in I}\text{”}\Psi(i)$$

*avec*

$$\Psi(i) \;=\; \varinjlim_{j\in J}{}_C\, \psi(i,j)\ .$$

*c) $\mathrm{Ind}_\pi C$ est stable par petites limites inductives* ([25]).

Il reste à établir ce dernier point. Comme on a déjà les $\varinjlim$ finies par b, il reste à prouver l'existence des petites $\varinjlim$ filtrantes, ou au choix des sommes infinies, ce qui sera plus joli en fait. Mais

[25] rajouter aussi, en d), le corollaire 4.4.16, page 101.

[page 97]

on pourra aussi bien traiter le cas général d'une $\varinjlim$ de type $J$ quelconque ($J$ petite). Pour ceci, soit

$$I = I(J) = \text{ensemble des sous-catégories } J' \text{ de } J \text{ telles que } \operatorname{card}\operatorname{Fl}(J') \leqslant \pi,$$

ordonnons $I$ par inclusion. Il est évident que $I \neq \emptyset$ (car $\emptyset \in I$), et même que $I$ *est grand devant* $\pi$, car si $(J'_\alpha)_{\alpha \in A}$ avec $\operatorname{card}(A) \leqslant \pi$ est une famille d'éléments de $I$, alors la sous-catégorie de $J$ engendrée par les $J'_\alpha$ est encore dans $I$ (vérification immédiate), et majore les $J'_\alpha$. En fait, la considération de $I(J)$ associée à $J$ va nous permettre de prouver ceci, qui généralise 4.4.13 c), compte tenu de b) :

**Corollaire 4.4.14** ([26]). *Soit $\mathcal{M}$ une catégorie, $\pi$ un cardinal infini tel que*

*a) $\mathcal{M}$ est*

[page 98]

*stable par $\varinjlim$ de cardinal $\leqslant \pi$, et*

*b) $\mathcal{M}$ est stable par $\varinjlim$ sur les ensembles ordonnés $I$ grands devant $\pi$.*

*Alors $\mathcal{M}$ est stable par petites $\varinjlim$ .*

([27]).

En effet, si $\varphi : J \longrightarrow \mathcal{M}$ est donné, on en construit

$$\psi : I = I(J) \longrightarrow \mathcal{M}$$

par

$$\psi(J') = \varinjlim_{J'} \varphi(J') ,$$

qui existe par hypothèse sur $\mathcal{M}$. Il est alors immédiat que $\varinjlim_J \varphi$ existe si et seulement si $\varinjlim_I \psi$ existe, or cette existence est assurée du fait que $I$ est grand devant $\pi$, et l'hypothèse sur $\mathcal{M}$.

Pour achever de prouver le théorème 4.4.13, on est donc ramené au cas particulier des limites inductives $\varinjlim_J \varphi(j)$, quand $\varphi : J \longrightarrow \operatorname{Ind}'_\pi C$ est donné, avec $J$ ensemble

[page 99]

ordonné grand devant $\pi$. Mais ceci va résulter du résultat plus précis :

**Corollaire 4.4.15** ([28]). *Soit $C$ une petite catégorie. Alors la sous-catégorie strictement pleine* $\operatorname{Ind}'_\pi C$ *de $C^\wedge$ est stable dans $C^\wedge$ par $\varinjlim$ grandes devant $\pi$, en d'autres termes, ces $\varinjlim$ existent* dans $\operatorname{Ind}'_\pi(C)$, *et le foncteur d'inclusion y commute.*

Démonstration. Soit $I$ ensemble ordonné, grand devant $\pi$, et $i \longmapsto F_i$ un foncteur $I \longrightarrow \operatorname{Ind}'_\pi(C)$, $F = \varinjlim_I F_i$ dans $C^\wedge$, prouvons que $F \in \operatorname{Ob}\operatorname{Ind}'_\pi(C)$, i.e. (4.4.3) que $C/F$ est grande devant $\pi$. J'utilise le critère b) de 4.4.4, il faut vérifier $\mathrm{PF}_\pi 1$, $\mathrm{PF}_\pi 2$.

[26] Comparer aussi 4.11.3, page 270.

[27] **Corollaire 4.4.14.1.** $\mathcal{M}$ étant comme dans 4.4.14, et $f : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{E}$ étant un foncteur qui commute aux $\varinjlim$ de cardinal $\leqslant \pi$, et aux petites $\varinjlim$ grandes devant $\pi$, alors $f$ commute aux petites $\varinjlim$ .

[28] comparer à 4.7.3.1, qu'il y aurait lieu d'expliciter ici.

Soient

$$x_\alpha \xrightarrow{u_\alpha} F = \varinjlim F_i$$

des objets de $C/F$ indexés par $A$ avec $\operatorname{card} A \leqslant \pi$. Chaque $u_\alpha$ provient de $x_\alpha \longrightarrow F_{i_\alpha}$, et en prenant un majorant commun des $i_\alpha$ ($I$ grand devant $\pi$), on trouve un $i \in I$ et des $v_\alpha : x_\alpha \longrightarrow F_i$. Comme $F_i$ est dans $\operatorname{Ind}'_\pi(C)$, i.e. $C/F_i$ grande devant $\pi$, considérant les $v_\alpha$ comme des objets de $C/F_i$, ils sont majorés par un objet $x \longrightarrow F_i$ de $C/F_i$. On a donc

$$\begin{tikzcd} x_\alpha \arrow[r] \arrow[d] & F_{i_\alpha} \arrow[d] \arrow[dr, dotted] & \\ x \arrow[r] & F_i \arrow[r] & F \end{tikzcd} ,$$

qui montre que les $x_\alpha \longrightarrow F$ sont majorés par $x \longrightarrow F$,

[page 100]

ce qui prouve $\mathrm{PF}_\pi 1$. Prouvons $\mathrm{PF}_\pi 2$, i.e. soient $x \xrightarrow{u} F$, $y \xrightarrow{v} F$ deux objets de $C/F$, et $(f_\alpha)_{\alpha\in A}$ une famille de cardinal $\leqslant \pi$ de flèches de $u$ dans $v$. On sait que $u$, $v$ proviennent de $u_i : x \longrightarrow F_i$, $v_i : y \longrightarrow F_i$ pour $i$ assez grand.

$$\begin{tikzcd} x \arrow[rr, "f_\alpha"] \arrow[dr, "u"'] & & y \arrow[dl, "v"] \\ & F & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} x \arrow[rr, "f_\alpha"] \arrow[dr, "u_i"'] & & y \arrow[dl, "v_i"] \\ & F_i & \end{tikzcd}$$

Pour tout $\alpha$, on peut choisir $i_\alpha \geqslant i$ tel que $v_i f_\alpha$ et $u_i$ deviennent égaux en composant avec $F_i \longrightarrow F_{i_\alpha}$, et comme $\operatorname{card} A \leqslant \pi$ et $I$ grand devant $\pi$, il existe un majorant $i'$ des $i_\alpha$. Au total, on peut supposer (remplaçant $i$ par $i'$) que $v_i f_\alpha = u_i$ pour tout $\alpha$. Alors $u_i$, $v_i$ étant considérés comme objets de $C/F_i$, les $f_\alpha$ sont des flèches de $C/F_i$ de $u_i$ dans $v_i$. Comme $C/F_i$ est grand devant $\pi$ (par l'hypothèse $F_i \in \operatorname{Ob}\operatorname{Ind}'_\pi(C)$), on trouve qu'il existe un égalisateur $(y, v_i) \xrightarrow{g} (z, w_i)$.

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, shift left=2, "(f_\alpha)"] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] \arrow[dr, "u_i"'] & y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "v_i"] & z \arrow[dl, "w_i"] \\ & F_i & \end{tikzcd}$$

Alors l'image de $g$ dans $C/F$ (via $F_i \longrightarrow F$) égalise les flèches $f_\alpha$, en tant que flèches de $C/F$, ce qui prouve $\mathrm{PF}_\pi 2$ et achève la démonstration de 4.4.14, et par là aussi celle du théorème 4.4.13, et du lemme 4.3. Par là est aussi achevée la démonstration de la première assertion du lemme

[page 101]

4.3.7 (p. 77), ce qui achève la démonstration du théorème 4.3.6 (p. 70-71). Il reste à établir la propriété universelle énoncée dans 4.3.7, que je vais rappeler :

**Corollaire 4.4.16** ([29]). *Soient $C$ une catégorie équivalente à une petite catégorie, stable par $\varinjlim$ de cardinal $\leqslant \pi$, où $\pi$ est un cardinal infini donné, et considérons le foncteur d'inclusion canonique*

$$C \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Ind}_\pi(C)\ . \tag{4.4.16.1}$$

*Ce foncteur est 2-universel pour les foncteurs $f : C \longrightarrow \mathcal{E}$, où $\mathcal{E}$ est une $\mathcal{U}$-catégorie stable par petites $\varinjlim$, et $f$ un foncteur commutant à ces limites inductives. En d'autres termes, on a*

*1°) $\alpha$ possède les propriétés précédentes, i.e. $\mathrm{Ind}_\pi(C)$ est stable par $\varinjlim$, et le foncteur $\alpha$ commute aux $\varinjlim$ de cardinal $\leqslant \pi$.*

*2°) Pour toute $\mathfrak{U}$-catégorie $\mathcal{E}$ stable par petites limites inductives, le foncteur*

$$\begin{array}{ccc} g & \longmapsto & g \circ \alpha \\ \underline{\mathrm{Hom}}_!(\mathrm{Ind}_\pi C, \mathcal{E}) & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Hom}}_{!\,\pi}(C, \mathcal{E}) \end{array} \tag{4.4.16.2}$$

*est une équivalence de catégories, où l'indice ! (resp. $!\,\pi$) indique la sous-catégorie strictement pleine de la catégorie $\underline{\mathrm{Hom}}$*

[page 102]

*envisagée, formée des foncteurs qui commutent aux petites $\varinjlim$ (resp. à celles de cardinal $\leqslant \pi$).*

On peut donc dire aussi que $\mathrm{Ind}_\pi(C)$ joue le rôle d'une "enveloppe" stable par petites $\varinjlim$ de la catégorie $C$, quand les $\varinjlim$ de cardinal $\leqslant \pi$, lesquelles existent déjà dans $C$, sont respectées par les plongement de $C$ dans son enveloppe. C'est un résultat nullement tautologique qu'il suffit pour cela d'ajouter à $C$ des $\varinjlim$ *grandes devant* $\pi$ d'objets de $C$, et que plus précisément, la catégorie enveloppe est réalisée par $\mathrm{Ind}_\pi C$ (ou, au choix et moins pléthoriquement, par $\mathrm{Ind}'_\pi C \subset C^\wedge$).

Démonstration. Le 1°) est contenu dans 4.4.13 a) et c). Prouvons donc 2°). Il est évident que $\alpha$ est un foncteur pleinement fidèle dont l'image essentielle engendre strictement $\mathcal{M} = \mathrm{Ind}_\pi C$, d'où résulte que le foncteur (4.4.16.2) est pleinement fidèle, étant induit par le foncteur pleinement fidèle

$$\alpha^*_{\mathcal{E}}\ :\ \underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{M}, \mathcal{E}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(C, \mathcal{E})$$

[page 103]

sur les sous-catégorie pleines envisagées. Il reste donc à montrer que (4.4.16.2) est essentiellement surjectif. Soit donc $f : C \longrightarrow \mathcal{E}$ dans $\underline{\mathrm{Hom}}_{!\,\pi}(C, \mathcal{E})$, considérons son extension canonique

$$\begin{cases} Lf\ :\ \mathrm{Ind}(C) \longrightarrow \mathcal{E} \\ Lf((X_i)_{i\in I})\ =\ \varinjlim_{i\in I} f(X_i) \end{cases} \tag{4.4.16.3}$$

[29] Pourrait être incorporé en partie d) au théorème 4.4.13, car c'est un complément important, et pas tellement évident finalement.

(cf. SGA 4 I 8.7.3), et soit

$$\psi(f) \;=\; Lf|\mathrm{Ind}_\pi(C)\ . \tag{4.4.16.4}$$

Rappelons que $Lf$ commute aux petites $\varinjlim$ filtrantes, mais comme le foncteur d'inclusion

$$\mathrm{Ind}_\pi C \longrightarrow \mathrm{Ind}(C) \tag{4.4.16.5}$$

ne commute pas à ces $\varinjlim$, il n'est pas clair a priori que $\psi(f)$ commute auxdites limites, ni a fortiori qu'il commute aux petites $\varinjlim$ sans plus. Mais on a vu que (4.4.16.5) commute aux $\varinjlim$ *grandes devant* $\pi$*,* ce qui est contenu dans le corollaire 4.4.15 (vu que les limites inductives *filtrantes* dans $\mathrm{Ind}(C)$ sont les limites *dans* $C^\wedge$) : dire que $\mathrm{Ind}'_\pi(C) \longrightarrow \mathrm{Ind}'(C)$ commute à un certain type de $\varinjlim$ filtrantes, revient à dire qu'il en est ainsi du composé avec $\mathrm{Ind}'_\pi(C) \hookrightarrow C^\wedge$, ce qui est établi par 4.4.15. De ceci résulte que $\psi(f)$ *commute aux* $\varinjlim$ *grandes devant* $\pi$*.* Pour établir que $g = \psi(f)$ commute

[page 104]

aux petites $\varinjlim$, il reste donc à voir qu'il commute aux $\varinjlim$ de cardinal $\leqslant \pi$, en vertu de 4.4.14.1 (marge page 98). Pour l'établir, on utilise le théorème 4.4.13 b, en représentant un foncteur $\varphi : J \longrightarrow \mathrm{Ind}_\pi(C)$ (où $\mathrm{card}\,\mathrm{Fl}\,J \leqslant \pi$) sous forme indicielle par

$$\Phi \;:\; I \times J \longrightarrow C\ , \tag{4.4.16.6}$$

$I$ étant un ensemble ordonné grand devant $\pi$. On a donc

$$\varphi(j) \;=\; \varinjlim_{i\in I}{}_{\mathrm{Ind}_\pi C}\Phi(i,j)\ ,$$

et comme $g = \psi(f)$ commute aux $\varinjlim$ de type $I$ par ce qu'on a vu, on aura

$$g(\varphi(j)) \;=\; \varinjlim_{i\in I}{}_{(\mathcal{E})}\ g(\Phi(i,j))\ ,$$

d'où

$$(*) \qquad \varinjlim_{j\in J}{}_{(\mathcal{E})} g(\varphi(j)) \;=\; \varinjlim_{j\in J}\ \varinjlim_{i\in I}\ \underbrace{g(\Phi(i,j))}_{=\,f(\Phi(i,j))} \qquad \text{(limites dans } \mathcal{E}\text{)}\ .$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \varinjlim_{j\in J}{}_{\mathrm{Ind}_\pi}\varphi(j) \;&\simeq\; \varinjlim_{j\in J}\ \varinjlim_{i\in I}\ \Phi(i,j) \\ &\simeq\; \varinjlim_{i\in I}\ \underbrace{\varinjlim_{j\in J}\ \Phi(i,j)}_{\substack{\text{peut être calculé} \\ \text{dans } C\text{, soit} \\ \Psi(i)\,\in\,\mathrm{Ob}\,C}}\ , \end{aligned}$$

donc

$$(**) \qquad \varinjlim_{j\in J}{}_{\mathrm{Ind}_\pi}\varphi(j) \simeq \varinjlim_{i\in I}\ \Psi(i)\ ,$$

`[page 105]`

d'où en appliquant $g$, qui commute aux $\varinjlim$ de type $I$, et se rappelant maintenant que $g|C \simeq f$,

$$(***) \qquad g(\varinjlim_{J} {}_{\mathrm{Ind}_\pi C}\varphi(j)) \simeq \varinjlim_{i\in I} f(\Psi(i)) .$$

On a d'autre part

$$\Psi(i) \overset{\text{déf}}{=} \varinjlim_{j\in J} \Phi(i,j) , \qquad \varinjlim \text{ dans } C ,$$

et comme $f$ commute aux $\varinjlim$ de type $J$ (car $\operatorname{card}\mathrm{Fl}\, J \leqslant \pi$), on en conclut

$$f(\Psi(i)) \simeq \varinjlim_{j\in J} f(\Phi(i,j)) ,$$

donc par $(***)$

$$(****) \qquad g(\varinjlim_{j\in J} \varphi(j)) \simeq \varinjlim_{i\in I} \varinjlim_{j\in J} f(\Phi(i,j)) .$$

En composant avec $(*)$ et utilisant à nouveau la commutativité de $\varinjlim_{I}$ à $\varinjlim_{J}$, on trouve donc

$$g(\varinjlim \varphi(j)) \xleftarrow{\simeq} \varinjlim g(\varphi(j)) ,$$

ce qui prouve que $g$ commute aux limites inductives de type $J$, et achève de prouver que $g$ est `[dans]` $\underline{\mathrm{Hom}}_!(\mathrm{Ind}_\pi(C), \mathcal{E})$. Comme $g|C \simeq f$, on en conclut que le foncteur (4.4.16.2) est essentiellement surjectif, ce qui achève de prouver 4.4.16. De plus, on a construit un foncteur quasi-inverse explicite, $\psi$,

`[page 106]`

s'insérant dans le diagramme commutatif

$$(4.4.16.6) \qquad \begin{tikzcd} \underline{\mathrm{Hom}}_{!\,\pi}(C,\mathcal{E}) \arrow[r, "\psi", "(\sim)"'] \arrow[d, hook, "\text{incl. pl. fid.}"] & \underline{\mathrm{Hom}}_!(\mathrm{Ind}_\pi(C),\mathcal{E}) \arrow[r] \arrow[d, hook, dotted, "\text{pl. fid.}"] & \underline{\mathrm{Hom}}_{!\,\pi}(\mathrm{Ind}_\pi(C),\mathcal{E}) \\ \underline{\mathrm{Hom}}(C,\mathcal{E}) \arrow[r, "L", "\sim"', "\text{(cf. SGA 4 I 8.7.3)}"'] & \underline{\mathrm{Hom}}_{!\,\mathrm{filt}}(\mathrm{Ind}(C),\mathcal{E}) \arrow[ur, "R\ \text{(restriction)}"'] & \end{tikzcd} .$$

## 4.5 Filtration cardinale canonique d'une catégorie $\mathfrak{U}$-paratopos

**Définition 4.5.1.** On appelle *catégorie $\mathfrak{U}$-paratopos* une catégorie $\mathcal{M}$ $\mathfrak{U}$-pseudo-topos et accessible, i.e. qui satisfait aux conditions équivalentes du théorème 4.3.6 (p. 70). On dit que c'est une *catégorie $\pi$-$\mathfrak{U}$-paratopos,* si elle est $\pi$-accessible, i.e. si elle admet une petite sous-catégorie génératrice dont les objets soient $\pi$-accessible, ou ce qui revient au même, si $\mathcal{M}$ est équivalente à une catégorie de la forme $\mathrm{Ind}'_\pi(\mathcal{M}_\pi)$, où $\mathcal{M}_\pi$ est une petite catégorie (ou : une catégorie équivalente à une petite catégorie), et stable par $\varinjlim$ de cardinal $\leqslant \pi$. (Et on peut prendre pour $\mathcal{M}_\pi$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{M}$ formée des objets

`[page 107]`

$\pi$-accessibles).

Dans la suite, nous allons, plus généralement, considérer une catégorie $C$ équivalente à une petite catégorie, stable par $\varinjlim$ de cardinal $\leqslant \pi_0$ ([30]), et la catégorie

$$\mathcal{M} \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{Ind}'_{\pi_0} C \subset C^{\wedge} , \tag{4.5.1}$$

où $\pi_0$ est un cardinal infini donné. Je me propose d'introduire sur $\mathcal{M}$ une filtration cardinale canonique :

**Proposition 4.5.2** ([31]). *Soit $F \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{M} \subset \mathrm{Ob}\,C^{\wedge}$, et soit $\pi$ un cardinal $\geqslant \pi_1 = \sup(\pi_0, \mathrm{card}\,\mathrm{Fl}\,C_0)$, où $C_0$ est une petite sous-catégorie pleine de $C$ telle que $C_0 \overset{\sim}{\hookrightarrow} C$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

*a)* $\mathrm{card}\,\mathrm{Fl}(C_0/F) \leqslant \pi$.

*a′)* $\mathrm{card}\,\mathrm{Ob}\,(C_0/F) \leqslant \pi$.

*a″) Pour tout $x$ dans $C_0$,* $\mathrm{card}\,F(x) \leqslant \pi$.

*b) Il existe une petite catégorie filtrante $I$ (pas nécessairement ordonnée),* grande devant $\pi_0$, *avec* $\mathrm{card}\,I \leqslant \pi$, *et un système inductif $(x_i)_{i\in I}$ dans $C$, tel que l'on ait*

$$F \simeq \varinjlim_{i\in I} x_i , \tag{4.5.2.1}$$

*où la $\varinjlim$ est prise dans $\mathcal{M}$, ou ce qui revient au même (en vertu de 4.4.15, $I$ étant grande devant $\pi_0$) dans $C^{\wedge}$, i.e. $F$ est isomorphe au foncteur ind-représentable défini par l'ind-objet $\underline{x} = (x_i)_{i\in I}$ de $C$.*

*c) $F$ est $\pi$-accessible dans $\mathcal{M}$.*

*c′) $F$ est $\pi$-accessible dans $C^{\wedge}$.*

`[page 108]`

Démonstration. On a les implications $\pm$ tautologiques

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \mathrm{a'} \arrow[r, Rightarrow] & \mathrm{a''} & \\ \mathrm{a} \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & & \\ & \mathrm{b} \arrow[r, Rightarrow] & \mathrm{c'} \arrow[r, Rightarrow] & \mathrm{c} \end{tikzcd} , \tag{$*$}$$

où $\mathrm{a'} \Longrightarrow \mathrm{a''}$ provient de l'inclusion canonique $F(x) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(x, F) \hookrightarrow \mathrm{Ob}\,C/F$, $\mathrm{a} \Longrightarrow \mathrm{b}$ s'obtient en prenant $I = C_0/F$ et notant que $I$ est stable par limites inductives de cardinal $\leqslant \pi_0$ ($C$ l'étant), donc est grande devant $\pi_0$ ([32]). On a $\mathrm{b} \Longrightarrow \mathrm{c'}$ en vertu du fait que la sous-catégorie strictement pleine $C^{\wedge}_{\pi}$ de $C^{\wedge}$ définie par

$$\left\{ \begin{array}{lcl} C^{\wedge}_{\pi} & = & \text{sous-catégorie strictement pleine de } C^{\wedge} \text{ formée des} \\ & & F \in \mathcal{M} \text{ qui sont } \pi\text{-accessibles.} \end{array} \right. \tag{4.5.2.2}$$

[30] Il n'y a pas lieu de le supposer tout de suite.

[31] N'est prouvé (et n'est vrai) que si $\pi^{\pi_0} = \pi$, voir rectification 4.5.6, page 116.

[32] On n'a pas besoin de cette stabilité, de toutes façons $C_0/F$ est grande devant $\pi_0$, en vertu de 4.4.3, p. 80.

est stable par $\varinjlim$ de cardinal $\leqslant \pi$ (SGA 4 I 9.9). Enfin c′ $\Longrightarrow$ c provient du fait que le foncteur d'inclusion $\mathcal{M} \hookrightarrow C^{\wedge}$ est pleinement fidèle et $\pi_0$-accessible, i.e. commute aux limites inductives grandes devant $\pi_0$, et a fortiori à celles grandes devant $\pi$. Par les implications du diagramme ci-dessus, il suffit donc de prouver qu'on a

$$\mathrm{c} \overset{(33)}{\Longrightarrow} a \qquad \text{et} \qquad \mathrm{a}'' \Longrightarrow \mathrm{a}\ .$$

`[page 109]`

*Prouvons* a″ $\Longrightarrow$ a. Considérons l'application

$$(*) \qquad \mathrm{Fl}\, C/F \longrightarrow \mathrm{Fl}\, C$$

induit par le foncteur étale $C' = C/F \longrightarrow C$, alors l'ensemble des flèches au-dessus d'une flèche $\alpha : x \longrightarrow y$ de $C$ est en correspondance biunivoque avec $\mathrm{Ob}\, C'_y = F(y)$, puisqu'une telle flèche $\alpha'$ est connue quand on connaît son but, qui est un objet quelconque de $F(y)$ ($C' \longrightarrow C$ étant étale, i.e. fibrant à fibres discrètes). Donc le fibre de $(*)$ en $\alpha$ est de cardinal $= \mathrm{card}\, F(y) \leqslant \pi$, donc on a

$$\mathrm{card}\, \mathrm{Fl}\, C/F \ \leqslant\ \pi\, \underbrace{\mathrm{card}\, \mathrm{Fl}\, C}_{\leqslant \pi_1} \ \leqslant\ \pi\ \underbrace{\pi_1}_{\leqslant \pi} \ \leqslant\ \pi^2 = \pi\ ,$$

ce qui prouve a.

Prouvons enfin c $\Longrightarrow$ a. Pour ceci, nous allons utiliser la première inclusion $\mathcal{M}_\pi \subset \mathrm{Filt}^\pi \mathcal{M}$ de SGA 4 I 9.16, qui s'applique dès lors que nous prouvons le

**Corollaire 4.5.3** ([34]). *Sous les conditions de 4.5.2, soit, pour tout cardinal* $\pi \geqslant \pi_1$, $\mathrm{Filt}^\pi(\mathcal{M})$ *la sous-catégorie strictement pleine de* $\mathcal{M}$ *formée des* $F \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{M}$ *qui satisfont la condition a) de 4.5.2. Alors la famille des* $(\mathrm{Filt}^\pi)_{\pi \geqslant \pi_1}$ *est une*

`[page 110]`

*filtration cardinale de* $\mathcal{M}$.

La condition a) de loc. cit. 9.12 (les $\underline{\mathrm{Filt}}^\pi$ sont équivalentes à des petites catégories) est évidente. Prouvons b), i.e. la stabilité de $\underline{\mathrm{Filt}}^\pi$ par $\varinjlim$ filtrantes $F = \varinjlim F_i$ *grandes devant* $\pi_0$, de cardinal $\leqslant \pi$. Comme $\mathcal{M} \hookrightarrow C^{\wedge}$ commute à ces limites, pour $x$ dans $C$

$$F(x) \ =\ \varinjlim_i F_i(x)\ ,$$

d'où $\mathrm{card}\, F(x) \leqslant \mathrm{card}\, \mathrm{Ob}\, I \cdot \pi \leqslant \pi \cdot \pi = \pi$, ce qui (par l'équivalence a $\Longleftrightarrow$ a″) implique $F \in \mathrm{Ob}\, \mathrm{Filt}^\pi$. Prouvons la condition c) de loc. cit. Pour ceci, nous aurons besoin du fait, plus précis que le b), qu'on vient d'établir :

**Corollaire 4.5.4** ([35]). *Pour tout* $\pi \geqslant \pi_1$, $\mathrm{Filt}^\pi$ *est stable par* $\varinjlim$ *(dans* $\mathcal{M}$*) de cardinal* $\leqslant \pi$ *(pas nécessairement filtrantes, a fortiori pas nécessairement grandes devant* $\pi_0$*).*

---

[33] n'est prouvé (et n'est vrai) que si $\pi^{\pi_0} = \pi$.

[34] Pas prouvé, la condition c) des filtrations cardinales peut-être pas satisfaite. Sans doute *faux* en général.

[35] Prouvé seulement si $\pi^{\pi_0} = \pi$ ! Sans doute *faux* en général.

Il suffit, en vertu de ce qui est déjà prouvé de du lemme 4.4.14 ([36]), de montrer que $\mathrm{Filt}^{\pi}$ est stable par $\varinjlim$ *de cardinal* $\leqslant \pi_0$. Si $\varphi : J \longrightarrow \mathrm{Filt}^{\pi}$ est un foncteur avec $\operatorname{card} J \leqslant \pi_0$, on le met sous forme indicielle

$$\psi \ : \ I \times J \longrightarrow C \ ,$$

grâce à 4.14.3.b, avec $I$ grande devant $\pi_0$.

[page 111]

Je rappelle qu'on pouvait prendre

$$I \ = \ \underline{\mathrm{Hom}}(J, C)/\varphi \ ,$$

où $\underline{\mathrm{Hom}}(J, C) \hookrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(J, \mathcal{M} = \mathrm{Ind}'_{\pi} C)$, quitte à ne pas exiger que $I$ soit ordonnée. On a envie de prouver que $\operatorname{card} \mathrm{Fl}\, I \leqslant \pi$. L'ennui, c'est qu'on arrive seulement à la majoration

$$\operatorname{card} \mathrm{Fl}\, I \ \leqslant \ \pi^{\pi_0} \ .$$

(Même si $J$ est discrète, on n'a pas mieux, puisqu'alors

$$I \ \simeq \ \prod_{j \in J} C/\varphi(j) \ , \quad \text{d'où} \quad \mathrm{Fl}\, I = \prod_{j \in J} \mathrm{Fl}\, C/\varphi(j) \ ,$$

et si $\operatorname{card} \mathrm{Fl}\, C/\varphi(j) = \pi$ pour tout $j$, on trouve $\operatorname{card} \mathrm{Fl}\, I = \pi^{\pi_0}$ – il n'y a pas moyen de faire mieux !)

Donc je n'arrive pas à prouver directement 4.5.4, ce qui m'aurait arrangé pour prouver la condition c) de loc. cit. Mais à vrai dire, on a fait ici le travail de la démonstration du théorème 4.3.6, partie b $\Longrightarrow$ c – on y a déjà prouvé que la filtration qu'on vient de construire (par la condition a) de 4.5.2) est une filtration cardinale. La condition c) de SGA 4 I 9.12 est prouvée à la page 76. Mais je vais refaire

[page 112]

la démonstration plus sérieusement.

Soit donc $F \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{M}$, considérons

$$J \ = \ C/F \ ,$$

c'est une catégorie stable par $\varinjlim$ de cardinal $\leqslant \pi_0$, donc grande devant $\pi_0$, et on a

$$F \ \simeq \ \varinjlim_{j \in J} x_j \qquad (\varinjlim \text{ dans } \mathcal{M})$$

en désignant par $j \longmapsto x_j$ le foncteur canonique $C/F \longrightarrow C$. Soit alors $I$ l'ensemble des sous-catégories $J'$ de $J$ qui sont *de cardinal* $\leqslant \pi$ *et grandes devant* $\pi_0$, $I$ ordonné par inclusion, et pour tout $J' \in I$, posons

$$X_{J'} \ = \ \varinjlim_{j \in J'} x_j \ .$$

Comme $J'$ est grande devant $\pi_0$, la limite inductive dans $\mathcal{M}$ est aussi une limite dans $C^{\wedge}$, d'où résulte aussitôt, comme $\operatorname{card} \mathrm{Ob}\, J' \leqslant \operatorname{card} \mathrm{Fl}\, J' \leqslant \pi$, que $X_{J'}$ est dans $\mathrm{Filt}^{\pi}$. Alors

$$J' \ \longmapsto \ X_{J'} \ \in \ \mathrm{Ob}\, \mathrm{Filt}^{\pi}$$

[36] Il faut une variante du lemme 4.4.14, pour les $\varinjlim$ de cardinal $\leqslant \pi'$, qui se prouve de la même façon.

est un foncteur

$$I \longrightarrow \mathrm{Filt}^{\pi} ,$$

dont la limite inductive est celle des $x_j$, donc isomorphe à $F$. D'autre part, il est immédiat que $I$ est grand devant $\pi$, i.e. que si $(J'_\alpha)_{\alpha\in A}$ est

[page 113]

une famille d'éléments de $I$, celle-ci est majorée par un $J' \in I$. Ceci résulte du

**Lemme 4.5.5** ([37]). *Soient* $\pi$, $\pi_0$, *avec* $\pi > \pi_0$, *des cardinaux infinis, et soit* $J$ *une catégorie grande devant* $\pi_0$. *Alors pour toute partie* $\Phi$ *de* $\mathrm{Fl}\, J$, *telle que* $\mathrm{card}\, \Phi \leqslant \pi$, *il existe une sous-catégorie* $J'$ *de* $J$ grande devant $\pi_0$, *telle que* $\mathrm{card}\, J' \leqslant \pi$ ([38]), *et* $\mathrm{Fl}\, J' \supset \Phi$.

Ce lemme étant admis, on a donc représenté un objet quelconque $F$ de $\mathcal{M}$ comme une $\varinjlim_{i\in I} X_i$, avec $I$ ensemble ordonné grand devant $\pi$, les $X_i$ dans $\mathrm{Filt}^{\pi}$. Il reste à prouver que si $\pi' > \pi$ et $F \in \mathrm{Filt}^{\pi'}$, alors on peut prendre $I$ tel que $\mathrm{card}\, I \leqslant \pi'^{\pi}$. Mais $F \in \mathrm{Filt}^{\pi'}$ signifie que $J = C/F$ satisfait $\mathrm{card}\,\mathrm{Fl}\, J \leqslant \pi'$. Alors l'ensemble des parties de cardinal $\leqslant \pi$ de $\mathrm{Fl}\, J$ a un cardinal majoré par $\pi'^{\pi}$, a fortiori $\mathrm{card}\, I \leqslant \pi'^{\pi}$, ce qui achève de prouver que $(\mathrm{Filt}^{\pi})_{\pi\geqslant\pi_1}$ est une filtration cardinale sur $\mathcal{M}$.

[page 114]

Pour prouver le lemme, on commence par saturer $\Phi$ par composition finie, on trouve une sous-catégorie $J'_0$ de $J$ telle que $\mathrm{card}\,\mathrm{Fl}\, J'_0 \leqslant \pi_0$ ... Mais je m'aperçois que pour prouver le lemme, j'ai encore besoin de $\pi^{\pi_0} = \pi$ – une enveloppe de $J'$ grande devant $\pi_0$ va avoir un cardinal majoré (au mieux) par $\pi^{\pi_0}$.

Prenons p.ex.

$$J \;=\; \mathfrak{P}(S) \qquad \text{(ensemble ordonné)}$$

avec $\mathrm{card}\, S = \pi > \pi_0$, donc $J$ est grand devant $\pi_0$. Considérons l'application

$$S \longrightarrow J = \mathfrak{P}(S) , \qquad s \longmapsto \{s\} ,$$

et prenons pour $\Phi \subset \mathrm{Fl}\, J$ l'ensemble des $\mathrm{id}_{\{s\}}$. Donc on cherche une partie $J'$ de $J$, contenant $S$, et grande devant $\pi_0$ pour l'ordre induit par $J$. On voit tout de suite que la plus petite partie $J'$ faisant l'affaire est l'ensemble $\mathfrak{P}_{\pi_0}(S)$ des parties de $S$ de cardinal $\leqslant \pi_0$. Mais on trouve

$$\mathrm{card}\, J' \cdot \pi_0! \;=\; \pi^{\pi_0} ,$$

[page 115]

où

$$\begin{aligned} \pi_0! \;&=\; \mathrm{card}\,\mathrm{Aut}\,(E_0) \qquad (E_0 \text{ ensemble de cardinal } \pi_0) \\ &=\; \pi_0^{\pi_0} \\ &=\; 2^{\pi_0} , \end{aligned}$$

donc

$$(*) \qquad \mathrm{card}\, J' \cdot 2^{\pi_0} \;=\; \pi^{\pi_0} .$$

[37] N'est prouvé *que* si $\pi^{\pi_0} = \pi$ ! Sans doute faux en général.

[38] C'est OK si on exige seulement $\mathrm{card}\, J' \leqslant \pi^{\pi_0}$.

D'autre part, il est immédiat que $\operatorname{card} J' \geqslant \operatorname{card} \mathfrak{P}(E_0) = 2^{\pi_0}$ (où $E_0$ est une partie de $S$ de cardinal $\pi_0$), donc le premier membre de $(*)$ est égal à $\operatorname{card} J'$, donc on trouve

$$\operatorname{card} J' \ = \ \pi^{\pi_0} \ ,$$

sorry !

Finalement, je me suis convaincu que la proposition 4.5.2, et les corollaires et lemmes précédents par lesquels j'ai essayé de l'établir, n'est vrai que pour ces cardinaux $\pi > \pi_0$ tels que

$$\pi^{\pi_0} \ = \ \pi \ ,$$

ce qui, moyennant l'hypothèse du continu généralisée, équivaut à

$$\pi^{\pi_0} \ < \ 2^{\pi} \ ( = \ \pi^{\pi} \ )$$

(ou encore à $\pi^{\pi_0} \neq 2^{\pi}$ $(= \pi^{\pi})$). Je vais donner

`[page 116]`

ici un énoncé rectifié.

**Proposition 4.5.6.**

1° *Sous les hypothèses générales de 4.5.2 sur $C$, $\pi_0$, $\pi_1$, $\pi$, les conditions a, a′, a″, b, c′ de cette proposition sont équivalentes (moyennant $\pi \geqslant \pi_1$)* ([39])*, et impliquent la condition c ($F$ est $\pi$-accessible). Quand $\pi^{\pi_0} = \pi$ (notamment quand $\pi = 2^c$, avec $c \geqslant \pi_0$), alors toutes les conditions a à c′ de 4.5.2 sont équivalentes.*

2° *Plus généralement et plus précisément, pour $\pi \geqslant \pi_1$ donné, considérons les conditions sur $\pi$ :*

*1)* $\pi^{\pi_0} = \pi$.

*2)* $\mathrm{Filt}^{\pi}(\mathcal{M})$ *(définie dans 4.5.3) est stable par* $\varinjlim$ *de cardinal* $\leqslant \pi$.

*3)* $\forall$ *$F$ dans $\mathcal{M}$, on a $F \simeq \varinjlim_{I} X_i$, avec $I$ ensemble ordonné grand devant $\pi$, les $X_i$ dans $\mathrm{Filt}^{\pi}(\mathcal{M})$. De plus, si $\pi' > \pi$ et $F \in \mathrm{Filt}^{\pi'}(\mathcal{M})$, on peut prendre $I$ de cardinal $\leqslant \pi'^{\pi}$.*

*4) Comme 3), sans la majoration de cardinaux, et en supposant seulement $I$ catégorie grande devant $\pi$ (pas nécessairement catégorie ordonné).*

*5) La condition c) de 4.5.2 implique les autres conditions (elles sont équivalentes, par 1°), en d'autres termes*

$$\mathcal{M}_{\pi} \ \subset \ \mathrm{Filt}^{\pi} \qquad \textit{(donc } \mathcal{M}_{\pi} = \mathrm{Filt}^{\pi}\textit{, puisqu'on sait que } \mathrm{Filt}^{\pi} \subset \mathcal{M}_{\pi}\textit{)} \ ,$$

`[page 117]`

*où $\mathcal{M}_{\pi}$ désigne la sous-catégorie strictement pleine de $\mathcal{M}$ formée des objets $\pi$-accessibles.*

*Ceci posé, on a les implications*

$$1) \implies 2) \implies 3) \implies 4) \implies 5) \ ,$$

*et dans le cas particulier où $\mathcal{M} = (\mathrm{Ens})$, $C$ = sous-catégorie pleine formée des ensembles de cardinal $\leqslant \pi_0$, on a aussi* $5) \implies 1)$, *i.e. toutes ces conditions sont équivalentes.*

[39]**N.B.** Pour cette équivalence, l'hypothèse que $C$ soit stable par $\varinjlim$ de cardinal $\leqslant \pi$ est inutile, et aussi pour que c′) implique c), et lui soit équivalente si $\pi = \pi^{\pi_0} \geqslant \pi_1$, cf. 4.7.1, p. 161.

Démonstration.

1) $\Longrightarrow$ 2). Cf. démonstration de 4.5.4.

2) $\Longrightarrow$ 3). La catégorie $J = \mathrm{Filt}^{\pi}/F$ est stable par $\varinjlim$ de cardinal $\leqslant \pi$, $\mathrm{Filt}^{\pi}$ l'étant, donc $J$ est grande devant $\pi$, d'ailleurs $F = \varinjlim_{j\in J} X_j$, où $j \longmapsto X_j$ est le foncteur source $\mathrm{Filt}^{\pi}/F \longrightarrow \mathrm{Filt}^{\pi}$. D'où la représentation voulue de $F$, quitte à remplacer $J$ par un ensemble ordonné cofinal $I$, p.ex. en prenant pour $I$ l'ensemble des sous-catégories $J$ de $I$ telles que $\mathrm{card}\,\mathrm{Fl}\,J \leqslant \pi$ `[cette deuxième partie de la phrase ‘‘p.ex. ...’’ demande correction]`. La majoration $\mathrm{card}\, I \leqslant \pi'^{\pi}$, pour $F \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{Filt}^{\pi'}$, se fait par AQT `[âne qui trotte]`.

L'implication 3) $\Longrightarrow$ 4) est tautologique.

4) $\Longrightarrow$ 5) ([40]), car si $F \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{M}_{\pi}$, on trouve par 4) que $F$ est facteur direct d'un objet de $\mathrm{Filt}^{\pi}$, et $\mathrm{Filt}^{\pi}$ étant stable par $\varinjlim$

`[page 118]`

grandes devant $\pi_0$, cela implique que $\mathrm{Filt}^{\pi}$ est stable par facteurs directs, d'où $F \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{Filt}^{\pi}$.

Enfin, si $\mathcal{M} = \mathrm{Ens}$, $C = \mathrm{Ens}(\pi_0)$. On note que

$$\mathrm{Filt}^{\pi} \;=\; \{\, X \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{Ens} \mid \mathrm{card}\,(X)^{\pi_0} \;\leqslant\; \pi \,\}\;.$$

D'autre part, on trouve facilement

$$\begin{aligned}(\mathrm{Ens})_{\pi} &\overset{\text{déf}}{=} \text{sous-catégorie pleine de (Ens) formée des objets } \pi\text{-accessibles}\\ &= \{X \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{Ens} \mid \mathrm{card}\, X \leqslant \pi\}\;.\end{aligned}$$

Donc on a $(\mathrm{Ens})_{\pi} \subset \mathrm{Filt}^{\pi}$ si et seulement si $\pi^{\pi_0} \leqslant \pi$, i.e. $\pi^{\pi_0} = \pi$, q.e.d. ([41]).

**Corollaire 4.5.7.** *Pour tout cardinal* $\pi \geqslant \pi_1$*, on a*

$$\mathrm{Filt}^{\pi} \;\subset\; \mathcal{M}_{\pi} \;\subset\; \mathrm{Filt}^{\pi^{\pi_0}}\;. \tag{4.5.7.1}$$

L'inclusion $\mathrm{Filt}^{\pi} \subset \mathcal{M}_{\pi}$ est l'implication a $\Longrightarrow$ c de la partie 1°) de 4.5.6. Pour prouver $\mathcal{M}_{\pi} \subset \mathrm{Filt}^{\pi^{\pi_0}}$, on pose $\pi' = \pi^{\pi_0}$ et on note que $\pi'^{\pi_0} = \pi^{\pi_0\cdot\pi_0} = \pi^{\pi_0} = \pi'$. Donc on peut appliquer 1° à $\pi'$ au lieu de $\pi$, et on trouve que $\mathcal{M}_{\pi'} = \mathrm{Filt}^{\pi'}$. Comme $\mathcal{M}_{\pi} \subset \mathcal{M}_{\pi'}$, on en conclut $\mathcal{M}_{\pi} \subset \mathrm{Filt}^{\pi'}$, q.e.d.

J'ai oublié de démontrer le 1°) dans 4.5.6. Vu le diagramme d'implications $(*)$, p. 108, et l'implication a$''$ $\Longrightarrow$ a déjà prouvé (p. 109),

`[page 119]`

il reste à prouver seulement

$$\mathrm{c}' \;\Longrightarrow\; \mathrm{a}''\;,$$

i.e. que $F$ $\pi$-accessible *dans* $C^{\wedge}$ implique $\mathrm{card}\, F(x) \leqslant \pi \;\forall\; x \in C$. Ceci va résulter du résultat un peu plus général :

[40] comparer le lemme 4.5.14, page 133.

[41] Cf. démonstration de la partie 1°) de 4.5.6, plus bas (bas de page et page suivante).

**Lemme 4.5.8.**

*1°) Dans la catégorie* $\mathcal{E} = (\mathrm{Ens})$*, les objets* $\pi$*-accessibles (*$\pi$ *un cardinal infini) sont les ensembles* $X$ *tels que* $\operatorname{card} X \leqslant \pi$*.*

*2°)* ([42])*. Soit* $C$ *une catégorie équivalente à une petite catégorie, telle que* $\forall\, x, y \in \operatorname{Ob} C$*, on ait* $\operatorname{card} \operatorname{Hom}(x,y) \leqslant \pi$*. Soit* $\mathcal{E}$ *une* $\mathfrak{U}$*-catégorie stable par* $\varinjlim$ *grandes devant* $\pi$*, et faiblement* $\pi$*-accessible (i.e. admettant une sous-catégorie génératrice formée d'objets* $\pi$*-accessibles), et stable par produits de cardinal* $\leqslant \pi$*. Alors pour qu'un objet* $F$ *de* $\underline{\mathrm{Hom}}(C, \mathcal{E})$ *soit* $\pi$*-accessible, il* faut *que* $\forall\, x \in \operatorname{Ob} C$*,* $F(x)$ *soit un objet* $\pi$*-accessible de* $\mathcal{E}$*, et cette condition est aussi suffisante si* $\operatorname{card} \text{réd} \operatorname{Fl}(C) \leqslant \pi$ ([43]).

Démonstration. 1°) $\operatorname{card} X \leqslant \pi \implies X$ $\pi$-accessible dans $\mathcal{E} = (\mathrm{Ens})$, car $X = \coprod_{x \in X} \{x\}$, et on applique SGA 4 I 9.9. Inversement, supposons $X$ $\pi$-accessible, et écrivons $X \simeq \varinjlim_{i \in I} X_i$, où $I$ est l'ensemble des parties de $X$ qui sont de cardinal $\leqslant \pi$. Comme $I$ est grande devant $\pi$, l'application identique $X \xrightarrow{\mathrm{id}} X$ se factorise par un ensemble $X_i$, donc $X_i = X$, donc $\operatorname{card} X = \operatorname{card} X_i \leqslant \pi$, q.e.d.

`[page 120]`

2°) Considérons, pour $x \in \operatorname{Ob} C$, le foncteur

$$e \xrightarrow{\varepsilon_x} C\ ,$$

d'où un foncteur

$$\varepsilon_x^* \ :\ \underline{\mathrm{Hom}}(C, \mathcal{E}) \longrightarrow \mathcal{E}\ , \qquad F \longmapsto F(x)\ ,$$

admettant un adjoint à droite

$$\varepsilon_{x*} \ :\ \mathcal{E} \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(C, \mathcal{E})\ ,$$

donné par

$$\varepsilon_{x*}(E)(y) \ = \ E^{\operatorname{Hom}(x,y)}$$

(sous réserve d'existence des produits de cardinal $\leqslant \pi$). Ce foncteur $\varepsilon_{x*}$ est $\pi$-accessible en vertu de loc. cit. 9.8.

Ceci posé, soit $F$ un objet $\pi$-accessible de $\underline{\mathrm{Hom}}(C, \mathcal{E})$, on voit que $\varepsilon_x^*(F)$ est $\pi$-accessible, $\varepsilon_x^*$ ayant un adjoint à droite $\pi$-accessible :

$$E \longmapsto \operatorname{Hom}_{\mathcal{E}}(\underbrace{F(x)}_{\varepsilon_x^*(F)}, E) \ \simeq\ \operatorname{Hom}_{\underline{\mathrm{Hom}}(C,\mathcal{E})}(F, \varepsilon_{x*}(E))$$

est composé du foncteur $\pi$-accessible $\varepsilon_{x*}$, et du foncteur covariant $\pi$-accessible représenté par $F$ dans $\underline{\mathrm{Hom}}(C, \mathcal{E})$.

Inversement, si les $F(x)$ sont $\pi$-accessibles, prouvons que $F$ l'est, moyennant $\operatorname{card} \operatorname{Fl}(C) \leqslant \pi$. Se fait par AQT `[âne qui trotte]`, je ne vais pas l'expliciter ici.

[42] Cf. généralisation 4.14.18, p. 391 b) et c).

[43] même *sans* condition de stabilité de $\mathcal{E}$ par produits de cardinal $\leqslant \pi$.

`[page 121]`

**Proposition 4.5.9.** *Soit $C$ une catégorie équivalente à une petite catégorie, et soit $\mathcal{M} = \mathrm{Ind}'_{\pi_0}(C)$, $\pi_0$ un cardinal infini donné. On suppose $C$ stable par $\varinjlim$ de cardinal $\leqslant \pi_0$. Pour tout cardinal $\pi \geqslant \pi_0$, soit $\mathcal{M}_\pi \supset C$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{M}$ formée des objets $\pi$-accessibles de $\mathcal{M}$. Soit d'autre part $\pi_1 = \sup(\pi_0, \operatorname{card} \mathrm{Fl}\, C)$. Alors $(\mathcal{M}_\pi)_{\pi \geqslant \pi_1}$ est une filtration cardinale de $\mathcal{M}$ ([44]), et de plus, pour $\pi \geqslant \pi_0$, $\mathcal{M}_\pi$ est stable dans $\mathcal{M}$ par $\varinjlim$ de cardinal $\leqslant \pi$.*

Démonstration. La stabilité de $\mathcal{M}_\pi$ est un rappel, cf. SGA 4 I 9.9. Comme on a

$$\mathcal{M}_\pi \ \subset \ \mathrm{Filt}^{\pi^{\pi_0}}$$

pour $\pi \geqslant \pi_1$ (cf. 4.5.7), on voit donc que les $\mathcal{M}_\pi$ sont équivalentes à des petites catégories (condition a) des filtrations cardinales). La condition b) des filtrations cardinales est contenue dans la propriété de stabilité des $\mathcal{M}_\pi$ qu'on vient de rappeler. Prouvons enfin la condition c). Soit donc $\pi \geqslant \pi_0$, et soit $x$ dans $\mathcal{M}$, considérons la catégorie

$$I \ = \ \mathcal{M}_\pi / x \ ,$$

elle est stable par $\varinjlim$ de cardinal $\leqslant \pi$, d'après la stabilité similaire de $\mathcal{M}_\pi$, donc $I$ est grande devant $\pi$ et équivalente à une petite catégorie, d'autre part, on a

`[page 122]`

$$x \ = \ \varinjlim_{i \in I} x_i \ ,$$

les $x_i$ dans $\mathcal{M}_\pi$ ($\varinjlim$ dans $\mathcal{M}$ des foncteurs $I = \mathcal{M}_\pi/x \longrightarrow \mathcal{M}_\pi$). Quitte à remplacer $I$ par une catégorie ordonnée cofinale, cela prouve la partie qualitative de c. Supposons enfin $x \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{M}_{\pi'}$, où $\pi' > \pi$, montrons que l'on a alors

$$\operatorname{card} I_0, \ \operatorname{card} I' \ \leqslant \ \pi'^{\pi} \qquad ([45], [46]) \ , \tag{4.5.9.1}$$

ce qui achèvera de prouver que l'on a une filtration cardinale. Il nous faut une majoration des cardinaux.

**Lemme 4.5.10** ([47]). *Soit $\pi$ un cardinal $\geqslant \pi_1$. Alors on a*

$$\operatorname{card} \mathrm{Fl}((\mathrm{Filt}^{\pi})_0) \ \leqslant \ 2^{\pi} \ . \tag{4.5.10.1}$$

On a en effet, en désignant par $C^\wedge(\pi)$ la sous-catégorie strictement pleine de $C^\wedge$ formée des $F : C^\circ \longrightarrow \mathrm{Ens}$ avec $\operatorname{card} F(x) \leqslant \pi$ pour tout $x$ dans $C$ (i.e. $F$ se factorise par $\mathrm{Ens}(\pi)$), et par $C^\wedge(\pi)_0$ une

[44]**N.B.** Toutes les conditions des filtrations cardinales sont vérifiées à l'exclusion, quand $\pi \geqslant \pi_0$, de celle de la majoration de cardinaux $\operatorname{card} I \leqslant \pi'^{\pi}$ condition c).

[45]où $I_0$, $I'_0$ sont des sous-catégories réduites de $I$, $I'$ telles que $I_0 \hookrightarrow I$, $I'_0 \hookrightarrow I'$ soient des équivalences `[Grothendieck a biffé l'indice 0 de I' dans 4.5.9.1]`.

[46]On ne le prouve que si $\pi \geqslant \pi_1$.

[47]Donner énonce commun avec 4.5.11, et prouver d'abord 4.5.11.

[page 123]

sous-catégorie réduite exhaustive,

$$\text{(4.5.10.2)} \qquad \operatorname{card} C^{\wedge}(\pi)_0 \ \leqslant\ 2^{\pi} \ ,$$

d'où résulte (4.5.10.1), puisque pour $\pi \geqslant \pi'$, $\mathrm{Filt}^{\pi}$ est une sous-catégorie pleine de $C^{\wedge}(\pi')$. Pour établir (4.5.10.2), on note que l'ensemble des classes à isomorphie près de $\mathrm{Ens}(\pi')$ s'identifie à l'ensemble des cardinaux $\leqslant \pi'$, lequel ensemble est de cardinal $\leqslant \pi'$. Remplaçant $\mathrm{Ens}(\pi)$ par $\mathrm{Ens}(\pi')_0$, $C$ par $C_0$, on doit majorer $\operatorname{card} \mathrm{Fl}(\underline{\mathrm{Hom}}(C_0, \mathrm{Ens}(\pi')_0))$. Or $\mathrm{Ob}\,\underline{\mathrm{Hom}}(C_0, \mathrm{Ens}(\pi')_0)$ est contenu dans l'ensemble des applications de $\mathrm{Fl}\, C_0$ dans $\mathrm{Fl}(\mathrm{Ens}(\pi')_0)$, le premier est majoré par $\pi_1$, le deuxième par $\pi^{\pi} \times \pi \times \pi = \pi^{2\pi} = \pi^{\pi} = 2^{\pi}$ (**N.B.** $\pi < 2^{\pi}$, d'où $\pi^{\pi} \leqslant (2^{\pi})^{\pi} = 2^{\pi^2} = 2^{\pi}$), donc $\mathrm{Ob}\,\underline{\mathrm{Hom}}$ majoré par $(2^{\pi})^{\pi_1} = 2^{\pi\pi_1} = 2^{\pi}$. D'autre part, si $F$, $G$ sont dans $\underline{\mathrm{Hom}}(C_0, \mathrm{Ens}(\pi_0))$, $\mathrm{Hom}(F, G)$ est majoré par $(\pi^{\pi})^{\pi_1} = \pi^{\pi} = 2^{\pi}$, donc $\mathrm{Fl}\,\underline{\mathrm{Hom}}$ est majoré par $2^{\pi} \times 2^{\pi} \times 2^{\pi}$, q.e.d.

**Corollaire 4.5.11.** *Soit $F \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{Filt}^{\pi}$, $F' \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{Filt}^{\pi'}$, avec $\pi' \geqslant \pi \geqslant \pi_1$. Alors*

$$\text{(4.5.11.1)} \qquad \operatorname{card} \mathrm{Hom}(F, F') \ \leqslant\ \pi'^{\pi} \ .$$

[page 124]

C'est essentiellement la même démonstration, légèrement plus simple. (On aurait dû commencer par là.)

**Corollaire 4.5.12.** *Si $\pi' \geqslant \pi \geqslant \pi_1$, on a pour $x \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{M}_{\pi'}$*

$$\text{(4.5.12)} \qquad \operatorname{card} (\mathcal{M}_{\pi}/x)_0 \ \leqslant\ \pi'^{(\pi^{\pi_0})} \ .$$

En effet,

$$\operatorname{card} \mathrm{Ob}\, (\mathcal{M}_{\pi}/x)_0 \ \overset{\text{par 4.5.11}}{\leqslant}\ \underbrace{\underbrace{\operatorname{card} \mathrm{Ob}\, (\mathcal{M}_{\pi})_0}_{\leqslant 2^{(\pi^{\pi_0})} \text{par 4.5.10}} \times (\pi'^{\pi_0})^{\pi^{\pi_0}}}_{= \pi'^{(\pi^{\pi_0})}} \ ,$$

i.e.

$$\operatorname{card} \mathrm{Ob}\, (\mathcal{M}_{\pi}/x)_0 \ \leqslant\ \pi'^{(\pi^{\pi_0})} \ ,$$

d'où

$$\operatorname{card} \mathrm{Fl}(\mathcal{M}_{\pi}/x)_0 \ \leqslant\ \pi'^{(\pi^{\pi_0})} \times \pi'^{(\pi^{\pi_0})} \times (\pi'^{\pi_0})^{(\pi^{\pi_0})} \ \leqslant\ \pi'^{(\pi^{\pi_0})} \ .$$

Cela donne donc (revenant à 4.5.9.1)

$$\operatorname{card} I_0 \ \leqslant\ \pi'^{(\pi^{\pi_0})} \ .$$

D'autre part, $I'$ peut se définir en termes de $I_0$ comme l'ensemble des sous-catégories de $I_0$ qui sont de cardinal $\leqslant \pi$, donc leur nombre est majoré par $(\operatorname{card} I_0)^{\pi} \ \leqslant\ (\pi'^{\pi^{\pi_0}})^{\pi} = \pi'^{\pi\pi^{\pi_0}} = \pi'^{(\pi^{\pi_0})}$.

Mais ce n'est pas tout à fait la majoration exigée, puisque

$$\pi'^{\pi} \leqslant \pi'^{(\pi^{\pi_0})} \qquad ({}^{48}),$$

et qu'il est possible, a priori, que l'inégalité

[48] **N.B.** On a égalité si on a $\pi' = 2^{c'}$ avec $c' \geqslant \pi^{\pi_0}$, soit $\pi = 2^{c}$ avec $c \geqslant \pi_0$.

`[page 125]`

soit stricte ! Apparemment, les “majorations”

$$\mathcal{M}_\pi \subset \mathrm{Filt}^{\pi^{\pi_0}} , \qquad \mathcal{M}_{\pi'} \subset \mathrm{Filt}^{\pi'^{\pi_0}}$$

sont trop grossières. Aussi il s'agit de mieux appréhender les catégories $\mathcal{M}_\pi$, pour $\pi \geqslant \pi_0$ ([49]). Je vais hasarder une

**Proposition 4.5.13.** *Les hypothèses et notations sont celles de 4.5.9. Soit $\pi$ un cardinal $\geqslant \pi_0$, et soit $x \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{M}$. Considérons les conditions :*

*a) Il existe une catégorie $I$, avec* $\mathrm{card}\,\mathrm{Fl}\,I \leqslant \pi$, *et un foncteur $i \longmapsto x_i : I \longrightarrow C$, tel que $x$ soit isomorphe à $\varinjlim x_i$.*

*a′) Comme a), avec $I$ filtrante.*

*a″) Comme a), avec $I$ ordonnée filtrante.*

*b) Il existe un foncteur* cofinal *$I \longrightarrow C/x$, avec* $\mathrm{card}\,\mathrm{Fl}\,I \leqslant \pi$.

*b′) La catégorie filtrante $C/x$ est “essentiellement de cardinal $\leqslant \pi$”, i.e. il existe une catégorie ordonnée* `[non, cf. b″)]` filtrante *$I$,* $\mathrm{card}\,\mathrm{Fl}\,I \leqslant \pi$, *et un foncteur cofinal $I \longrightarrow C/x$.*

*b″) Comme b′), avec de plus $I$ ordonnée.*

*c) Il existe une famille de flèches $(u_\alpha)_{\alpha \in A}$, $x_\alpha \longrightarrow x$, épimorphique stricte, indexée par un ensemble $A$ tel que* $\mathrm{card}\,A \leqslant \pi$.

*d) On a $x \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{M}_\pi$, i.e. $x$ est $\pi$-accessible dans $\mathcal{M}$.*

`[page 126]`

*Ceci posé :*

1° *Les six premières conditions a, a′, a″, b, b′, b″ sont équivalentes, soit $P(\pi)$, et impliquent les deux dernières,*

$$\begin{array}{ccc} & P(\pi) & \\ \swarrow\!\!\swarrow & & \searrow\!\!\searrow \\ c & & d\,. \end{array}$$

*Si $\pi \geqslant \pi_1$, alors $P(\pi)$ est équivalente à c.*

2° *Soit* $\mathrm{Filt}'^{\pi} \subset \mathcal{M}$ *la sous-catégorie strictement pleine de $\mathcal{M}$ formée des objets qui satisfont la condition $P(\pi)$ ci-dessus, et* $\mathrm{Filt}^{\pi}$ *la sous-catégorie strictement pleine définie dans 4.5.3 (p. 109). On a alors*

$$\mathrm{Filt}^{\pi} \subset \mathrm{Filt}'^{\pi} \subset \mathcal{M}_\pi , \tag{4.5.13.1}$$

*et pour qu'on ait égalité des trois membres, il suffit qu'on ait $\pi^{\pi_0} = \pi$. (Cf. prop. 4.5.6, page 116). De plus,* $\mathrm{Filt}'^{\pi}$ *est stable dans $\mathcal{M}$ par* sommes *de cardinal $\leqslant \pi$.*

3° *Les conditions suivantes sur $C$, $\pi_0$, $\pi$ sont équivalentes.*

[49] Mais on peut utiliser 4.5.10, 4.5.11 pour conclure que pour $x \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{M}_{\pi'} \subset \mathrm{Ob}\,\mathrm{Filt}^{\pi'^{\pi_0}}$, on a $\mathrm{card}\,\mathrm{Fl}(C_0/x) \leqslant (\pi'^{\pi_0})^{\pi_0} = \pi'^{\pi_0}$, on aura donc $x = \varinjlim_J x_j$ ($x_j \in \mathrm{Ob}\,C$, $\varinjlim$ filtrante, $\mathrm{card}\,\mathrm{Fl}\,J \leqslant \pi'^{\pi_0}$), et en introduisant l'ensemble $I$ des sous-catégories $J' \subset J$ qui sont de cardinal $\leqslant \pi$, et posant $x_{J'} = \varinjlim_{j \in J'} x_j$, on trouve $x = \varinjlim_{J' \in I} x_{J'}$, où cette fois $I$ est un *ensemble ordonné* grand devant $\pi$, les $x_{J'} \in \mathcal{M}_\pi$, et $\mathrm{card}\,I \leqslant (\mathrm{card}\,J)^\pi \leqslant (\pi'^{\pi_0})^\pi = \pi'^{\pi\pi_0} = \pi'^{\pi}$, c'est la bonne majoration !

*1)* $\mathrm{Filt}'^{\pi}$ *est stable dans* $\mathcal{M}$ *par* $\varinjlim$ *de cardinal* $\leqslant \pi$.

*1′)* $\mathrm{Filt}'^{\pi}$ *est stable par conoyaux de double flèches.*

*2) Tout objet* $x$ *de* $\mathcal{M}$ *est de la forme* $\varinjlim_{I} x_i$, *où* $x_i$ *dans* $\mathrm{Filt}'^{\pi}$, *I grande devant* $\pi$.

*3) La condition d) de 1°) implique* $P(\pi)$ *(donc lui est équivalente), i.e. on a*

$$\mathcal{M}_{\pi} = \mathrm{Filt}'^{\pi}.$$

[page 127]

*Ces conditions sont satisfaites dans les trois cas suivants :*

*A)* $\pi^{\pi_0} = \pi$ *(pour mémoire, c'est contenu dans 2°).*

*B) Les familles épimorphiques strictes dans* $\mathcal{M}$ *sont épimorphiques strictes universelles.*

*C) Les limites inductives filtrantes dans* $\mathcal{M}$ *commutent au changement de base (ce qui est le cas notamment si les* $\varinjlim$ *filtrantes sont exactes à gauche)* ([50]).

**Remarque.** La filtration de $\mathcal{M}$ pour les $\mathrm{Filt}'^{\pi}$ n'est autre que celle envisagée dans SGA 4 I 9.13, où on fait de plus l'hypothèse B) sur $\mathcal{M}$, qui après-coup n'était plus tellement de mon goût. Toujours est-il que d'après (4.5.13.1), cette filtration se rapproche plus de la “bonne” filtration par les $\mathcal{M}_{\pi}$, que celle que j'avais eu encore naguère tendance à lui préférer, celle par les $\mathrm{Filt}^{\pi}$. Elle a d'ailleurs sur cette dernière l'avantage, dans le cas envisagé B), d'être une filtration cardinale (ce qui n'est pas nécessairement le cas pour $\mathrm{Filt}^{\pi}$, du moins s'il existe des cardinaux infinis $\pi \geqslant \pi_0$ avec $\pi^{\pi_0} \neq \pi$). Je soupçonne maintenant qu'en général (et s'il existe des cardinaux infinis $\pi > \pi_0$ tels que $\pi^{\pi_0} \neq \pi$), en dehors des conditions A) B) C), la filtration par les $(\mathrm{Filt}'^{\pi})$ n'est *pas* une

[page 128]

filtration cardinale. En tous cas, 4.5.6 et la présente proposition, 3°, montrent que si soit $(\mathrm{Filt}^{\pi})_{\pi \geqslant \pi_2}$, soit $(\mathrm{Filt}'^{\pi})_{\pi \geqslant \pi_2}$ est une filtration cardinale ($\pi_2$ étant un cardinal donné $\geqslant \pi_1$), alors elle coïncide avec la filtration par les $\mathcal{M}_{\pi}$. Donc apparemment, dans tous les cas où je sais construire une filtration cardinale, sur un paratopos du moins (i.e. sur une catégorie $\mathcal{M}$ stable par petites $\varinjlim$, et dont tous les objets sont accessibles – l'existence d'une filtration cardinale impliquant de plus celle d'une petite sous-catégorie strictement génératrice …), celle-ci n'est autre que celle par les $\mathcal{M}_{\pi}$ – chose dont je ne m'étais par aperçu en rédigeant SGA 4 I 9.

Démonstration de 4.5.13.

*Prouvons 1°.* On a les implications tautologiques

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{b}'' \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \mathrm{b}' \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \mathrm{b} \arrow[d, Rightarrow] \\
\mathrm{a}'' \arrow[r, Rightarrow] & \mathrm{a}' \arrow[r, Rightarrow] & \mathrm{a} ,
\end{tikzcd} \qquad ([51]) ,$$

et pour prouver l'équivalence de ces six conditions, il suffit de prouver

$$\mathrm{a} \Longrightarrow \mathrm{b}'' .$$

[50]Je suppose que cette condition revient à la même condition sur $C$, pour les $\varinjlim$ filtrantes de cardinal $\leqslant \pi$.

[51]compte tenu que $C$ est strictement génératrice dans $\mathcal{M}$, donc $x \simeq \varinjlim_{i \in C/x} x_i$.

[page 129]

Si on a

$$x \;\simeq\; \varinjlim_{I} x_i\,, \qquad \operatorname{card}\mathrm{Fl}\,I \;\leqslant\; \pi\,,$$

soit $I'$ l'ensemble des *sous-diagrammes* $J \subset I$ finis de $I$, ordonné par inclusion, donc $I'$ est un ensemble ordonné filtrant, et du fait que $C$ est stable par $\varinjlim$ finies, on trouve un foncteur

$$J \longmapsto x_J \;=\; \varinjlim_{i\in J} x_i \;:\; I' \longrightarrow C\,,$$

et on aura

$$x \;\simeq\; \varinjlim_{J\in I'} x_J\,.$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \operatorname{card} I' \;&=\; \operatorname{card}\mathfrak{P}_f(\;\underbrace{\mathrm{Fl}(I)}_{\text{de card}\,\leqslant\,\pi}\;) \\ &\leqslant\; \pi+\pi^2+\;\cdots\;+\pi^n+\;\ldots \\ &\leqslant\; \pi\aleph_0 \;=\; \pi\,, \end{aligned}$$

q.e.d. Pour établir 1°, il reste à établir

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & P(\pi) \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \\ \mathrm{c} & & \mathrm{d}\,, \end{tikzcd}$$

et l'implication inverse c $\Longrightarrow P(\pi)$ quand $\pi \geqslant \pi_1$. Mais $P(\pi) \Longrightarrow$ c est une tautologie, et $P(\pi) \Longrightarrow$ d puisque $\mathcal{M}_\pi$ est stable par $\varinjlim$ de cardinal $\leqslant \pi$. Reste à prouver que c $\Longrightarrow P(\pi)$ si $\pi \geqslant \pi_1$.

[page 130]

Supposons donc qu'on ait une famille épimorphique stricte

$$x_\alpha \longrightarrow x \qquad (\alpha\in A,\, \operatorname{card} A \leqslant \pi)\,,$$

cela signifie donc que $x$ est limite inductive d'un système inductif indexé par la catégorie $B$ ayant comme ensemble d'objets $A \amalg (A\times A)$, les flèches non-identiques étant représentées par les flèches canoniques

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & x_\alpha \times_x x_\beta \arrow[dl, "p_{\alpha,\beta}"'] \arrow[dr, "q_{\alpha,\beta}"] & \\ x_\alpha & & x_\beta\,. \end{tikzcd}$$

(**N.B.** $B$ n'est par une catégorie ordonnée, car pour l'objet $(\alpha,\alpha)$, représenté par $x_\alpha\times_x x_\alpha$, il y a *deux* flèches dans l'objet $\alpha$, représenté par $x_\alpha$. Mais on a évidemment $\operatorname{card}\mathrm{Fl}(B) \leqslant \pi$.) Si on savait que $C$ est stable par produits binaires et par passage à des sous-objets (ici les $x_\alpha \times_x x_\beta \;\subset\; x_\alpha \times x_\beta$), on aurait prouvé la condition a). À défaut, utilisons encore le fait que $C$ est génératrice par épimorphismes (même stricts) et choisissons pour tout couple $(\alpha,\beta)$ un ensemble épimorphique de flèches :

$$\underbrace{x_{\alpha,\beta,\gamma}}_{\in \operatorname{Ob} C_0} \xrightarrow{u_{\alpha,\beta,\gamma}} x_\alpha \times_x x_\beta\,,$$

où $C_0$ est une sous-catégorie réduite exhaustive de $C$. La flèche $u_{\alpha,\beta,\gamma}$ est connue quand on connaît les composés

[page 131]

$$\begin{tikzcd} & x_\alpha \\ x_{\alpha,\beta,\gamma} \arrow[ur, "v_{\alpha,\beta,\gamma}"] \arrow[dr, "w_{\alpha,\beta,\gamma}"'] & \\ & x_\beta \end{tikzcd} ,$$

donc pour $x_{\alpha,\beta,\gamma} \in \operatorname{Ob} C_0$ fixé, les choix possibles pour $u_{\alpha,\beta,\gamma}$ sont de cardinal majoré par $\pi_1\pi_1 = \pi_1$, de plus on a $\operatorname{card} \operatorname{Ob} C_0 \leqslant \pi_1$, donc le nombre total des flèches $v_{\alpha,\beta,\gamma}$, $w_{\alpha,\beta,\gamma}$ (pour $\alpha$, $\beta$ fixés) est majoré par $\pi_1 \cdot \pi_1 = \pi_1$. Donc le nombre total des flèches $u_{\alpha,\beta,\gamma}$, pour $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ variables, est majoré par $\pi \cdot \pi_1 = \pi$ (si $\pi \geqslant \pi_1$). Donc $x$ est représenté par une catégorie $I$ ayant comme objets l'ensemble somme de $A$ et de l'ensemble des indices triples $\alpha, \beta, \gamma$, et pour chaque tel indice, exactement deux flèches $v_{\alpha,\beta,\gamma}$, $w_{\alpha,\beta,\gamma}$ non identiques de source cet objet, et allant respectivement dans $x_\alpha$, $x_\beta$. On a donc $\operatorname{card} \operatorname{Fl} I \leqslant \pi$, et on a un foncteur $I \longrightarrow C$, $\alpha \longmapsto x_\alpha$, $(\alpha, \beta, \gamma) \longmapsto x_{\alpha,\beta,\gamma}$, tel que $x = \varinjlim_{i \in I} x_i$. Cela achève la démonstration de 1°).

[page 132]

*Prouvons 2°.* La première inclusion (4.5.13.1) est tautologique, la deuxième ne fait qu'exprimer $P(\pi) \Longrightarrow$ d. Le fait que $\pi^{\pi_0} = \pi$ implique l'égalité des membres extrêmes est un rappel de 4.5.6. Reste à prouver que $\mathrm{Filt}'^{\pi}$ est stable dans $\mathcal{M}$ par sommes de cardinal $\leqslant \pi$. Mais si $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ est une famille d'objets de $\mathrm{Filt}'^{\pi}$, avec $\operatorname{card} A \leqslant \pi$, et si $x = \coprod_{\alpha \in A} x_\alpha$, prenant pour tout $x_\alpha$ un foncteur $\varphi_\alpha : I_\alpha \longrightarrow C$, avec $\operatorname{card} \operatorname{Fl} I_\alpha \leqslant \pi$, tel que $x_\alpha$ soit la $\varinjlim$ dans $\mathcal{M}$ de ce foncteur, on trouve que $x$ est $\varinjlim$ du foncteur $\varphi : I \longrightarrow C$ défini par les $\varphi_\alpha$, où $I = \coprod_\alpha I_\alpha$ (somme dans Cat). Il est évident que $\operatorname{card} \operatorname{Fl}(I) \leqslant \pi \cdot \pi = \pi$, ce qui achève de prouver 2°.

*Prouvons 3°.* On a les implications tautologiques $1 \Longrightarrow 1'$, et $1' \Longrightarrow 1$, puisque $\mathrm{Filt}'^{\pi}$ est stable par sommes de cardinal $\leqslant \pi$. Donc $1 \Longleftrightarrow 1'$, et implique que pour tout $x$ dans $\mathcal{M}$,

[page 133]

$I = \mathrm{Filt}'^{\pi}/x$ est stable par $\varinjlim$ de cardinal $\leqslant \pi$, donc est grand devant $\pi$. Comme $x \simeq \varinjlim_{i \in I} x_i$, cela prouve que $1 \Longrightarrow 2$. L'implication $2 \Longrightarrow 3$ est standard, et résulte de $\mathrm{Filt}'^{\pi} \subset \mathcal{M}_\pi$, je vais expliciter dans un

**Lemme 4.5.14.** *Soient $\mathcal{M}$ une catégorie stable par petites $\varinjlim$, $\pi$ un cardinal infini, $\mathcal{M}_0$ une sous-catégorie strictement pleine de $\mathcal{M}$. Considérons les conditions*

*a) $\mathcal{M}_0$ est une sous-catégorie strictement génératrice, et stable dans $\mathcal{M}$ par $\varinjlim$ de cardinal $\leqslant \pi$.*

*b) Pour tout objet de $\mathcal{M}$, on a un isomorphisme*

$$x \simeq \varinjlim_{i \in I} x_i ,$$

*les $x_i$ dans $\mathcal{M}_0$, $I$ grande devant $\pi$.*

*b′) Comme b), avec $I$ catégorie* ordonnée.

*c) $\mathcal{M}_\pi \subset \mathcal{M}_0$ (où $\mathcal{M}_\pi$ est la sous-catégorie strictement pleine de $\mathcal{M}$ formée des objets $\pi$-accessibles).*

*On a donc les implications*

$$a \implies b \iff b' \implies c\,,$$

*et si on suppose $\mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M}_\pi$, et $\mathcal{M}_\pi$ sous-catégorie strictement génératrice de $\mathcal{M}$, alors les quatre conditions $a$, $b$, $b'$, $c$ sont équivalentes, et équivalent à $\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}_\pi$* ([52]).

`[page 134]`

Enfin (revenant à la démonstration de 4.5.13, 3°), l'implication 3) $\implies$ 1) provient du fait que $\mathcal{M}_\pi$ est stable par $\varinjlim$ de cardinal $\leqslant \pi$.

Reste à prouver que ces conditions, i.e. la stabilité de $\mathrm{Filt}'^{\pi}$ par conoyaux de doubles flèches, est satisfaite dans les cas A) B) C), le cas A) étant d'ailleurs déjà connu. Le cas B) résulte immédiatement de la transitivité des familles épimorphiques strictes universelles, et c'est d'ailleurs aussi contenu explicitement (stabilité de $\mathrm{Filt}'^{\pi}$ par $\varinjlim$ de cardinal $\leqslant \pi$) dans SGA 4 I 9.13 (sinon dans l'énoncé, du moins c'est signalé dans la démonstration). En rédigeant SGA 4 I 9, je savais donc qu'on a $\mathcal{M}_\pi \subset \mathrm{Filt}'^{\pi}$ pour tout $\pi$, mais l'inclusion, plus évidente pourtant dans le cas d'espèce, $\mathrm{Filt}'^{\pi} \subset \mathcal{M}_\pi$ (quand on suppose les objets de $C$ $\pi_1$-accessibles) m'avait apparemment échappé ?

Reste à traiter le cas C). (J'ai l'impression qu'il est un peu plus général que le cas B), i.e. que la condition B) sur $\mathcal{M}$ implique C), mais non inversement. Ainsi, la condition C) est vérifiée dès que $\mathcal{M}$ correspond à une espèce de structure algébrique définie en

`[page 135]`

termes de $\varprojlim$ *finies,* i.e. quand $\mathcal{M}$ est de la forme $\mathrm{Ind}(C)$, $C$ stable par $\varprojlim$ *finies*, alors que je doute que la condition B) soit toujours satisfaite pour ces catégories. Par exemple dans la catégorie Cat (qui est un paratopos de cette espèce), les $\varinjlim$ filtrantes sont exactes à gauche, mais je ne crois pas que les familles épimorphiques stricts soient universelles. Prenons p.ex. deux homomorphismes de groupes $G_0 \xrightarrow{u_0} G$, $G_1 \xrightarrow{u_1} G$ tels que $G_0 * G_1 \longrightarrow G$ soit surjectif, alors cette famille à deux éléments est épimorphique stricte dans Gr et dans Cat ([53]), mais n'est pas forcément épimorphique stricte universelle, même si p.ex. $G_0 = G_1 = H$, $G = H \times H$, et $u_0, u_1$ sont des injections $H \rightrightarrows H \times H$, données par $u_0(h) = (h, 1)$, et $u_1(h) = (1, h)$. Si je prends l'application diagonale $H \longrightarrow H \times H$, les images inverses de $u_0$, $u_1$ sont le même objet de $\mathcal{M}/H$, savoir $e \longrightarrow H$, et cette famille n'est épimorphique stricte que si $H$ est le groupe unité.)

Le cas C) va résulter du résultat plus précis :

**Corollaire 4.5.15.** *Sous les conditions générales de 4.5.13, supposons que dans $\mathcal{M}$ les* $\varinjlim$

`[page 136]`

filtrantes *commutent au changement de base (p.ex. les* $\varinjlim$ *filtrantes sont exactes). Alors pour tout $\pi \geqslant \pi_1$, $\mathrm{Filt}'^{\pi}$ est formée des $x \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{M}$ satisfaisant la condition suivante.*

[52] cf. démonstration de proposition 4.5.6, 4 $\implies$ 5, page 117.

[53] !, c'est *faux* en général, mais vrai dans le cas particulier plus bas.

*c′) Il existe une famille de flèches $(u_\alpha)_{\alpha\in A}$, $u_\alpha : x_\alpha \longrightarrow x$, dans $\mathcal{M}$, qui est* épimorphique stricte universelle *(i.e. couvrante pour la topologie canonique de $\mathcal{M}$), avec $x_\alpha \in \mathrm{Ob}\, C$ $\forall\ \alpha \in A$, et* $\mathrm{card}\, A \leqslant \pi$.

Démonstration : il faut prouver que cette condition équivaut à la condition c) de 4.5.13 1°). Comme on a c′ $\Longrightarrow$ c trivialement, il reste à montrer que c $\Longrightarrow$ c′. Mais on a vu dans 4.5.13 1°) que c implique a″, i.e. qu'on a un isomorphisme

$$x \;=\; \varinjlim_{i\in I} x_i \ ,$$

les $x_i$ dans $C$, et $I$ ensemble *ordonné filtrant,* avec $\mathrm{card}\, I \leqslant \pi$. Il reste à voir que si $x$ dans $\mathcal{M}$ est une limite inductive *filtrante* d'objets $x_i$, alors l'ensemble des flèches $x_i \longrightarrow x$ est épimorphique stricte *universelle.* Or cela est immédiat, car pour $x' \longrightarrow x$, on a $x' = \varinjlim_i x'_i$ (par hypothèse C), où $x'_i = x' \times_x x_i$, donc la famille $x'_i \longrightarrow x'$ est épimorphique stricte, q.e.d.

Prouvons maintenant que dans le cas C, la condition de 3°, 1 est satisfaite, i.e. que $\mathrm{Filt}'^{\pi}$ est stable par $\varinjlim$ de cardinal $\leqslant \pi$. Cela

[page 137]

résulte aussitôt du

**Corollaire 4.5.16.** (de 4.5.15). *Sous les conditions de 4.5.15 (i.e. la condition C) de 4.5.13, 3°), soit $x$ un objet de $\mathcal{M}$, et supposons qu'il existe une famille* épimorphique <u>universelle</u> $(x_\alpha \longrightarrow x)_{\alpha\in A}$ *de flèches de $\mathcal{M}$, avec $x_\alpha \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{Filt}'^{\pi}$ pour tout $\alpha \in A$, et* $\mathrm{card}\, A \leqslant \pi$. *Alors $x \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{Filt}'^{\pi}$.*

En effet, l'hypothèse sur $x_\alpha$ équivaut, en vertu de 4.5.15, à l'existence d'une famille épimorphique stricte universelle de flèches $(x_{\alpha\beta} \longrightarrow x_\alpha)_{\beta\in B_\alpha}$, avec $\mathrm{card}\, B_\alpha \leqslant \pi$ et les $x_{\alpha\beta}$ dans $C$. Soit $B = \coprod_{\alpha\in A} B_\alpha$, on a alors $\mathrm{card}\, B \leqslant \pi^2 = \pi$, et d'autre part, la famille des flèches composées $x_{\alpha\beta} \longrightarrow x_\alpha \longrightarrow x$ indexée par $B$ est épimorphique stricte universelle (par transitivité de ce type de familles), donc $x \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{Filt}'^{\pi}$, q.e.d.

Avec tout ça, on n'a toujours pas donné de caractérisation de $\mathcal{M}_\pi$ lui-même, qui est meilleure que $\mathrm{Filt}^{\pi}$ et $\mathrm{Filt}'^{\pi}$ du point de vue catégorique, car seuls les $\mathcal{M}_\pi$ définissent une filtration cardinale, et de plus ils ont les propriétés de stabilité désirables dans ce

[page 138]

contexte, pour les $\varinjlim$ de cardinal $\leqslant \pi$. Le seul critère non tautologique que j'arrive à dégager dans le cas général (pour tout $\pi \geqslant \pi_0$, et sans hypothèse d'exactitude supplémentaire sur $\mathcal{M}$) est le suivant, beaucoup moins "explicite" ou "calculatoire" que les critères très concrets pour $\mathrm{Filt}^{\pi}$ et pour $\mathrm{Filt}'^{\pi}$ :

**Proposition 4.5.17.** *Soit $\pi$ un cardinal $\geqslant \pi_0$. Alors $\mathcal{M}_\pi$ est égal à la plus petite sous-catégorie strictement pleine de $\mathcal{M}$, contenant $C$, et stable par $\varinjlim$ de cardinal $\leqslant \pi$.* (Il est important de noter qu'il *ne suffit pas* de dire : stable par $\varinjlim_I$, avec *$I$ grande devant $\pi_0$,* et $\mathrm{card}\, I \leqslant \pi$. On trouve alors $\mathrm{Filt}^{\pi}$, qui risque d'être une catégorie strictement plus petite que $\mathcal{M}_\pi$. Ce n'est pas non plus la catégorie des $\varinjlim_I x_i$, avec $x_i \in C\ \forall\ i \in \mathrm{Ob}\, I$, et $\mathrm{card}\,\mathrm{Fl}\, I \leqslant \pi$ – puisque cette catégorie-là est $\mathrm{Filt}'^{\pi}$.)

Démonstration. Soit $\mathcal{M}'$ la catégorie de l'énoncé, on a donc $\mathcal{M}' \subset \mathcal{M}_\pi$, puisque $\mathcal{M}_\pi$ contient $C$ et est stable par les $\varinjlim$ de cardinal $\leqslant \pi$. Inversement, le lemme 4.5.14, a $\Longrightarrow$ c.

[page 139]

## 4.6 Caractérisation des catégories paratopos (démonstration de 4.3.6)

Il est temps de revenir à la démonstration du théorème 4.3.6 (p. 70-71), celle que j'avais donnée étant incomplète (et erronée – j'affirmais que $(\mathrm{Filt}^{\pi})_{\pi \geqslant \pi_0}$ est une filtration cardinale, ce qui est faux si on n'admet que $\pi^{\pi_0} = \pi$ pour tout $\pi \geqslant \pi_1$).

On avait vu l'équivalence des conditions a, a′, b, soit PTA. Je vais achever la démonstration par le schéma logique

$$(*) \qquad \mathrm{PTA} \Longrightarrow \mathrm{d)} \Longrightarrow \mathrm{c)} \Longrightarrow \mathrm{PTA}\ .$$

Prouvons PTA $\Longrightarrow$ d), i.e. que si $\mathcal{M}$ est un pseudo-topos accessible, alors existe un cardinal infini $\pi_0$, et une petite catégorie $C_0$ stable par $\varinjlim$ de cardinal $\leqslant \pi_0$, et une équivalence de catégories

$$\mathcal{M} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ind}'_{\pi_0}(C_0)\ . \tag{4.6.1}$$

Plus précisément, on a ceci :

**Proposition 4.6.1.** *Soit $\mathcal{M}$ un paratopos, i.e. une $\mathfrak{U}$-catégorie $\mathcal{M}$ stable par petites $\varinjlim$, admettant une sous-catégorie pleine génératrice $S$ équivalent à une petite catégorie, formée d'objets accessibles de $\mathcal{M}$. Soit $\pi_0$ un cardinal tel que les objets de $S$ soient $\pi_0$-accessibles (i.e. $S \subset \mathcal{M}_{\pi_0}$), et soit $C$ la plus petite sous-catégorie strictement pleine de $\mathcal{M}$, contenant $S$ et stable par $\varinjlim$ de cardinal $\leqslant \pi_0$. Alors*

*1°) $C$ est équivalente à une petite catégorie.*

[page 140]

*2°) $C = \mathcal{M}_{\pi_0}$, sous-catégorie strictement pleine de $\mathcal{M}$ formée des objets $\pi_0$-accessibles.*

*3°) Le foncteur canonique*

$$\mathrm{Ind}'_{\pi_0}(C) \xrightarrow[\sim]{[\varphi]} \mathcal{M}$$

*(défini à isomorphisme unique près par la condition que son composé avec l'inclusion $C \hookrightarrow \mathrm{Ind}'_{\pi_0}(C)$ soit isomorphe à l'inclusion $C \longrightarrow \mathcal{M}$, et que $\varphi$ commute aux petites $\varinjlim$, ou encore aux $\varinjlim$ filtrantes grandes devant $\pi_0$ – cf. 4.4.16, page 101) est une équivalence de catégories* ([54]).

Démonstration. 1°) On va construire $C$ par induction transfinie, en posant

$$\begin{aligned}
C_0 &= \text{sous-catégorie strictement pleine de } \mathcal{M} \text{ engendrée par } S.\\
C_{\alpha+1} &= \text{sous-catégorie strictement pleine de } \mathcal{M} \text{ engendrée par les } \varinjlim_{I} \text{ dans}\\
&\quad\ \mathcal{M} \text{ d'objets de } C_\alpha, \text{ avec } I \text{ catégorie telle que } \operatorname{card} \mathrm{Fl}\, I \leqslant \pi_0.\\
C_\alpha &= \textstyle\bigcup_{\alpha'<\alpha} C_{\alpha'} \ \text{ si } \alpha \text{ est un ordinal limite.}
\end{aligned}$$

Cela définit de façon unique les $C_\alpha$ (pour tout petit cardinal $\alpha$). Par la définition de $C$, on voit par induction transfinie que les $C_\alpha$ sont contenues dans $C$. Soit $\alpha_0$

[54] donc on a aussi $\mathrm{Ind}'_{\pi_0}(C_0) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}$, où $C_0$ est une *petite* catégorie équivalente à $C$.

[page 141]

le premier ordinal tel que card $\alpha_0 > \pi_0$, donc l'ensemble $I_{\alpha_0}$ des cardinaux $\alpha < \alpha_0$ est grand devant $\pi_0$. Je dis qu'on a $C_{\alpha_0} = C$. Pour ceci, il suffit de voir que $C_{\alpha_0}$ est stable par $\varinjlim$ de cardinal $\leqslant \pi$. Mais si $I$ est une catégorie telle que $\mathrm{card}\,\mathrm{Fl}\, I \leqslant \pi_0$, et $\varphi : I \longrightarrow C_{\alpha_0} = \bigcup_{\alpha<\alpha_0} C_\alpha$ un foncteur, alors la définition de $\alpha_0$ implique que $\varphi$ se factorise en $\varphi_\alpha : I \longrightarrow C_\alpha$, avec $\alpha < \alpha_0$ ([55]). Donc $\varinjlim \varphi \in \mathrm{Ob}\, C_{\alpha+1} \subset \mathrm{Ob}\, C_{\alpha_0}$, ce qui montre la stabilité requise.

Pour voir que $C$ est équivalente à une petite catégorie, il suffit de le voir pour les $C_\alpha$, en procédant par induction transfinie. Cela résulte du lemme suivant, immédiat :

**Lemme 4.6.1.1.**

1°) *La limite inductive $C$ d'un système inductive filtrant $(C_i)_{i\in I}$ de catégories $C_i$ équivalentes à des petites catégories est équivalente à une petite catégorie. Si* card réd $(C_i) \leqslant \pi$ *pour tout $i$, et* card $I \leqslant \pi$, *alors* card réd $(C) \leqslant \pi$ *($\pi$ étant un*

[page 142]

*cardinal infini). Ici, pour toute catégorie $\mathcal{A}$, je pose* $\mathrm{card}\,\mathcal{A} = \mathrm{card}\,\mathrm{Fl}\,\mathcal{A}$, card réd $(\mathcal{A}) = \mathrm{card}\,(\mathcal{A}_0)$, *où $\mathcal{A}_0$ est une catégorie réduite équivalente à $\mathcal{A}$.*

2°) *Soit $C_0 \subset \mathcal{M}$ une sous-catégorie pleine d'une catégorie $\mathcal{M}$, $\pi_0$ un cardinal infini, et soit $C_0'$ la sous-catégorie strictement pleine de $\mathcal{M}$ engendrée par les limites inductives dans $\mathcal{M}$ (représentables dans $\mathcal{M}$) de foncteurs $I \longrightarrow C_0$, avec $I$ catégorie telle que* card $I \leqslant \pi_0$. *Si $C_0$ est équivalente à une petite catégorie, il en est de même de $C_0'$. Plus précisément, si* card réd $(C_0) \leqslant \pi_1$, *$\pi_1$ un cardinal infini, alors* card réd $(C_0') \leqslant \pi_1^{\pi_0}$ ([56]).

**Corollaire 4.6.1.2.** *$\mathcal{M}$ et $C_0$ étant comme dans 2°) ci-dessus, soit $C$ la plus petite sous-catégorie strictement pleine de $\mathcal{M}$ contenant $C_0$, et stable par $\varinjlim$ de cardinal $\leqslant \pi_0$ (celles qui sont représentables dans $\mathcal{M}$). Si $C_0$ est équivalente à une petite catégorie, il en est de même de $C$. Plus précisément, si* card réd $(C_0) \leqslant \pi_1$, *où $\pi_1$ est un cardinal infini, alors*

[page 143]

*on a* card réd $(C) \leqslant \pi_1^{\pi_0}$ ([57]).

Le 3°) se prouve par la démonstration transfinie précédente, on prouve par récurrence transfinie que

$$\mathrm{card\,r\acute{e}d}\, C_\alpha \;\leqslant\; \pi_1^{\pi_0}$$

pour tout $\alpha$. C'est OK pour $\alpha = 0$ par hypothèse (puisque $\pi_1 \leqslant \pi_1^{\pi_0}$). Si c'est vrai pour $C_\alpha$, alors 2°) assure que

$$\mathrm{card\,r\acute{e}d}\, C_\alpha \;\leqslant\; (\pi_1^{\pi_0})^{\pi_0} \;=\; \pi_1^{\pi_0\cdot\pi_0} \;=\; \pi_1^{\pi_0} \;,$$

enfin, si $\alpha$ est un ordinal limite $< \alpha_0$, on aura $C_\alpha = \bigcup_{\alpha'<\alpha} C_{\alpha'}$, donc

$$\mathrm{card\,r\acute{e}d}\, C_\alpha \;\longrightarrow\; \pi_0 \cdot \pi_1^{\pi_0} \;=\; \pi_1^{\pi_0}$$

(vu que $\pi_1^{\pi_0} \geqslant \pi_0$), en vertu du 1° ci-dessus, et compte tenu du fait que card $I_\alpha \leqslant \pi_0$. Soit $\pi_0'$ le cardinal successeur de $\pi_0$, alors la même majoration nous donne

$$\mathrm{card\,r\acute{e}d}\, C_{\alpha_0} \;\leqslant\; \pi_0'\pi_1^{\pi_0} \;.$$

[55] Un peu court. Il faut invoquer le fait que $I_{\alpha_0}$ est grande devant $\pi_0$.

[56] Cette majoration n'est par prouvée et probablement fausse si on ne fait pas des hypothèses un peu plus strictes.

[57] majoration non prouvée, probablement fausse, cf. annotation ci-dessus.

Mais on a $\pi_1^{\pi_0} \geqslant 2^{\pi_0} > \pi_0$, donc $\pi_1^{\pi_0} \geqslant \pi_0'$, donc $\pi_1^{\pi_0} \geqslant \pi_0'$, donc $\pi_0'\pi_1^{\pi_0} = \pi_1^{\pi_0}$, d'où

$$\operatorname{card\,réd} C_{\alpha_0} \;\leqslant\; \pi_1^{\pi_0} \;,$$

ce qui est la majoration annoncée.

[page 144]

Prouvons 4.6.1 2°, i.e. $C = \mathcal{M}_{\pi_0}$. On a $C \subset \mathcal{M}_{\pi_0}$, puisque par hypothèse $S \subset \mathcal{M}_{\pi_0}$, et on sait que $\mathcal{M}_{\pi_0}$ est stable par $\varinjlim$ de cardinal $\leqslant \pi_0$. D'autre part, on a $\mathcal{M}_{\pi_0} \subset C$, en vertu de 4.5.19 a $\Longrightarrow$ c appliqué à $C$, qui est strictement génératrice dans $\mathcal{M}$, $S$ l'étant, et $C \supset S$, et stable par $\varinjlim$ de cardinal $\leqslant \pi_0$ par construction.

*Prouvons enfin 3°.* Cela équivaut à ceci :

**Lemme 4.6.1.3.** *Soit $\mathcal{M}$ une $\mathfrak{U}$-catégorie stable par* petites $\varinjlim$ , *$\pi_0$ un cardinal, $\mathcal{M}_0$ une sous-catégorie de $\mathcal{M}$* strictement génératrice, *stable par $\varinjlim$ de cardinal $\leqslant \pi_0$, et formée d'objets $\pi_0$-accessibles. (En vertu de 4.6.1 2° déjà prouvée, appliqué à $S = \mathcal{M}_0$, si $\mathcal{M}_0$ est strictement pleine, on a donc $\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}_{\pi_0}$.) Alors le foncteur canonique*

$$\operatorname{Ind}'_{\pi_0}(\mathcal{M}_0) \longrightarrow \mathcal{M}$$

*est une équivalence de catégories.*

Le fait que ce facteur est pleinement fidèle résulte aussitôt de l'hypothèse que les objets de $\mathcal{M}_0$ soient $\pi_0$-accessibles :

$$\begin{aligned}\operatorname{Hom}_{\mathcal{M}}(\varinjlim_{i\in I} \underbrace{X_i}_{\in\mathcal{M}_0}, \varinjlim_{j\in J} \underbrace{Y_j}_{\in\mathcal{M}_0}) &\simeq \varprojlim_{i\in I} \underbrace{\operatorname{Hom}_{\mathcal{M}}(X_i, \varinjlim_{j\in J} Y_j)}_{\varinjlim_{j\in J} \operatorname{Hom}(X_i,Y_j)} \\ &\simeq \underline{\operatorname{Hom}}_{\operatorname{Ind}_{\pi_0}(\mathcal{M})}((X_i),(Y_j)) \;.\end{aligned}$$

[page 145]

Reste à voir que ce foncteur est essentiellement surjectif. Comme $\mathcal{M}_0$ est strictement génératrice, il s'ensuit que tout $x \in \mathcal{M}$ s'écrit

$$x \;=\; \varinjlim_{i\in I} x_i \;,$$

où $I = \mathcal{M}_0/x$, et les $x_i \in \mathcal{M}_0$. L'hypothèse que $\mathcal{M}_0$ est stable par $\varinjlim$ de cardinal $\leqslant \pi_0$ implique la même propriété pour $I = \mathcal{M}_0/x$, donc $I$ est grande devant $\pi_0$. Donc $(x_i)_{i\in I}$ définit un objet de $\operatorname{Ind}_{\pi_0}\mathcal{M}_0$, dont l'image dans $\mathcal{M}$ est isomorphe à $x$, q.e.d. (Comparer SGA 4 I 9.18.)

**Corollaire 4.6.2.** *Sous les conditions de 4.6.1, prenons pour $\pi_0$* le plus petit *cardinal tel que les objets de $S$ soient $\pi_0$-accessibles. Pour tout $\pi \geqslant \pi_0$, soit $\mathcal{M}_\pi$ la sous-catégorie strictement pleine de $\mathcal{M}$ formée des objets $\pi$-accessibles, qui est aussi (par 4.6.1 2°) l'enveloppe de $C$ dans $\mathcal{M}$ stable par $\varinjlim$ de cardinal $\leqslant \pi$.*

*1°) Soit $\pi_1 = \operatorname{card\,réd} S$. On a alors*

$$\operatorname{card\,réd} \mathcal{M}_\pi \;\leqslant\; \pi_1^{\pi} \qquad (= 2^{\pi} \textit{ si } \pi \geqslant \pi_0). \tag{4.6.2.1}$$

`[page 146]`

*2°) $(\mathcal{M}_\pi)_{\pi\geqslant\pi_1}$ est une filtration cardinale de $\mathcal{M}$, où $\pi_1 = \sup(\pi_0, \operatorname{card} S)$.*

Démonstration. La majoration (4.6.2.1) est contenue dans 4.6.1.2, où $\pi_0$ est devenu $\pi$. Si $\pi \geqslant \pi_1$, on a

$$(*) \qquad \pi_1^\pi \;=\; 2^\pi$$

car on a $\pi_1 \geqslant 2$, d'où $\pi_1^\pi \geqslant 2^\pi$, d'autre part, on a $\pi_1 \leqslant 2^{\pi_1}$, d'où $\pi_1^\pi \leqslant (2^{\pi_1})^\pi = 2^{\pi_1\pi} = 2^\pi$, puisque $\pi_1\pi = \pi$ pour $\pi \geqslant \pi_1$ ; d'où $(*)$.

L'assertion 2° est mise pour mémoire ; en vertu de $\mathcal{M} \simeq \operatorname{Ind}'_{\pi_0}\mathcal{M}_{\pi_0}$, on peut supposer que l'on a $\mathcal{M} = \operatorname{Ind}'_{\pi_0}(\mathcal{M}_{\pi_0})$, et on peut alors appliquer 4.5.9. On aurait d'ailleurs envie de dire que $(\mathcal{M}_\pi)_{\pi\geqslant\pi_0}$ est une filtration cardinale, sans se borner aux $\pi \geqslant \pi_1$. C'est vrai sauf pour la majoration de cardinaux dans la condition c) de la définition des filtrations cardinales (SGA 4 I 9.12) :

$$\underbrace{x}_{\in \operatorname{Ob}\mathcal{M}_{\pi'}} \;=\; \varinjlim_{i\in I} \underbrace{x_i}_{\in \operatorname{Ob}\mathcal{M}_\pi} \;, \qquad I \text{ grande devant } \pi \text{ et } \operatorname{card} I \leqslant \pi'^\pi$$

pour $\pi' \geqslant \pi$. Il faut supposer, pour cette majoration, que $\pi \geqslant \pi_1$.

`[page 147]`

On peut à présent achever la démonstration de 4.3.6, en prouvant les deux dernières implications $(*)$ (p. 139). On a d $\Longrightarrow$ c, i.e. si $\mathcal{M} \simeq \operatorname{Ind}'_{\pi_0}(C)$, $C$ stable par limites inductives de cardinal $\leqslant \pi_0$, et $C$ équivalente à une petite catégorie, alors $\mathcal{M}$ est stable par petites $\varinjlim$ (4.4.13, p. 95-96), ses éléments sont accessibles, et elle admet une filtration cardinale (cf. 4.5.9). Mais il faut vérifier quand même que les éléments de $C$ sont $\pi_0$-accessibles. C'est contenu dans SGA 4 I 9.18, qui affirme que la pleine fidélité du foncteur $\operatorname{Ind}_{\pi_0}(C) \longrightarrow \mathcal{M}$ *équivaut* au fait que les éléments de $C$ sont $\pi_0$-accessibles dans $\mathcal{M}$. La démonstration dans loc. cit. n'était pas claire, le "il suffit" a été vu bas de la page 144. Le "il faut" ne me paraît pas clair, avec la généralité donnée dans loc. cit. – et à présent je vois que c'est même faux, comme on voit en posant pour $C$ la catégorie unité $e$, donc $\operatorname{Ind}'_{\pi_0}C \simeq e$, et l'assertion affirmant que si $e$ est immergée pleinement dans $\mathcal{M}$ (donc par un objet *rigide* de $\mathcal{M}$, i.e. un objet $a$ tel que $\operatorname{End} a = \{\mathrm{id}_a\}$), alors $a$ est $\aleph_0$-accessible. C'est faux dans la catégorie des anneaux, où $\mathbf{R}$ est un objet rigide non $\aleph_0$-accessible !

`[page 148]`

Dans le cas qui nous occupe, $\mathcal{M} = \operatorname{Ind}'_{\pi_0}C$, il faut visiblement utiliser le calcul explicite des $\varinjlim$ grandes devant $\pi_0$ dans $\operatorname{Ind}'_{\pi_0}C \subset C^\wedge$, elles se calculent en effet "argument par argument", cf. 4.4.15.

Cela achève la démonstration de c $\Longrightarrow$ d dans $(*)$, page 139. Enfin l'implication c $\Longrightarrow$ PTA est tautologique, l'existence d'une filtration cardinale impliquant celle d'une petite sous-catégorie strictement génératrice. Cela achève la démonstration de 4.3.6.

Je vais redonner une formulation légèrement plus précise de 4.3.6., en précisant les cardinaux, et en y rajoutant une condition supplémentaire, inspirée par SGA 4 I 9.11 (revue et corrigée, cf. une annotation à l'exemplaire `[de Grothendieck]` de SGA 4 I ([58])).

[58] N. Éd. Cette annotation dit "cf. résultat plus simple ci-dessus, si $C$ est *strictement* génératrice" et le résultat en question, également en annotation marginale sur l'exemplaire de Grothendieck, est :

**Corollaire.** *Soit $F$ admettant* `[une]` *sous-catégorie génératrice par épimorphismes stricts, formée d'objets accessibles, alors* tout *objet de $F$ est accessible (utiliser 7.2. (i) b)).*

**Théorème 4.6.3.** *Soit $\mathcal{M}$ une $\mathfrak{U}$-catégorie.*

1° *Les conditions suivantes sont équivalentes pour un cardinal infini $\pi_0$ :*

$a_{\pi_0}$) *$\mathcal{M}$ est une catégorie $\mathfrak{U}$-$\pi_0$-paratopos, i.e. $\mathcal{M}$ est stable par petites $\varinjlim$, et contient une petite sous-catégorie pleine* `[strictement]` *génératrice $S$, formée d'objets $\pi_0$-accessibles de $\mathcal{M}$.*

`[page 149]`

$b_{\pi_0}$) *Il existe une petite catégorie $S$, et un foncteur pleinement fidèle et $\pi_0$-accessible $\mathcal{M} \xrightarrow{i} S^\wedge$, admettant un adjoint à gauche.*

$c_{\pi_0}$) *Il existe une petite catégorie $C$, stable par $\varinjlim$ de cardinal $\leqslant \pi_0$, telle que $\mathcal{M} \simeq \mathrm{Ind}'_{\pi_0}(C)$.*

$c'_{\pi_0}$) *Comme c), avec $C$ seulement équivalente à une petite catégorie.*

2°) *Ces conditions impliquent que $\mathcal{M}$ est stable par petites $\varinjlim$ et petites $\varprojlim$, et la condition :*

$e_{\pi_0}$) *Pour toute catégorie $I$ grande devant $\pi_0$, le foncteur*

$$L = \varinjlim_I : \underline{\mathrm{Hom}}(I, \mathcal{M}) \longrightarrow \mathcal{M}$$

*est exact à gauche (donc exact).*

*Cette condition implique notamment ceci :*

$\alpha(\pi_0)$ *Sur la catégorie des double-flèches de $\mathcal{M}$, le foncteur* Ker *(à valeurs dans $\mathcal{M}$) est $\pi_0$-accessible.*

$\beta(\pi_0)$ *Pour toute flèche $y \leqslant x$ dans $\mathcal{M}$, le foncteur changement de base $\mathcal{M}/x \longrightarrow \mathcal{M}/y$ est $\pi_0$-accessible.*

([59]).

`[page 150]`

3°) *Les conditions suivantes sont équivalentes.*

a) *$\mathcal{M}$ est une catégorie $\mathfrak{U}$-paratopos, i.e. est stable par petites $\varinjlim$, et contient une petite sous-catégorie pleine $S$ génératrice par épimorphismes strictes, et formée d'objets accessibles.*

a′) *Comme a), mais en exigeant que $\mathcal{M}$ soit faiblement accessible, i.e. que* tout *objet de $\mathcal{M}$ soit accessible.*

b) *Il existe une petite catégorie $S$ et un foncteur pleinement fidèle et accessible $\mathcal{M} \hookrightarrow S^\wedge$ admettant un adjoint à gauche.*

c *Il existe un cardinal infini $\pi_0$, une petite catégorie $S$, et une équivalence $\mathcal{M} \simeq \mathrm{Ind}'_{\pi_0}(S)$.*

c′) *Comme c, en supposant seulement $S$ équivalente à une petite catégorie.*

d) *$\mathcal{M}$ est stable par petites $\varinjlim$, est faiblement accessible, i.e. tous ses objets sont accessibles, et admet une filtration cardinale.*

e ([60]). *$\mathcal{M}$ est stable par petites $\varinjlim$, contient une petite sous-catégorie pleine strictement génératrice, et il existe un cardinal infini $\pi_0$ tel que la condition $e_{\pi_0}$ de 2°) soit satisfaite.*

e′ *Comme e, mais en exigeant, au lieu de $e_{\pi_0}$, la condition plus faible conjonction de $\alpha(\pi_0)$ et $\beta(\pi_0)$ dans 2°.*

[page 151]

DÉMONSTRATION. La partie 1° a déjà été démontrée. La première assertions dans 2°), savoir la stabilité de $\mathcal{M}$ par petites $\varprojlim$, est bien connue (résulte de stabilité par petites $\varinjlim$, et de l'existence d'une petite famille génératrice, cf. SGA 4 I 8.12.7, version duale de l'annotation marginale). La validité de la condition $\mathrm{e}_{\pi_0}$ résulte du fait qu'elle est valable dans $C^\wedge$ (où $C$ est la catégorie mentionnée dans 1°, $\mathrm{c}_{\pi_0}$), et du fait que les $\varprojlim$ dans $\mathcal{M}$, et les $\varinjlim$ grandes devant $\pi_0$ dans $\mathcal{M}$, se calculent dans $C^\wedge$. On trouve d'ailleurs de même :

**Corollaire 4.6.4.** *Si $\mathcal{M}$ est une catégorie $\mathfrak{U}$-$\pi_0$-paratopos, alors pour tout cardinal $\pi \geqslant \pi_0$, et tout catégorie $J$ telle que* $\operatorname{card} J \leqslant \pi$*, le foncteur*

$$\underline{\mathrm{Hom}}(J, \mathcal{M}) \xrightarrow{\varprojlim_J} \mathcal{M}$$

*est $\pi$-accessible, ou ce qui revient au même, pour toute petite catégorie $I$ grande devant $\pi$, le foncteur*

$$\underline{\mathrm{Hom}}(I, M) \xrightarrow{\varinjlim_I} \mathcal{M}$$

*commute aux $\varprojlim$ de cardinal $\leqslant \pi$.*

[page 152]

D'autre part, le fait que $\mathrm{e}_{\pi_0}$ implique $\alpha(\pi_0)$ et $\beta(\pi_0)$ est immédiat.

La partie 3°), en ce qui concerne l'équivalence des conditions a) à d), est contenue dans 1°, et l'équivalence avec d) a été vue également (la seule chose non tautologique étant que la condition c), savoir $\mathcal{M} \simeq \mathrm{Ind}_{\pi_0}(C)$ avec $C$ petite et stable par $\varinjlim$ de cardinal $\leqslant \pi_0$, implique l'existence d'une filtration cardinale, ce qui a été vu dans 4.5.9, et réaffirmé dans 4.6.2 2° ci-dessus). D'autre part, que ces conditions a) à d) impliquent e , et que e implique e′, a été vu dans 2°. Donc il reste à voir que les conditions de e′ impliquent a), et pour ceci, il reste à établir que les éléments de $\mathcal{M}$ sont accessibles. Mais c'est ce qui est établi dans SGA 4 I 9.11, à cela près que l'énoncé de la condition c), deuxième cas, est canulé, et devrait être remplacé par la condition $\beta(\pi_0)$ (la condition $\alpha(\pi_0)$ figurant dans la condition a) de loc. cit.).

[page 153]

**Remarque 4.6.5.** Les développements des sections 4.4, 4.5, 4.6 précisent et affirment considérablement, à bien des égards, la théorie des filtrations cardinales de SGA 4 I 9. Il en est ainsi, tout au moins, dans le cas des $\mathfrak{U}$-catégories $\mathcal{M}$ stables par petites $\varinjlim$. Dans loc. cit. on travaille avec des $\mathfrak{U}$-catégories légèrement plus générales, celles satisfaisant la *condition L :* il existe un cardinal infini $\pi_0$ tel que $\mathcal{M}$ soit stable par petites $\varinjlim$ *grandes devant* $\pi_0$. Je présume cependant qu'on doit pouvoir améliorer de façon similaire la théorie des filtrations cardinales *accessibles,* en s'inspirant du corollaire 9.18 de loc. cit., établissant une équivalence de catégories

$$\mathcal{M} \simeq \mathrm{Ind}_{\pi_0}(C) ,$$

[59]**Question.** Condition $e_{\pi_0}$ (voire, le couple $\alpha(\pi_0) + \beta(\pi_0)$ plus l'existence d'une petite sous-catégorie strictement génératrice (et la stabilité de $\mathcal{M}$ par petites $\varinjlim$ ), implique-t-il que $\mathcal{M}$ est un $\pi_0$-paratopos ? Je présume que non.)

[60]C'est là la caractérisation intrinsèque la plus jolie des paratopos par la modalité "économie", l'autre, l'énoncé structurel, est c .

pour un cardinal $\pi_0$ et une petite catégorie $C$ convenable. Ici, on ne peut plus supposer $C$ stable par tel ou tel type de $\varinjlim$ . Néanmoins, 4.4.15 nous dit que sans autre hypothèse sur $C$, $\mathcal{M} \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{Ind}_{\pi_0}(C)$ satisfait bien à $\mathrm{L}_{\pi_0}$, i.e. est stable (et même stable dans $C^\wedge$)

`[page 154]`

par petites $\varinjlim$ grandes devant $\pi_0$.

Ceci vu, j'ai envie d'appeler *accessible* une catégorie $\mathcal{M}$ qui admet une filtration cardinal, et qui est de plus faiblement accessible `[i.e.]` dont tout objet est accessible. Et de hasarder une

**Conjecture 4.6.6** ([61]). *Soit $\mathcal{M}$ une $\mathfrak{U}$-catégorie. Conditions équivalentes :*

*a) $\mathcal{M}$ satisfait la condition L, et admet une petite catégorie strictement génératrice formée d'objets accessibles.*

*b) Il existe une petite catégorie $C$, et un cardinal infini $\pi_0$, tel que $\mathcal{M}$ soit équivalente à la catégorie $\mathrm{Ind}'_{\pi_0}(C)$.*

*c) $\mathcal{M}$ est "accessible", i.e. est faiblement accessible (tout objet accessible) et admet une filtration cardinale.*

On a b $\Longrightarrow$ a $\Longleftarrow$ c de façon tautologique, et c $\Longrightarrow$ b a été vu dans loc. cit. 9.18, donc on a la suite

$$\mathrm{c} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{b} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{a}\,,$$

donc il resterait à établir a $\Longrightarrow$ c.

`[page 155]`

Le travail accompli (et la sueur versée) dans 4.5 nous préservera d'ailleurs, le moment venu, d'erreurs fort naturelles dans la description d'une filtration cardinale, à partir d'une sous-catégorie $S$ strictement génératrice : ce n'est ni $\mathrm{Filt}^\pi$, ni $\mathrm{Filt}'^\pi$, mais quelque chose de plus subtil – peut-être faut-il prendre encore la catégorie $\mathcal{M}_\pi$, ou alors saturer $S$ par les limites inductives de cardinal $\leqslant \pi$ qui veulent bien être représentables dans $\mathcal{M}$ : on trouve alors une $\mathrm{Filt}''^\pi \subset \mathcal{M}_\pi$, et si ces $\mathrm{Filt}''^\pi$ donnent bien une filtration cardinale, on doit avoir forcément $\mathcal{M}_\pi \subset \mathrm{Filt}''^\pi$, donc finalement $\mathrm{Filt}''^\pi = \mathcal{M}_\pi$. Donc je m'attends à ce qu'en tout état de cause, la filtration cardinale (si elle existe) se fasse par les $\mathcal{M}_\pi$. La condition a) de loc. cit. 9.12 ($\mathcal{M}_\pi$ équivalente à une petite catégorie), et la majoration de cardinaux dans loc. cit. c), ne doit pas faire de difficultés, et la condition b) est OK. La difficulté

`[page 156]`

provient du fait que $\mathcal{M}_\pi$ n'étant pas même stable par sommes et conoyaux de double flèches (quand ceux-ci ne sont pas représentés dans $\mathcal{M}$), la catégorie $\mathcal{M}_\pi/x$ (pour $x$ dans $\mathcal{M}$) n'a aucune raison d'être filtrante, pour autant que je vois, ni a fortiori d'être grande devant $\pi$. Donc il n'est pas trop clair comment dès lors représenter $x$ comme $\varinjlim_I x_i$, les $x_i$ dans $\mathcal{M}_\pi$ et $I$ grande devant $\pi$.

Il faut bien dire que dans SGA 4 I 9, je ne donne aucun *exemple* d'une filtration cardinale sur une catégorie où les petites $\varinjlim$ quelconques ne seraient représentables (cf. loc. cit. 9.13). Peut-être après tout est-ce contre-nature de vouloir elles au delà ? ? Il faut peut-être

[61] Tout ceci sera considérablement précisé dans la théorie qui sera développé dans les sections 4.7, 4.16.

attendre d'y être forcé, pour essayer de développer une théorie en dehors du cadre des paratopos.

[page 157]

**4.6.7.** Nous sommes à présent en mesure de reformuler les kyrielles de conditions un peu techniques a) à f) du théorème 2.6 (p. 25 dans XVIII) concernant le caractère "spécial à gauche" de l'ensemble $\mathrm{Mon}(\mathcal{M}) \subset \mathrm{Fl}(\mathcal{M})$ :

**Proposition 4.6.7** ([62]). *Les conditions préliminaires sur la $\mathfrak{U}$-catégorie $\mathcal{M}$, assurant la validité du théorème XVIII 2.6, sous une forme très légèrement modifié (savoir en modifiant dans 2.6 d) la condition de stabilité de* $\mathrm{Filt}^{\pi}$ *par quotients, en une propriété d'exactitude d) ci-dessous), équivaut à l'ensemble de six conditions suivantes a) à f).*

- *a) $\mathcal{M}$ est stable par petites $\varinjlim$ .*
- *b) $\mathcal{M}$ admet une petite sous-catégorie strictement génératrice.*
- *c) Les limites inductives filtrantes dans $\mathcal{M}$ sont exactes.*

*Ces conditions impliquent que $\mathcal{M}$ est une* catégorie $\mathfrak{U}$-paratopos *(cf. 4.6.3, 3°), et en particulier que les objets de $\mathcal{M}$ sont* accessibles, *et que $\mathcal{M}$ admet une filtration cardinale $(\mathcal{M}_\pi)_{\pi \geqslant \pi_0}$ telle que pour tout $\pi \geqslant \pi_0$, $\mathcal{M}_\pi$ soit stable par $\varinjlim$ de cardinal $\leqslant \pi$ (en fait, on aura $\mathcal{M}_\pi =$ sous-catégorie pleine des objets $\pi$-accessibles de $\mathcal{M}$). Aussi, elles impliquent la stabilité de $\mathcal{M}$ par petites $\varprojlim$ . D'autre part, les trois conditions suivantes sont des conditions de stabilité pour les monomorphismes.*

- *d) Soit $f : X \longrightarrow Y$ une flèche dans $\mathcal{M}$ et $R = X \times_Y X \rightrightarrows X$, alors $X/R \longrightarrow Y$ est un monomorphisme – en d'autres termes, $f$ se factorise en un composé $ip$, avec $i$ monomorphe et $p$ un épimorphisme effectif.*

[page 158]

- *e) Si $A_1$, $A_2$ sont deux sous-objets d'un objet $B$ de $\mathcal{M}$, et $A_0 = A_1 \cap A_2 \overset{\text{déf}}{=} A_1 \times_B A_2$, alors $A_1 \amalg_{A_0} A_2 \longrightarrow B$ est un monomorphisme. (Noter la proche parenté des conditions d) et e).)*
- *f) L'ensemble* $\mathrm{Mon}(\mathcal{M})$ *des monomorphismes dans $\mathcal{M}$ est stable par cochangement de base.*

En fait, il n'est pas clair que ces conditions, et notamment d), suffisent à entraîner la stabilité des $\mathcal{M}_\pi$ par quotients (seulement par quotients effectifs), comme postulé dans 2.6 d). Mais dans l'énoncé et la démonstration donnée dans XV cor. 7.4 (p. 98-99), on se contentait d'une forme un peu plus faible de cette propriété de stabilité, en se bornant aux quotients $Z'$ de $Z \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{M}_\pi$ *tels* qu'il n'existe pas de sous-objet $Z'_0$ de $Z'$, distinct de $Z'$, et tel que $Z \longrightarrow Z'$ se factorise par $Z'_0$ ; on exigeait donc que $Z' \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{M}_\pi$. Mais si la condition d) est satisfaite, il s'ensuit aussitôt qu'un quotient $Z'$ de $Z$ ayant cette propriété supplémentaire est nécessairement effectif, d'où résulte bien que $Z' \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{M}_\pi$.

[page 159]

**Corollaire 4.6.8.** *Les conditions d), e), f) de 4.6.7 sont satisfaites si $\mathcal{M}$ est une catégorie abélienne. Donc l'ensemble des conditions a) à f) est satisfait dans chacun des deux cas suivants :*

[62] Peut-être on pourrait appeler ces catégories des catégories *"paratopos parabéliens" ? ?*

*1)* $\mathcal{M}$ *est une catégorie abélienne où les limites inductives filtrantes sont représentables et exactes, et admettant une petite catégorie strictement génératrice* ([63]).

*2)* $\mathcal{M}$ *est un topos.*

**Remarque 4.6.9.** Je ne suis par sûr de connaître d'autres exemples où les conditions de 4.6.7 sont vérifiées, que ceux signalés dans 4.6.8 ci-dessus ([64]). On notera que le cas 1°) qui y est mentionné est celui de Tohoku, où j'établis l'existence de "suffisamment d'objets injectifs" dans une telle catégorie abélienne. Dans Tohoku, je me borne à supposer l'existence d'une petite sous-catégorie, *génératrice pour les monomorphismes,* condition en apparence plus faible que celle énoncée dans 4.6.8 1°). Mais dans une catégorie abélienne, les deux notions (et leurs diverses variantes dans SGA 4 I 7.1) sont équivalentes en vertu de SGA 4 I 7.3 (i).

[page 160]

Par contre, il semble que les conditions e) f) ne sont pratiquement jamais vérifiées pour les catégories définies par les espèces de structure algébrique "définissables par produits finis" sans plus, tel les groupes, les anneaux (de toutes sortes), etc. Mais la catégorie des groupes *commutatifs,* étant abélienne, est une exception. (On peut d'ailleurs l'interpréter comme $\mathcal{M} \boxtimes \mathcal{M}$, où $\mathcal{M} = (\mathrm{Gr})$, et on peut se demander dès lors s'il y a quelque généralisations aux catégories paratopos de cette forme, $\mathcal{M}$ étant une catégorie paratopos ...)

[page 161]

## 4.7 $\mathrm{Ind}_\pi C$ ($C$ quelconque) et filtrations cardinales généralisées.

Je sens le besoin de me lancer dans des développements à ce sujet, pour parvenir à une meilleure compréhension de la notion de *partie accessible* d'un paratopos, et du théorème de stabilité pour les paratopos par certaines opérations-clef sur ceux-ci.

Dans la suite, $C$ désigne une catégorie équivalente à une petite catégorie, $C_0$ une sous-catégorie réduite exhaustive, $\pi_0$ un cardinal infini. Nous posons

(4.7.1) $$\mathcal{M} \ = \ \mathrm{Ind}_{\pi_0} C \ \subset \ C^\wedge \qquad ({}^{65}) \,.$$

On se propose d'introduire sur $\mathcal{M}$ diverses filtrations ± "cardinales", par des propriétés correspondantes sur un objet $F$ de $\mathcal{M} \subset C^\wedge$, que je vais à présent introduire, en m'inspirant de 4.5.2 (p. 107) et 4.5.6 (p. 116).

**Proposition 4.7.1.** *Posons* $\pi_1 = \sup(\pi_0, \mathrm{card}\, C_0)$. *Soit* $\pi \geqslant \pi_0$ *un cardinal, et considérons les conditions suivantes (dépendant de* $\pi$*) sur un objet* $F$ *de* $\mathcal{M}$ *:*

*a)* $\mathrm{card}\, C_0/F \leqslant \pi$ *(i.e.* $\mathrm{card}\, \mathrm{Fl}\, C_0/F \leqslant \pi$*).*

*a')* $\mathrm{card}\, \mathrm{Ob}\, C_0/F \leqslant \pi$.

*a'')* $\mathrm{card}\, F(x) \leqslant \pi$ *pour tout* $x \in \mathrm{Ob}\, C$ *(***N.B.** *il suffit de l'exiger pour* $x$ *dans* $C_0$*).*

[page 162]

*b) On a* $F = \varinjlim_{i \in I} x_i$, *avec les* $x_i \in \mathrm{Ob}\, C$, $I$ *une catégorie (pas nécessairement ordonnée) grande devant* $\pi_0$, *et telle que* $\mathrm{card}\, I \leqslant \pi$. *(***N.B.** *en vertu de 4.4.2 (p.79), pour*

[63] C'est le cas étudié dans "Tohoku".

[64] ou qui s'en déduisent trivialement (produits etc.)

[65] **N.B.** Je désigne maintenant par $\mathrm{Ind}C$, $\mathrm{Ind}_\pi C$ ce qui précédemment était noté $\mathrm{Ind}'C$, $\mathrm{Ind}'_\pi C$.

*$I$ donnée, ceci équivaut à l'existence d'un foncteur cofinal $I \longrightarrow C/F$, ou encore $I \longrightarrow C_0/F$.)* ([66]).

*b′) On a $F \in \operatorname{Ob}\mathrm{Filt}'^{\pi}$, où $\mathrm{Filt}'^{\pi}$ est la plus petite sous-catégorie strictement pleine de $\mathcal{M}$ contenant $C$, et stable par $\varinjlim$ grandes devant $\pi_0$ et de cardinal $\leqslant \pi$.*

*c) On a $F \in \operatorname{Ob}\mathcal{M}_\pi$, i.e. $F$ est un objet $\pi$-accessible de $\mathcal{M}$.*

*c′) On a $F \in \operatorname{Ob}C^\wedge_\pi$, i.e. $F$ est un objet $\pi$-accessible de $C^\wedge$.*

*Ceci posé, on a le diagramme d'implications suivant.*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{a} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \mathrm{a}' \arrow[r, Rightarrow] & \mathrm{a}'' \arrow[dr, Rightarrow] & & \\
& \mathrm{b} \arrow[r, Rightarrow] & \mathrm{b}' \arrow[r, Rightarrow] & \mathrm{c}' \arrow[dr, Rightarrow] \arrow[ulll, dotted, bend right, Rightarrow, "\text{si } \pi \geqslant \pi_1"'] & \\
& & & & \mathrm{c}\,, \arrow[ull, dotted, bend left, Rightarrow, "\text{si } \pi = \pi^{\pi_0}"]
\end{tikzcd}$$

*où les deux implications en pointillés, $\mathrm{c}' \Longrightarrow \mathrm{a}$ et $\mathrm{c} \Longrightarrow \mathrm{b}$, sont conditionnelles soumises à la condition $\pi \geqslant \pi_1$, resp. $\pi = \pi^{\pi_0}$.*

[page 163]

**Corollaire 4.7.2.**

*1°) Si $\pi \geqslant \pi_1$, les six conditions a, a′, a″, b, b′, c′ sont équivalentes, et la condition en question (qu'on peut écrire $F \in \operatorname{Ob}\mathrm{Filt}^{\pi}$ où $F \in \operatorname{Ob}\mathrm{Filt}'^{\pi}$ indifféremment) implique c :*

(4.7.2.1) $$\mathrm{Filt}^{\pi} \;=\; \mathrm{Filt}'^{\pi} \;\subset\; \mathcal{M}_\pi \qquad \textit{si } \pi \geqslant \pi_1$$

*(alors qu'en général, pour $\pi \geqslant \pi_0$, on a*

(4.7.2.2) $$\mathrm{Filt}^{\pi} \;\subset\; \mathrm{Filt}'^{\pi}\;(\subset C^\wedge_\pi \cap \mathcal{M}\,) \;\subset\; \mathcal{M}_\pi \qquad \textit{si } \pi \geqslant \pi_0).$$

*2°) Quand $\pi = \pi^{\pi_0}$, p.ex. quand $\pi$ est de la forme $2^c$, avec $c \geqslant \pi_0$, alors les conditions b, b′, c, c′ sont équivalentes, i.e. on a*

(4.7.3.2) $$\mathrm{Filt}^{\pi} \;=\; \mathrm{Filt}'^{\pi} \;=\; (C^\wedge)_\pi \cap \mathcal{M} \;=\; \mathcal{M}_\pi\,.$$

*3°) Quand $\pi \geqslant \pi_1$* et *$\pi = \pi^{\pi_0}$, alors les sept conditions a), a′), a″), b) , b′), c) , c′) sont équivalentes, donc en particulier*

(4.7.2.4) $$\mathrm{Filt}^{\pi} \;=\; \mathrm{Filt}'^{\pi} \;=\; C^\wedge_\pi \cap \mathcal{M} \;=\; \mathcal{M}_\pi \qquad (\pi \geqslant \pi_1 \textit{ et } \pi = \pi^{\pi_0}).$$

DÉMONSTRATION de 4.7.1. Les implications $\mathrm{a} \Longrightarrow \mathrm{a}' \Longrightarrow \mathrm{a}''$ sont tautologiques, ainsi que $\mathrm{b} \Longrightarrow \mathrm{b}'$. L'implication $\mathrm{b}' \Longrightarrow \mathrm{c}'$ provient de la stabilité de $C^\wedge_\pi$ par $\varinjlim$ de cardinal $\leqslant \pi$, et du fait que les $\varinjlim$ du type envisagé (en particulier, grandes devant $\pi_0$) *dans* $\mathcal{M}$ sont les mêmes que dans $C^\wedge$, i.e. se calculent "argument par argument" (cf. 4.4.15, p. 99). Ceci, plus le fait que l'inclusion $\mathcal{M} \hookrightarrow C^\wedge$ est pleinement fidèle, implique aussi $\mathrm{c}' \Longrightarrow \mathrm{c}$.

[66] **N.B.** On désignera par $\mathrm{Filt}^{\pi} \subset \mathcal{M}$ la sous-catégorie strictement pleine de $\mathcal{M}$ formée des $F$ satisfaisant cette condition.

`[page 164]`

L'implication a$''$ $\Longrightarrow$ c$'$ se voit comme dans 4.5.6 (p. 119) en appliquant le lemme 4.5.8 1° et 2°, au cas de $C^\wedge = \underline{\mathrm{Hom}}(C^\circ, \mathcal{E})$, où $\mathcal{E} = (\mathrm{Ens})$. L'implication conditionnelle inverse c$'$ $\Longrightarrow$ a$''$, pour $\pi \geqslant \pi_1$, se voit comme dans loc. cit., en appliquant ce lemme 4.5.8. Il reste donc à établir encore les trois implications

$$(*) \qquad \begin{cases} \mathrm{a} \implies \mathrm{b} \\ \mathrm{a}'' \implies \mathrm{a} \quad \text{si } \pi \geqslant \pi_1 \\ \mathrm{c} \implies \mathrm{b} \quad \text{si } \pi = \pi^{\pi_0}. \end{cases}$$

Mais a $\Longrightarrow$ b est tautologique, en prenant $I = C_0/F$, puisqu'on sait que $C_0/F$ est grande devant $\pi_0$ et que $F = \varinjlim_{i\in I} x_i$, pratiquement par définition de $\mathcal{M} = \underbrace{\mathrm{Ind}_\pi(C)}_{\simeq\, \mathrm{Ind}_\pi C_0} \subset C^\wedge$. Donc il reste à établir les deux implications conditionnelles de $(*)$. L'implication a$''$ $\Longrightarrow$ a pour $\pi \geqslant \pi_1$ s'établit comme dans 4.5.2 (cf. page 109), c'est essentiellement sorital. Reste à établir

$$(*) \qquad \mathrm{c} \implies \mathrm{b} \quad \text{si} \ \ \pi = \pi^{\pi_0} .$$

Nous aurons besoin du résultat auxiliaire :

`[page 165]`

**Lemme 4.7.3.** *Soit $\pi \geqslant \pi_0$ tel que $\pi^{\pi_0} = \pi$ (donc en fait $\pi > \pi_0$). Pour tout objet $F$ de $\mathcal{M}$, on a*

$$(4.7.3.1) \qquad F = \varinjlim_{i\in I} x_i \qquad ({}^{67}) .$$

*Si de plus $\pi' > \pi$ et $F \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{Filt}^{\pi'}$, alors on peut prendre $I$ telle que*

$$(4.7.3.2) \qquad \mathrm{card}\, I \leqslant \pi'^{\pi} .$$

En effet, on a

$$F = \varinjlim_{j\in J} x_j \qquad \text{avec } J = C_0/F \qquad ({}^{68}) ,$$

avec $J$ grande devant $\pi_0$. Soit alors

(4.7.3.3) $\quad I \;=\;$ ensemble des sous-catégories $J'$ de $J$ *grandes devant* $\pi_0$, et telles que $\mathrm{card}\, J' \leqslant \pi$.

Je dis que $I$ (ordonné par inclusion) *est grand devant* $\pi$ ([69]). Cela résulte aussitôt du lemme 4.5.5, p. 113, (énoncé d'abord, de façon erronée, en supposant seulement $\pi > \pi_0$ et non $\pi^{\pi_0} = \pi$). Posons alors, pour tout $J' \in I$,

$$x_{J'} = \varinjlim_{j\in J'} x_j ,$$

[67] les $x_i$ dans $\mathrm{Filt}^\pi$, $I$ ensemble ordonné grand devant $\pi$.

[68] où $J$ peut aussi se remplacer par une catégorie cofinale dans [?] $C_0/F$ grande devant $\pi_0$.

[69] cf. démonstration 4.7.5, page 168-171.

on a donc

$$x_{J'} \in \operatorname{Ob}\mathrm{Filt}^{\pi}$$

par définition de $I$ et de $\mathrm{Filt}^{\pi}$. D'autre part,

$$J' \longmapsto x_{J'} : I \longrightarrow \mathrm{Filt}^{\pi}$$

[page 166]

est un foncteur, donc

$$\varinjlim_{J' \in I} x_{J'} \simeq \varinjlim_{j \in J} x_j \simeq x ,$$

d'où la première assertion de 4.7.3. Reste la majoration de cardinaux pour $F \in \operatorname{Ob}\mathrm{Filt}^{\pi}$. Dans ce cas, quitte à remplacer $C_0/F$ par une catégorie cofinale grande devant $\pi_0$, $\operatorname{card} J \leqslant \pi'$. On voit alors tout de suite que $\operatorname{card} I \leqslant \pi'^{\pi_0}$, ce qui est la majoration annoncée.

Nous pouvons maintenant prouver l'implication $(*)$, page 164, i.e.

$$\mathcal{M}_{\pi} \subset \mathrm{Filt}^{\pi} \qquad (\text{pour } \pi = \pi^{\pi_0}).$$

Soit donc $F$ dans $\mathcal{M}_{\pi}$, i.e. $\pi$-accessible, écrivons $F$ sous la forme (4.7.3.2), avec $I$ grande devant $\pi$. Par définition de la $\pi$-accessibilité, appliqué à $F \xrightarrow{\mathrm{id}} F \simeq \varinjlim F_i$, on voit que $F$ est un facteur direct d'un $F_i$, donc d'un objet de $\mathrm{Filt}^{\pi}$. Faute de savoir que $\mathrm{Filt}^{\pi}$ est stable par facteurs directs, on ne peut en conclure que $F$ est dans $\mathrm{Filt}^{\pi}$ (aussi je ne peux prouver c $\Longrightarrow$ b), mais seulement que $F$ est dans $\mathrm{Filt}'^{\pi}$, qui, lui, est stable par $\varinjlim$ grandes devant $\pi_0$, de cardinal $\pi$ donné $> \pi_0$, donc aussi

[page 167]

stable par facteurs directs. Cela achève la démonstration de 4.7.1, et en même temps on obtient :

**Corollaire 4.7.4.** *Si $\pi \geqslant \pi_0$ est tel que $\pi^{\pi_0} = \pi$, alors on a*

$$\mathrm{Filt}'^{\pi} = (\mathrm{Filt}^{\pi})^{\natural} , \tag{4.7.4.1}$$

*i.e.* $\mathrm{Filt}'^{\pi}$ *est formée des objets $F$ de $\mathcal{M}$ qui sont facteurs directs d'un objet de* $\mathrm{Filt}^{\pi}$.

En effet, comme $\mathrm{Filt}^{\pi} \subset \mathrm{Filt}'^{\pi}$, et que $(\mathrm{Filt}^{\pi})^{\natural} \subset \mathrm{Filt}'^{\pi}$, et que $\mathrm{Filt}'^{\pi}$ est stable par facteurs directs, on a $(\mathrm{Filt}^{\pi})^{\natural} \subset \mathrm{Filt}'^{\pi}$ pour tout $\pi \geqslant \pi_0$. Mais inversement, comme $\mathrm{Filt}'^{\pi} \subset \mathcal{M}_{\pi}$, l'argument précédent montre que pour $\pi = \pi^{\pi_0}$, on a $\mathrm{Filt}'^{\pi} \subset \mathcal{M}_{\pi} \subset (\mathrm{Filt}^{\pi})^{\natural}$, ce qui prouve 4.7.3.

**Remarque 4.7.4.1** [deux fois 4.7.4.1]. Bien sûr, par 4.7.2, 1°, dès que $\pi \geqslant \pi_1$, on a même $\mathrm{Filt}^{\pi} = \mathrm{Filt}'^{\pi}$ (sans avoir à supposer $\pi = \pi^{\pi_0}$), donc *si* $\pi > \pi_0$ (ce qui sera la cas si $\pi_1 > \pi_0$, i.e. $\pi_1 \neq \pi_0$). $\mathrm{Filt}'^{\pi}$ étant stable par facteurs directs, $\mathrm{Filt}^{\pi}$ l'est aussi, (4.7.4.1) est satisfait trivialement. Mais si $\pi = \pi_1 = \pi_0$, on a $\mathrm{Filt}^{\pi} = \mathrm{Filt}^{\pi_0} = \mathrm{Filt}'^{\pi_0} =$ sous-catégorie des foncteurs *représentables* dans $C$ (équivalent à $C$), et celle-ci n'est égale à $C^{\natural}$ dans $\mathcal{M}$ que si $C$ est karoubienne, cf. ... ci-dessous.

[page 168]

**4.7.5.** Pour que la démonstration de 4.7.1 soit complète, il me faudrait encore donner une démonstration de 4.5.5, p. 113, qui est le lemme technique clef pour établir le

**Lemme 4.7.5.1** (utilisé dans la démonstration de 4.7.3). *Soient $\pi_0$, $\pi$ deux cardinaux infinis, avec $\pi \geqslant \pi_0$ et $\pi^{\pi_0} = \pi$ (donc $\pi > \pi_0$). Soit $J$ une catégorie grande devant $\pi_0$. Alors l'ensemble $I$, ordonné par inclusion, des sous-catégories $J'$ de $J$ qui sont grandes devant $\pi_0$, et telles que* $\operatorname{card} J' \leqslant \pi$, *est grand devant $\pi$. (De plus, si* $\operatorname{card} J \leqslant \pi'$, *on a* $\operatorname{card} I \leqslant \pi'^{\pi}$.*)*

Il faut donc montrer le

**Corollaire 4.7.5.2** ([70]) (c'est le lemme 4.5.5 non encore démontré). *Sous les conditions de 4.7.5, soit $K \subset \mathrm{Fl} J$ tel que* $\operatorname{card} K \leqslant \pi$. *Alors il existe $J' \in I$ tel que $K \subset J'$.*

On sait, $\pi$ étant infini, que la catégorie $K'$ engendrée par $K$ est aussi de cardinal $\leqslant \pi$, donc on peut supposer que $K$ "est" une sous-catégorie de $J$. On va construire une $J' \in I$ contenant $K$, en construisant par récurrence transfinie une suite croissante $K_\alpha$ de sous-catégories de $J$, avec $\operatorname{card} K_\alpha \leqslant \pi$, indexée par les ordinaux $\alpha$ tels que $\boxed{\operatorname{card} \alpha \leqslant \pi}$ :

[page 169]

1°) $K_0 = K$.

2°) $K_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} K_\beta$ ($= \varinjlim K_\beta$) si $\alpha$ est un ordinal limite (donc $\operatorname{card} K_\alpha \leqslant \pi$, puisque les $\operatorname{card} K_\beta \leqslant \pi$).

3°) $K_{\alpha+1}$ déduit de $K_\alpha$ de la façon suivante. Si $K_\alpha$ est grande devant $\pi_0$, on prend $K_{\alpha+1} = K_\alpha$ (donc, compte tenu de 2°, on aura $K_{\alpha'} = K_\alpha$ pour $\alpha' \geqslant \alpha$ – la construction transfinie s'arrête ...). Sinon, $K_{\alpha+1}$ s'obtient ainsi :

   a) pour toute partie $A$ de cardinal $\leqslant \pi_0$ de $\operatorname{Ob} K_\alpha$, on choisit un majorant $x_A$ dans $J$ (on a envie de le prendre dans $K_\alpha$, s'il y a un majorant dans $K_\alpha$) ;

   b) pour tout couple $x$, $y$ d'objets de $K_\alpha$, et toute partie de cardinal $\leqslant \pi_0$ de $\operatorname{Hom}_{K_\alpha}(x, y)$, on choisit une flèche $u_B : y \longrightarrow z_B$ dans $J$, qui égalise les $v_\beta \in B$ (et on prend cette flèche dans $K_\alpha$, quand c'est possible) ;

   c) on prend pour $K_{\alpha+1}$ la plus petite sous-catégorie contenant les $\mathrm{id}_{x_A}$ et les $u_B$.

Il faut vérifier que

$$\operatorname{card} K_{\alpha+1} \leqslant \pi .$$

Le nombre des choix possibles pour $A \in \mathfrak{P}_{\leqslant \pi_0}(\operatorname{Ob} J)$

[page 170]

est $\leqslant \pi^{\pi_0} = \pi$, le nombre des choix possibles pour $B \in \mathfrak{P}_{\pi_0}(\mathrm{Fl}\, J)$ est aussi $\leqslant \pi^{\pi_0} = \pi$, donc le nombre des flèches de la forme $\mathrm{id}_{x_A}$ ou $u_B$ est $\leqslant \pi + \pi = \pi$. Mais alors la sous-catégorie $K_{\alpha+1}$ de $J$ engendrée par cet ensemble de flèches est de cardinal $\leqslant 1$. Soit alors $\alpha_0$ le plus petit ordinal tel que

$$\operatorname{card} \alpha_0 > \pi_0 ,$$

on a donc

$$\operatorname{card} \alpha_0 = \text{cardinal successeur de } \pi_0 \leqslant \pi ,$$

[70] Comparer avec la démonstration de 4.6.1.2.

puisque $\pi^{\pi_0} = \pi$, d'où $\pi > \pi_0$ (car $\pi^{\pi_0} = \pi_0^{\pi_0} \geqslant 2^{\pi_0} > \pi_0$). Ainsi, $\alpha_0$ fait partie des ordinaux $\alpha$ admissibles (i.e. tels que $\operatorname{card}\alpha \leqslant \pi$). Je dis que $K_{\alpha_0}$ *est grande devant* $\pi_0$ (ce qui prouvera 4.7.5.2, en prenant $J' = K_{\alpha_0}$). Cela résulte immédiatement du fait que

$$K_{\alpha_0} \;=\; \bigcup_{\alpha<\alpha_0} K_\alpha \qquad \text{(réunion \textit{croissante})},$$

‖ et que l'ensemble des $\alpha < \alpha_0$ est *grande devant* $\pi_0$ ([71]). Donc tout ensemble d'objets ou de flèches de $K_{\alpha_0}$, de cardinal $\leqslant \pi_0$, est contenu dans un $K_\alpha$ avec $\alpha < \alpha_0$.

`[page 171]`

Cela implique, s'il s'agit d'un ensemble d'objets, qu'il y a un majorant commun dans $K_{\alpha+1}$, a fortiori dans $K_{\alpha_0}$. S'il s'agit d'une partie d'un $\operatorname{Hom}_{K_\alpha}(x,y)$, qu'il y a un égalisateur $y \longrightarrow z$ dans $K_{\alpha+1}$, a fortiori dans $K_{\alpha_0}$. Donc le critère $\mathrm{PF}_\pi$ 1,2 de 4.4.4 (page 89) est satisfait par $K_{\alpha_0}$, ce qui achève la démonstration de 4.7.5.2.

**Corollaire 4.7.6** (de 4.7.1). *Pour tout cardinal* $\pi \geqslant \pi_0$, *on a*

$$(4.7.6.1) \qquad \underbrace{\mathrm{Filt}'^{\pi}}_{\textit{si } \pi \underset{=}{\geqslant} \pi_1 \ \mathrm{Filt}^{\pi}} \;\subset\; \mathcal{M}_\pi \;\subset\; \underbrace{\mathrm{Filt}^{\pi^{\pi_0}}}_{\textit{si } \pi^{\pi_0} \underset{=}{\geqslant} \pi_1 \ \mathrm{Filt}^{\pi^{\pi_0}}} \qquad (= (\mathrm{Filt}^{\pi^{\pi_0}})^\natural \textit{ par cor. 4.7.4}),$$

*donc si* $\pi \geqslant \pi_1$, *on a aussi*

$$(4.7.6.2) \qquad \mathrm{Filt}^\pi \;\subset\; \mathcal{M}_\pi \;\subset\; \mathrm{Filt}^{\pi^{\pi_0}} \qquad \textit{(si } \pi^{\pi_0} \geqslant \pi_1\textit{)}.$$

En effet, $\mathrm{Filt}'^{\pi} \subset \mathcal{M}_\pi$ n'est autre que l'implication b′ $\Longrightarrow$ c de 4.7.1, d'autre part, on a $\pi \leqslant \pi^{\pi_0}$, d'où

$$\mathcal{M}_\pi \;\subset\; \mathcal{M}_{\pi^{\pi_0}} \;=\; \mathrm{Filt}'^{\pi^{\pi_0}} ,$$

où la dernière égalité provient de $\mathcal{M}_{\pi'} = \mathrm{Filt}'^{\pi'}$ si $\pi'^{\pi_0} = \pi'$, i.e. de (4.7.2.3) (page 163), en faisant $\pi' = \pi^{\pi_0}$, compte tenu que $\pi'^{\pi_0} = (\pi^{\pi_0})^{\pi_0} = \pi^{\pi_0\cdot\pi_0} = \pi^{\pi_0} = \pi$.

`[page 172]`

**Proposition 4.7.7.** *Considérons* $C$, $C_0$, $\mathcal{M} = \mathrm{Ind}_{\pi_0}(C)$, $\pi_1 = \sup(\pi_0, \operatorname{card}\mathrm{Fl}\, C_0)$ *comme précédemment. Pour tout cardinal* $\pi \geqslant \pi_0$, *soit* $\mathcal{F}^\pi$ *la sous-catégorie strictement pleine* $\mathrm{Filt}'^{\pi}$ *(resp.* $(C^\wedge)_\pi \cap \mathcal{M}$, *resp.* $\mathcal{M}_\pi$*) dans* $\mathcal{M}$. *Alors la filtration croissante* $(\mathcal{F}^\pi)_{\pi\geqslant\pi_0}$ *de* $\mathcal{M}$ *par les sous-catégories* $\mathcal{F}^\pi$ *satisfait les conditions suivantes.*

*a) Pour tout* $\pi \geqslant \pi_0$, $\mathcal{F}^\pi$ *est équivalente à une petite catégorie.*

*b)* $\mathcal{M}$ *satisfait à* $\mathrm{L}_{\pi_0}$ *(i.e. est stable par* $\varinjlim$ *filtrantes grandes devant* $\pi_0$*), et pour tout* $\pi \geqslant \pi_0$, $\mathcal{F}^\pi$ *est stable par les limites filtrantes grandes devant* $\pi_0$ *et de cardinal* $\leqslant \pi_0$ *[?].*

*c) Si* $\pi \geqslant \pi_0$ *est* tel que $\boxed{\pi^{\pi_0} = \pi,}$ *alors pour tout* $F$ *dans* $\mathcal{M}$, *on a un isomorphisme*

$$F \;=\; \varinjlim_{i\in I} x_i \ ,$$

*les* $x_i$ *dans* $\mathcal{F}^\pi$, *et* $I$ *catégorie ordonnée grande devant* $\pi_0$. *Si de plus* $\pi' > \pi$ *et* $F \in \mathrm{Ob}\, F^{\pi'}$, *on peut prendre* $I$ *telle que*

$$(4.7.7.1) \qquad \operatorname{card} I \;\leqslant\; \pi'^{\pi} \qquad \underline{\textit{si}}\ \pi'^{\pi} \geqslant \pi_1 .$$

[71] expliciter ceci en un

**Lemme.** *Soit* $\pi_0$ *un cardinal,* $\alpha_0 = \alpha_{\pi_0'}$ *(*$\pi_0'$ *le successeur de* $\pi_0$*) le plus petit ordinal tel que* $\operatorname{card}\alpha_0 > \pi_0$, *alors* $I_{\alpha_0} = \{\alpha \mid \alpha < \alpha_0\}$ *est grand devant* $\pi_0$.

*d) Si $\pi \geqslant \pi_0$, on a $\mathcal{F}^\pi \subset \mathcal{M}_\pi$, i.e. les objets de $\mathcal{F}^\pi$ sont $\pi$-accessibles.*

**N.B.** Ce sont là exactement, à part d), les conditions a), b), c) des filtrations cardinales de SGA 4 I 9.7.12,

`[page 173]`

à cela près seulement que dans c), on se restreint ici aux ordinaux $\pi$ tels que $\pi^{\pi_0} = \pi$ ([72]). La condition supplémentaire d) est une "condition d'accessibilité", cf. plus bas.

DÉMONSTRATION DE 4.7.7. a) Comme on a

$$\mathrm{Filt}'^{\pi} \ \subset\ (C^{\wedge})_\pi \cap \mathcal{M} \ \subset\ \mathcal{M}_\pi\ ,$$

on est réduit à prouver que $\mathcal{M}_\pi$ est équivalente à une petite catégorie. On est ramené au cas $\pi \geqslant \pi_1$, $\pi = \pi^{\pi_0}$, auquel cas on a $\mathcal{M}_\pi = \mathrm{Filt}^\pi$. En fait, on trouve :

**Corollaire 4.7.7.1** `[deux fois 4.7.7.1]` ([73]). *Si $\pi \geqslant \pi_1$, on a*

$$\begin{cases} \operatorname{card réd} \mathrm{Filt}^\pi & \leqslant\ 2^\pi \\ \operatorname{card réd} \mathrm{Filt}'^\pi & \leqslant\ \operatorname{card réd} \mathcal{M}_\pi \ \leqslant\ 2^{(\pi^{\pi_0})} \qquad (= 2^\pi \ \textit{si}\ \pi^{\pi_0} = \pi). \end{cases}$$

La deuxième majoration résulte de la première et de

$$\mathcal{F}^\pi \ \subset\ \mathcal{M}_\pi \ \subset\ \mathrm{Filt}^{\pi^{\pi_0}} \qquad (\text{pour } \pi^{\pi_0} \geqslant \pi_1) \qquad ([74]).$$

Pour la première, on utilise la condition a″) de 4.7.1 (qui caractérise $\mathrm{Filt}^\pi$ pour $\pi \geqslant \pi_1$). Je passe sur les détails de la vérification.

`[page 174]`

Prouvons 4.7.2 b). La condition $\mathrm{L}_{\pi_0}$ est connue, reste la stabilité de $\mathcal{F}^\pi$. Dans le cas de $\mathrm{Filt}'^\pi$, elle est acquise par définition. Dans les cas $C^\wedge_\pi \cap \mathcal{M}$ et $\mathcal{M}_\pi$, elle résulte de la stabilité de la notion de $\pi$-accessibilité par $\varinjlim$ de cardinal $\leqslant \pi$, soit dans $C^\wedge$, soit dans $\mathcal{M}$ (compte tenu que $C^\wedge$ et $\mathcal{M}$ ont une famille génératrice $C$ formée d'objets $\pi_0$-accessibles, donc $\pi$-accessibles).

Prouvons c) : c'est essentiellement le lemme 4.7.3, compte tenu que l'on a

$$\mathrm{Filt}^\pi \ \subset\ \mathcal{F}^\pi\ ,$$

sauf qu'il faut faire attention à la majoration de cardinaux, $\operatorname{card} I \leqslant \pi'^\pi$. Mais si $F \in \operatorname{Ob} \mathcal{F}^{\pi'}$, comme par (4.7.6.1)

$$\mathcal{F}^{\pi'} \ \subset\ \underbrace{\mathcal{M}_{\pi'}}_{\subset \mathcal{M}_{\pi'^\pi} \subset \mathrm{Filt}'^{\pi'^\pi}} \ \subset\ \mathrm{Filt}'^{\pi'^{\pi_0}}\ ,$$

donc a fortiori

$$\mathcal{F}^{\pi'} \ \subset\ \mathrm{Filt}^{\pi'^\pi} \underbrace{=}_{\text{si } \pi'^\pi \geqslant \pi_1} \mathrm{Filt}^{\pi'^\pi}\ ,$$

d'où, par 4.7.3, avec $\pi'$ remplacé par $\pi'^\pi = \pi''$, la possibilité de prendre $I$ avec

$$\operatorname{card} I \ \leqslant\ \pi''^\pi \ =\ (\pi'^\pi)^\pi \ =\ \pi'^{\pi\cdot\pi} \ =\ \pi'^\pi\ ,$$

ce qui achève la démonstration.

[72] et *de plus,* dans la majoration (4.7.7.1), aux cardinaux $\pi' > \pi$ tels que l'on ait de plus $\pi'^\pi \geqslant \pi_1$ (ce qui est automatique si on a $\pi \geqslant \pi_1$, ce qui est le cas, vu que $\pi = \pi^{\pi_0} \geqslant 2^{\pi_0}$, si on a $2^{\pi_0} \geqslant \pi_1$.)

[73] Comparer avec 4.7.19.

[74] Cf. (4.7.6.2).

[page 175]

**Remarque 4.7.7.2.** J'ai été obligé, dans l'énoncé de la condition c), de faire intervenir un deuxième cardinal $\pi_1$, et ceci faut de savoir si, pour $\pi''$ tel que $\pi'' = \pi''^{\pi_0}$, $\mathrm{Filt}^{\pi''}$ est stable par facteurs directs. (Il faudrait, pour bien faire, soit prouver qu'il est stable, donc qu'on a dans 4.7.1 c $\Longrightarrow$ b, i.e. $\mathcal{M}_\pi \subset \mathrm{Filt}^\pi$ (et non seulement c $\Longrightarrow$ b′, i.e. $\mathcal{M}_\pi \subset \mathrm{Filt}'^\pi$) si $\pi = \pi^{\pi_0}$, ou bien faire un contre-exemple !) Cet ingrédient un peu étrange, on sera hélas obligé de le traîner dans la définition des filtrations cardinales généralisées, si on ne veut s'interdire de regarder dans le cas présent $(\mathcal{F}^\pi)_{\pi \geqslant \pi_0}$ comme une telle filtration, et ne s'autoriser que de regarder $(\mathcal{F}^\pi)_{\pi \geqslant \pi_1}$ comme telle, ce qui me paraîtrait ridicule. Pratiquement (même si théoriquement l'introduction de $\pi_1$ dans la description d'une filtration cardinale généralisée était bel et bien nécessaire) on n'aura guère des cas où il faille faire mention de $\pi_1$ dans la condition c. En effet, $\pi \geqslant \pi_0$ et $\pi^{\pi_0} = \pi$ impliquent $\pi \geqslant 2^{\pi_0}$, et dès lors $\pi'^\pi \geqslant 2^{(2^{\pi_0})}$. Si donc $\pi_1 \leqslant 2^{(2^{\pi_0})}$, i.e. $\mathrm{card}\, C_0 \leqslant 2^{(2^{\pi_0})}$, alors la condition $\pi^{\pi'} \geqslant \pi_1$ dans c) est automatiquement satisfaite, et il n'y a donc pas à la mentionner. Or il est bien rare qu'on ait à faire à des petites catégories $C_0$, dont le cardinal soit $>$ puissance

[page 176]

du continu $c$, et a fortiori, telle que $\mathrm{card}\, C_0 > 2^c$. Si par contre $\mathrm{card}\, C_0 \leqslant 2^c$, comme $2^c \leqslant 2^{(2^{\pi_0})}$ (puisque $\pi_0 \geqslant \aleph_0$), on aura bien $\pi_1 \leqslant 2^{(2^{\pi_0})}$, et on est tranquille.

**Définition 4.7.8.** Soit $\mathcal{M}$ une $\mathfrak{U}$-catégorie. On appelle $\mathfrak{U}$-*filtration cardinale généralisée* (ou simplement filtration cardinale généralisée, quand $\mathfrak{U}$ est sous-entendu) la donnée d'un cardinal infini $\pi_0$, et d'une filtration $(\mathcal{F}^\pi)_{\pi \geqslant \pi_0}$ de $\mathcal{M}$ par des sous-catégories strictement pleines $\mathcal{F}^\pi$, indexées par les $\mathfrak{U}$-cardinaux $\geqslant \pi_0$, et satisfaisant les conditions a) b) c) énoncées dans 4.7.7, où dans c) on pose

$$\pi_1 \;=\; \sup(\pi_0, \mathrm{card\,réd}\, \mathcal{F}^{\pi_0}) \,. \tag{4.7.8.1}$$

(Donc si $\mathrm{card\,réd}\, \mathcal{F}^{\pi_0} \leqslant 2^{(2^{\pi_0})}$, il n'y a pas à tenir compte de la condition $\pi'^\pi \geqslant \pi_1$, cf. 4.7.7.1.) On dit que la filtration cardinale généralisée (fcg) est *accessible*, si elle satisfait de plus la condition d). On dit qu'elle est *canonique* si on a même

$$\mathcal{F}^\pi \;=\; \mathcal{M}_\pi \tag{4.7.8.2}$$

pour tout $\pi \geqslant \pi_0$.

**Proposition 4.7.9.** *Soient $(\mathcal{F}^\pi)_{\pi \geqslant \pi_0}$ une fcg sur la $\mathfrak{U}$-catégorie $\mathcal{M}$, et $\pi > \pi_0$ un cardinal tel que $\pi^{\pi_0} = \pi$. Alors on a*

[page 177]

$$\begin{cases} \mathcal{M}_\pi \subset \mathcal{F}^\pi \quad (\textit{si } \pi = \pi^{\pi_0}), \\ \textit{donc } \mathcal{M}_\pi = \mathcal{F}^\pi \textit{ si de plus la fcg est } \text{accessible}. \end{cases} \tag{4.7.9.1}$$

Démonstration ([75]). Appliquant la condition c) des fcg à un $F \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{M}_\pi$, on trouve que $F$ est facteur direct d'un $x_i \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{F}^\pi$. Comme $\mathcal{F}^\pi$ est stable par $\varinjlim$ grandes devant $\pi_0$ et de cardinal $\leqslant \pi$, et que *de plus* $\pi > \pi_0$, on conclut que :

[75] [Dans ce qui suit, $\mathcal{F}^\pi$ a parfois été écrit $\mathcal{F}_\pi$, souvent corrigé en $\mathcal{F}^\pi$ par l'auteur. Nous écrivons $\mathcal{F}^\pi$ partout.]

**Lemme 4.7.9.1** `[deux fois 4.7.9.1]`. *Si* $\pi > \pi_0$ ([76]), $\mathcal{F}^\pi$ *est stable par facteurs directs.*

D'où résulte que $F \in \mathcal{F}^\pi$, d'où (4.7.9.1).

**Corollaire 4.7.10.** *Supposons la fcg accessible. Pour tout cardinal* $\pi \geqslant \pi_0$*, on a*

$$\mathcal{F}^\pi \ \subset\ \mathcal{M}_\pi \ \subset\ \mathcal{F}^{\pi^{\pi_0}} \ (=\ \mathcal{M}_{\pi^{\pi_0}})\ . (4.7.10.1)$$

En effet, $\mathcal{F}^\pi \subset \mathcal{M}_\pi$ par définition de fcg accessibles, et $\mathcal{M}_\pi = \mathcal{M}_{\pi^{\pi_0}}$ (puisque $\pi \leqslant \pi^{\pi_0}$), or $\mathcal{M}_{\pi^{\pi_0}} = \mathcal{F}^{(\pi^{\pi_0})}$ en vertu de (4.7.9.1) appliqué à $\pi' = \pi^{\pi_0}$ au lieu de $\pi$ (vu que $\pi'^{\pi_0} = \pi'$), d'où (4.7.10.1). On notera que cette inclusion généralise (4.7.9.1), elle donne $\mathcal{F}^\pi = \mathcal{M}_\pi$ si $\pi = \pi^{\pi_0}$.

**4.7.11.** Il me semble que les seules filtrations cardinales généralisées utiles sont celles qui sont *accessibles.* Par la suite, je vais me borner à ce cas. Comme alors $\mathcal{F}^\pi \subset \mathcal{M}_\pi$, on en conclut

`[page 178]`

que le foncteur canonique

$$\operatorname{Ind}_\pi(\mathcal{F}^\pi) \hookrightarrow \mathcal{M} \qquad (4.7.11.1)$$

prolongeant l'inclusion $\mathcal{F}^\pi \subset \mathcal{M}$, de façon à commuter aux $\varinjlim$ grandes devant $\pi$, est *pleinement fidèle.* De plus, lorsque $\pi^{\pi_0} = \pi$, la condition c) de fcg nous dit entre autres que ce foncteur est essentiellement surjectif, donc que c'est une *équivalence de catégories :*

$$\operatorname{Ind}_\pi(\mathcal{F}^\pi) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M} \qquad (\text{si } \pi = \pi^{\pi_0}). \qquad (4.7.11.2)$$

**Proposition 4.7.12.** *Soit* $(\mathcal{F}^\pi)_{\pi \geqslant \pi_0}$ *une fcg accessible (fcga) sur la* $\mathfrak{U}$*-catégorie* $\mathcal{M}$*, et soit* $\pi$ *un cardinal* $\geqslant \pi_0$*. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

- *a) Le foncteur pleinement fidèle (4.7.11.1) est essentiellement surjectif, i.e. est une équivalence de catégories.*
- *b) Pour tout* $F \in \operatorname{Ob} \mathcal{M}$*,* $\mathcal{F}^\pi/F$ *est une catégorie filtrante et grande devant* $\pi$*.*

*Quand ces conditions sont satisfaites, et si* $\pi > \pi_0$*, on a*

$$\mathcal{F}^\pi \ =\ \mathcal{M}_\pi\ . \qquad (4.7.12.1)$$

Démonstration. L'équivalence de a) et b) résulte aussitôt de 4.4.2 et de la définition des catégories grandes devant $\pi$ (p. 81). Que ces

`[page 179]`

conditions impliquent $\mathcal{F}^\pi = \mathcal{M}_\pi$, i.e. $\mathcal{M}_\pi \subset \mathcal{F}^\pi$ dans le cas où $\pi > \pi_0$, se voit comme (4.7.9.1) en utilisant le lemme 4.7.9.1.

**Définition 4.7.13.**

[76] Mais $\mathcal{F}^{\pi_0}$ n'est pas forcément stable par facteurs directs, comme on voit en prenant $\mathcal{M} = \operatorname{Ind}_{\pi_0}(C)$, $C$ une petite catégorie non karoubienne, et la filtration cardinale pour les $\mathrm{Filt}'^\pi$ – on note que $\mathrm{Filt}'^{\pi_0} = \mathrm{Filt}^{\pi_0} \simeq e$, vu qu'une catégorie grande devant $\pi_0$ et de cardinal $\leqslant \pi_0$ est cofinale à $e$.

1°) Un cardinal $\pi \geqslant \pi_0$ est dit *cardinal utile* pour la fcga $(\mathcal{F}^\pi)_{\pi \geqslant \pi_0}$, s'il satisfait les conditions équivalentes a) et b) de 4.7.12, et si de plus dans le cas où $\pi = \pi_0$, on a $\mathcal{F}^\pi = \mathcal{M}_\pi$. (Donc si $\pi$ est un cardinal utile, on a toujours $\mathcal{F}^\pi = \mathcal{M}_\pi$.) Dans le cas contraire, on dit que $\pi$ est un *cardinal superflu* (pour le fcga donnée).

2°) Un cardinal $\pi$ est dit *régulier* pour la fcg donnée, s'il est utile, et si de plus la majoration de cardinaux énoncée dans (4.7.7.1) est valable.

**4.7.14** Ainsi, tous les cardinaux $\pi \geqslant \pi_0$ tels que $\pi^{\pi_0} = \pi$ sont utiles, et même réguliers pour la filtration cardinale `[généralisée]` donnée. Notons que si tous les cardinaux $\pi \geqslant \pi_0$ sont utiles, alors on a $\mathcal{F}^\pi = \mathcal{M}_\pi$ pour tout $\pi \geqslant \pi_0$, donc la fcga est canonique. Notons aussi que dans tous les cas, si $(\mathcal{F}^\pi)_{\pi \geqslant \pi_0}$ est une fcga, alors $(\mathcal{M}_\pi)_{\pi \geqslant \pi_0}$ en est une aussi.

`[page 180]`

En effet, la condition a) des fcg (cf. 4.7.7) résulte de la même condition pour $(\mathcal{F}^\pi)$, et de (4.7.10.1), $\mathcal{M}_\pi \subset \mathcal{F}^{\pi^{\pi_0}}$. La condition b) est une propriété générale de la $\pi$-accessibilité, compte tenu que $(\mathcal{F}^{\pi_0})_0$ est une petite sous-catégorie génératrice formée d'objets $\pi_0$-accessibles de $\mathcal{M}$. La condition d) est satisfaite tautologiquement, et il reste à vérifier la condition c). Mais on a vu que pour $\pi = \pi^{\pi_0}$, on a $\mathcal{M}_\pi = \mathcal{F}^\pi$ (4.7.9.1), donc la condition c) pour $(\mathcal{M}_\pi)$ résulte de la même condition pour $(\mathcal{F}^\pi)$. Ainsi, on trouve :

**Proposition 4.7.15.** *Si $(\mathcal{F}^\pi)_{\pi \geqslant \pi_0}$ est une fcga sur la $\mathfrak{U}$-catégorie $\mathcal{M}$, il en est de même de $(\mathcal{M}_\pi)_{\pi \geqslant \pi_0}$. De plus, tout cardinal utile (resp. régulier) pour la première filtration, l'est pour la seconde (appelée la fcg* canonique associée *à la filtration cardinale* `[généralisée]` *donnée).*

La dernière assertion résulte du fait que si $\pi$ est utile pour $(\mathcal{F}^\pi)$, alors on a $\mathcal{F}^\pi = \mathcal{M}_\pi$.

**4.7.16.** Il me semble qu'on peut dire que la fcg canonique associée à une fcga donnée

`[page 181]`

est toujours “meilleure” que celle-ci (si celle-ci n'est canonique, i.e. si les deux ne sont égales), à cause des deux faits suivants :

a) justement parce qu'elle est *canonique,* i.e. ne dépend d'aucun autre choix que celui du seul cardinal $\pi_0$, et
b) parce qu'il y a a priori plus des cardinaux utiles et de cardinaux réguliers pour la fcg canonique.

Donc au total, il me semble que les filtrations cardinales `[généralisées]` les seules utiles sont celles qui sont canoniques.

Notons qu'une filtration cardinale (au sens de SGA 4 I 9, que je conserve ici) qui est de plus *accessible* (i.e. $\mathcal{F}^\pi \subset \mathcal{M}_\pi$ pour tout $\pi \geqslant \pi_0$), n'est autre qu'une fcga canonique, telle que *tous* les cardinaux sont réguliers (a fortiori utiles) pour ladite filtration. Je présume (sans avoir cependant construit d'exemple) que les filtrations cardinales `[généralisées]` canoniques des catégories de la forme $\mathcal{M} = \mathrm{Ind}_{\pi_0}(C)$, $C$ une petite catégorie *karoubienne* (pour que $\pi_0$ soit un cardinal utile) ne sont pas forcément des fc (non généralisées, i.e. au sens SGA), i.e. je présume qu'il arrive qu'il y ait des cardinaux $\pi \geqslant \pi_0$ non réguliers, et même superflus.

`[page 182]`

Il me faut enfin étudier ce qui se passe quand on change le cardinal initial $\pi_0$ d'une fcga.

**Proposition 4.7.17.** *Soit $(\mathcal{F}^\pi)_{\pi \geqslant \pi_0}$ une fcga sur la $\mathfrak{U}$-catégorie $\mathcal{M}$, et soit $\pi'_0$ un cardinal*

$\geqslant \pi_0$. *Alors* $(\mathcal{F}^\pi)_{\pi\geqslant\pi'_0}$ *est une fcga sur* $\mathcal{M}$*, qui est canonique si celle de départ est canonique. Pour un cardinal* $\pi \geqslant \pi'_0$*, celui-ci est utile pour* $(\mathcal{F}^\pi)_{\pi\geqslant\pi'_0}$ *si et seulement s'il l'est pour* $(\mathcal{F}^\pi)_{\pi\geqslant\pi_0}$*. Pour qu'il soit régulier pour* $(\mathcal{F}^\pi)_{\pi\geqslant\pi'_0}$*, il* suffit *qu'il le soit pour* $(\mathcal{F}^\pi)_{\pi\geqslant\pi_0}$*, et c'est aussi nécessaire quand on suppose de plus que* $2^\pi \geqslant \pi'_1 \overset{\text{déf}}{=} \sup(\pi'_0, \operatorname{card}\operatorname{réd}\mathcal{F}^{\pi'_0})$*, a fortiori quand* $\pi \geqslant \pi'_1$.

Démonstration. Les conditions a) b) sont trivialement satisfaites par la deuxième filtration, étant satisfaites par la première, ainsi que d) si elle l'est par la première. Il en est de même de la condition c) si $\pi = \pi^{\pi'_0}$, qui implique en effet $\pi^{\pi_0} = \pi$, puisqu'en général

$$\pi \ \leqslant\ \pi^{\pi_0} \ \leqslant\ \pi^{\pi'_0}\ .$$

Reste à examiner la majoration de cardinaux

$$\operatorname{card} I \longrightarrow \pi'^{\pi} \qquad \text{si } F \in \operatorname{Ob}\mathcal{F}^{\pi'} \ \underline{\text{et}}\ \pi'^{\pi} \geqslant \pi'_1\ ,$$

où cette fois $\pi'_1 = \sup(\pi'_0, \operatorname{card}\operatorname{réd}\mathcal{F}^{\pi'_0})$. En tout état de cause, on a $\pi'_1 \geqslant \pi_1$, donc

[page 183]

$\pi'^{\pi} \geqslant \pi'_1$ implique $\pi'^{\pi} \geqslant \pi_1$, donc on peut appliquer la condition c) des fcg pour $(\mathcal{F}^\pi)_{\pi\geqslant\pi_0}$, pour conclure qu'elle reste encore vérifiée. Donc en somme, *toutes* les conditions des fcg (resp. fcga) sont trivialement vérifiées pour la fcg *restreinte* de la première. De même, le fait qu'un cardinal $\pi' \geqslant \pi'_0$ est utile est trivialement indépendant de quelle des deux filtrations on considère, elle ne dépend que de la donnée du cardinal $\pi'$ et de la sous-catégorie $\mathcal{F}^{\pi'}$ de $\mathcal{M}$. Reste la majoration de cardinaux, dans le cas où on s'intéresse à la *régularité* de $\pi'$ pour les fcga envisagées. La majoration exigée est la même, mais la condition préalable de validité de cette majoration, savoir

$$\pi'^{\pi} \ \geqslant\ \pi'_1 \qquad \text{resp.} \qquad \pi'^{\pi} \ \geqslant\ \pi_1\ ,$$

n'est pas la même. Comme $\pi'_1 \geqslant \pi_1$, on voit que la condition préalable est moins restrictive dans le cas de la première filtration, que de la seconde, d'où le "il suffit" dans la dernière assertion. Mais lorsque $2^\pi \geqslant \pi'_1$, même la plus restrictive est automatique-

[page 184]

ment vérifiée, puisque $\pi'^{\pi} \geqslant 2^\pi \geqslant \pi'_1$, et alors la régularité de $\pi$ pour la deuxième filtration implique la régularité pour le première, q.e.d.

**Corollaire 4.7.18.** *Supposons* $\pi_0$ *régulier pour la fcga* ([77])*. Si on restreint la fcga* $(\mathcal{F}^\pi)_{\pi\geqslant\pi_0}$ *aux cardinaux* $\pi \geqslant \pi'_0$*, où* $\pi'_0 \geqslant \pi_1$*, alors on trouve une fcga où la majoration de cardinaux (pour* $\pi = \pi^{\pi_0}$*) est valable sans condition préalable* $\pi'^{\pi} \geqslant \pi'_1$ *; plus précisément, on a alors*

(4.7.18.1) $$\pi'_1 \ \leqslant\ 2^{(\pi'^{\pi_0}_0)} \qquad (\textit{a fortiori } \pi'_1 \leqslant 2^{(2^{\pi'_0})}),$$

*donc la condition préalable* $\pi'^{\pi} \geqslant \pi'_1$ *est automatiquement vérifiée si* $\pi \geqslant \pi_0$*,* $\pi = \pi^{\pi'_0}$*,* $\pi' > \pi$ *(cf. remarque 4.7.7.2).*

Ceci équivaut donc à la majoration de cardinaux suivante (appliquée au cas de $\pi = \pi'_0$).

**Lemme 4.7.19.** *Supposons* $\pi_0$ *régulier pour la fcga* $(\mathcal{F}^\pi)_{\pi\geqslant\pi_0}$*. Alors pour tout cardinal* $\pi \geqslant \pi_1$ *(*$\overset{\text{déf}}{=} \sup(\pi_0, \operatorname{card}\operatorname{réd}\mathcal{F}^{\pi_0})$*), on a*

(4.7.19.1) $$\operatorname{card}\operatorname{réd}\mathcal{F}^\pi \ \leqslant\ 2^{(\pi^{\pi_0})}\ ,$$

[77] Il suffit pour cela que $\pi_0$ soit utile, i.e. $\mathcal{M} \xleftarrow{\sim} \operatorname{Ind}_{\pi_0}(\mathcal{F}^{\pi_0} = \mathcal{M}_{\pi_0})$, cela implique régulier, cf. 4.8.5.

*et si* $\pi' \geqslant \pi_1$ *et* $F \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{F}^{\pi'}$, *on a*

$$\mathrm{card\,réd}\,\mathcal{F}^{\pi}/F \;\leqslant\; \pi'^{(\pi^{\pi_0})} \tag{4.7.19.2}$$ ([78]) .

`[page 185]`

Démonstration du lemme. Comme $\pi_0$ est régulier, posant $C = \mathcal{F}^{\pi_0} = \mathcal{M}_{\pi_0}$, on trouve $\mathcal{M} \simeq \mathrm{Ind}_{\pi_0}(C)$, donc on peut supposer $\mathcal{M} = \mathrm{Ind}_{\pi_0}(C)$, et appliquer les résultats prouvés pour les catégories de cette forme. Comme $\mathcal{F}^{\pi} \subset \mathcal{M}_{\pi}$, $\mathcal{F}^{\pi'} \subset \mathcal{M}_{\pi'}$, les majorations (4.7.9.1) et (4.7.9.2) sont contenues dans
(∗)

$$\left\{\begin{array}{rcll} \mathrm{card\,réd}\,\mathcal{M}_{\pi} & \leqslant & 2^{(\pi^{\pi_0})} & \\ \mathrm{card\,réd}\,\mathcal{M}_{\pi}/F & \leqslant & \pi'^{(\pi^{\pi_0})} & \text{si } F \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{M}_{\pi'}, \text{ avec} \\ & & & \pi' \geqslant \pi \geqslant \pi_1. \end{array}\right\} \text{ pour } \pi \geqslant \pi_1$$ ([79]).

La première de ces majorations n'est autre que la deuxième majoration dans 4.7.7.1. Notons qu'on a bien

$$2^{(\pi^{\pi_0})} \;\leqslant\; 2^{(2^{\pi})} ,$$

ce qui résulte en effet de

$$\pi^{\pi_0} \;\leqslant\; 2^{\pi} ,$$

qu'on prouve en notant que $\pi < 2^{\pi}$, d'où $\pi^{\pi_0} \leqslant (2^{\pi})^{\pi_0} = 2^{\pi\cdot\pi_0} = 2^{\pi}$ puisque $\pi \geqslant \pi_0$. Il reste à établir la deuxième majoration

$$(*) \qquad \mathrm{card\,réd}\,\mathcal{M}_{\pi}/F \;\leqslant\; \pi'^{(\pi^{\pi_0})} \qquad \text{si } F \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{M}_{\pi'}, \text{ avec } \pi' \geqslant \pi \geqslant \pi_1 .$$

(On n'en a pas besoin pour 4.7.18, mais ce sera sans doute utile par ailleurs.) On utilise $\mathcal{M}_{\pi'} \subset \mathrm{Filt}^{\pi'^{\pi_0}}$ si $\pi' \geqslant \pi_1$ (4.7.6.2), donc si $F \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{M}_{\pi'}$, on a

`[page 186]`

$$\mathrm{card}\,F(x) \longrightarrow \pi'^{\pi_0} \qquad \forall\, x \in \mathrm{Ob}\,C ,$$

donc si $G \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{M}_{\pi} \subset \mathrm{Ob}\,\mathrm{Filt}^{\pi^{\pi_0}}$, d'où

$$\mathrm{card}\,G(x) \;\leqslant\; \pi^{\pi_0} \qquad \forall\, x \in \mathrm{Ob}\,C ,$$

on trouve

$$\mathrm{card\,Hom}(G,F) \;\leqslant\; \underbrace{\underbrace{\mathrm{card}\,(\mathrm{Ob}\,C)}_{\leqslant \pi_1}\cdot(\pi'^{\pi_0})^{(\pi^{\pi_0})}}_{\pi'^{\pi_0\cdot\pi^{\pi_0}} = \pi'^{(\pi^{\pi_0})}} ,$$

d'où

$$\mathrm{card\,Ob}\,\mathcal{M}_{\pi}/F \;\leqslant\; \underbrace{\underbrace{\mathrm{card}\,(\mathrm{Ob}\,\mathcal{M}_{\pi})}_{\leqslant 2^{(\pi^{\pi_0})}}\cdot\pi'^{(\pi^{\pi_0})}}_{\gamma = \pi'^{\pi^{\pi_0}}} ,$$

[78]**N.B.** J'ignore si on peut remplacer dans ces majorations $\pi^{\pi_0}$ par $\pi_0$.

[79]Comparer avec majorations $\mathrm{card\,réd\,Filt}^{\pi} \leqslant 2^{\pi}$, $\mathrm{card\,réd\,Filt}^{\pi}/F \leqslant \pi'^{\pi}$, si $F \in \mathrm{Ob\,Filt}^{\pi'}$, avec $\pi' \geqslant \pi \geqslant \pi_1$, majorations plus agréables que celles de (4.7.19). Il faudrait quand même s'assurer sur un exemple si les majorations plus sympathiques ne seraient pas valables dans le cas général.

et enfin

$$\operatorname{card} \operatorname{Fl} \mathcal{M}_\pi / F \;\leqslant\; \underbrace{\underbrace{\gamma \cdot \gamma}_{\gamma = \pi'(\pi^{\pi_0})} \cdot \underbrace{\operatorname{card}(\operatorname{Fl} \mathcal{M}_\pi)}_{\leqslant 2^{(\pi^{\pi_0})}}}_{\pi'(\pi^{\pi_0})} ,$$

ce qui est la majoration annoncée (la même que celle prouvée dans 4.5.12, la démonstration étant essentiellement la même).

[page 187]

**4.7.20.** Une fcg canonique est dite *maximale* (où *strictement canonique*) si elle n'est par déduite d'une fcg canonique strictement plus étendue $(\mathcal{F}^\pi)_{\pi \geqslant \pi_{00}}$ (donc avec $\pi_{00} < \pi_0$). Donc si $\mathcal{M}$ admet une fcga, alors elle admet même une fcg strictement canonique, et cette dernière est de plus unique. On va revenir là-dessus dans la section suivante.

## 4.8 Catégories $\mathfrak{U}$-accessibles

**Proposition 4.8.1.** *Soit $\mathcal{M}$ une $\mathfrak{U}$-catégorie, $\pi_0$ un cardinal infini. Considérons les conditions suivantes :*

*a) $\mathcal{M}$ satisfait à $L_{\pi_0}$ (i.e. est stable par petites $\varinjlim$ grandes devant $\pi_0$), et contient une petite sous-catégorie pleine $S$* strictement génératrice, *formée d'objets $\pi_0$-accessibles.*

*b) Il existe une petite catégorie $C$, et une équivalence de catégories*

$$\mathcal{M} \;\simeq\; \operatorname{Ind}_{\pi_0}(C) \,.$$

*c) $\mathcal{M}$ admet une filtration cardinale généralisée accessible $(\mathcal{F}^\pi)_{\pi \geqslant \pi_0}$, ayant $\pi_0$ comme cardinal initial, et telle que $\pi_0$ soit un cardinal utile pour ladite filtration.*

[page 188]

*c′) Comme c), avec $\pi_0$ cardinal régulier (et non seulement utile) pour la filtration cardinale généralisée accessible en question, et cette filtration étant supposée de plus* canonique.

*On a alors le diagramme d'implications*

$$c' \qquad \Longleftrightarrow \qquad c \qquad \Longleftrightarrow \qquad b \qquad \Longrightarrow \qquad a\,.$$

**4.8.1.1.** Il me faut ici préciser la terminologie, sur ce que j'entends par sous-catégorie (pleine) $C$ *strictement génératrice* dans $\mathcal{M}$. Pour ceci, je me réfère à SGA 4 I 7.2, (i), aux conditions équivalentes b) et c) de loc. cit. :

(b) $\forall\, F \in \operatorname{Ob} \mathcal{M}$, la flèche canonique

$$\varinjlim_{i \in C/F} x_i \longrightarrow F$$

est un isomorphisme.

(c) Le foncteur canonique

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M} & \longrightarrow & C^\wedge \\ F & \longmapsto & (\underbrace{x}_{\in \operatorname{Ob} C} \longmapsto \underbrace{\operatorname{Hom}_{\mathcal{M}}(x, F)}_{\in \operatorname{Ob}(\mathrm{Ens})}) \end{array}$$

est pleinement fidèle.

Ces conditions impliquent :

a) $C$ est génératrice dans $\mathcal{M}$ par épimorphismes stricts, i.e. pour tout $F$ dans $\mathcal{M}$, la famille des flèches $x \longrightarrow F$ de source dans $C$, de but $F$, est épimorphique stricte.

Et lorsque $\mathcal{M}$ est stable par produits fibrés, cette condition a) est équivalente aux précédentes. Dans loc. cit. j'affirme

`[page 189]`

cette équivalence sans hypothèse restrictive sur $\mathcal{M}$ – mais en annotation marginale j'affirme que cette assertion est *fausse,* en dehors de l'hypothèse d'existence des produits fibrés dans $\mathcal{M}$. Pourtant, je viens de vérifier la démonstration donnée dans loc. cit. de l'implication a $\Longrightarrow$ b, et elle est correcte. Mais peut-être l'annotation résulte-t-elle d'une confusion entre la condition a), et la condition suivante, plus faible a priori, et qui lui ressemble comme un frère :

a$'$) Il existe une famille de flèches $u_i : x_i \longrightarrow F$, de source dans $C$, et de but $F$, qui est épimorphique stricte (cf. SGA 4 I 10.3).

On a envie de dire que quand on *agrandisse* une famille de flèches épimorphique stricte, en rajoutant d'autres flèches de même but, elle doit rester épimorphique stricte ("a fortiori") – ce qui donne l'impression que a$'$) doit impliquer a), donc lui être équivalent. Mais si on essaye de prouver cette propriété hypothétique

`[page 190]`

de stabilité pour les familles épimorphiques strictes, on voit qu'on n'y arrive que si on suppose que la famille initiale est de plus *épimorphique universelle* (si les produits fibrés existent dans $\mathcal{M}$), ou (sous la réserve précédente) si pour tout $x' \longrightarrow F$, le crible de $\mathcal{M}/F'$ image inverse du crible de $\mathcal{M}/F$ engendré par les $x_i \longrightarrow F$ est un "crible épimorphique". Cela fait entrevoir en effet qu'il doit y avoir des cas où la condition a$'$) est satisfaite, mais non la condition a) (équivalente à b et à c).

Mais nous sommes alors confrontés à la situation très déplaisante : si $C$ est une sous-catégorie strictement génératrice de $\mathcal{M}$, il ne s'ensuit pas pour autant qu'une sous-catégorie pleine $C'$ de $\mathcal{M}$ telle que $C' \supset C$ soit également strictement génératrice ! Or j'ai toujours utilisé précédemment, sans y réfléchir à deux fois, qui si $C$ est strictement génératrice, il en est de même de $C' \supset C$. Donc il faudra que je sois à présent très attentif,

`[page 191]`

et que je vérifie si cette erreur $\pm$ tacite rend inopérantes certaines démonstrations, voire même, rend faux certains énoncés. Aussi, il me faudrait donner un exemple où $C$ est strictement génératrice, mais $C' \supset C$ ne l'est pas.

Finalement, réflexion faite, ces ennuis craints disparaissent. Je vais énoncer un résultat en forme :

**Proposition 4.8.2.** *Soient $C$, $\mathcal{M}$ deux $\mathfrak{U}$-catégories, $i : C \longrightarrow \mathcal{M}$ un foncteur, d'où un foncteur*

$$\left\{ \begin{aligned} \varphi \ &: \ \mathcal{M} \longrightarrow C^{\wedge} \\ \varphi(X) \ &= \ (x \longmapsto \operatorname{Hom}_{\mathcal{M}}(i(x), X)) \end{aligned} \right. \tag{4.8.2.1}$$

*(foncteur composé* $\mathcal{M} \xrightarrow{can.} \mathcal{M}^\wedge \underbrace{\xrightarrow{i^*}}_{\text{i.e. composition avec } i} C^\wedge$*). Pour tout* $X$ *dans* $\mathcal{M}$*, on considère la catégorie* $C/X \simeq C/\varphi(X)$*, et l'injection* [?] *canonique (dans* $\mathcal{M}^\vee$*)*

(4.8.2.2) $$\varinjlim_{x \in C/X} i(x) \longrightarrow X \, .$$

*1°) Considérons les conditions suivantes.*

- a *Pour tout* $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{M}$*, la famille des flèches* $i(x) \longrightarrow X$*, indexée par* $\operatorname{Ob} C/X$*, est épimorphique stricte.*

[page 192]

- b *Pour tout* $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{M}$*, la flèche canonique 4.8.2.2. est un isomorphisme, i.e. fait de* $X$ *une* $\varinjlim$ *des foncteurs canoniques* $C/X \longrightarrow \mathcal{M}$*.*
- c *Le foncteur* $\varphi$ *(4.8.2.1) est pleinement fidèle.*

*On a alors les implications*

$$\mathrm{b} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{c} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{a} \, ,$$

*et si on suppose* $i$ *pleinement fidèle, alors les trois conditions* a, b, c *sont équivalentes.* (**N.B.** On dit que le foncteur $i : C \longrightarrow \mathcal{M}$ est *strictement générateur,* si les conditions équivalentes b, c sont satisfaites. Si $C$ est une sous-catégorie de $\mathcal{M}$ (pas nécessairement pleine), on dit que $C$ est *strictement génératrice* si le foncteur d'inclusion est strictement générateur, i.e. satisfait aux conditions équivalentes b), c). Pour ceci, il faut donc que la condition a) soit satisfaite, i.e. que pour tout $X$ dans $\mathcal{M}$, la famille des flèches $x \longrightarrow X$ de source dans $C$, de but $X$, soit épimorphique stricte, et cette condition est aussi suffisante quand $C$ est sous-catégorie pleine de $\mathcal{M}$.)

*2°)* ([80]). *Supposons que* $i$ *soit strictement générateur* ([81]). *Alors pour tout objet* $X$ *de* $\mathcal{M}$*, la famille des flèches* $i(x) \longrightarrow X$*, indexée par* $\operatorname{Ob} C/X$*, est non seulement épimorphique stricte (condition a) dans 1°), mais de plus, toute famille de flèches de but* $X$*, incluant la famille précédente, est également épimorphique stricte.*

*3°) Considérons un diagramme commutatif de foncteurs de* $\mathfrak{U}$*-catégories :*

[page 193]

$$\begin{tikzcd} C \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "i"'] & & C' \arrow[dl, "i'"] \\ & E & \end{tikzcd}$$

*Si le foncteur* $i$ *est strictement générateur* ([82]), *et si de plus* $i'$ *est pleinement fidèle, alors* $i'$ *est strictement générateur.*

**Corollaire 4.8.3.** *Soit* $\mathcal{M}$ *une* $\mathfrak{U}$*-catégorie,* $C$ *une sous-catégorie strictement génératrice,* $C'$ *une sous-catégorie* pleine *de* $\mathcal{M}$ *qui contient* $C$*, alors* $C'$ *est strictement génératrice.*

C'est en effet un cas particulier de 4.8.2 3°.

[80] [2° se trouve sur la page 193.]
[81] Il suffit même qu'il satisfasse la condition plus faible a) de 1°).
[82] En fait, il suffit qu'il satisfasse la condition plus faible c) de 1°).

[page 194]

Démonstration de 4.8.2. La démonstration de 1°) est celle de SGA 4 I 7.2 (i). (Où on suppose que $C$ est une sous-catégorie pleine de $\mathcal{M}$, mais la démonstration donnée prouve en fait l'énoncé donné ici.) Prouvons 2°). Rajoutons donc à la famille des

$$i(x) \longrightarrow X \qquad (x \in \operatorname{Ob} C/X)$$

une famille

$$X_\alpha \xrightarrow{p_\alpha} X \qquad (\alpha \in A)$$

de nouvelles flèches, et prouvons que la famille totale ainsi obtenue est encore épimorphique stricte. On doit donc prouver que si $V$ est un objet de $\mathcal{M}$, et si on a une famille de flèches $u_x : i(x) \longrightarrow Y$, $u_\alpha : Y_\alpha \longrightarrow Y$, satisfaisant la condition de compatibilité habituelle pour des couples de flèches :

$$(v_x, v_y) \qquad \begin{tikzcd} & i(x) \arrow[dr, dotted, "p_x"] & \\ Z \arrow[ur, "v_x"] \arrow[dr, "v_y"'] & & X \\ & i(y) \arrow[ur, dotted, "p_y"'] & \end{tikzcd} ,$$

ou

$$(v_x, v_\alpha) \qquad \begin{tikzcd} & i(x) \arrow[dr, dotted, "p_x"] & \\ Z \arrow[ur, "v_x"] \arrow[dr, "v_\alpha"'] & & X \\ & X_\alpha \arrow[ur, dotted, "p_\alpha"'] & \end{tikzcd} ,$$

[page 195]

ou

$$(v_\alpha, v_\beta) \qquad \begin{tikzcd} & X_\alpha \arrow[dr, dotted] & \\ Z \arrow[ur, "v_\alpha"] \arrow[dr, "v_\beta"'] & & X \\ & X_\beta \arrow[ur, dotted] & \end{tikzcd} ,$$

savoir les relations

$$(*) \qquad \left\{ \begin{aligned} v_x &= u_y v_y \\ u_x v_x &= u_\alpha v_\alpha \\ u_\alpha v_\alpha &= u_\alpha v_\beta \,, \end{aligned} \right.$$

alors il existe une flèche

$$u \,:\, X \longrightarrow Y$$

(nécessairement unique, d'après la propriété c) d'épimorphicité stricte de la famille initiale indexée par $C/X$) telle qu'on ait

$$(*)\qquad \begin{cases} up_x = v_x & \text{pour tout } x \in \operatorname{Ob} C/X \\ up_\alpha = v_\alpha & \text{pour tout } \alpha \in A. \end{cases}$$

Or d'après la propriété a), il existe un unique $u : X \longrightarrow Y$, de telle façon que la première des relations $(*)$ soit satisfaite, pour tout $x \in \operatorname{Ob} C/X$. Donc il s'agit seulement de prouver que pour cet $u$, on a pour tout $\alpha$ la relation

`[page 196]`

$$up_\alpha = u_\alpha .$$

Or, en appliquant la propriété a) à $X_\alpha$ au lieu de $X$, on veut que la famille des flèches

$$i(y) \xrightarrow{q_y} X_\alpha$$

(indexée par $C/X_\alpha$) est épimorphique stricte, a fortiori épimorphique. Donc pour prouver $up_\alpha = u_\alpha$, il suffit de prouver qu'on a

$$(**)\qquad (up_\alpha)q_y = u_\alpha q_y$$

pour toute $y$ dans $C/X_\alpha$. Mais c'est là une conséquence de la compatibilité $(*)$ (deuxième formule), appliquée au cas suivant,

$$\begin{tikzcd} & i(y) \arrow[dr, dotted, "p_\alpha q_y = p_x"] & \\ Z = i(y) \arrow[ur, "\mathrm{id}"] \arrow[dr, "q_y"'] & & X \ , \\ & X_\alpha \arrow[ur, dotted, "p_\alpha"'] & \end{tikzcd}$$

on a donc, en posant $x = (y, p_\alpha q_y) \in \operatorname{Ob} C/X$,

$$\underbrace{u_x \circ \mathrm{id}_{i(y)}}_{u_x} = u_\alpha q_y \ ,$$

donc pour prouver $(**)$, il reste à vérifier

$$u_x = \underbrace{(up_\alpha)q_y}_{u(p_\alpha q_y) = up_x} \ ,$$

`[page 197]`

qui est en effet vérifiée par définition de $u_x$. Cela achève de prouver 2°.

Prouvons 3°. Comme $i'$ est pleinement fidèle, en vertu de 1°, pour prouver que $i'$ est strictement génératrice, il suffit d'établir que pour tout objet $X$ de $\mathcal{M}$, la famille des flèches $i'(x') \longrightarrow X$, indexée par $\operatorname{Ob} C'/X$, est épimorphique stricte. Or cette famille contient la famille des $\underbrace{i'(\alpha(x))}_{=i(x)} \longrightarrow X$, indexée par $\mathrm{Ob}\, C/X$. Donc il résulte de l'hypothèse sur $i$, et de 2°, que cette famille est épimorphique stricte. On a gagné ! Ouf ...

Démonstration de 4.8.1. On a

$$\mathrm{c}' \qquad \Longrightarrow \qquad \mathrm{c} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathrm{b} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathrm{a}\,,$$

la première implication tautologique, la seconde résultant du fait que $\pi_0$ cardinal régulier pour la fcga envisagée, implique que

$$\mathcal{M} \xleftarrow{\sim} \mathrm{Ind}_{\pi_0}(\mathcal{F}^{\pi_0})\,,$$

$\mathcal{F}^{\pi_0}$ équivalente à une petite catégorie, d'où b).

[page 198]

Enfin b) $\Longrightarrow$ a) résulte du fait que $\mathrm{Ind}_{\pi_0}(C)$ est stable par $\varinjlim$ grandes devant $\pi_0$ (4.4.15), et que $C$ est une sous-catégorie strictement génératrice de $\mathrm{Ind}_{\pi_0}(C)$, formée d'objets $\pi_0$-accessibles. Il nous faut expliciter le

**Lemme 4.8.4.** *Soit $C$ une $\mathfrak{U}$-catégorie, $\pi_0$ un cardinal infini. Alors $C$ est strictement génératrice dans $\mathcal{M} = \mathrm{Ind}\, C$ et dans $\mathcal{M} = \mathrm{Ind}_{\pi_0} C$.*

[page 199]

En effet, le foncteur canonique $\mathcal{M} \longrightarrow C^\wedge$ est pleinement fidèle, et on applique le critère c) de 4.8.2.

Pour achever de prouver 4.8.1, il reste donc à établir l'implication

$$\mathrm{a} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathrm{c}'\,.$$

Supposons donc que $\mathcal{M}$ satisfasse à $\mathrm{L}_{\pi_0}$, et admette une petite sous-catégorie strictement génératrice $S$, formée d'objets $\pi_0$-accessibles, donc un foncteur canonique

$$\mathrm{Ind}_{\pi_0} S \longrightarrow \mathcal{M}\,,$$

prolongeant l'inclusion $S \hookrightarrow \mathcal{M}$, de façon à commuter aux $\varinjlim$ grandes devant $\pi_0$, et du fait que $S \subset \mathcal{M}_{\pi_0}$, ce foncteur est *pleinement fidèle.* Mais comment prouver qu'il est essentiellement surjectif ? Ce ne sera d'ailleurs pas vrai sans autre hypothèse sur $S$. L'idée naturelle est de saturer $S$ pour les $\varinjlim$

[page 200]

de cardinal $\leqslant \pi_0$ représentables dans $\mathcal{M}$, et notamment par facteurs directs, mais même alors (et même en admettant que $\mathcal{M}_{\pi_0}$ lui-même est équivalent à une petite catégorie, et prenant $C = \mathcal{M}_{\pi_0}$), il n'est pourtant pas clair que le foncteur pleinement fidèle $\mathrm{Ind}_{\pi_0} C \longrightarrow \mathcal{M}$ soit essentiellement surjectif, ce qui équivaudrait aussi à dire que pour tout $F$ dans $\mathcal{M}$, $C/F$ est grande devant $\pi_0$. Il n'est en effet pas même clair que $C/F$ soit filtrante.

Donc finalement, je doute qu'on ait a) $\Longrightarrow$ c$'$) ou seulement a) $\Longrightarrow$ b), la situation n'est pas bien comprise visiblement.

Mais prouvons quand même

$$\mathrm{b} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathrm{c}'\,.$$

Pour ceci, on peut supposer $\mathcal{M} = \mathrm{Ind}_{\pi_0}C$, $C$ petite. On sait alors que la filtration de $\mathcal{M}$ par les $(\mathcal{M}_\pi)_{\pi \geqslant \pi_0}$ est une fcga (prop. 4.7.7 et définition 4.7.8), et même une fcg *canonique.* De plus, je dis que le cardinal $\pi_0$ est *utile* et même régulier pour cette filtration (ce qui achèvera de prouver c′). On a un résultat un peu plus précis :

`[page 201]`

**Corollaire 4.8.5.** *Soient $C$ une catégorie équivalente à une petite catégorie, $\pi_0$ un cardinal infini, $\mathcal{M} = \mathrm{Ind}_{\pi_0}(C) \subset C^\wedge$. Alors :*

*1°) $\pi_0$ est un cardinal utile et même régulier pour la fcg canonique $(\mathcal{M}_\pi)_{\pi \geqslant \pi_0}$ de $\mathcal{M}$.*

*2°) $\mathcal{M}_{\pi_0} = C^\natural$ (sous-catégorie pleine de $\mathcal{M} = \mathrm{Ind}_{\pi_0}C$ formée des facteurs directs dans $\mathcal{M}$ d'objets de $C$), et $\mathcal{M}_{\pi_0}$ est une enveloppe de Karoubi de $C$.*

([83], [84]).

Démonstration.

1°) On sait déjà que

$$(*) \qquad \mathrm{Ind}_{\pi_0}\mathcal{M}_{\pi_0} \longrightarrow \mathcal{M}$$

est pleinement fidèle, et pour voir que c'est essentiellement surjectif, on note que l'on a

$$\mathcal{M} \simeq \mathrm{Ind}_{\pi_0}C \hookrightarrow \mathrm{Ind}_{\pi_0}\mathcal{M}_{\pi_0} \longrightarrow \mathcal{M}\ ,$$

le composé étant isomorphe au foncteur identique, est essentiellement surjectif, donc aussi $(*)$. Cela prouve donc que $\pi_0$ est un cardinal utile pour la filtration envisagée, prouvons que ce cardinal est même régulier, donc que pour

$$F \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{M}_\pi\ , \qquad \text{avec } \pi > \pi_0,\ \pi^{\pi_0} \geqslant \pi_1$$

on a

$$F = \varinjlim_I x_i\ , \qquad x_i \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{M}_{\pi_0},\ I \text{ grande devant } \pi_0,\ \mathrm{card}\, I \leqslant \pi^{\pi_0}.$$

`[page 202]`

Pour ceci, on utilise (4.7.6.2), page 171,

$$\mathcal{M}_\pi \subset \mathrm{Filt}^{\pi^{\pi_0}} \qquad (\text{si } \pi \geqslant \pi_0,\ \pi^{\pi_0} \geqslant \pi_1),$$

[83]**Corollaire 4.8.5.1.** *Si $C$ est karoubienne, alors $\mathcal{M}_{\pi_0} \subset C^\wedge$ est la catégorie formée des foncteurs* représentables *dans $C \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_{\pi_0}$.*

[84]**4.8.5.2.** Expliciter aussi ceci : Soit $u : C \longrightarrow C'$ un foncteur, avec $C$, $C'$ équivalentes à des petites catégories. Conditions équivalentes :

a) $u$ induit $\mathrm{Kar}\, C \xrightarrow{\sim} \mathrm{Kar}\, C'$.

a′) $u$ pleinement fidèle, et tout objet de $C'$ est isomorphe à un facteur direct d'un objet de l'image essentielle.

b) $\mathrm{Ind}(u) : \mathrm{Ind}(C) \longrightarrow \mathrm{Ind}(C')$ est une équivalence.

c) $\mathrm{Ind}_{\pi_0}(u) : \mathrm{Ind}_{\pi_0}(C) \longrightarrow \mathrm{Ind}_{\pi_0}(C')$ est une équivalence ($\pi_0$ un cardinal infini donné).

d) $u_! : C^\wedge \longrightarrow C'^\wedge$ est une équivalence.

d′) $u_* : C'^\wedge \longrightarrow C^\wedge$ est une équivalence `[plutôt` $u_* : C^\wedge \longrightarrow C'^\wedge$`]`.

d″) $u^* : C'^\wedge \longrightarrow C^\wedge$ est une équivalence.

et la définition de $\mathrm{Filt}^{\pi'}$ (pour $\pi' \geqslant \pi_0$) nous montre que c'est là la conclusion cherchée.

Prouvons donc 2°). Comme $\mathcal{M}_{\pi_0}$ est stable par les $\varinjlim$ inductives finies qui sont représentables dans $\mathcal{M}$ (SGA 4 I 9.9), il est stable par facteurs directs, et comme il contient $C$, on a donc $C^\natural \subset \mathcal{M}_{\pi_0}$. L'inclusion inverse $\mathcal{M}_{\pi_0} \subset C^\natural$ se voit de la façon standard, en écrivant un objet $F$ de $\mathcal{M}_{\pi_0}$ comme $\varinjlim_I x_i$, les $x_i$ dans $C$, $I$ grande devant $\pi_0$, alors $F$ est facteur direct d'un des $x_i$.

Le fait que $C^\natural$ est une *enveloppe de Karoubi* de $C$ dans $\mathcal{M} \subset C^\wedge$ provient du fait que $\mathcal{M}$ est stable par facteurs directs, et que $C$ est une sous-catégorie pleine de $\mathcal{M}$, cf. SGA 4 I ( ? ...).

**4.8.6. Questions ouvertes.** On a ainsi prouvé 4.8.1 revu et corrigé. Il reste la question :

1) Donner un exemple où 4.8.1 a) est vérifié, mais non b) etc. ([85]).
2) Dégager des conditions supplémentaires serviables qui, jointes à a), impliquent b), donc c, c′.

`[page 203]`

Signalons aussi pour mémoire les questions suivantes.

3) Soit $\mathcal{M} = \mathrm{Ind}_{\pi_0}(C)$, et $\pi > \pi_0$. Alors $\mathrm{Filt}^\pi$ est-il stable par facteurs directs ? Cela est-il vrai du moins si $\pi = \pi^{\pi_0}$, ou ce qui revient au même (cf. 4.7.3), a-t-on dans ce cas $\mathrm{Filt}^\pi = \mathrm{Filt}'^\pi$ ? Si oui, il serait inutile dans la description 4.7.7 des filtrations cardinales, dans la majoration de cardinaux (4.7.7.1), $\operatorname{card} I \leqslant \pi'^\pi$, de mettre l'hypothèse restrictive $\pi'^\pi \geqslant \pi_1$.

Pour avoir une réponse affirmative à cette question, pour $\pi$ donné, il suffirait (et probablement faudrait) d'avoir une réponse affirmative à celle-ci : Soient $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}_0$ deux catégories grandes devant $\pi_0$, $\mathcal{D}_0$ facteur direct de $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}$ admettant une catégorie cofinale $I$ grande devant $\pi_0$, de cardinal $\leqslant \pi$. Alors en est-il de même de $\mathcal{D}_0$ ? Si $p$ est une rétraction de $\mathcal{D}$ sur $\mathcal{D}_0$, la difficulté est que je ne sais pas si $p$ est foncteur cofinal. En fait, je vois que

`[page 204]`

ce n'est pas toujours le cas, même si $\mathcal{D}$ est finie. Prenons p.ex. pour $\mathcal{D}_0$ une catégorie ayant objet final $e$, et une flèche $x \longrightarrow e$ qui n'est pas un isomorphisme, et admettant une section (p.ex. $\mathcal{D}_0$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{\Delta}$ formée par $\mathbf{\Delta}_0$, $\mathbf{\Delta}_1$ : $\begin{tikzcd} \mathbf{\Delta}_0 \arrow[r, shift left, "\partial_0"] \arrow[r, shift right, "\partial_1"'] & \mathbf{\Delta}_1 \arrow[l, bend left, "\kappa"] \end{tikzcd}$ ). Soit $\mathcal{D}$ déduit de $\mathcal{D}_0$ en ajoutant un objet final $\tilde{e}$. Alors $\mathcal{D}_0$, $\mathcal{D}$ sont filtrantes, et on obtient une rétraction de $\mathcal{D}$ sur $\mathcal{D}_0$, envoyant $\tilde{e}$ sur $x$. Ce foncteur n'est pas cofinal, car un foncteur cofinal doit envoyer $\tilde{e}$ en $e$.

Plus généralement, si $\mathcal{D}_0$ est une catégorie telle qu'il existe une flèche

$$(*) \qquad \alpha : e_{\mathcal{D}_0^\wedge} \longrightarrow x_0$$

dans $\mathcal{D}_0^\wedge$, avec $x_0 \in \operatorname{Ob} \mathcal{D}_0$, alors on voit que $\mathcal{D}_0$ est grande devant $\pi_0$ quel que soit le cardinal infini $\pi_0$, et que d'autre part, désignant encore par $\mathcal{D}$ la catégorie déduite de $\mathcal{D}_0$ en lui ajoutant un objet final, il y a une rétraction de $\mathcal{D}$ sur $\mathcal{D}_0$ qui envoie $e_{\mathcal{D}}$ dans $x_0$. Cette rétraction n'est cofinale que si $x_0$ est un objet final de $\mathcal{D}_0$, i.e. si et seulement si $(*)$ est un isomorphisme. Supposons qu'il n'en soit pas ainsi. Mais il y a un foncteur cofinal

[85] Il suffit de trouver un cardinal non régulier, pour la fcg canonique d'une $\mathcal{M} = \mathrm{Ind}_{\pi_0} C$.

de la sous-catégorie $I_0$ de $\mathcal{D}_0$, telle que $\mathrm{Ob}\, I_0 = \{x_0\}$, $\mathrm{Fl}\, I_0 = \mathrm{End}_{I_0}(x_0) = \{p, \mathrm{id}_{x_0}\}$, où $p$ est le composé $x_0 \xrightarrow{\text{can.}} e_{\mathcal{D}_0^\wedge} \xrightarrow{\alpha} x_0$. Donc pas de contre-exemple de cette façon !

[page 205]

4) Considérons $\mathcal{M} = \mathrm{Ind}_{\pi_0}(C)$, $C$ petite, et considérons la filtration canonique $(\mathcal{M}_\pi)_{\pi \geqslant \pi_0}$. Donner des exemples où il y a des cardinaux non utiles, ou mieux, ou pour tout cardinal $\pi$, existe un cardinal $\pi' > \pi$ qui soit non utile. (Cela donnera l'exemple demandé dans 1°.) D'autre part, donner des exemples de cardinaux utiles qui ne soient réguliers – si possible, comme tantôt, de tels cardinaux aussi grands qu'on veut.

**Définition 4.8.7.** Soit $\mathcal{M}$ une $\mathfrak{U}$-catégorie, $\pi_0$ un cardinal infini. On dit que $\mathcal{M}$ est $\pi_0$-*accessible* si $\mathcal{M}$ est équivalente à une catégorie $\mathrm{Ind}_{\pi_0}(C)$, $C$ une petite catégorie, i.e. si elle satisfait aux conditions équivalentes b, c, c′ de 4.8.1 (impliquant la condition a), sans doute strictement plus faible). On dit que $\mathcal{M}$ est accessible s'il existe un cardinal tel que $\mathcal{M}$ soit $\pi_0$-accessible (**N.B.** si $\pi_0$ est un tel cardinal, alors tout cardinal $\pi > \pi_0$ tel que $\pi^{\pi_0} = \pi$, notamment les cardinaux $\pi'^{\pi_0}$, avec $\pi' \geqslant 2$, ont la même propriété), ou ce

[page 206]

qui revient au même d'après 4.8.1, si $\mathcal{M}$ admet une fcga, ou encore une fcg canonique.

**Commentaire 4.8.8.** Cette définition est en contradiction avec la terminologie introduite dans SGA 4 I 9.4 (p. 114) ; on désignera dorénavant sous les noms de “catégorie faiblement $\pi_0$-accessible”, “catégorie faiblement accessible” les notions introduites dans 9.4 – i.e. les catégories admettant une sous-catégorie pleine génératrice (pas même strictement génératrice) dont les objets sont $\pi_0$-accessibles (resp. accessibles).

Notons que si $\mathcal{M}$ est $\pi_0$-accessible (resp. accessible), la condition de 4.8.1 nous dit que $\mathcal{M}$ est faiblement $\pi_0$-accessible (resp. faiblement accessible), et même qu'il existe une petite sous-catégorie pleine *strictement* génératrice, qui soit formée d'objets $\pi_0$-accessibles (resp. accessibles). Je doute fort que cette dernière condition nécessaire soit aussi suffisante pour que $\mathcal{M}$ soit $\pi_0$-accessible (resp. accessible). Mais en vertu de 4.6.3.3 (p. 150), il en est ainsi si on suppose $C$ stable par petites $\varinjlim$, ou ce qui revient au même, moyennant $\mathrm{L}_{\pi_0}$, stable par limites inductives de cardinal $\leqslant \pi_0$.

[page 207]

**Proposition 4.8.9.** *Soit $\mathcal{M}$ une $\mathfrak{U}$-catégorie accessible (4.8.7), $\pi_0$ un cardinal tel que $\mathcal{M}$ satisfait à $L_{\pi_0}$. Conditions équivalentes :*

*a) $\mathcal{M}$ est une catégorie paratopos (cf. 4.6.3, 3°, p. 150).*

*b) $\mathcal{M}$ est stable par petites limites inductives.*

*b′) $\mathcal{M}$ est stable par limites inductives de cardinal $\leqslant \pi_0$.*

*b″) (Si $\mathcal{M}$ est équivalente à une catégories* $\mathrm{Ind}_{\pi_0}C$*, avec $C$ une petite catégorie* karoubienne.*) La catégorie $C$ est stable (en elle-même) par limites inductives de cardinal $\leqslant \pi_0$.*

*c) $\mathcal{M}$ est stable par petites limites projectives.*

*c′) (Sous l'hypothèse $\mathcal{M} \simeq \mathrm{Ind}_{\pi_0}(C)$, et quand on se donne un cardinal $\pi$ tel que $\pi = \pi^{\pi_0} \geqslant \pi_1 = \sup(\pi_0, \mathrm{card}\,\mathrm{réd}\, C)$.) $\mathcal{M}_\pi$ est stable par $\varprojlim$ finies, et $\mathcal{M}$ est stable par petits produits infinis (ou encore, par $\varprojlim$ filtrantes).*

*c″) Il existe un cardinal infini $\pi$, et une petite catégorie $\mathcal{D}$ stable par $\varprojlim$ finies, telle que $\mathcal{M} \simeq \mathrm{Ind}_\pi(\mathcal{D})$, de plus $\mathcal{M}$ stable par produits infinis (ou encore par $\varprojlim$ filtrantes).* ([86], [87]).

DÉMONSTRATION. Les implications suivantes sont tautologiques, ou déjà ± connues :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{a} \arrow[r, Rightarrow] & \mathrm{b} \arrow[r, Rightarrow, "\text{cf. 4.4.14}"] \arrow[dl, Rightarrow] & \mathrm{b}' \arrow[r, Rightarrow, "\bullet"] & \mathrm{b}'' \\ \mathrm{c}\ ( \arrow[r, Rightarrow, "\bullet"] & \mathrm{c}' \arrow[r, Rightarrow] & \mathrm{c}'')\ , \end{tikzcd}$$

`[page 208]`

où seules les implications pointées b′ $\Longrightarrow$ b″ et c $\Longrightarrow$ c′ demandent une démonstration. Pour b′ $\Longrightarrow$ b″, on note que l'hypothèse $C$ karoubienne implique que $C \simeq \mathcal{M}_{\pi_0}$ (4.8.5, 2°), or on sait que $\mathcal{M}_{\pi_0}$ est stable dans $\mathcal{M}$ par limites inductives de cardinal $\leqslant \pi_0$ (et celles-ci sont représentables dans $\mathcal{M}$ en vertu de b′), donc $\mathcal{M}_{\pi_0}$ admet des $\varinjlim$ du type envisagé, donc $C$ aussi.

c $\Longrightarrow$ c′. Notons que si $\mathcal{M} = \mathrm{Ind}_{\pi_0}(C)$, alors les $\varprojlim$ représentables dans $\mathcal{M}$ se calculent dans $C^\wedge$. Il s'ensuit que si $\pi \geqslant \pi_1$, alors $\mathrm{Filt}^\pi$ est stable par $\varprojlim$ finies ($\mathrm{Filt}^\pi$ étant donné alors par la condition a″ de 4.7.1), d'autre part, si de plus $\pi^{\pi_0} = \pi$, $\pi$ est un cardinal utile, donc $\mathcal{M} \simeq \mathrm{Ind}_\pi(\mathcal{D})$, où $\mathcal{D} = \mathrm{Filt}^\pi = \mathcal{M}_\pi$. Il suffit maintenant de voir que $\mathrm{Ind}_\pi(\mathcal{D})$ est alors stable par $\varprojlim$ finies, pour conclure qu'il en est de même de $\mathcal{M}$, donc que $\mathcal{M}$ est stable par limites projectives quelconques, s'il l'est par petites produites ou par petites $\varprojlim$ filtrantes, d'où c′. Il reste donc à prouver le lemme suivant.

**Lemme 4.8.10.** *Soient $C$ une petite catégorie, $\pi_0$ un cardinal infini, $\pi_1 = \sup(\pi_0, \mathrm{card\,réd}\, C)$. Supposons $\mathrm{Ind}_{\pi_0}$ stable par $\varprojlim$ finies (resp. et d'un certain type). Alors pour tout $\pi \geqslant \pi_1$, $\mathrm{Filt}^\pi$ est stable par lesdites $\varprojlim$ . (Donc aussi $\mathcal{M}_\pi = \mathrm{Filt}^\pi$, si $\pi = \pi^{\pi_0}$.) Plus*

`[page 209]`

*généralement, soit $J$ une petite catégorie telle que $\mathrm{Ind}_{\pi_0} C$ soit stable par $\varprojlim$ de type $J$, et soit $c = \mathrm{card\,réd}\, J$, supposons que $\pi^c = \pi$ (p.ex. $c$ fini). Alors $\mathrm{Filt}^\pi$ est stable dans $\mathcal{M}$ par $\varprojlim$ de type $J$. (Donc il en est de même de $\mathcal{M}_\pi = \mathrm{Filt}^\pi$, si de plus $\pi^{\pi_0} = \pi$.)*

On utilise le critère a″ de 4.7.1, savoir $\mathrm{card}\, F(x) \leqslant \pi$ pour tout $x \in C$, pour l'appartenance à $\mathrm{Filt}^\pi$. On peut supposer $J$ réduite, donc $\mathrm{card\,Ob}\, J \leqslant c$. Comme le foncteur d'inclusion $\mathrm{Ind}_{\pi_0}(C) \longrightarrow C^\wedge$ commute aux $\varprojlim$ quelconques, le calcul de $\varinjlim_{j \in J} x_j$ dans $C^\wedge$ fibre par fibre montre que dans $C^\wedge$, on a

$$X \overset{\text{déf}}{=} \varinjlim_{j\in J} x_j = \underbrace{\prod_{j \in \mathrm{Ob}\, J} x_j}_{\text{produit dans } C^\wedge} \quad ,$$

[86] **N.B.** L'équivalence de c′, c″ avec les autres conditions n'est pas établie (ici, mais seulement dans 4.11 plus bas.)

[87] **N.B.** Les critères c′, c″ me paraissent plus techniques et moins utiles `[c′, c″ ci-dessus sont mis en parenthèses]`.

d'où

$$\operatorname{card} X(x) \leqslant \prod_{j \in \operatorname{Ob} J} \underbrace{\operatorname{card} x_j(x)}_{\leqslant \pi} \leqslant \pi^c \ ,$$

d'où (sans autre hypothèse sur $\pi$ que $\pi \geqslant \pi_1$)

(4.8.10.1) $$\varinjlim_{j \in J} x_j \in \operatorname{Ob} \operatorname{Filt}^{\pi^c} \ ,$$

d'où la conclusion voulue si $\pi^c = \pi$, q.e.d.

[page 210]

Nous allons prouver les implications supplémentaires

$$\mathrm{b}'' \Longrightarrow \mathrm{b} \ , \qquad \mathrm{c} \Longrightarrow \mathrm{b} \ , \qquad \mathrm{c}'' \overset{?}{\Longrightarrow} \mathrm{c} \ ,$$

ce qui achève la démonstration.

L'implication $\mathrm{b}'' \Longrightarrow \mathrm{a}$ est contenue dans 4.6.3.

Pour l'implication $\mathrm{c} \Longrightarrow \mathrm{b}$, on note que la stabilité de $\mathcal{M}$ par petites $\varinjlim$ équivaut à l'assertion que toute petite limite projective de foncteurs $\mathcal{M} \xrightarrow{\xi_i} \mathrm{Ens}$ représentables, est représentable. Or les objets de $\mathcal{M}$ étant accessibles ($\mathcal{M}$ étant accessible), les foncteurs représentables $\xi_i$ sont accessibles, donc aussi leur $\varprojlim$ (SGA 4 I 9.7). D'autre part, le foncteur $\xi$ est exact à gauche, comme $\varprojlim$ de foncteurs représentables donc exactes à gauche. Donc le fait que $\xi$ est représentable résulte du

**Lemme 4.8.11.** *Soit $\mathcal{M}$ une catégorie accessible, stable par $\varprojlim$ finies, $\mathcal{M} \longrightarrow \mathrm{Ens}$ un foncteur. Pour que $\xi$ soit représentable, il faut et il suffit qu'il soit exact à gauche et accessible. Donc (SGA 4 I 8.12.8.1) si $\mathcal{M}$ est stable par petites $\varprojlim$ , $\xi$ est représentable si et seulement s'il commute auxdites $\varprojlim$ , et qu'il soit accessible.*

[page 211]

Le "il faut" est remis pour mémoire, on vient de le voir comme conséquence du fait que tout objet de $\mathcal{M}$ est accessible. Le "il suffit" est essentiellement SGA 4 I 8.13.2.b), sauf que dans loc. cit. on suppose $\mathcal{M}$ munie d'une fc *stricte.* Mais la démonstration donnée dans loc. cit. montre aussi pour une fcga, en choisissant dans loc. cit. (p. 137) $\pi$ tel que $\xi$ soit $\pi$-accessible, et de plus $\pi$ soit utile pour la filtration cardinale généralisée envisagée.

Reste à prouver $\mathrm{c}'' \overset{?}{\Longrightarrow} \mathrm{c}$, sous réserve que ce soit bien vrai. Ce serait une conséquence du lemme suivant (où $\mathcal{D}$, $\pi$ sont remplacés par $C$, $\pi_0$).

**Lemme 4.8.12** (?) ([88]). *Soient $C_0$ une petite catégorie, $\pi_0$ un cardinal infini. Si $C$ est stable par $\varprojlim$ finies, alors $\mathrm{Ind}_{\pi_0} C$ également.*

L'assertion similaire pour $\mathrm{Ind}(C)$, au lieu de $\mathrm{Ind}_\pi C$, est établie dans SGA 4 I 8.9.1 c). Mais il n'est pas clair sans plus que $\mathrm{Ind}_\pi C$ soit stable dans $\mathrm{Ind}(C)$ par $\varprojlim$ finies, dans le cas envisagé. De façon précise, si $F = \varprojlim_{j \in J} F_j$, les $F_j$ dans $\mathrm{Ind}_\pi C$,

[page 212]

$F$ dans $\mathrm{Ind}(C) \subset C^\wedge$, on sait que $C/F$ est filtrant et il faut voir qu'il est filtrante grande

[88] Lemme non prouvé ici – cf. démonstration 4.11.7 (non achevée).

devant $\pi_0$. On est ramené aux trois cas où $J = \emptyset$, $J = e \amalg e$, et $J = \begin{tikzcd}[column sep=small] \bullet \arrow[dr] & & \bullet \arrow[dl] \\ & \bullet & \end{tikzcd}$. Les deux premiers cas sont essentiellement triviaux (car $e$, et un produit de deux catégories grandes devant $\pi_0$, sont grandes devant $\pi_0$), le troisième cas par contre n'a pas l'air triviale a priori. C'est lié visiblement à la question des représentations indicielles de foncteurs $J \longrightarrow \mathrm{Ind}_{\pi_0}(C)$, pour card réd $J \leqslant \pi_0$ – i.e. la validité de 4.4.13 b) en dehors de l'hypothèse que $C$ soit stable par $\varinjlim$ de cardinal $\leqslant \pi_0$. Il nous faudra y revenir très prochainement, car cette question m'apparaît à présent une question-clef, pour les propriétés de stabilité de la notion de catégorie accessible (en dehors d'aucune hypothèse d'existence de $\varinjlim$ ou $\varprojlim$ ).

**Proposition 4.8.13** ([89]). *Soit $C$ une catégorie équivalente à une petite catégorie, et soit $\pi_0 \geqslant \mathrm{card\,réd}\, C$ un cardinal infini. Alors $\mathcal{M} = \mathrm{Ind}_{\pi_0} C = \mathcal{M}_{\pi_0}$ (i.e. tous les objets de $\mathrm{Ind}_{\pi_0} C$ sont $\pi_0$-accessibles), et $\mathcal{M}$ est une enveloppe de Karoubi de $C$.*

[page 213]

Signalons tout de suite les corollaires suivants.

**Corollaire 4.8.14** ([90]). *Soit $\mathcal{M}$ une $\mathfrak{U}$-catégorie. Conditions équivalentes :*

*a) $\mathcal{M}$ est accessible, et est équivalent à une petite catégorie.*

*a′) $\mathcal{M}$ est accessible, et il existe un cardinal infini $\pi_0$ tel que tous les objets de $\mathcal{M}$ soient $\pi_0$-accessibles (i.e. $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{\pi_0}$).*

*b) $\mathcal{M}$ est équivalente à une petite catégorie, et est karoubienne, i.e. stable par facteurs directs* ([91]).

L'équivalence de a) et a′) est claire, puisque $\mathcal{M}$ admet une filtration cardinale généralisée canonique $(\mathcal{M}_\pi)_{\pi \geqslant \pi_0}$, formée des catégories équivalentes à des petites catégories (condition a) des fcg), et telle que toute telle sous-catégorie soit contenue dans un des $\mathcal{M}_\pi$ (résulte de la condition b) des fcg). Comme $\mathcal{M}_{\pi_0}$ est équivalente à une petite catégorie, et est karoubienne (étant stable par $\varinjlim$ filtrantes grandes devant $\pi_0$), il est clair aussi que a′) $\Longrightarrow$ b). Reste à prouver b) $\Longrightarrow$ a′), or cela résulte aussitôt de 4.8.13 appliqué à $\mathcal{M}$, qui montre de plus qu'on peut prendre pour $\pi_0$ n'importe quel cardinal infini tel que $\pi_0 \geqslant \mathrm{card\,réd}\, \mathcal{M}$.

[page 214]

**4.8.15.** Démonstration de 4.8.13. Nous allons prouver :

**Lemme 4.8.15.1.** *Sous les conditions de 4.8.13, soit $F \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{M}$, $x \in \mathrm{Ob}\, C$, alors*

$$(*) \qquad \mathrm{card}\, F(x) \ \leqslant \ \pi_0 \ .$$

Ceci signifie donc, en vertu de 4.7.7, a″ $\Longrightarrow$ b pour $\pi \geqslant \pi_1$, compte tenu qu'ici $\pi_J = \pi_0$, $\pi = \pi_0$, qu'on a $F \in \mathrm{Filt}^{\pi_0}$, d'où a fortiori $F \in \mathcal{M}_{\pi_0}$, ce qui implique $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{\pi_0}$, i.e. la proposition 4.8.13, compte tenu de 4.8.5. Donc tout revient à prouver $(*)$.

[89] *Pas prouvé.* Mais OK si $\pi_0 > \mathrm{card\,réd}\, C$, cf. 4.15.10, p. 462.

[90] *Pas prouvé.* Si finalement, cf. 4.15.10, et 4.15.11, pages 462-463.

[91] **N.B.** Ceci implique que $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}^\circ$ sont accessible, et je conjecture que la réciproque est vraie également.

Écrivons

$$F = \varinjlim_{i \in I} x_i \ , \qquad \text{les } x_i \in \operatorname{Ob} C,\ I \text{ ensemble ordonné grand devant } \pi_0,$$

d'où

$$F(x) = \varinjlim_{i \in I} \operatorname{Hom}_C(x, x_i) \ .$$

On peut supposer

$$\operatorname{card} C = \pi_0 \ ,$$

quitte à remplacer $C$ par une catégorie réduite équivalente.

Pour tout $\xi \in \operatorname{Ob} C$, soit

$$I_\xi = \{ i \in I \mid x_i = \xi \} \ ,$$

alors

$$I = \bigcup_{\xi \in \operatorname{Ob} C} I_\xi \ ,$$

[page 215]

réunion d'une famille de parties de $I$ de cardinal $\operatorname{card} \operatorname{Ob} C \leqslant \pi_0$. Comme $I$ est grand devant $\pi_0$, on voit que cela implique que l'ensemble des $I_\xi$ est cofinal dans $I$. Quitte à remplacer $I$ par $I_\xi$, on peut supposer $I_\xi = I$, i.e. que tous les $x_i$ sont égaux à un même élément $\xi$. Quitte à remplacer $C$ par la sous-catégorie pleine $C_0 = \{\xi\}$, on peut supposer $C$ réduite à un seul élément. (Car si on prouve que $F$, en tant qu'objet de $\operatorname{Ind}_{\pi_0}(C_0)$, est facteur direct d'un objet de $C_0$ (i.e. de $\xi$), il en sera de même de $F$ en tant qu'objet de $\operatorname{Ind} C$). Donc on peut supposer

$$C = \{\xi\} \ ,$$

donc $C$ donné par le monoïde

$$M = \operatorname{End}_C(\xi) \ , \qquad \operatorname{card} M \leqslant \pi \ ,$$

et la donnée du système inductif $(x_i)_{i \in I}$ revient à la donnée d'un système d'éléments

$$\alpha_{ji} \in M \qquad (i, j \in I,\ i \leqslant j)$$

satisfaisant

$$\alpha_{ii} = 1 \ , \qquad \alpha_{kj}\alpha_{ji} = \alpha_{ki} \quad \text{si } i \leqslant j \leqslant k.$$

On a

$$F(\xi) = \varinjlim_{i \in I} M_i \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{où } M_i = M \ \forall\, i \in I, \text{ et } M_i \longrightarrow M_j \\ \text{est donné par} \\ \qquad\qquad u \longmapsto \alpha_{ji} u \ . \end{array} \right.$$

[page 216]

J'ai pu me ramener, par des arguments similaires ([92]), au cas où le monoïde $M = \mathrm{End}(\xi)$ est un monoïde de monomorphismes, i.e.

$$uv \;=\; uv' \qquad \Longrightarrow \qquad v \;=\; v' \qquad \text{si } u, v, v' \in \mathcal{M} \;,$$

ce qui implique que les flèches de transition dans le système inductif des $M_i = M$ sont des monomorphismes. Il s'ensuit que l'on ne peut avoir $\mathrm{card}\, F(\xi) \leqslant \pi_0$ ($I$ étant grand devant $\pi_0$) que si $\alpha_{ji_0}$ est un isomorphisme pour $j \geqslant i_0$, et $i_0$ assez grand, i.e. si le système inductif induit pour $j \geqslant i_0$ est constant, a fortiori que le système inductif envisagé est essentiellement constant. Mais je viens de passer près de quatre heures pour essayer de prouver ce point, sans y être arrivé ! Cela semble plus délicat à prouver que je ne le prévoyais, mais je crois toujours que c'est bel et bien vrai.

[page 217]

## 4.9 Le théorème de représentation indicielle pour $\mathrm{Ind}_\pi(C)$

**4.9.1** ([93]). Soient $C$ une catégorie équivalente à une petite catégorie, $\pi_0$ un cardinal infini,

$$\mathcal{M} \;=\; \mathrm{Ind}_{\pi_0}(C) \;\subset\; C^\wedge \;, \tag{4.9.1}$$

$J$ une catégorie équivalente à une petite catégorie. Considérons l'inclusion pleinement fidèle $C \hookrightarrow \mathcal{M}$, et l'inclusion correspondante de $\mathfrak{U}$-catégories

$$\underline{\mathrm{Hom}}(J, C) \;\hookrightarrow\; \underline{\mathrm{Hom}}(J, \mathcal{M}) \qquad \text{(pleinement fidèle).} \tag{4.9.2}$$

On sait, comme $C \subset \mathcal{M}_{\pi_0}$, que les objets de $\underline{\mathrm{Hom}}(J, C)$ donnent des objets $\pi_0$-*accessibles* de $\underline{\mathrm{Hom}}(J, \mathcal{M})$, du moins si on suppose

$$\mathrm{card}\,\mathrm{réd}\, J \;\leqslant\; \pi_0 \;, \tag{4.9.3}$$

ce que nous ferons désormais. (Cf. 4.5.8, 2°, p. 119.) Comme le deuxième membre de (4.9.2) satisfait $\mathrm{L}_{\pi_0}$ ($\mathcal{M}$ y satisfait), il s'ensuit que ce foncteur (4.9.2) se prolonge en

$$\mathrm{Ind}_{\pi_0}(\underline{\mathrm{Hom}}(J, C)) \;\hookrightarrow\; \underline{\mathrm{Hom}}(J, \underbrace{\mathcal{M}}_{= \mathrm{Ind}_{\pi_0}(C)}) \;, \tag{4.9.3}$$

et ce foncteur est *pleinement fidèle* grâce au résultat d'accessibilité qu'on vient d'énoncer. Je m'intéresse à établir des cas où ce foncteur est essentiellement surjectif, i.e. est une *équivalence* de catégories. Notons que pour que

$$\varphi \;:\; J \longrightarrow \mathcal{M}$$

appartienne à l'image essentielle, il faut et il suffit qu'il existe un foncteur

(4.9.4) $\Phi \;:\; I \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(J, C)$ , $I$ grande devant $\pi_0$ (et on peut supposer $I$ ordonnée) ,

[92] Pour ces réductions, cf. 4.15.8 (p. 453-463). L'ultime réduction se trouve dans 4.15.8.9 (p. 461), et son corollaire 4.15.10.

[93] `[Les numéros 4.9.1 à 4.9.6 sont utilisés deux fois, 4.9.3 trois fois.]`

[page 218]

tel qu'on ait

$$\varphi \xleftarrow{\sim} \varinjlim_{i\in I} \Phi(i)\ , \tag{4.9.5}$$

ou ce qui revient au même, tel qu'on ait

$$\varphi(j) \xleftarrow{\sim} \varinjlim_{i\in I} \Phi(i,j)\ , \qquad \text{pour } j \in J\ , \tag{4.9.6}$$

où on a posé

$$\Phi(i,j) \ = \ \Phi(i)(j)\ ,$$

interprétant donc $\Phi$ comme un foncteur

$$\Phi \ : \ I \times J \longrightarrow C\ ; \tag{4.9.7}$$

la loi fonctorielle de $\varphi(j)$ donnée par (4.9.6) étant évidente. En d'autres termes, les $\varphi$ dans l'image essentielle de (4.4.3) sont ceux qui admettent une *représentation indicielle* par un foncteur $\Phi$ sous forme (4.9.4), ou sous forme (4.9.7), avec *de plus* $I$ grand devant $\pi_0$. Je rappelle a ce sujet la

**Proposition 4.9.2.** *Sous les conditions précédentes sur* $C$, $\pi_0$, $J$ *(notamment* $\operatorname{card}\text{réd}\, J \leqslant \pi_0$*), si* $\varphi : J \longrightarrow \mathcal{M} \overset{\text{déf}}{=} \operatorname{Ind}_{\pi_0}(C)$*, pour que* $\varphi$ *appartienne à l'image essentielle du foncteur pleinement fidèle (4.9.3), il faut et il suffit qu'elle satisfasse les deux conditions suivantes :*

[page 219]

*a)* $\underline{\operatorname{Hom}}(J,C)/\varphi$ *est grande devant* $\pi_0$.

*b) Pour tout* $j \in J$*, le foncteur*

$$\underline{\operatorname{Hom}}(J,C)/\varphi \longrightarrow C/\varphi(j) \qquad \left\{\begin{array}{l}\textit{foncteur entre catégories fil-}\\ \textit{trantes grandes devant } \pi_0,\\ \textit{en vertu de a),}\end{array}\right. \tag{4.9.2.1}$$

*induit par le foncteur*

$$\left\{\begin{array}{rcl}\underline{\operatorname{Hom}}(J,C) & \longrightarrow & C\\ F & \longmapsto & F(j)\ ,\end{array}\right. \tag{4.9.2.2}$$

*est* cofinal.

Le résultat principal dans la présente section est le suivant :

**Théorème 4.9.3.** *Sous les conditions générales de 4.9.1 pour* $C$, $\pi_0$, $J$ *(notamment* $\operatorname{card}\text{réd}\, J \leqslant \pi_0$*), le foncteur pleinement fidèle (4.9.3) est une équivalence de catégories dans chacun des deux cas suivants :*

*a)* $C$ *est stable par* $\varinjlim$ *filtrantes dénombrables.*

*b) Il existe un cardinal* $\pi_0 < \pi$*, et un cardinal* $\pi_0' > \pi_0$ *(***N.B.** *On peut supposer que* $\pi_0'$ *est le successeur de* $\pi_0$*, donc* $\pi_0' \leqslant \pi$*), tels que* $C$ *soit stable par limites inductives grandes devant* $\pi_0$*, et de cardinal* $\pi_0'$.

([94]).

**Remarque 4.9.4.**

a) Ce théorème, cas a), contient le théorème 4.4.13, partie b) (p. 95-96), où on suppose que $C$ est stable par limites inductives de cardinal $\leqslant \pi_0$, l'hypothèse a) de 4.9.3 étant considérablement plus faible.

[page 220]

b) Je présume qu'en dehors d'une hypothèse restrictive du type a) ou b) ci-dessus, le foncteur pleinement fidèle (4.9.3) n'est pas toujours essentiellement surjectif, même dans le cas particulier où $J$ est une catégorie finie, p.ex. $J = B_G$, $G = \{\pm 1\}$. Pour un contre-exemple dans le cas très voisin où on prend $\mathcal{M} = \mathrm{Ind}(C)$ (au lieu de $\mathrm{Ind}_{\pi_0}(C)$), et où on considère le foncteur (pleinement fidèle si $J$ est une catégorie équivalent à une catégorie *finie*)

$$\mathrm{Ind}(\underline{\mathrm{Hom}}(J,C)) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(J,\mathrm{Ind}(C)),$$

je renvoie à l'exercice SGA 4 I 8.8.8.

L'application principale du théorème 4.9.3 consiste en le

**Corollaire 4.9.5.** *Soient $\mathcal{M}$ une catégorie* accessible *(4.8.7), $J$ une catégorie équivalente à une petite catégorie. Alors la catégorie $\mathcal{M}(J^\circ) = \underline{\mathrm{Hom}}(J,\mathcal{M})$ est accessible. Plus précisément, soient $\pi_0$ un cardinal utile pour $\mathcal{M}$ (i.e. tel que $\mathrm{Ind}_{\pi_0}(\mathcal{M}_{\pi_0}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}$, i.e. un cardinal tel que $\mathcal{M}$ soit $\pi_0$-accessible), soit $\pi$ un cardinal infini tel que $\pi^{\pi_0} = \pi \geqslant \mathrm{card\,réd}\, J$ ([95]), i.e. $\pi = c^{\pi_0}$, où $c$ est n'importe quel cardinal $c \geqslant \sup(\pi_0, \mathrm{card\,réd}\, J)$, alors $\underline{\mathrm{Hom}}(J,\mathcal{M})$ est $\pi$-accessible, plus précisément on a une équivalence de catégories*

$$\underline{\mathrm{Hom}}(J,\mathcal{M}) \xleftarrow{\sim} \mathrm{Ind}_\pi(\underline{\mathrm{Hom}}(J,\mathcal{M}_\pi)) \ . \tag{4.9.5.1}$$

[page 221]

On sait en effet, avec les hypothèses faites sur $\pi_0$, $\pi$, que $\pi$ est utile pour $\mathcal{M}$, i.e. que

$$\mathcal{M} \xleftarrow{\sim} \mathrm{Ind}_\pi(\mathcal{M}_\pi) \ ,$$

d'autre part, $\mathcal{M}_\pi$ est stable par $\varinjlim$ grandes devant $\pi_0$ et de cardinal $\leqslant \pi$. On peut donc appliquer 4.9.3 b), en prenant $C = \mathcal{M}_\pi$, $\pi$ et $\pi_0$ comme ici (donc $\pi_0 < 2^{\pi_0} \leqslant \pi$), et $\pi'_0 = \pi$.

**4.9.6** ([96]). Le reste de la présente section 4.9 est consacré à la démonstration de 4.9.3, i.e. à la vérification, pour $J \longrightarrow \mathcal{M}$, des conditions a), b) de 4.9.2. Dans toute la suite, on se fixe donc une

$$\varphi \ : \ J \longrightarrow \mathcal{M} \ = \ \mathrm{Ind}_\pi(C) \ . \tag{4.9.6.1}$$

On peut supposer $J$ réduite, donc petite et $\mathrm{card}\, J \leqslant \pi_0$. On va considérer le foncteur déduit du foncteur (4.9.2.1)

$$\underline{\mathrm{Hom}}(J,C)/\varphi \longrightarrow \prod_{j \in \mathrm{Ob}\, J} C/\varphi(j) \ , \tag{4.9.6.2}$$

[94] Cas commun : il existe un ordinal limite $\alpha$, tel que 1) $\mathrm{card}\,\alpha \leqslant \pi_0$. 2) Les limites inductives [de] type $I_\alpha = \{\beta \mid \beta < \alpha\}$ sont représentables dans $C$.

[95] On a donc $\pi = \pi^{\pi_0} \geqslant 2^{\pi_0} > \pi_0$.

[96] Résultats préliminaires (à la démonstration de 4.9.3).

dont les foncteurs en question se déduisent en composant avec les foncteurs projection

$$\prod C/\varphi(j) \longrightarrow C/\varphi(j_0)\ . \tag{4.9.6.3}$$

Comme les catégories facteurs $C/\varphi(j)$ sont filtrantes (et même grandes devant $\pi$), leur produit est également filtrant, et même grand devant $\pi$ (immédiat), et de même

`[page 222]`

pour les produits partiels. Il s'ensuit aussitôt que les projections (4.9.6.3) sont cofinales, en vertu du

**Lemme 4.9.6.1.** *Soient $I$, $I'$ deux catégories avec $I'$ 0-connexe (p.ex. filtrante), alors le foncteur projection $pr_1 : I \times I' \longrightarrow I$ est cofinal.*

En effet, pour $i' \in \mathrm{Ob}\, I'$ `[plutôt` $i \in \mathrm{Ob}\, I$`]`, on a

$$i\backslash(I \times I') \simeq (i\backslash I) \times I'\ ,$$

or $i\backslash I$ et $I'$ étant 0-connexe, il en est de même de leur produit.

**Lemme 4.9.6.2** ([97]). *Soit $(I_\alpha)_{\alpha\in A}$ une famille de catégories* filtrantes *(resp. grandes devant $\pi$). Alors $I_A \overset{\text{déf}}{=} \prod_{\alpha\in A} I_\alpha$ est filtrante (resp. grande devant $\pi$), et pour toute partie $B \subset A$, la projection canonique $I_A \longrightarrow I_B$ est cofinal.*

([98]). La stabilité de la propriété "filtrante" ou "grande devant $\pi$" par AQT `[âne qui trotte]`. On a, si $B' = A\backslash B$, $I_A \simeq I_B \times I_{B'} \longrightarrow I_B$, et on applique le lemme 4.9.6.1 pour conclure que ce foncteur est cofinal, $I_{B'}$ étant filtrante, donc 0-connexe.

`[page 223]`

Le foncteur (4.9.6.3) étant cofinal, pour établir que (4.9.2.1) l'est, il suffit de prouver qu'il en est ainsi du foncteur (4.9.6.2), ce que nous ferons. Notons de plus que ledit foncteur est *fidèle,* car il s'insère dans le carré commutatif

$$\begin{tikzcd}
\underline{\mathrm{Hom}}(J,C)/\varphi \arrow[r] \arrow[d] & \prod C/\varphi(j) \arrow[d] \\
\underline{\mathrm{Hom}}(J,C) \arrow[r] & C^{\mathrm{Ob}\,J}\ ,
\end{tikzcd}$$

où les flèches verticales et la deuxième flèche horizontale sont fidèles. En définitive, pour établir le théorème 4.9.3, nous allons étudier le foncteur *fidèle* (4.9.6.2)

$$(*) \qquad \begin{array}{l} f\ :\ \underline{\mathrm{Hom}}(J,C)/\Phi \longrightarrow \prod_{j\in J_0} C/\varphi(j) \\ (\text{où on a posé } J_0 = \mathrm{Ob}\, J,\ J_1 = \mathrm{Fl}\, J)\ , \end{array}$$

et nous allons prouver :

- a) Ce foncteur fidèle $(*)$ est *cofinal.*
- b) La catégorie-source $\underline{\mathrm{Hom}}(J,C)/\varphi$ est grande devant $\pi_0$.

Nous allons pour ceci dégager un lemme auxiliaire sur la cofinalité des foncteurs *fidèles* :

[97] Attention, il n'est pas vrai qu'un produit infini de catégories 0-connexes est 0-connexe !
[98] Cf. démonstration élégante ci-dessous, 4.9.6.6.

[page 224]

**Lemme 4.9.6.3** ([99]). *Soit $f : I \longrightarrow I'$ un foncteur, et considérons les conditions :*

*a) $I$ filtrante, $f$ cofinal, i.e. (en présence de $I$ filtrante) $f$ satisfait les conditions familières* $\boxed{\text{F 1}}$, $\boxed{\text{F 2}}$.

*b) $I'$ est filtrante, et les $i'\backslash I$ (pour $i' \in \operatorname{Ob} I'$) sont filtrantes.*

*b′) $I'$ 0-connexe, satisfait PF (2)* ([100]) *(égalisation des doubles flèches).*

*b″) $I'$ est filtrante, les $i'\backslash I$ pseudo-filtrantes, i.e. satisfont à la condition PF 1′.*

*c) $I'$ filtrante, et $f$ satisfait à F 1, ainsi que la condition suivante.*

$\boxed{\text{F 3}}$ *Pour tout couple $(i_0, i_1)$ d'objets de $I$ et toute flèche $f(i_0) \xrightarrow{u'} f(i_1)$, il existe un objet $i_2$ de $I$, et une flèche $v' : f(i_1) \longrightarrow f(i_2)$, tels que $v'$ et $v'u'$ soient relevables en des flèches $i_1 \xrightarrow{v} i_2$ et $i_0 \xrightarrow{w} i_2$ (i.e. il existe $i_2$ et $v : i_1 \longrightarrow i_2$, $w : i_0 \longrightarrow i_2$ tels qu'on ait $f(v)u' = f(w)$).*

$$\begin{tikzcd} i_0 \arrow[rr, bend left, "w"] & i_1 \arrow[r, dotted, "v"] & i_2 \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} f(i_0) \arrow[r, "u'"] \arrow[rr, bend right, dotted, "f(w)"'] & f(i_1) \arrow[r, dotted, "f(v) = v'"] & f(i_2) \end{tikzcd}$$

*1) On a les implications*

$$a \iff b \iff b' \implies b'' \iff c\,,$$

*et si $f$ est fidèle (p.ex. $I$ ordonnée), les cinq conditions a), b), b′), b″), c) sont équivalentes.*

[page 225]

*2) Soit $\pi$ un cardinal infini, et considérons les conditions :*

*$a_\pi$) $I$ grande devant $\pi$, $f$ cofinal, i.e. F 1, F 2.*

*$b_\pi$) $I'$ grande devant $\pi$, les $i'\backslash I$ ($i' \in \operatorname{Ob} I'$) aussi.*

*$b_\pi$″) $I'$ grande devant $\pi$, les $i'\backslash I$ ($i' \in \operatorname{Ob} I'$) sont $\pi$-pseudo-filtrantes, i.e. satisfont PS $1_\pi$′.*

*$c_\pi$) $I'$ grande devant $\pi$, et $f$ satisfait F 1 et*

$\boxed{\text{F } 3_\pi}$ ([101]). *Pour toute famille $(i_\alpha)_{\alpha \in A}$ d'objets de $I$, avec* $\operatorname{card} A \leqslant \pi$, *et $i \in \operatorname{Ob} I$, et une famille de flèches $u'_\alpha : f(i_\alpha) \longrightarrow f(i)$, existe $j \in \operatorname{Ob} I$ et une flèche $v' : f(i) \longrightarrow f(j)$, telle que $v'$* et *les $v'u'_\alpha$ proviennent de flèches de $I$, i.e. il existe des flèches $v : i \longrightarrow j$, $w_\alpha : i_\alpha \longrightarrow j$ telles que $f(v)u'_\alpha = f(w_\alpha)$ $\forall\, \alpha \in A$.*

---

[99] Ce lemme fait partie du sorite général sur la cofinalité et les catégories filtrantes.

[100] p.ex. PF 2 est satisfaite si $I'$ est *ordonnée,* sans avoir à supposer d'avance $I'$ filtrante, seulement 0-connexe.

$$\begin{tikzcd}
i_\alpha \arrow[rr, dotted, bend left, "w_\alpha"] \arrow[d, dash] & i \arrow[r, dotted, "v"] \arrow[d, dash] & j \arrow[d, dash] \\
f(i_\alpha) \arrow[r, "u'_\alpha"] & f(i) \arrow[r, dotted, "v' = f(v)"] & f(j)
\end{tikzcd}$$

*Ceci posé, on a*

$$\mathrm{a}_\pi \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{b}_\pi \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{c}_\pi \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{b}_\pi{}'' \ ,$$

*et si $f$ est fidèle, ou $I$ ordonné, les quatre conditions $\mathrm{a}_\pi$, $\mathrm{b}_\pi$, $\mathrm{b}_\pi{}''$, $\mathrm{c}_\pi$ sont équivalentes.*

([102]).

**4.9.6.4. N.B.** Dans le cas qui nous intéresse, où $f$ est le foncteur $(*)$ (p. 223), on sait que $I'$ est grande devant $\pi$. On voudrait établir que $I$ l'est et que $f$ est cofinal, i.e. la condition $\mathrm{a}_\pi$. On le prouvera en prenant $\mathrm{b}_\pi$ (qui implique $\mathrm{a}_\pi$ puisque $f$ est fidèle). Il reste donc à

[page 226]

prouver, sur le foncteur $f$ dans $(*)$, p. 223, les deux conditions suivantes :

F 1) Pour tout système de flèches dans $\mathcal{M}$

$$X(j) \xrightarrow{p(j)} \varphi(j) \ , \qquad j \in J_0 = \mathrm{Ob}\, J, \text{ les } X(j) \text{ dans } \mathrm{Ob}\, C \ ,$$

il existe un foncteur $F \ : \ J \longrightarrow C$ et $F \xrightarrow{q} \varphi$, enfin un système de flèches $X(j) \xrightarrow{u(j)} F(j)$ dans les $C/\varphi(j)$, i.e. rendant commutatif les diagrammes

$$\begin{tikzcd}
X(j) \arrow[rr, "u(j)"] \arrow[dr, "p(j)"'] & & F(j) \arrow[dl, "q(j)"] \\
& \varphi(j) \ . &
\end{tikzcd}$$

F $3_\pi$) Pour tout système $(F_\alpha)_{\alpha\in A}$ ($\mathrm{card}\, A \leqslant \pi$) d'éléments dans $\underline{\mathrm{Hom}}(C, J)$, et des flèches

$$F_\alpha \xrightarrow{p_\alpha} \varphi \qquad \text{dans } \underline{\mathrm{Hom}}(J, \mathcal{M}),$$

et pour $G$ dans $\underline{\mathrm{Hom}}(J, C)$ et $G \xrightarrow{q} \varphi$ dans $\underline{\mathrm{Hom}}(J, \mathcal{M})$, étant donné un système de flèches $u_\alpha(j)$,

$$\begin{tikzcd}
F_\alpha(j) \arrow[rr, "u_\alpha(j)"] \arrow[dr, "p_\alpha(j)"'] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\text{comm.}"] & & G(j) \arrow[dl, "q(j)"] \\
& \varphi(j) \ , &
\end{tikzcd} \qquad u_\alpha(j) \text{ flèche dans } C/\varphi(j) \ ,$$

il existe $H \xrightarrow{q} \varphi$ dans $\underline{\mathrm{Hom}}(J, C)$ et une flèche $G \xrightarrow{v} H$ dans $\underline{\mathrm{Hom}}(J, C)/\varphi$, telle que pour tout $\alpha \in A$, le système de flèches composés

[101]**N.B.** La condition F $3_\pi$ est tautologiquement satisfaite si $f$ est *pleinement fidèle.*

[102]Démonstration de la proposition donnée dans 4.9.6.7, page 227.

[page 227]

$$\begin{tikzcd}
F_\alpha(j) \arrow[r, "u_\alpha(j)"] \arrow[dr, dotted, "p_\alpha(j)"'] \arrow[r, phantom, shift right=4ex, "\text{comm.}"] & G(j) \arrow[r, "v(j)"] \arrow[d, dotted, "q(j)"] \arrow[r, phantom, shift right=4ex, "\text{comm.}"] & H(j) \arrow[dl, dotted, "q(j)"] \\
 & \varphi(j) &
\end{tikzcd}$$

(pour $j \in J_0 \in \operatorname{Ob} J$) provienne d'un *foncteur* $w_\alpha : F_\alpha \longrightarrow H$.

Pour prouver 4.9.3, nous sommes donc ramené à prouver les deux propositions F 1), F $3_\pi$) précédentes, sous l'une des deux conditions a) ou b) de 4.9.3.

**Corollaire 4.9.6.5** (de 4.9.6.3). *Soit $(f_\alpha : I_\alpha \longrightarrow I'_\alpha)$ une famille de foncteurs cofinaux, les catégories source étant filtrantes. Alors le foncteur produit $f = \prod f_\alpha : I = \prod_\alpha I_\alpha \longrightarrow I' = \prod_\alpha I'_\alpha$ est cofinal.*

En effet, il faut vérifier que les catégories $i'\backslash I$, pour $i' \in \operatorname{Ob} I'$, sont 0-connexes. Or si $i' = (i'_\alpha)_{\alpha \in A}$, on a

$$i'\backslash I \;\simeq\; \prod_\alpha (i'_\alpha\backslash I_\alpha)\ ,$$

et par 4.9.6.3, 1°) a $\Longrightarrow$ c, les $i'_\alpha\backslash I_\alpha$ sont filtrantes, donc leur produit est filtrant

[page 228]

(cf. 4.4.6.2), donc 0-connexe, q.e.d.

**Corollaire 4.4.6.6.** *Soit $\pi$ un cardinal infini. Tout produit de catégories grandes devant $\pi$ est grand devant $\pi$.*

Soit $I = \prod_{\alpha \in A} I_\alpha$, soit $B$ un ensemble de cardinal $\leqslant \pi$, il faut prouver que $I \xrightarrow{\operatorname{diag}_I} I^B$ est cofinal. Or ce foncteur s'identifie au produit des foncteurs similaires $I_\alpha \longrightarrow I_\alpha^B$, lesquels sont cofinaux, les catégories source étant de plus filtrantes. Donc on peut conclure par le corollaire 4.9.6.5.

**4.9.6.7.** Démonstration de 4.9.6.3. (Partie 1°.)

a $\Longrightarrow$ b. On sait déjà que a) implique que $I'$ est filtrante (SGA 4 I 8.1.3 b). Reste à prouver que pour tout $i' \in \operatorname{Ob} I'$, $i'\backslash I$ est filtrante ([103]). Deux conditions PF 1′ et PF 2 à vérifier (en plus du fait que $i'\backslash I \neq \emptyset$, qui est connu par cofinalité de $f$, impliquant que $i'\backslash I$ est 0-connexe).

1) Soient $(i, u')$, $(j, v')$ deux éléments de $i'\backslash I$, il faut voir qu'ils sont majorés par un troisième élément. Or $I$ étant filtrante, $i$, $j$ sont majorés par $k$. On aurait fini donc si on savait que $f(u_1)u' = f(v_1)v'$, soit $w'$, car alors $(k, w')$ ferait l'affaire.

$$\begin{tikzcd}
 & i \arrow[drr, "u_1"] \arrow[dd, dash] & & \\
 & & j \arrow[r, "v_1"] \arrow[dd, dash] & k \arrow[dd, dash] \\
i' \arrow[r, "u'"] \arrow[drr, "v'"'] & f(i) \arrow[drr] & & \\
 & & f(j) \arrow[r] & f(k)
\end{tikzcd}$$

[103] Court-circuit : on sait déjà que $i'\backslash I$ est 0-connexe, d'autre part elle est *localement* filtrante, car coétale sur $I$ qui est filtrante, donc elle est filtrante.

[page 229]

Mais on applique F 2 sur $f$ à la double flèche en question $i' \rightrightarrows f(k)$, on trouve $w : k \longrightarrow \bar{k}$,

$$\begin{tikzcd} & k \arrow[r, "w"] \arrow[d, dash] & \bar{k} \arrow[d, dash] \\ i' \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & f(k) \arrow[r] & f(\bar{k}) \end{tikzcd}$$

telle que

$$\underbrace{f(w)(f(u_1)u')}_{= f(wu_1)u'} = \underbrace{f(w)(f(v_1)v')}_{f(wv_1)v'} ,$$

et remplaçant $k$ par $\bar{k}$, et $u_1$, $v_1$ par $wu_1$, $wv_1$, on trouve ce qu'on veut.

2) PF (2) pour $i' \backslash I$, i.e. on se donne un diagramme ci-contre [ci-dessous],

$$\begin{tikzcd} & i \arrow[r, shift left, "u_1"] \arrow[r, shift right, "u_2"'] \arrow[d, dash] & j \arrow[r, dotted, "w"] \arrow[d, dash] & j' \\ i' \arrow[r, "u'"] & f(i) \arrow[r, shift left, "f(u_1)"] \arrow[r, shift right, "f(u_2)"'] & f(j) \arrow[r, dotted, "f(w)"] & f(j') \end{tikzcd} ,$$

avec $f(u_1)u' = f(u_2)u'$, soit $v'$ (double-flèche dans $i' \backslash I$ de $(i, u')$ dans $(j, v')$), on veut l'égaliser à droite. Or $I$ étant filtrant, il existe $w : j \longrightarrow j'$ telle que $wu_1 = wu_2$, or cette flèche définit une flèche $(j, v') \longrightarrow (j', f(w')v')$, qui égalise la double flèche donnée.

b $\Longrightarrow$ b′ est clair.

b) $\Longrightarrow$ a). Comme les $i' \backslash I$ sont filtrantes, donc 0-connexes, $f$ est cofinal, il reste à prouver que $I$ est filtrant, donc à vérifier PF 0 ($I$ 0-connexe), PF 1, PF 2 pour $I$. $I$ est 0-connexe, car $I'$ l'est, et $f$ cofinal, i.e. $\mathbf{W}_0$-coasphérique, d'où PF 0.

[page 230]

Prouvons PF 1, i.e. que si $\begin{tikzcd}[row sep=small] & i_1 \\ i_0 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & i_2 \end{tikzcd}$ est donné, on peut compléter en un carré commutatif.

$$\begin{tikzcd} & i_1 \arrow[dr, dotted, "v_1"] & \\ i_0 \arrow[ur, "u_1"] \arrow[dr, "u_2"'] & & i_3 \\ & i_2 \arrow[ur, dotted, "v_2"'] & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & f(i_1) \arrow[dr, "f(v_1)"] & \\ f(i_0) \arrow[ur, "f(u_1)"] \arrow[dr, "f(u_2)"'] & & f(i_3) \\ & f(i_2) \arrow[ur, "f(v_2)"'] & \end{tikzcd}$$

Mais considérons les objets $\xi_1 = (i_1, f(u_1))$, $\xi_2 = (i_2, f(u_2))$ de $f(i_0)\backslash I$, et utilisant PF 1′ pour cette catégorie, on trouve $\xi_3 = (i_3, w')$ dans ladite catégorie, et des flèches de $\xi_1$, $\xi_2$ dans $\xi_3$, i.e. $v_1 : i_1 \longrightarrow i_3$, [$v_2 : i_2 \longrightarrow i_3$,] telles que $\underbrace{f(v_1)f(u_1)}_{f(v_1u_1)} = w'$, $\underbrace{f(v_2)f(u_2)}_{f(v_2u_2)} = w'$, donc

$$f(v_1u_1) \ = \ f(v_2u_2)\ .$$

Ainsi, on a une double flèche $i_0 \overset{v_1u_1}{\underset{v_2u_2}{\rightrightarrows}} i_3$, égalisée par $f$. Si on prouve PF 2 sur $I$, on trouve $i_3 \xrightarrow{\alpha} \bar{i}_3$ telle que $\alpha(v_1u_1) = \alpha(v_2u_2)$, i.e. $(\alpha v_1)u_1 = (\alpha v_2)u_2$, et quitte à remplacer $i_3$ par $\bar{i}_3$, $v_1$, $v_2$ par $\alpha v_1$, $\alpha v_2$, on a gagné.

Reste à prouver PF 2 sur $I$, i.e. égaliser une double-flèche

$$i_0 \overset{v_1}{\underset{v_2}{\rightrightarrows}} i_1\ .$$

[page 231]

Or $I'$ satisfaisant à PF 2, on peut égaliser la double flèche $f(u_1)$, $f(u_2)$ par une flèche $f(i_1) \xrightarrow{v'} i'$ dans $I'$, et comme $i'\backslash I$ non vide, on peut supposer que $i'$ est de la forme $f(i_2)$.

$$\begin{tikzcd}
i_0 \arrow[r, shift left, "u_1"] \arrow[r, shift right, "u_2"'] \arrow[d, dash] & i_1 \arrow[r] & i_2 \\
f(i_0) \arrow[r, shift left, "f(u_1)"] \arrow[r, shift right, "f(u_2)"'] & f(i_1) \arrow[r, "v'"] & f(i_2)
\end{tikzcd}$$

Admettons pour un instant la condition F 3 de c), que nous allons appliquer à $(i_1, i_2, v')$. Il existe donc $i_2 \xrightarrow{v} \bar{i}_2$, $w : i_1 \longrightarrow \bar{i}_2$ tels que l'on ait $f(w)v' = f(v)$. Il s'ensuit que $f(w)$ égalise $f(u_1)$ et $f(u_2)$, i.e. qu'on a $f(wu_1) = f(wu_2)$, i.e. la double-flèche initiale est remplacée par $(\bar{u}_1 = wu_1, \bar{u}_2 = wu_2)$, telle que $f(\bar{u}_1) = f(\bar{u}_2)$. En somme, on est ramené au cas d'une double-flèche $(u_1, u_2)$ telle que $f(u_1) = f(u_2)$, soit $v'$. Mais alors soit $\xi_1 = (i_0, v')$, $\xi_0 = (i_0, \mathrm{id}_{f(i_0)})$, on a donc une double flèche $(u_1, u_2) : \xi_0 \rightrightarrows \xi_1$ dans $f(i_0)\backslash I$. Cette catégorie

[page 232]

est filtrante, donc cette double-flèche est égalisable à droite, ce qui implique aussitôt que la double flèche $(v_1, v_2)$ *dans $I$* est aussi égalisable à droite.

Donc il reste à prouver que b′) implique la condition F 3. Mais considérons les deux objets $\xi_0 = (i_0, \mathrm{id}_{f(i_0)})$, $\xi_1 = (i_1, u')$ de $f(i_0)\backslash I$, et utilisons la condition de filtration PF 1 sur cette catégorie, donc on trouve un objet $\xi_2 = (i_2, v')$, et deux flèches $\begin{tikzcd}[row sep=small] \xi_0 \arrow[dr, "w"] & \\ & \xi_2 \\ \xi_1 \arrow[ur, "v"'] & \end{tikzcd}$, i.e. $i_0 \xrightarrow{w} i_2$ et $i_1 \xrightarrow{v} i_2$ telles qu'on ait $f(w)\mathrm{id}_{i_0} = f(v)u' = v'$, d'où $f(w) = f(v)u'$, ce qui est la condition F 3.

$$\begin{tikzcd}
i_0 \arrow[rr, dotted, bend left, "w"] \arrow[d, dash] & i_1 \arrow[r, dotted, "v"] \arrow[d, dash] & i_2 \arrow[d, dash] \\
f(i_0) \arrow[r, "u'"] \arrow[rr, dotted, bend right, "v'"'] & f(i_1) & f(i_2)
\end{tikzcd}$$

Ainsi on a établi

$$\text{a} \iff \text{b} \iff \text{b}',$$

prouvons maintenant

*a* $\Longrightarrow$ *c.* On sait déjà que a) implique $I'$ filtrante, et il reste à établir F 3. Or $I$ étant filtrante, il existe des flèches $\begin{tikzcd}[row sep=tiny] i_0 \arrow[dr, "w"] & \\ & i_2 \\ i_1 \arrow[ur, "v"'] & \end{tikzcd}$. On

[page 233]

n'a pas forcément $f(w) = f(v)u'$, on a là une double flèche $f(i_0) \rightrightarrows f(i_1)$ dans $I'$. Mais par la condition F 2 sur $f$, il existe $i_2 \xrightarrow{\alpha} \bar{i}_2$ dans $I$ telle que $f(\alpha)$ égalise ladite double flèche, donc $f(\underbrace{\alpha w}_{\bar{w}}) = f(\underbrace{\alpha v}_{\bar{v}})u'$, et quitte à remplacer $i_2$ par $\bar{i}_2$, et $w$, $v$ par $\bar{w} = \alpha w$, $\bar{v} = \alpha v$, on gagne.

Reste à prouver (pour la partie 1°) que si $f$ est *fidèle,* alors c) $\Longrightarrow$ b)). Il reste donc à prouver que c) implique que pour $i'$ dans $I'$, $i'\backslash I$ est filtrante. On sait déjà par F 1 que $i'\backslash I$ est non vide, il reste à prouver les conditions PF 1′, PF 2 pour $i'\backslash I$. Comme $I'$ filtrante, l'on peut compléter

$$\begin{tikzcd}
& f(i_1) \arrow[dr, dotted] & \\
i' \arrow[ur] \arrow[dr] & & j' \\
& f(i_2) \arrow[ur, dotted] &
\end{tikzcd},$$

et par F 1 on peut supposer $j'$ de la forme $f(i_3)$.

$$\begin{tikzcd}
& i_1 \arrow[rr, dotted, "v_1\,?"] \arrow[dd, dash] & & i_3 \arrow[r] \arrow[dd, dash] & \bar{i}_3 \arrow[dd, dash] \\
& & & & \\
& f(i_1) \arrow[rr, "v'_1"] & i_2 \arrow[uur, dotted, "v_2\,?"'] \arrow[d, dash] & & \\
i' \arrow[ur, "u'_1"] \arrow[r, "u'_2"'] & & f(i_2) \arrow[r, "v'_2"'] & f(i_3) \arrow[r] & f(\bar{i}_3)
\end{tikzcd}$$

Appliquant F 3 à $i_1$, $i_3$, $v'_1$, on peut supposer (quitte à remplacer $i_3$ par $\bar{i}_3$)

[page 234]

que $v'_1$ provient d'un $v_1 : i_1 \longrightarrow i_3$. Appliquant à nouveau F 3 à $i_2$, $i_3$, $v'_2$, on peut supposer que $v'_2$ également provient d'un $v_2 : i_2 \longrightarrow i_3$. Alors $\xi_3 = (i_3, v'_1 u'_1 = v'_2 u'_2)$ est un majorant commun de $\xi_1 = (i_1, u'_1)$, $\xi_2 = (i_2, u'_2)$.

Prouvons enfin PF 2 pour $i'\backslash I$, donc on a un diagramme ci-contre [ci-dessous] avec $f(u_1)u' = f(u_2)u'$ (double flèche dans $i'\backslash I$), on veut égaliser dans $i'\backslash I$.

$$\begin{tikzcd} i_0 \arrow[r, shift left, "u_1"] \arrow[r, shift right, "u_2"'] & i_1 \arrow[rrr, bend left, "w"] & & i_2 \arrow[r, dotted] & \bar{i}_2 \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} i' \arrow[r, "u'"] & f(i_0) \arrow[r, shift left, "f(u_1)"] \arrow[r, shift right, "f(u_2)"'] & f(i_1) \arrow[r, dotted, "v'"] & f(i_2) \arrow[r] & f(\bar{i}_2) \end{tikzcd}$$

Mais $I'$ étant filtrante, on peut égaliser $(f(u_1), f(u_2))$ par $f(i_1) \longrightarrow j'$, et à cause de F 1 on peut supposer $j' = f(i_2)$. Appliquant encore F 3 à $(i_1, i_2, v')$, on trouve $i_1 \longrightarrow \bar{i}_2$ tel que $f(w)$ égalise $f(u_1)$, $f(u_2)$ :

$$f(wu_1) \;=\; f(wu_2)\;.$$

Mais $f$ étant *fidèle,* cela implique $wu_1 = wu_2$, et on a donc égalisé la double-flèche de $i'\backslash I$ par $w : (i_1, -) \longrightarrow (\bar{i}_2, -)$.

**4.9.6.8. N.B.**

1°) Si on ne suppose pas que $f$ soit fidèle, on voit que c) implique pourtant que les $i'\backslash I$ satisfont PF 1′ (elles sont donc pseudo-filtrantes et 0-connexes). Donc $f$ est cofinal.

[page 235]

On voit, par le même argument, que $I$ satisfait PF 1′, i.e. est pseudo-filtrante. Ainsi, si on introduit la condition :

b″) $I'$ est filtrante, les $i'\backslash I$ ($i \in \operatorname{Ob} I'$) sont pseudo-filtrantes (i.e. satisfont PF 1′) (donc $f$ cofinal).

On trouve les implications

$$(\mathrm{a} \iff \mathrm{b} \iff \mathrm{b}') \qquad \Longrightarrow \qquad (\mathrm{b}'' \iff \mathrm{c})\;,$$

et les conditions équivalentes c), b″) impliquent que $I$ est également pseudo-filtrante, et que pour toute double-flèche $\xi_0 \underset{u_2}{\overset{u_1}{\rightrightarrows}} \xi_1$ dans un $i'\backslash I$ ou dans $I$, il existe une flèche $\xi_1 \xrightarrow{v} \xi_2$ dans la même catégorie, telle que $vu_1$ et $vu_2$ : $\xi_0 \rightrightarrows \xi_2$ aient *même image dans $I'$*. Donc si $f$ est fidèle, alors ces conditions c, c′ [plutôt b″] impliquent que $I$ et les $i'\backslash I$ satisfont aussi la condition PF 2 de la double flèche, donc sont filtrantes, donc dans ce cas les cinq conditions a) b) b′) c) c′) [plutôt b″)] sont équivalentes. Mais aussi lorsque $I$ est ordonnée, on sait [?] que la condition de la double flèche dans $I$ est satisfaite automatiquement.

`[page 236]`

2°) Notons aussi que dans la condition b′), on ne peut supprimer l'hypothèse que $I'$ satisfait PF 2 (en plus de $I'$ 0-connexe et les $i'\backslash I$ filtrantes). Pour le voir, prenons $I' = I$, $f = \mathrm{id}$, donc l'hypothèse a ($\Longleftrightarrow$ b $\Longleftrightarrow$ b′) signifie que $I$ est filtrante, $f$ étant bien sûr cofinal. Mais b′ affaiblie signifie que $I$ est 0-connexe et les $i\backslash I$ sont filtrantes, et on sait que ceci n'implique *pas* que $I$ soit filtrante, même si on suppose $I$ pseudo-filtrante. Un exemple simple est donné par $I$ définie par

$$\mathrm{Ob}\, I \;=\; \mathbf{N}\,, \qquad \mathrm{Hom}_I(i,j) \;=\; \begin{cases} \emptyset & \text{si } i > j \\ \{\mathrm{id}_i\} & \text{si } i = j \\ \{\pm 1\} & \text{si } i < j\,, \end{cases}$$

la composition des flèches se faisant par la multiplication des signes $\varepsilon_{k,j}\varepsilon'_{j,i} = (\varepsilon\varepsilon')_{k,i}$ (en posant $\mathrm{id}_i = (+1)_{i,i}$). Les catégories $i\backslash I$ sont isomorphes entre elles et sont *ordonnées* et pseudo-filtrantes, donc filtrantes, d'autre part, $I$ est pseudo-filtrante, pourtant elle n'est pas filtrante, car ne satisfait pas PF 2.

3°) D'autre part, si $f$ n'est pas fidèle, alors c) (équivalente à $b''$) n'implique pas a), comme on voit en prenant $I' = e$ ; alors b″) équivaut à $I$ pseudo-filtrante, qui n'implique pas que $I$ soit filtrante.

`[page 237]`

**4.9.6.9.** Démonstration de 4.9.6.3, partie 2°.

C'est essentiellement "la même" démonstration que pour la partie 1°).

$\mathrm{a}_\pi) \Longrightarrow \mathrm{b}_\pi)$. On peut court-circuiter la démonstration directe, en regardant, pour un ensemble $A$ de cardinal $\leqslant \pi$, le diagramme

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "\delta_A"] \arrow[d, "f"'] & I^A \arrow[d, "f^A"] \\ I' \arrow[r, "\delta_{A'}"] & I'^A \end{tikzcd}$$

`[plutôt` $\delta'_A$`]`. Comme $f$ est cofinal, $I$ filtrante, $f^A$ est aussi cofinal (4.9.8.5), d'autre part, $I$ grande devant $\pi$ signifie que $\delta_A$ est cofinal ($\forall\ A$ avec $\mathrm{card}\, A \leqslant \pi$). Donc $f^A\delta_A = \delta_{A'}f$ est cofinal, donc $\delta_{A'}f$ et $f$ le sont, donc $\delta_{A'}$ aussi, ce qui signifie que $I'$ est grande devant $\pi$.

Reste à prouver que pour $i'$ dans $I'$, $i'\backslash I$ est grande devant $\pi$. Cela résulte du fait que $i'\backslash I \xrightarrow{p} I$ est coétale, que $i\backslash I$ est 0-connexe, et du

**Lemme 4.9.6.9.1.** *Soit $I$ une catégorie filtrante (resp. grande devant $\pi$). Alors pour toute $J$ sur $I$ coétale sur $I$ et* 0*-connexe, $J$ est filtrante (resp. grande devant $\pi$).*

Le cas filtrant est déjà connu (cf. II ...). Pour le cas "grande devant $\pi$", on va utiliser le

**Corollaire 4.9.6.9.2.** Soit $J$ une catégorie. Pour que $J$ soit grande devant $\pi$, il

`[page 238]`

faut et il suffit qu'elle soit 0-connexe, et satisfasse $\mathrm{PF}_\pi$ 2 (cf. page 81), ainsi que la variante suivante de $\mathrm{PF}_\pi$ 1′.

$\mathrm{PF}_\pi$ 1) Pour tout objet $x_0$ de $J$, $x_0\backslash J$ satisfait $\mathrm{PF}_\pi$ 1′, i.e. pour toute famille de flèches $x_0 \xrightarrow{u_\alpha} y_\alpha$ ($\alpha \in A$, $\mathrm{card}\, A \leqslant \pi$), existe une flèche $x_0 \xrightarrow{v} z$ et des flèches $v_\alpha : y_\alpha \longrightarrow z$, avec $v_\alpha u_\alpha = v \ \forall\, \alpha \in A$.

Démonstration. Si $J$ est grande devant $\pi$, alors $\mathrm{PF}_\pi$ 1) résulte aussitôt de la conjonction de $\mathrm{PF}_\pi$ 1′ et $\mathrm{PF}_\pi$ 2, d'où le "il faut". Inversement, supposons que $J$ satisfasse $\mathrm{PF}_\pi$ 1, $\mathrm{PF}_\pi$ 2, et soit 0-connexe, il faut prouver qu'elle satisfait $\mathrm{PF}_\pi$ 1′. Mais on sait déjà que les conditions en question, qui impliquent PF 1, PF 2, 0-connexe, impliquent que $J$ est filtrante. Donc si on a une famille $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$, $\mathrm{card}\, A \leqslant \pi$, choisissant un $x_0 \in \mathrm{Ob}\, J$, on peut pour tout $\alpha$ trouver $y_\alpha$ qui majore $x_0$ et $x_\alpha$, d'où des flèches $\begin{tikzcd}[row sep=small] x_\alpha \arrow[dr] & \\ & y_\alpha \\ x_0 \arrow[ur] & \end{tikzcd}$, on peut leurs appliquer $\mathrm{PF}_\pi$ 1, d'où des flèches $y_\alpha \longrightarrow z$, et en composant des $x_\alpha \longrightarrow z$, q.e.d.

Prouvons maintenant le lemme. Il suffit (par le corollaire précédent) de prouver que $J$ satisfait à $\mathrm{PF}_\pi$ 1 et $\mathrm{PF}_\pi$ 2. Or $\mathrm{PF}_\pi$ 1 est immédiat, puisque $\forall\, x_0$ dans $J$, $x_0\backslash J \xrightarrow{\sim} y_0\backslash I$, où $y_0$ est

`[page 239]`

l'image de $x_0$ dans $I$. Quant à $\mathrm{PF}_\pi$ 2, si on a des $x_0 \overset{u_\alpha}{\rightrightarrows} x_1$ dans $J$, d'où des $g(x_0) \overset{g(u_\alpha)}{\rightrightarrows} g(x_1)$, on égalise dans $I$ par $g(x_1) \xrightarrow{w} y$, mais comme $g$ est coétale, $\exists\ x_1 \xrightarrow{v} x_2$ dans $J$ telle que $g(v) = w$, donc on a $g(vu_\alpha) = g(vu_\beta)$ pour $\alpha, \beta \in A$, et comme $g$ est fidèle, on en conclut $vu_\alpha = vu_\beta$, donc $v$ égalise $(u_\alpha)_{\alpha\in A}$, q.e.d.

Prouvons $\mathrm{b}_\pi) \Longrightarrow \mathrm{a}_\pi)$ : Si $I'$ et les $i'\backslash I$ sont grandes devant $\pi$, alors $I$ l'est aussi (et $f$ est cofinal, les $i'\backslash I$ étant 0-connexes, car filtrantes). Comme on sait déjà que $I$ est 0-connexe ($I'$ l'étant et $f$ cofinal), il reste, par 4.9.6.9.2, à vérifier $\mathrm{PF}_\pi$ 1 et $\mathrm{PF}_\pi$ 2.

`[page 240]`

La démonstration donnée dans 1° pour le cas similaire filtrant (implication b′ $\Longrightarrow$ a, pages 231-232), s'applique mutatis mutandis. (La propriété F 3 a déjà été établie dans la partie 1°), comme conséquence de b, et peut donc être utilisée librement.)

Donc on a prouvé $\mathrm{a}_\pi \Longleftrightarrow \mathrm{b}_\pi$. Prouvons $\mathrm{a}_\pi \Longrightarrow \mathrm{c}_\pi$. On sait déjà que $\mathrm{a}_\pi$ implique que $I'$ est grande devant $\pi$, et bien sûr la condition F 1, reste à établir la validité de la condition F $3_\pi$. Par F 3, $\forall\, \alpha \in A$ on peut trouver $j_\alpha$ dans $I$ et $w^0_\alpha : i_\alpha \longrightarrow j_\alpha$, $v^0_\alpha : i \longrightarrow j$ tels que

$$f(v_\alpha)u'_\alpha \ = \ f(w_\alpha)\ .$$

$$\begin{tikzcd}
i_\alpha \arrow[rr, bend left, "w^0_\alpha"] \arrow[d, dash] & i \arrow[r, "v^0_\alpha"] \arrow[d, dash] & j_\alpha \arrow[r, "\lambda_\alpha"] \arrow[d, dash] & j \arrow[d, dash] \\
f(i_\alpha) \arrow[r, "u'_\alpha"] & f(i) \arrow[r, "f(v_\alpha)"] & f(j_\alpha) \arrow[r] & f(j)
\end{tikzcd}$$

Comme $I$ satisfait PF $1_\pi$ (cf. 4.9.6.9.2), il existe $h$ dans $I$ et des $\lambda_\alpha : j_\alpha \longrightarrow j$, tels que $\lambda_\alpha v_\alpha^0 = \lambda$ soit indépendant de $\alpha$, alors on a pour tout $\alpha \in A$

$$f(\lambda)u'_\alpha \Big( = f(\lambda_\alpha)\underbrace{f(v_\alpha)u'_\alpha}_{f(w_\alpha)} \Big) = f(\underbrace{\lambda_\alpha w_\alpha^0}_{w_\alpha}) ,$$

donc $\lambda : i \longrightarrow j$ et les $w_\alpha = \lambda_\alpha w_\alpha^0 : i_\alpha \longrightarrow j$ satisfont aux conditions voulues.

$\mathrm{c}_\pi \Longrightarrow \mathrm{b}''_\pi$. Il faut prouver que si $\mathrm{c}_\pi$ est satisfait, alors les $i'\backslash I$ satisfont PF $1'_\pi$.

[page 241]

Soit donc $\xi_\alpha = (i_\alpha, u'_\alpha)$ ($\alpha \in A$, $\operatorname{card} A \leqslant \pi$) une famille d'éléments de $i'\backslash I$, comme $I'$ satisfait à PF $1_\pi$ (cf. 4.9.6.9.2), il existe $j'$ dans $I'$ et des flèches $u''_\alpha : f(i_\alpha) \longrightarrow j'$, telles que $u''_\alpha u'_\alpha = u'$ indépendant de $\alpha$. Comme $f$ satisfait F 1, on peut supposer que $j'$ est de la forme $f(j)$. Appliquant F $3_\pi$ aux $i_\alpha$, $j$, $u''_\alpha$, on trouve $v : j \longrightarrow k$ et des $w_\alpha : i_\alpha \longrightarrow k$, tels que

$$f(v)u''_\alpha = f(w_\alpha) \qquad \forall\, \alpha \in A ,$$

d'où

$$f(w_\alpha)u'_\alpha = f(v)\underbrace{u''_\alpha u'_\alpha}_{u'} = f(v)u' \qquad \text{indépendant de } \alpha,$$

soit $w'$, donc les $w_\alpha$ définissent une flèche des $\xi_\alpha$ dans $\xi = (k, w')$, q.e.d.

$\mathrm{b}''_\pi \Longrightarrow \mathrm{b}_\pi$ si $f$ est fidèle. On est ramené à prouver que si $\mathrm{b}''_\pi$ est satisfait, $f$ fidèle, alors les catégories $i'\backslash I$, dont on sait déjà qu'elles satisfont PF $1_\pi$, satisfont également PF $2_\pi$. Soient donc $\xi = (i, u')$, $\eta = (j, v')$ deux objets de $i'\backslash I$, et $(u_\alpha)_{\alpha\in A}$ une famille de flèches $\xi \longrightarrow \eta$ (avec $\operatorname{card} A \leqslant \pi$), donc des flèches dans $I$ telles que $f(u_\alpha)u' = v'\ \forall\, \alpha \in A$.

$$\begin{tikzcd} i \arrow[r, shift left=2, "u_\alpha"] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] & j \arrow[r, dotted, "v"] & k \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} i' \arrow[r, "u'"] \arrow[rr, bend right, "v'"'] & f(i) \arrow[r, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] & f(j) \arrow[r] & f(k) \end{tikzcd}$$

Comme $I'$ est grande devant $\pi$, on peut égaliser par $f(j) \longrightarrow k'$, et comme $k'\backslash I \neq \emptyset$, on peut supposer $k'$ de la forme $f(k)$. Or

[page 242]

d'après l'implication $\mathrm{b}'' \Longrightarrow \mathrm{a} \Longrightarrow \mathrm{c}$ de la partie 1°) (cf. page 235) et comme $\mathrm{b}''_\pi \Longrightarrow \mathrm{b}''$, on sait déjà que $f$ satisfait à F 3. En l'appliquant à $j$, $k$ et $f(j) \longrightarrow f(k)$, on peut supposer que $f(j) \longrightarrow f(k)$ provient de $v : j \longrightarrow k$. On aura donc $f(v)f(u_\alpha) = f(v)f(u_\beta)$ $\forall\, \alpha, \beta \in A$, donc $f(vu_\alpha) = f(vu_\beta)$. Comme $f$ est fidèle, cela implique que $vu_\alpha = vu_\beta$, i.e. $v$ égalise les $u_\alpha$. D'ailleurs, $v$ peut être considérée comme une flèche *dans* $i'\backslash I$, de $(j, v')$ dans $(k, f(v)v')$. Q.e.d.

**4.9.6.10.** Quand $I$ est *ordonné,* alors les quatre conditions $\mathrm{a}_\pi$, $\mathrm{b}_\pi$, $\mathrm{c}_\pi$, $b''_\pi$ sont équivalentes, car les $i'\backslash I$ sont ordonnés, et il est claire qu'alors $\mathrm{b}''_\pi \Longleftrightarrow \mathrm{b}_\pi$.

[page 243]

## 4.10 Le théorème de représentation indicielle : démonstration

On va d'abord reformuler le théorème 4.9.3 sous forme plus générale, en termes de catégories *cofibrées.* Soit

$$\mathcal{D} \longrightarrow J \tag{4.10.1}$$

un foncteur cofibrant, où $J$ est équivalent à une petite catégorie, et de même pour les catégories fibres $\mathcal{D}_j$ $(j \in \operatorname{Ob} J)$. On se donne un cardinal infini $\pi$. Soit

$$\mathcal{M}_j \ = \ \operatorname{Ind}_\pi(\mathcal{D}_j) \qquad (j \in \operatorname{Ob} J) \ , \tag{4.10.2}$$

alors les $\mathcal{M}_j$ sont les fibres d'une catégorie cofibrée $\mathcal{N}$ sur $J$, que je désigne aussi par $\operatorname{Ind}_\pi(\mathcal{D}/J)$, donc on pose

$$\mathcal{N} \ = \ \operatorname{Ind}_\pi(\mathcal{D}/J) \ . \tag{4.10.3}$$

On a donc une inclusion pleinement fidèle de catégories cofibrées sur $J$

$$\mathcal{D} \hookrightarrow \mathcal{N} \ ,$$

d'où une inclusion

$$\underline{\Gamma}(\mathcal{D}/J) \longrightarrow \underline{\Gamma}(\mathcal{N}/J) \ . \tag{4.10.4}$$

[page 244]

Dans le cas où $\mathcal{D}$ est de la forme $C \times J$, alors $\mathcal{N}$ est de la forme $\mathcal{M} \times J$, avec $\mathcal{M} = \operatorname{Ind}_\pi(C)$, et l'inclusion (4.10.3) n'est autre (à isomorphisme près) que

$$\underline{\operatorname{Hom}}(J, C) \longrightarrow \underline{\operatorname{Hom}}(J, \mathcal{M}) \ .$$

Revenant au cas général, on voit encore que :

1°) Le deuxième membre de (4.10.3) est stable par $\varinjlim$ grandes devant $\pi$, lesquelles se calculent fibre à fibre.

2°) Le premier membre de (4.10.3) est formé d'objets $\pi$-accessibles du second.

D'où un foncteur *pleinement* fidèle

$$\operatorname{Ind}_\pi(\underline{\Gamma}(\mathcal{D}/J)) \hookrightarrow \underline{\Gamma}(\mathcal{N}/J) \ . \tag{4.10.4}$$

([104]).

**Théorème 4.10.1.** *Supposons qu'on ait*

$$\operatorname{card}\text{réd}\, J \ \leqslant \ \pi \ , \tag{4.10.1.1}$$

*et qu'il existe un ordinal limite $\alpha$, tel que :*

*1)* $\operatorname{card} \alpha \leqslant \pi$.

*2) Les limites inductives de*

[104] [Les numéros 4.10.1 à 4.10.4 sont utilisés deux fois.]

[page 245]

> *type $I_\alpha = \{\beta \mid \beta < \alpha\}$ sont représentables dans les catégories $\mathcal{D}_j$ ($j \in \mathrm{Ob}\, J$), et pour toute flèche $\alpha : j \longrightarrow j'$ dans $J$* `[trop de` $\alpha$`]`, *$\alpha^* : \mathcal{D}_j \longrightarrow \mathcal{D}_{j'}$ commute auxdites limites.*

*Alors le foncteur canonique pleinement fidèle (4.10.4) est une équivalence de catégories.*

Ceci va être contenu dans le résultat un peu plus précis :

**Corollaire 4.10.2.** *Les hypothèses étant celles de 4.10.1, avec en plus*

$$\mathrm{card}\, J \leqslant \pi \tag{4.10.2.1}$$

*(qui équivaut à (4.10.1.1) si $J$ est réduite, cas auquel on peut évidemment se réduire dans 4.10.1). Soit $\varphi \in \mathrm{Ob}\, \underline{\Gamma}(\mathcal{N}/J)$, et considérons le foncteur canonique* fidèle *:*

$$\underline{\Gamma}(\mathcal{D}/J)/\varphi \longrightarrow \prod_{j\in J} C_j/\varphi(j) . \tag{4.10.2.2}$$

*Alors la catégorie source $\underline{\Gamma}(\mathcal{D}/J)/\varphi$ est grande devant $\pi$, et le foncteur envisagé est cofinal.*

[page 246]

De ceci, le théorème résulte de façon essentiellement soritale, tout comme dans le cas particulier 4.9.3 précédent (cf. page 223) ([105]).

Pour établir le corollaire, comme le catégorie-but de (4.10.2.2) est grande devant $\pi$, comme produit de telles catégories (cf. 4.9.6.6, page 228), et le foncteur fidèle, il suffit en vertu de 4.9.6.3, 2°, de vérifier les conditions F 1 et F $3_\pi$ (page 225) pour le foncteur envisagé.

On va interpréter le foncteur (4.10.2.2) en termes d'une catégorie cofibrée

$$\mathcal{D}_\varphi \longrightarrow J , \tag{4.10.5}$$

dont les fibres sont les $\mathcal{D}_j/\varphi(j)$. On note que si $\alpha : j \longrightarrow j'$ est une flèche de $J$, alors on a

$$\begin{cases} \alpha_* : C_j \longrightarrow C_{j'} \\ \text{et} \ \ \alpha_*(\varphi(j)) \longrightarrow \varphi(j') , \end{cases}$$

[page 247]

d'où un foncteur composé

$$C_j/\varphi(j) \longrightarrow C_{j'}/\alpha^*(\varphi(j)) \longrightarrow C_{j'}/\varphi(j') ,$$

avec transitivité à isomorphisme canonique près etc. On note que l'on a un isomorphisme canonique

$$\underline{\Gamma}(\mathcal{D}_\varphi/J) \simeq \underline{\Gamma}(\mathcal{D}/J)/\varphi ,$$

de sorte que le foncteur fidèle canonique (4.10.2.2) s'identifie au foncteur

$$\underline{\Gamma}(\mathcal{D}_\varphi/J) \longrightarrow \prod_{j\in \mathrm{Ob}\, J} (\mathcal{D}_\varphi)_j . \tag{4.10.6}$$

Le corollaire 4.10.2 sera alors une conséquence du résultat plus général suivant :

**Corollaire 4.10.3.** *Soit $\mathcal{E} \longrightarrow J$ un foncteur cofibrant, et $\pi$ un cardinal infini. On suppose :*

[105] Un peu court ! Il faudrait expliciter l'argument avec soin – il y en a pour deux ou trois pages !

*a)* card $J \leqslant \pi$.

*b) Les catégories fibres $\mathcal{E}_j$ sont équivalentes à des petites catégories, et grandes devant $\pi$.*

*c) Il existe un ordinal limite tel que :*

*1°)* card $\alpha \leqslant \pi$.

[page 248]

*2°) Les limites inductives de type $I_\alpha$ sont représentables dans les catégories $\mathcal{E}_j$, et les foncteurs cochangement de base $\lambda_* : \mathcal{E}_j \longrightarrow \mathcal{E}_{j'}$ y commutent. (C'est le cas p.ex. si les limites inductives filtrantes* dénombrables *sont représentables dans les $\mathcal{E}_j$, et si les $\alpha_*$ y commutent ; ou s'il existe un cardinal $\pi_0 \leqslant \pi$ et un cardinal $\pi'_0 > \pi_0$, tel que les limites inductives grandes devant $\pi_0$ et de cardinal $\leqslant \pi'_0$ soient représentables dans les $\mathcal{E}_j$, et que les $\alpha_*$ y commutent.)*

*Sous ces conditions, le foncteur canonique fidèle*

$$\underline{\Gamma}(\mathcal{E}/J) \longrightarrow \prod_{j \in \mathrm{Ob}\, J} \mathcal{E}_j \tag{4.10.3.1}$$

*est cofinal, et la catégorie source est grande devant $\pi$.*

Il est $\pm$ immédiat que les hypothèses de 4.10.1 impliquent que celles de 4.10.3 sont satisfaites pour $\mathcal{E} = \mathcal{D}_\varphi \longrightarrow J$ (4.10.5). Pour

[page 249]

ceci, on utilise le

**Lemme 4.10.4.** *Soient $C$ une catégorie, et $\pi$ un cardinal infini. Alors le foncteur d'inclusion $C \longrightarrow \mathcal{M} \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{Ind}_\pi C$ commute aux $\varinjlim$ de cardinal $\leqslant \pi$.*

Soit en effet $I$ telle que card $I \leqslant \pi$, et $(x_i)_{i \in I}$ un système inductif sur $C$, y ayant une limite $x$. Soit d'autre part $X = \varinjlim_{I'} \xi_{i'}$ un objet de $\mathrm{Ind}_\pi C$, avec $I'$ grande devant $\pi$. On a donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(x, X) &\simeq \varinjlim_{I'} \mathrm{Hom}(x, \xi_{i'}) \\
&\simeq \varinjlim_{I'} \varprojlim_{I} \mathrm{Hom}(x_i, \xi_{i'}) \\
&\overset{\text{SGA 4 I 9.8}}{\simeq} \varprojlim_{I} \underbrace{\varinjlim_{I'} \mathrm{Hom}(x_i, \xi_{i'})}_{\simeq \mathrm{Hom}(x_i, X)} \\
&\simeq \varprojlim_{I} \mathrm{Hom}(x_i, X) ,
\end{aligned}$$

ce qui prouve que $x$ est aussi une $\varinjlim$ des $x_i$ dans $\mathcal{M}$ tout entier.

[page 250]

Ainsi, on est réduit à prouver 4.10.3. Appliquant 4.9.6 2°, on est ramené à prouver, pour le foncteur envisagé, les conditions F 1 et F $3_\pi$ (page 225).

Dans les arguments qui suivent, on va utiliser les conditions a), b) de 4.10.3, mais non, pour l'instant, la condition c.

**Lemme 4.10.5.** *Sous les conditions de 4.10.3 a) b) (à l'exclusion de c), pour que (4.10.3.1) soit cofinal et $\Gamma(\mathcal{E}/J)$ grande devant $\pi$, il faut et il suffit que le foncteur* *envisagé satisfasse à la condition F 1, rappelée ci-dessous, et à la variante F′ 1 de celle-ci énoncée ci-dessous :*

F 1) *Pour tout système* $(X(j))_{j\in \mathrm{Ob}\, J}$ *d'éléments* $X(j)\in \mathrm{Ob}\,\mathcal{E}_j$*, existe une* section $G$ *de* $\mathcal{E}$ *sur* $J$*, et un système de flèches*

$$(4.10.5.1) \qquad X(j) \longrightarrow G(j) \qquad (j\in ObJ)\ .$$

F′1) *Sous les conditions de* F 1 *précédent, supposons de plus une section* $F$ *de* $\mathcal{E}$ *sur* $J$

[page 251]

*et un système de flèches*

$$F(j) \longrightarrow X(j) \qquad (j\in \mathrm{Ob}\, J)\ ,$$

*alors* $G$ *et le système de flèches (4.10.5.1) peut être choisi de telle façon que les flèches composées*

$$F(j) \longrightarrow X(j) \longrightarrow G(j)$$

*définissent un homomorphisme de sections*

$$F \longrightarrow G$$

*(dans la catégorie* $\underline{\Gamma}(\mathcal{E}/J)$*).*

([106]).

Démonstration. Il faut voir que F 1 & F′ 1 équivaut à F 1 & F $3_\pi$. L'implication $\Longleftarrow$ est $\pm$ immédiate, c'est de $\Longrightarrow$ que nous aurons besoin, donc

$$\mathrm{F}\ 1\ \&\ \mathrm{F}'\ 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \mathrm{F}\ 3_\pi\ .$$

Pour ceci, réénonçons F $3_\pi$ dans le contexte présent. On se donne une famille $(F_\alpha)_{\alpha\in A}$, $\mathrm{card}\, A\leqslant \pi$, d'objets de $\underline{\Gamma}(\mathcal{E}/J)$, un objet $F$ de la même catégorie, et pour tout $j$ dans $\mathrm{Ob}\, J$, un système de flèches

$$F_\alpha(j) \xrightarrow{u_\alpha(j)} F(j)\ ,$$

mais sans supposer que pour $\alpha$ fixé, $j$ variable

[page 252]

cela définisse un homomorphisme de sections $F_\alpha \longrightarrow F$. On cherche une section $G$ de $\mathcal{E}$ sur $J$, et un homomorphisme de sections $F\longrightarrow G$, tels que pour tout $\alpha$, le système des composés

$$F_\alpha(j) \longrightarrow F(j) \longrightarrow G(j)$$

définisse un homomorphisme de sections $F_\alpha \longrightarrow G_\alpha$. Soit donc $\lambda : j\longrightarrow j'$ une flèche de $J$, considérons les carrés *(non commutatifs)*

(*)
$$\begin{tikzcd} F_\alpha(j) \arrow[r, "u_\alpha(j)"] \arrow[d, "F_\alpha(\lambda)"'] \arrow[dr, phantom, "!"] & F(j) \arrow[d, "F(\lambda)"] \\ F_\alpha(j') \arrow[r, "u_\alpha(j')"] & F(j') \end{tikzcd}$$

[106]**N.B.** Les conditions F 1 et F ′ 1 équivalent à dire que le foncteur envisagé satisfait aux conditions F1 et F3, vu encore (en vertu de 4.9.6.3, 1°) que $\underline{\Gamma}(\mathcal{E}/J)$ est *filtrante* sans plus, et le foncteur fidèle (4.10.3.1) cofinal. Cela implique déjà que $\underline{\Gamma}(\mathcal{E}/J)$ est grande devant $\pi$.

(indexés par $\alpha \in A$). Pour $j'$ fixé dans $J$, le nombre de ces carrés est majoré par $\operatorname{card} \operatorname{Ob}(J/j') \times \operatorname{card} A \leqslant \pi \cdot \pi = \pi$. Il s'ensuit, comme $\mathcal{E}_{j'}$ est grande devant $\pi$, qu'il existe un objet $X(j')$ de $\mathcal{E}_{j'}$, et une flèche $v(j') : F(j') \longrightarrow X(j')$ de telle façon que pour tout $\alpha \in A$, et tout $\lambda \in \operatorname{Ob} J/j'$, le carré déduit de $(*)$

[page 253]

en composant avec $F(j') \longrightarrow X(j')$ soit commutatif. On fait ce choix pour tout objet $j'$ de $J$. Appliquons alors F′ 1 à $F$ et au système de flèches $F(j) \xrightarrow{v(j)} X(j)$, on trouve $G$ et un système de flèches

$$w(j) \ : \ X(j) \longrightarrow G(j)$$

de telle façon que les flèches composées

$$\begin{tikzcd} w(j)v(j) : F(j) \arrow[rr] \arrow[dr, dotted] & & G(j) \\ & X(j) \arrow[ur, dotted] & \end{tikzcd}$$

définissent un homomorphisme de sections. Je dis que cet homomorphisme a la propriété voulue pour F $3_\pi$, i.e. que pour tout $\alpha \in A$, le système des composés

$$F_\alpha(j) \longrightarrow F(j) \longrightarrow G(j)$$

(pour $j \in \operatorname{Ob} J$ variable) définit un homomorphisme de sections $F_\alpha \longrightarrow G$. En effet, il suffit pour cela de considérer, pour une flèche $\lambda$ de $J$, le

[page 254]

diagramme

$$\begin{tikzcd} F_\alpha(j) \arrow[r, "u_\alpha(j)"] \arrow[d, "F_\alpha(\lambda)"'] \arrow[dr, phantom, "!"] & F(j) \arrow[r, "v(j)"] \arrow[d, "F(\lambda)"'] \arrow[drr, phantom, "\text{comm.}"] & X(j) \arrow[r, "w(j)"] & G(j) \arrow[d, "G(\lambda)"] \\ F_\alpha(j') \arrow[r, "u_\alpha(j')"] & F(j') \arrow[r, "v(j')"] & X(j') \arrow[r, "w(j')"] & G(j') \ . \end{tikzcd}$$

Le lemme 4.10.5 étant prouvé, tout revient donc à prouver la condition F 1, et son complément F′ 1, qui se prouvera dans la même haleine.

**4.10.6.** On se donne donc le système d'objets

(4.10.6.1) $$X(j) \ \in \ \operatorname{Ob} \mathcal{E}_j \qquad (j \in \operatorname{Ob} J) \ ,$$

et le cas échéant, un objet $F$ de $\underline{\Gamma}(\mathcal{E}/J)$, et un système de flèches

(4.6.10.2) $$F(j) \xrightarrow{u_j} X(j) \ ,$$

et on se propose de construire $G$ de $\underline{\Gamma}(\mathcal{E}/J)$, et un système de flèches

(4.10.6.3) $$X(j) \xrightarrow{w(j)} G(j) \ ,$$

de telle façon que (si on a la donnée supplémentaire des $u(j)$) les flèches composées

$$F(j) \xrightarrow{u(j)} X(j) \xrightarrow{v(j)} G(j)$$

`[page 255]`

soient fonctorielles en $j$.

On va faire une construction transfinie sur les ordinaux $\alpha$ tels que

$$\operatorname{card}\alpha \ \leqslant\ \pi$$

d'un système inductif

$$(X_\alpha(j))_\alpha$$

d'objets de $\prod_{j\in \mathrm{Ob}\,J}\mathcal{E}_j$. On va d'abord ignorer la donnée éventuelle (4.10.6.2). On posera

(4.10.6.4) $$X_0(j)\ =\ X(j)\ ,$$

et on va donner la prescription pour passer de $X_\alpha$ à $X_{\alpha+1}$. La construction inclura aussi, pour toute flèche $\lambda : j' \longrightarrow j$ de $J$ et tout $\alpha$, la donnée de

(4.10.6.5) $$X_\alpha(j) \xrightarrow{t_\alpha(\lambda)} X_{\alpha+1}(j)\ , \qquad \text{flèche (dans } \mathcal{E}\text{) au dessus de } \lambda,$$

et ces flèches, et les flèches de transition $X_\alpha(j) \xrightarrow{\tau_\alpha(j)} X_{\alpha+1}(j)$, doivent

`[page 256]`

satisfaire aux trois conditions suivantes :

(i) Si $\lambda$ est une flèche identique $\mathrm{id}_J : J \longrightarrow J$, alors $\boxed{t_\alpha(\lambda) = \tau_\alpha(j).}$

(ii) Dans le diagramme

$$\begin{tikzcd}
X_\alpha(j') \arrow[r, "\tau_\alpha(j')"] \arrow[dr, "t_\alpha(\lambda)"] & X_{\alpha+1}(j') \arrow[r] \arrow[dr, "t_{\alpha+1}(\lambda)"] \arrow[d, phantom, "\bullet"] & X_{\alpha+2}(j') \arrow[r] \arrow[dr] & X_{\alpha+3}(j') \arrow[r] \arrow[dr, dotted] & {} \\
X_\alpha(j') \arrow[r] & X_{\alpha+1}(j') \arrow[r, "\tau_{\alpha+1}(j')"] & X_{\alpha+2}(j') \arrow[r, "\tau_{\alpha+2}(j')"] & X_{\alpha+3}(j') \arrow[r] & {} ,
\end{tikzcd}$$

$\tau_{\alpha+2}(j)$ "rend le carré $\bullet$ commutatif", i.e. égalise $t_{\alpha+1}(\lambda)\tau_\alpha(j')$ et $\tau_{\alpha+1}(j)t_\alpha(\lambda)$ :

$$\boxed{\tau_{\alpha+2}(j)t_{\alpha+1}(\lambda)\tau_\alpha(j')\ =\ \tau_{\alpha+2}(j)\tau_{\alpha+1}(j)t_\alpha(\lambda)\ .}$$

(iii) Si on a deux flèches consécutives $\lambda : j'' \longrightarrow j'$, $\mu : j' \longrightarrow j$, on a donc le diagramme

$$\begin{tikzcd}
X_\alpha(j'') \arrow[r] \arrow[dr, "t_\alpha(\lambda)"] \arrow[ddr, "t_\alpha(\mu\lambda)"] & X_{\alpha+1}(j'') \arrow[r] \arrow[dr] & X_{\alpha+2}(j'') \arrow[r] \arrow[dr] & X_{\alpha+3}(j'') \\
X_\alpha(j') \arrow[r] & X_{\alpha+1}(j') \arrow[r] \arrow[dr, "t_{\alpha+1}(\mu)"] & X_{\alpha+2}(j') \arrow[r] \arrow[dr] & X_{\alpha+3}(j') \\
X_\alpha(j) \arrow[r] & X_{\alpha+1}(j) \arrow[r, "\tau_{\alpha+1}(j)"] & X_{\alpha+2}(j) \arrow[r, "\tau_{\alpha+2}(j)"] & X_{\alpha+3}(j)\ ,
\end{tikzcd}$$

$$\boxed{\tau_{\alpha+2}(j)t_{\alpha+1}(\mu)t_\alpha(\lambda)\ =\ \tau_{\alpha+2}(j)\tau_{\alpha+1}(j)t_\alpha(\mu\lambda)}$$

[page 257]

Ainsi, pour définir les $X_{\alpha+1}(j)$, il faut tenir compte de toutes ces contraintes. Donc :

1°) Pour $j$ fixé, $X_{\alpha+1}(j)$ doit être but des flèches

$$X_\alpha(j') \xrightarrow{t_\alpha(\lambda)} X_{\alpha+1}(j) \ ,$$

pour les $\lambda : j' \longrightarrow j$ dans $\mathrm{Ob}\, J/j$ – y compris pour $\lambda = \mathrm{id}_j$, auquel cas $t_\alpha(\lambda)$ : $X_\alpha(j) \longrightarrow X_{\alpha+1}(j)$ jouera le rôle du morphisme de transition $\tau_\alpha(j)$.

2°) Si $\alpha$ est de la forme $\alpha' + 2$, i.e. s'il n'est ni ordinal limite, ni successeur d'un ordinal limite, alors on exige de plus, pour les morphismes de transition $\tau_\alpha(j)$, d'égaliser les couples de flèches prévus dans (ii) et (iii) ci-dessus.

Comme l'ensemble de ces données dans 1°), ou de ces contraintes dans 2°),

[page 258]

est de cardinal $\leqslant \pi$, et que la catégorie $\mathcal{E}_j$ est grande devant $\pi$, on voit qu'on peut bel et bien trouver $X_{\alpha+1}(j)$ et des $t_\alpha(\lambda) : X_\alpha(j') \longrightarrow X_{\alpha+1}(j)$, de façon à satisfaire (si $\alpha = \alpha'+2$) aux contraintes rappelées dans 2°. Cela achève la description de la construction de $X_{\alpha+1}(\bullet)$, en termes de $X_\beta(\bullet)$ $(\beta \leqslant \alpha)$ et des $t_\beta(\lambda)$ $(\beta < \alpha)$.

Il faut enfin définir $X_\alpha(\bullet)$ pour $\alpha$ un ordinal limite. Cette fois, on lui demande seulement de recevoir les $X_\beta(\bullet)$ pour $\beta < \alpha$. Comme l'ensemble $I_\alpha$ de ces $\beta$ est de cardinal $\leqslant \pi$, et que les $\mathcal{E}_j$ sont grandes devant $\pi$, on peut bel et bien trouver les $X_\alpha(j)$.

[page 259]

On a donc prouvé l'essentiel du

**Lemme 4.10.7.** *Sous les conditions de 4.10.3 a) b), et pour un système $X(\bullet) \in \mathrm{Ob} \prod_{j \in \mathrm{Ob}\, J} \mathcal{E}_j$ donné, on peut trouver un système inductif $(X_\alpha(i))_\alpha$ dans $\prod \mathcal{E}_j$, indexé par les ordinaux $\alpha$ telle que $\mathrm{card}\, \alpha \leqslant \pi$, et pour toute flèche $\lambda : j' \longrightarrow j$ dans $J$ des flèches $t_\alpha(\lambda) : X_\alpha(j') \longrightarrow X_\alpha(j)$, de telle façon que l'on ait les conditions suivantes.*

*1°) $X_0(\bullet) = X(\bullet)$.*

*2°) Les conditions (i) (ii) (iii) (p. 256).*

*3°) Si on se donne $F$ dans $\mathrm{Ob}\, \underline{\Gamma}(\mathcal{E}/J)$, et des flèches $u(j) : F(j) \longrightarrow X(j) = X_0(j)$, on peut supposer que pour toute flèche $\lambda : j' \longrightarrow j$ dans $J$, on a*

$$(*) \qquad \begin{tikzcd} F(j') \arrow[r, "u(j')"] \arrow[d, "F(\lambda)"'] & X_0(j') \arrow[dr, "t_0(\lambda)"] & \\ F(j) \arrow[r, "u(j)"] & X_0(j) \arrow[r, "\tau_0(j)"] & X_1(j) \end{tikzcd} \qquad \text{commutatif.}$$

[page 260]

Il reste seulement à prouver ce dernier complément 3°. C'est une contrainte uniquement sur la construction de $X_1(\bullet)$ et des $t_0(\lambda)$. Supposons donc que l'on ait construit $X_1(\bullet)$ sans tenir compte de cette contrainte. Pour $j$ fixé, il faut donc "rendre commutatif" tous ces carrés, i.e. toutes ces double-flèches $(t_0(\lambda)u(j'), \tau_0(j)u(j)F(\lambda))$ de but $X_1(j)$.

Comme l'ensemble de ces double-flèches est de cardinal $\operatorname{card}\operatorname{Ob}\mathcal{E}/j \leqslant \pi$, on peut trouver $X_1(j) \longrightarrow X_1'(j)$ dans $\mathcal{E}_j$, égalisant toutes ces double-flèches, donc quitte à remplacer $X_1(j)$ par $X_1'(j)$, on gagne.

`[page 261]`

Il est temps enfin de faire appel à l'hypothèse c) de 4.10.3. Soit donc $\alpha$ un ordinal limite, comme stipulé dans cette condition. Comme $\operatorname{card}\alpha \leqslant \pi$, a fortiori $\operatorname{card}\beta \leqslant \pi$ si $\beta < \alpha$, on a donc un système inductif

$$(X_\beta(\bullet))_{\beta\in I_\alpha}$$

dans $\prod_{j\in J}\mathcal{E}_j$. Comme les $\varinjlim$ de type $I_\alpha$ existent dans $\mathcal{E}_j$, on peut donc considérer

$$G(j) \ = \ \varinjlim_{\beta\in I_\alpha} X_\beta(j) \ \in \ \operatorname{Ob}\mathcal{E}_j \ .$$

Si $\lambda : j' \longrightarrow j$ est une flèche de $J$, on en déduit une $\lambda$-flèche

$$G(\lambda) \ : \ G(j) = \varinjlim X_\beta(j) \ \longrightarrow \ G(j') \simeq \ \varinjlim X_{\beta+1}(j')$$

par $G(\lambda) = \varinjlim t_\beta(\lambda)$. Il faut

`[page 262]`

faire attention que les $t_\beta(\lambda)$ ne définissent pas un homomorphisme de systèmes projectifs, mais par la condition (ii), p. 256, ils définissent un homomorphisme d'ind-objets, donc un homomorphisme sur les $\varinjlim$ ([107]). La condition (i) assure que $\lambda \longmapsto G(\lambda)$ transforme identités en identités, et la condition (iii) que l'on a $G(\mu\lambda) = G(\mu)G(\lambda)$. Donc $G$ apparaît comme une section de $\mathcal{E}$ sur $J$. On a d'autre part des flèches

$$X(j) \ \overset{\text{déf}}{=} \ X_0(j) \ \longrightarrow \ G(j) = \varinjlim_{\beta\in I_\alpha} X_\beta(j) \ ,$$

ce qui prouve F (1). D'autre part, la condition 3°) du lemme prouve la validité de F′ (1). Cela achève la démonstration de 4.10.3, et par là de 4.10.1 et de 4.9.3.

`[page 263]`

**Corollaire 4.10.8** (du théorème 4.10.1). *Soit $\mathcal{N} \longrightarrow J$ un foncteur cofibrant, tel que les fibres soient des catégories accessibles (4.8), les foncteurs cochangement de base $\lambda_* : \mathcal{N}_{j'} \longrightarrow \mathcal{N}_j$ accessibles, enfin $J$ équivalente à une petite catégorie. Alors la catégorie $\mathcal{M} = \underline{\Gamma}(\mathcal{N}/J)$ est accessible. Plus précisément, soit $\pi_0$ un cardinal infini tel que les catégories $\mathcal{N}_j$ soient $\pi_0$-accessibles, et que les foncteurs $\lambda_*$ soient $\pi_0$-accessibles, et soit $\pi$ un cardinal infini tel que l'on ait :*

- a) $\pi^{\pi_0} = \pi$.
- b) $\forall\ \lambda : j' \longrightarrow j$ *dans* $J$, $\lambda_* : \mathcal{E}_j \longrightarrow \mathcal{E}_{j'}$ *applique* $(\mathcal{E}_j)_{\pi_0}$ *dans* $(\mathcal{E}_{j'})_{\pi_0}$.
- c) $\operatorname{card}\operatorname{réd} J \leqslant \pi$.

*Alors $\mathcal{M}$ est $\pi$-accessible, et plus précisément, on a*

$$\mathcal{M} \ \simeq \ \operatorname{Ind}_\pi(\mathcal{M}_\pi) \ ,$$

*où $\mathcal{M}_\pi$ est la sous-catégorie pleine de $\mathcal{M}$ formée des sections $F$ de $\mathcal{M}$ sur $J$ telles que l'on ait $F(j) \in (\mathcal{E}_j)_\pi\ \forall\ j \in \operatorname{Ob} J$,*

[107]Attention, c'est ici qu'on utilise tacitement le fait que le foncteur $\lambda_* : \mathcal{E}_{j'} \longrightarrow \mathcal{E}_j$ commute aux $\varinjlim$ de type $I_\alpha$, ce qui implique que les inclusions $\mathcal{E}_j \hookrightarrow \mathcal{E}$ commutent à ce type de $\varinjlim$ .

`[page 264]`

*$(\mathcal{E}_j)_\pi$ désignant la sous-catégorie pleine de $\mathcal{E}_j$ formée des objets $\pi$-accessibles de $\mathcal{E}_j$.*

En effet, l'hypothèse au début implique l'existence de $\pi_0$ et de $\pi$ satisfaisant les conditions dites. Les conditions a) et b) sur $\pi$, plus le fait que les foncteurs $\lambda_*$ soient $\pi_0$-accessibles, impliquent que la sous-catégorie strictement pleine $\mathcal{N}_\pi$ de $\mathcal{N}$ dont les fibres sont les $(\mathcal{N}_j)_\pi$, est une sous-catégorie cofibrée, et que de plus $\mathcal{N}$ est $J$-équivalent à $\mathrm{Ind}_\pi(\mathcal{N}_\pi/J)$. D'autre part, les fibres de $\mathcal{N}_\pi/J$ sont stables par $\varinjlim$ grandes devant $\pi_0$ et de cardinal $\leqslant \pi$, donc la condition "ordinale" de 4.10.1 est vérifiée (en y faisant $\mathcal{D} = \mathcal{N}_\pi$). Comme de plus $\operatorname{card} J \leqslant \pi$, on en conclut par 4.10.1 que $\mathcal{M} \simeq \mathrm{Ind}_\pi(\mathcal{M}_\pi)$.

`[page 265]`

**Corollaire 4.10.9.** *Soit $\mathcal{N} \longrightarrow J$ une "cofibration en paratopos" ([108]), i.e. un foncteur cofibrant tel que les fibres soient des catégories paratopos, et les foncteurs cochangement de base soient des foncteurs images inverses (resp. images directes) pour des morphismes de paratopos, i.e. qu'ils commutent aux (petites) $\varinjlim$ (resp. aux petites $\varprojlim$ ). Supposons de plus $J$ équivalente à une petite catégorie. Alors $\underline{\Gamma}(\mathcal{N}/J)$ est une catégorie paratopos.*

En effet, c'est une catégorie accessible en vertu de 4.10.8, d'autre part l'hypothèse sur les $\lambda_*$ implique aussitôt que $\underline{\Gamma}(\mathcal{N}/J)$ est stable par petites $\varprojlim$ (resp. par petites $\varprojlim$ `[plutôt` $\varinjlim$ `?]`). Donc $\underline{\Gamma}(\mathcal{N}/J)$ est une catégorie paratopos en vertu de 4.8.9 b $\Longrightarrow$ a (resp. c $\Longrightarrow$ a).

**Corollaire 4.10.10.** *Soit $\mathcal{N} \longrightarrow J$ une catégorie* fibrée *(non cofibrée !), telle que les fibres soient des catégories paratopos et les foncteurs*

`[page 266]`

*changement de base soient des foncteurs images directes pour des morphismes de paratopos (i.e. des foncteurs accessibles, commutant aux petites $\varprojlim$ ). Supposons de plus $J$ équivalente à une petite catégorie. Alors $\underline{\Gamma}(\mathcal{N}/J)$ est une catégorie paratopos.*

En effet, l'hypothèse implique que pour toute flèche $\lambda : j' \longrightarrow j$ dans $J$, le foncteur $\lambda_* : \mathcal{N}_{j'} \longrightarrow \mathcal{N}_j$ admet un adjoint à gauche $\lambda^* : \mathcal{N}_j \longrightarrow \mathcal{N}_{j'}$, d'où s'ensuit que $\mathcal{N} \longrightarrow J$ est aussi cofibrant, les foncteurs de cochangement de base commutant aux petites $\varinjlim$ . Donc on peut appliquer 4.8.9, qui donne le résultat voulu.

**Question 4.10.11.** *Soit $\mathcal{N} \longrightarrow J$ un foncteur* fibrant, *tel que les $\mathcal{N}_j$ soient des catégories accessibles, et les foncteurs $\lambda^*$ de changement de base accessibles, $J$ étant équivalente à une petite catégorie. Je*

`[page 267]`

*conjecture que sous ces conditions, $\underline{\Gamma}(\mathcal{N}/J) \overset{\text{déf}}{=} \underline{\mathrm{Hom}}(J, \mathcal{N})$ est accessible, et qu'il en est de même de $\underline{\mathrm{Hom}}\,\underline{\mathrm{cart}}_J(J, \mathcal{N})$.*

C'est ce qui est prouvé dans SGA 4 I 9.24 sous des hypothèses légèrement plus fortes (à l'aide de l'ancienne notion trop forte à mon gré, de filtrations cardinales). Je serais étonné que la démonstration (un peu longuette) de loc. cit. ne s'applique pas au cas général. Mais on aimerait avoir un énoncé qui coiffe celui-ci et 4.10.8, dans le cas d'un foncteur $\mathcal{N} \longrightarrow J$ qui ne serait supposé ni fibrant ni cofibrant, mais ...( ? ? ?).

[108] terme ambigu, cf. la double explication.

## 4.11 Application à l'existence des limites dans une catégorie de la forme $\mathrm{Ind}_{\pi_0}(C)$.

**Proposition 4.11.1.** *Soit*

[page 268]

*$C$ une catégorie équivalente à une petite catégorie, $\pi$ un cardinal infini, posons $\mathcal{M} = \mathrm{Ind}_\pi(C)$. Soit $\Phi$ un ensemble de catégories de cardinal réduit $\leqslant \pi$. On se propose d'examiner si $\mathcal{M}$ est "stable par $\varinjlim$ de type $\Phi$" (i.e. stable par $\varinjlim$ de type $I$, quel que soit $I \in \Phi$). Il suffit pour cela que $C$ est stable par $\varinjlim$ de type $\Phi$, et que de plus il existe un ordinal limite $\alpha$ avec $\operatorname{card}\alpha \leqslant \pi$ et tel que $C$ soit stable par $\varinjlim$ de type $I_\alpha$ (p.ex. tel que $I_\alpha \in \Phi$). Inversement, si $\mathcal{M}$ est stable par $\varinjlim$ de type $\Phi$, et si on suppose de plus $C$ karoubienne (i.e. stable par facteurs directs), alors $C$ est stable par $\varinjlim$ de type $\Phi$. Dans l'un et l'autre cas, le foncteur d'inclusion $C \hookrightarrow \mathcal{M}$ commute aux $\varinjlim$ envisagées.*

([109]).

Démonstration. a) Condition suffisante. On applique 4.9.3 pour conclure que

[page 269]

pour toute catégorie $J$ de cardinal réduit $\leqslant \pi$ (en particulier pour $J \in \Phi$), tout foncteur $\varphi : J \longrightarrow \mathcal{M} = \mathrm{Ind}_\pi(C)$ admet une représentation indicielle $\Phi : J \times I \longrightarrow C$, avec $I$ grande devant $\pi$. Ceci, plus la stabilité de $C$ par $\varinjlim$ de type $J$, suffit à établir l'existence de la $\varinjlim$ de $\varphi$.

La réciproque provient du fait que si $C$ est karoubienne, alors son image essentielle dans $\mathcal{M}$ n'est autre que $\mathcal{M}_\pi$, laquelle est stable dans $\mathcal{M}$ par toute $\varinjlim$ de cardinal $\leqslant \pi$ représentable dans $\mathcal{M}$. Si $\mathcal{M}$ est stable par $\varinjlim$ de type $\Phi$, il en est de même de $\mathcal{M}_\pi$, donc de $C$, q.e.d.

**Corollaire 4.11.2.** *Pour que $\mathcal{M}$ soit stable par $\varinjlim$ filtrantes (resp. par petites $\varinjlim$ ), il suffit que $C$ le soit par $\varinjlim$ filtrantes (resp. par $\varinjlim$ )* de cardinal $\leqslant \pi$, *et c'est aussi nécessaire si $C$ est karoubienne.*

Supposons $C$ stable par $\varinjlim$ filtrantes

[page 270]

(resp. par $\varinjlim$ de cardinal $\leqslant \pi$, alors par 4.11.1 $\mathcal{M}$ est stable par ce même type de limites inductives. D'autre part, il est stable par $\varinjlim$ grandes devant $\pi$. Il suffit donc de prouver le

**Lemme 4.11.3.** *Soit $\mathcal{M}$ une catégorie, $\pi$ un cardinal. Supposons que $\mathcal{M}$ soit stable par $\varinjlim$ filtrantes de cardinal $\leqslant \pi$ (resp. par $\varinjlim$ de cardinal $\leqslant \pi$, resp. par sommes des cardinal $\leqslant \pi$),* et *par $\varinjlim$ grandes devant $\pi$. Alors $\mathcal{M}$ est stable par petites $\varinjlim$ filtrantes (resp. par petites $\varinjlim$ , resp. par petites sommes).*

Ce lemme se prouve comme 4.4.14, page 97.

Reste la réciproque dans 4.11.2, qui résulte de l'assertion similaire dans 4.11.1.

**Corollaire 4.11.4.** *Quand $\mathcal{M} = \mathrm{Ind}_\pi C$ est-il stable par sommes ? S'il existe un ordinal $\alpha$ tel que* $\operatorname{card}\alpha \leqslant \pi$, *et que $C$ soit stable par $\varinjlim$ de type $I_\alpha$, alors il suffit que $C$ soit stable*

[109] Expliciter ici les corollaires des types 4.13.20, 4.13.21 (p. 341).

*par sommes de cardinal $\leqslant \pi$. Cette condition est aussi nécessaire si $C$ est karoubienne.* ([110]).

Se prouve comme 4.11.2, en utilisant 4.11.3.

[page 271]

**Proposition 4.11.5** ([111]). *Soit $\Phi$ un ensemble de catégories $I$ équivalentes à des catégories finies, et "rigides", i.e. pour tout $i \in \mathrm{Ob}\, I$, $\underline{\mathrm{Hom}}_I(i,i) = \{\mathrm{id}_i\}$. Soient $C$ une catégorie équivalente à une petite catégorie, $\pi$ un cardinal infini, $\mathcal{M} = \mathrm{Ind}_\pi C$. Pour que $\mathcal{M}$ soit stable par $\varinjlim$ (resp. par $\varprojlim$ ) de type $\Phi$, il* suffit *que $C$ le soit. Dans le cas non respé, si $C$ est karoubienne, cette condition est aussi nécessaire.*

Cette dernière assertion est contenue dans l'assertion similaire dans 4.11.1. Pour la première assertion, cela résulte de la façon habituelle du

**Lemme 4.11.6** ([112]). *Soit $J$ une catégorie équivalente à une catégorie finie, $J$ rigide, $C$ une catégorie équivalente à une petite catégorie, $\pi$ un cardinal infini. Alors tout foncteur $J \longrightarrow \mathcal{M} \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{Ind}_\pi C$ admet une représentation indicielle $J \times I \longrightarrow C$, avec $I$ grande devant $\pi$, en d'autres termes, le*

[page 272]

*foncteur canonique pleinement fidèle*

$$\mathrm{Ind}_\pi(\underline{\mathrm{Hom}}(J,C)) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(J,\mathcal{M})$$

*déduit de l'inclusion $C \hookrightarrow \mathcal{M}$, d'où $\underline{\mathrm{Hom}}(J,C) \hookrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(J,\mathcal{M})$ (cf. 4.9), est une équivalence de catégories.* (**N.B.** J'ignore s'il en est ainsi sans hypothèse de rigidité sur $J$.)

Démonstration. Cela se prouve comme le résultat similaire pour $\mathrm{Ind}(C)$ au lieu de $\mathrm{Ind}_\pi C$, cf. SGA 4 I 8.8.5.

[page 273]

**Corollaire 4.11.7** ([113]). *Pour que $\mathcal{M} = \mathrm{Ind}_\pi C$ soit stable par $\varinjlim$ (resp. par $\varprojlim$ )* finies, *il* suffit *que $C$ le soit. Et c'est aussi nécessaire dans le cas non respé, lorsqu'on suppose $C$ karoubienne.*

## 4.12 Foncteurs accessibles entre catégories accessibles

**Proposition 4.12.1** ([114]). *Soient $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ deux catégories accessibles (4.8), et $f : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$ un foncteur accessible. Alors il existe des cardinaux infinis $\pi_0$, $\pi_1$ tels que $\pi_1 \geqslant \pi_0$ et que pour tout cardinal $\pi \geqslant \pi_1$, on ait*

$$f(\mathcal{M}_\pi) \subset \mathcal{N}_{\pi^{\pi_0}}, \tag{4.12.1}$$

*et en particulier*

$$f(\mathcal{M}_\pi) \subset \mathcal{N}_\pi \qquad \text{si } \pi = \pi^{\pi_0}. \tag{4.12.1.2}$$

*De façon plus précise, on peut prendre pour $\pi_0$ un cardinal utile pour $\mathcal{M}$*

[110] Pour autres variantes de 4.11.1, cf. 4.13.19 (p. 340) et corollaires.
[111] ?, démonstration pas achevée.
[112] ?, démonstration non explicitée est peut-être faux !
[113] sous réserve de validité de 4.11.5.
[114] Remonterait à 4.8.

`[page 274]`

*et tel que $f$ soit $\pi_0$-accessible (p.ex. le plus petit cardinal de ce type). Soit alors $\pi_1$ un cardinal tel qu'on ait $f(\mathcal{M}_{\pi_0}) \subset \mathcal{N}_{\pi_1}$, $\pi_1 \geqslant \operatorname{card réd} \mathcal{M}_{\pi_0}$, et enfin tel que $\mathcal{N}_{\pi_1}$ soit* `[une]` *sous-catégorie strictement génératrice de $\mathcal{N}$. Le couple $(\pi_0, \pi_1)$ satisfait aux conditions énoncées.*

Démonstration. On aura en effet

$$\mathcal{N}_1 \xleftarrow{\sim} \operatorname{Ind}_{\pi_0}(\mathcal{M}_{\pi_0})$$

et $f$ commutant aux $\varinjlim$ grandes devant $\pi_0$, sera connu (à isomorphisme unique près) par sa restriction à $\mathcal{M}_{\pi_0}$, laquelle se factorise par $\mathcal{N}_{\pi_1}$,

$$f|\mathcal{M}_{\pi_0} : \mathcal{M}_{\pi_0} \longrightarrow \mathcal{N}_{\pi_1} \ .$$

Pour prouver (4.12.1.1), posant $\pi' = \pi^{\pi_0} \geqslant \pi$, et notant que $\pi'^{\pi_0} = \pi_0$ `[plutôt` $\pi'^{\pi_0} = \pi'$`]`,

$$f(\mathcal{M}_\pi) \ \subset \ f(\mathcal{M}_{\pi'}) \ \overset{?}{\subset} \ \mathcal{N}_{\pi'} \ ,$$

on voit qu'il suffit de prouver (4.12.1.2) (pour $\pi'$). Donc on peut supposer $\pi = \pi^{\pi_0}$ et prouver (4.12.1.2). Mais comme $\pi_1 \geqslant \operatorname{card réd} \mathcal{M}_{\pi_0}$, on sait que si $\pi$ est tel que $\pi \geqslant \pi_1$, $\pi^{\pi_0} = \pi$, alors $\mathcal{M}_\pi$ est formé des $\varinjlim_I x_i$, les $x_i \in \mathcal{N}_{\pi_0}$, et $I$ grande devant $\pi_0$, et $\operatorname{card} I \leqslant \pi$.

`[page 275]`

On a alors ($f$ étant $\pi_0$-accessible)

$$f(x) \ = \ \varinjlim_I f(x_i) \ ,$$

les $f(x_i)$ sont dans $\mathcal{N}_{\pi_1}$, donc dans $\mathcal{N}_\pi$, or $\mathcal{N}_\pi$ stable par $\varinjlim$ de cardinal $\leqslant \pi$ (puisque $\mathcal{N}$ est engendrée par $\mathcal{N}_{\pi_1}$, formée d'objets $\pi_1$-accessibles et a fortiori $\pi$-accessibles, cf. SGA 4 I 9.9). D'où $f(x) \in \mathcal{N}_\pi$, q.e.d.

**Corollaire 4.12.2.** *Supposons que $\pi_0$ soit aussi utile pour $\mathcal{N}$, et que $\pi_1 \geqslant \operatorname{card réd} \mathcal{N}_{\pi_0}$. Soit $\pi$ un cardinal $\geqslant \pi_1$, et tel que $\pi^{\pi_0} = \pi$. Alors $f$ s'identifie, à équivalence de catégories et à isomorphisme de foncteurs près, au foncteur*

$$\operatorname{Ind}(f_\pi) \ : \ \operatorname{Ind}_\pi(\mathcal{M}_\pi) \longrightarrow \operatorname{Ind}_\pi(\mathcal{N}_\pi) \ ,$$

*où $f_\pi : \mathcal{M}_\pi \longrightarrow \mathcal{N}_\pi$ est le foncteur induit par $f$.*

**Proposition 4.12.3** ([115]). *Soient $C$ une catégorie équivalente à une petite catégorie, $\mathcal{N}$ une $\mathfrak{U}$-catégorie, $\pi_0$ un cardinal infini.*

`[page 276]`

*On suppose que $\mathcal{N}$ satisfait $L_{\pi_0}$ (stabilité par $\varinjlim$ grandes devant $\pi_0$). Soit $\mathcal{M} = \operatorname{Ind}_{\pi_0} C$, $\underline{\operatorname{Hom}}_{!\,\pi_0}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ la sous-catégorie strictement pleine de $\underline{\operatorname{Hom}}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ formée des $f : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$ $\pi_0$-accessibles. Alors le foncteur restriction*

(4.12.3.1) $$\underline{\operatorname{Hom}}_{!\,\pi_0}(\mathcal{M}, \mathcal{N}) \longrightarrow \underline{\operatorname{Hom}}(C, \mathcal{N})$$

[115] remonte à 4.7.

*est une équivalence de catégories. On trouve un foncteur quasi-inverse comme composé*

$$\underline{\mathrm{Hom}}(C,\mathcal{N}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(\underbrace{\mathrm{Ind}_{\pi_0}(C)}_{\mathcal{M}},\mathrm{Ind}_{\pi_0}(\mathcal{N})) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{M},\mathcal{N}) \ , \tag{4.12.3.2}$$

*où la deuxième flèche est le foncteur composition $F \longmapsto L\circ F$ avec le foncteur limite inductive $L : \mathrm{Ind}_{\pi_0}\mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}$. Le foncteur composé (4.11.3.2) a une image contenue dans $\underline{\mathrm{Hom}}_{!\,\pi_0}(\mathcal{M},\mathcal{N})$ et induit une équivalence entre cette dernière catégorie et $\underline{\mathrm{Hom}}(C,\mathcal{N})$.*

[page 277]

*En d'autres termes, on peut dire que le foncteur d'inclusion canonique*

$$C \longrightarrow \mathrm{Ind}_{\pi_0}C \ = \ \mathcal{M}$$

*est* 2-universel *pour les foncteurs de $C$ dans des catégories $\mathcal{N}$ satisfaisant $L_{\pi_0}$, celles-ci étant considérées comme* 0*-objets d'une* 2*-catégorie où les* 1*-objets sont les foncteurs $\mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}'$ $\pi_0$-accessibles, i.e. commutent aux $\varinjlim$ grandes devant $\pi_0$.*

Cet énoncé est l'analogue, pour $C$ petite quelconque, de 4.4.16 (page 101), valable pour $C$ stable par $\varinjlim$ de cardinal $\leqslant \pi_0$. Il y a bien sûr d'autres variantes, en relation avec la commutation à d'autres types de $\varinjlim$ ( $\varinjlim$ filtrantes, sommes, limites inductives finies etc.) envisagées dans la section 4.11 précédente.

La démonstration de 4.12.3 est soritale.

[page 278]

**Corollaire 4.12.4.** *Soient $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux catégories accessibles, et soit $\pi_0$ un cardinal infini tel que $\mathcal{M}$ soit $\pi_0$-accessible, i.e. que $\pi_0$ soit un cardinal utile pour $\mathcal{M}$. Soit $\pi_1 = \sup(\pi_0, \mathrm{card\,r\acute{e}d}\,\mathcal{M}_{\pi_0})$. Alors pour tout cardinal $\pi \geqslant \pi_1$ utile pour $\mathcal{M}$ (et en particulier, pour tout $\pi \geqslant \pi_1$ tel que $\pi^{\pi_0} = \pi$), la catégorie des foncteurs $\mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$ qui sont $\pi$-accessibles est elle-même accessible.*

En effet, on aura $\mathcal{M} \simeq \mathrm{Ind}_{\pi}\mathcal{M}_{\pi}$, d'où par 4.12.3

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{!\,\pi}(\mathcal{M},\mathcal{N}) \xrightarrow{\ \simeq\ } \underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{M}_{\pi},\mathcal{N}) \ ,$$

or $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{M}_{\pi},\mathcal{N})$ est accessible par 4.9.5 (p. 220). On peut préciser d'ailleurs ce point. Supposons $\pi_0$ choisi tel que $\pi_0$ soit utile non seulement pour $\mathcal{M}$, mais pour $\mathcal{N}$ également. Rappelons que l'on a $\mathrm{card\,Fl}\,\mathcal{M}_{\pi} \leqslant 2^{\pi}$ (cf. 4.7.7, page 173).

[page 279]

Posons donc

$$\pi' \ = \ 2^{\pi} \ ,$$

on a donc $\pi'^{\pi_0} = 2^{\pi\pi_0} = 2^{\pi} = \pi'$, et $\mathrm{card\,r\acute{e}d}\,\mathcal{M}_{\pi} \leqslant \pi'$. Donc 4.9.5 nous donne que

$$\underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{M}_{\pi},\mathcal{N}) \ \simeq \ \mathrm{Ind}_{\pi'}(\underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{M}_{\pi},\mathcal{M}_{\pi'})) \ ,$$

d'où :

**Corollaire 4.12.5.** *Sous les conditions de 4.12.4, si $\pi_0$ est utile pour $\mathcal{M}$* et *pour $\mathcal{N}$, alors pour $\pi \geqslant \pi_1$, $\underline{\mathrm{Hom}}_{!\,\pi}(\mathcal{M},\mathcal{N})$ est $\pi'$-accessible, où $\pi' = 2^{\pi}$, de façon plus précise, on a une équivalence de catégories*

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{!\,\pi}(\mathcal{M},\mathcal{N}) \simeq \mathrm{Ind}_{\pi'}(\underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{M}_{\pi},\mathcal{N}_{\pi'})) \ .$$

**Remarque 4.12.6.** Si $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ sont accessibles, la catégorie $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{acc}}(\mathcal{M},\mathcal{N})$ des foncteurs accessibles n'est par toujours accessible. Si $\mathcal{N}$ satisfait $\mathrm{L}_{\pi_0}$, cette catégorie satisfait $\mathrm{L}_{\pi_0}$, et les $\varinjlim$ grandes devant $\pi_0$ se calculent argument par argument.

`[page 280]`

Si on pouvait trouver une sous-catégorie (équivalente à une petite catégorie) $\mathcal{H}_\pi$ de $\mathcal{H} = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{acc}}(\mathcal{M},\mathcal{N})$, pour un cardinal $\pi \geqslant \pi_0$ telle que tout objet $F$ de $\mathcal{H}$ s'écrive $\varinjlim_I F_i$, les $F_i$ dans $\mathcal{H}_\pi$, $I$ grande devant $\pi$, alors si les objets de $\mathcal{H}_\pi$ sont des foncteurs $\pi'$-accessibles de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{N}$, il en serait de même de tout $F$ dans $\mathcal{H}$. Donc il existerait un cardinal infini $\pi'$ tel que tout foncteur accessible de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{N}$ soit $\pi'$-accessible. Mais sauf erreur, si p.ex. $\mathcal{M} = \mathcal{N} = \mathrm{Ens}$, il n'existe pas de tel cardinal. Je ne veux pas m'arrêter ici sur cette question, et faire un contre-exemple.

`[page 281]`

## 4.13 Ensembles accessibles d'objets d'une catégorie accessible

**Définition 4.13.1.** Soient $\mathcal{M}$ une catégorie accessible, $S$ une partie de $\mathrm{Ob}\,\mathcal{M}$, $\underline{S}$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{M}$ définie par $S$. On dit que $S$ est une *partie accessible* de $\mathrm{Ob}\,\mathcal{M}$, ou encore que $\underline{S}$ est une *sous-catégorie "accessible dans $\mathcal{M}$"*, si

a) $\underline{S}$ est strictement pleine, i.e. pour $x$, $y$ deux objets isomorphes de $\mathcal{M}$, $x \in S$ implique $y \in S$,

b) $\underline{S}$ est accessible,

c) le foncteur d'inclusion $\underline{S} \longrightarrow \mathcal{M}$ est accessible.

Soient $\pi_0$ un cardinal utile pour $\mathcal{M}$, i.e. tel que $\mathcal{M} \simeq \mathrm{Ind}_{\pi_0}(\mathcal{M}_{\pi_0})$, soit $\pi_1 = \sup(\pi_0, \mathrm{card\,réd}\,\mathcal{M}_{\pi_0})$. Soit d'autre part $\pi'_0$ un cardinal tel que

`[page 282]`

$\underline{S}$ (supposé accessible dans $\mathcal{M}$) soit $\pi_0$-*accessible,* i.e. $\pi'_0$-utile pour $\underline{S}$, et de plus tel que $f : \underline{S} \hookrightarrow \mathcal{M}$ soit $\pi'_0$-accessible. Soit $\pi'_1 \geqslant \pi'_0$ un cardinal tel que $\underline{S}_{\pi'_0} \subset \mathcal{M}_{\pi'_1}$, $\pi'_1 \geqslant \mathrm{card\,réd}\,\underline{S}_{\pi'_0}$. Il résulte de 4.12.1 que pour tout cardinal

$$(*) \qquad \pi \geqslant \pi'_1\ , \qquad \text{tel que } \pi^{\pi'_0} = \pi,$$

on doit avoir

$$\underline{S}_\pi \subset \mathcal{M}_\pi\ , \qquad \text{donc } \underline{S}_\pi \subset \mathcal{M}_\pi \cap \underline{S},$$

d'ailleurs, comme $\underline{S} \hookrightarrow \mathcal{M}$ est $\pi'_0$-accessible et a fortiori $\pi$-accessible, et pleinement fidèle, il s'ensuit aussitôt que $\mathcal{M}_\pi \cap S \subset S_\pi$, d'où

$$S_\pi = \mathcal{M} \cap S\ .$$

`[page 283]`

D'ailleurs, la condition $(*)$ implique que $\pi$ est utile pour $\underline{S}$, donc

$$\underline{S} \xleftarrow{\ \sim\ } \mathrm{Ind}_\pi(\underline{S}_\pi)\ .$$

$\Big($ D'ailleurs, *si* $\pi'_0 \geqslant \pi_0$, la relation $\pi^{\pi'_0} = \pi$ implique a fortiori $\pi^{\pi_0} = \pi$, et si $\pi'_1 \geqslant \pi_1$, on voit que $(*)$ implique que $\pi$ est utile aussi pour $\mathcal{M}$, i.e.

$$\mathcal{M} \xleftarrow{\sim} \mathrm{Ind}_\pi(\mathcal{M}_\pi) .$$

D'autre part, le foncteur d'inclusion $\underline{S} \hookrightarrow \mathcal{M}$ se déduit essentiellement de $\underline{S}_\pi \hookrightarrow \mathcal{M}_\pi$ en passant aux catégories $\mathrm{Ind}_\pi$. ([116]). $\Big)$

Ceci prouve entre autres le "il faut" dans la proposition qui suit :

**Proposition 4.13.2.** *Soient $\mathcal{M}$ une catégorie accessible, $\pi_0$ un cardinal infini utile pour $\mathcal{M}$, $S$ une partie de* $\mathrm{Ob}\,\mathcal{M}$*, $\underline{S}$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{M}$ correspondante.*

`[page 284]`

*a) Pour que $S$ soit accessible, il faut et il suffit qu'il existe un cardinal infini $\pi$ et une partie $S(\pi)$ de $\mathcal{M}_\pi$, tels que $S$ soit formé des objets de $\mathcal{M}$ qui sont isomorphes à un objet de la forme $\varinjlim_{i\in I} x_i$, avec les $x_i$ dans $S(\pi)$ [ ?] et $I$ grande devant $\pi$. En d'autres termes, il faut et il suffit qu'il existe un cardinal infini $\pi_1$ et une sous-catégorie pleine $\underline{S}(\pi)$ de $\mathcal{M}_\pi$, tels que $\underline{S}$ soit l'image essentielle du foncteur canonique pleinement fidèle*

$$\mathrm{Ind}_\pi(\underline{S}(\pi)) \longrightarrow \mathcal{M} \qquad (\xleftarrow{\sim} \mathrm{Ind}_\pi(\mathcal{M})\ \ ([117])) , \tag{4.13.2.1}$$

*prolongeant l'inclusion canonique $\underline{S}(\pi) \hookrightarrow \mathcal{M}$ (cf. 4.12.3).*

*b) Si $S$ est accessible, on peut trouver des cardinaux $\pi'_0$, $\pi'_1$ tels que $\pi'_1 \geqslant \pi'_0 \geqslant \pi_0$ (où $\pi_0$ est un cardinal donné utile pour $\mathcal{M}$)*

`[page 285]`

*et tels que tout cardinal $\pi \geqslant \pi'_1$ avec $\pi^{\pi'_0} = \pi$ satisfasse aux conditions de c), en prenant $S(\pi) = S \cap \mathrm{Ob}\,\mathcal{M}_\pi$, i.e. $\underline{S}(\pi) = \underline{S} \cap \mathcal{M}_\pi$. Sous ces conditions, $\pi$ est utile pour $\underline{S}$* et *pour $\mathcal{M}$, $S(\pi)$ est une sous-catégorie* strictement *pleine de $\mathcal{M}_\pi$, stable dans $\mathcal{M}_\pi$ par facteurs directs (ou ce qui revient au même, $\mathcal{M}_\pi$ étant karoubienne, une sous-catégorie karoubienne de $\mathcal{M}_\pi$).*

*c) On peut prendre $\pi'_0$ le plus petit cardinal $\geqslant \pi_0$ utile pour $\underline{S}$ et tel que $\underline{S} \hookrightarrow \mathcal{M}$ soit $\pi'_0$-accessible, et $\pi'_1 = \sup(\pi'_0, \mathrm{card\,réd}\,\underline{S}_{\pi'_0})$.*

La partie b) ainsi que c) a déjà été prouvée, ce qui implique le "il faut" dans la partie a). Il reste à prouver le "il suffit" dans a). Mais l'hypothèse implique que

$$\underline{S} \xleftarrow{\sim} \mathrm{Ind}_\pi(S_\pi) ,$$

ce qui implique que $\underline{S}$ est accessible et même $\pi$-accessible, et elle implique aussi que $\underline{S}$ est une sous-catégorie *strictement* pleine de $\mathcal{M}$. Il reste à voir

`[page 286]`

`[que]` le foncteur d'inclusion est accessible, en fait il est $\pi$-accessible, puisque (4.13.2.1) l'est (cf. 4.12.3).

[116] `[Le contenu de cette parenthèse est]` "facultatif".
[117] si $\pi$ utile pour $\mathcal{M}$.

**Définition 4.13.3.** Soient $\mathcal{M}$, $S \subset \mathrm{Ob}\,\mathcal{M}$, $\underline{S} \subset \mathcal{M}$ comme dans 4.12.1, $\pi$ un cardinal infini. On dit que $S$ est une partie $\pi$-*accessible* de $\mathrm{Ob}\,\mathcal{M}$, ou que $\underline{S}$ est une sous-catégorie $\pi$-accessible dans $\mathcal{M}$, si $S$, $\pi$ satisfont les conditions de 4.13.3 a), i.e. $\underline{S}$ est l'image essentielle de $\mathrm{Ind}_\pi(S(\pi))$, où $S(\pi)$ est une sous-catégorie pleine de $\mathcal{M}_\pi$.

Notons que, quitte à renforcer $S(\pi)$ par $S'(\pi) = \natural$-clôture de $S(\pi)$ dans $\mathcal{M}_\pi$, on peut supposer que $S(\pi)$ est une sous-catégorie *strictement pleine et karoubienne*

`[page 287]`

de $\mathcal{M}_\pi$. On sait alors que, $S(\pi)$ étant karoubienne, $S(\pi) \longrightarrow (\underbrace{\mathrm{Ind}_\pi(S(\pi))}_{})_\pi$ est une équivalence de catégories. Comme $\mathrm{Ind}_\pi(S(\pi)) \simeq \underline{S}$ et que $S(\pi)$ est strictement pleine dans $\mathcal{M}_\pi$, donc aussi dans $\mathcal{M}$ et a fortiori dans $\underline{S}$, que l'on a

(4.13.1) $\qquad \underline{S}(\pi) = \underline{S}_\pi\,, \qquad$ sous-catégorie de $\underline{S}$ des objets $\pi$-accessibles de $S$.

Je dis qu'on aura aussi

$$\underline{S}(\pi) \;=\; \underline{S} \cap \mathcal{M}_\pi\,. \tag{4.13.2}$$

Comme c est clair, il reste à voir que $\underline{S} \cap \mathcal{M}_\pi \subset \underline{S}(\pi)$, or il est immédiat que $\underline{S} \cap \mathcal{M}_\pi \subset S_\pi$, et on conclut par (4.13.1). On trouve ainsi :

**Proposition 4.13.4.** *Soit $\mathcal{M}$ une catégorie accessible, $\pi$ un cardinal infini. Soit $\Sigma_\pi$ l'ensemble des*

`[page 288]`

*sous-catégories strictement pleines $\underline{S}(\pi)$ de $\mathcal{M}_\pi$ qui sont karoubiennes, ou ce qui revient au même, stables dans $\mathcal{M}_\pi$ par facteurs directs. Soit $\Sigma'_\pi$ l'ensemble des sous-catégories de $\mathcal{M}$ qui sont $\pi$-accessibles dans $\mathcal{M}$. Considérons les applications*

$$\Sigma_\pi \underset{\beta_\pi}{\overset{\alpha_\pi}{\rightleftarrows}} \Sigma'_\pi \tag{4.13.4.1}$$

*définies ainsi : Si $\underline{S}(\pi) \in \Sigma_\pi$, $\alpha_\pi(\underline{S}(\pi))$ est l'image essentielle du foncteur* `[?cu]` *pleinement fidèle $\mathrm{Ind}_\pi(\underline{S}(\pi)) \longrightarrow \mathcal{M}$. Si $\underline{S} \in \Sigma'_\pi$, $\beta_\pi(\underline{S}) = \underline{S} \cap \mathcal{M}_\pi$. Les applications $\alpha_\pi$, $\beta_\pi$ sont des bijections, inverses l'une de l'autre.*

On n'a pas eu à supposer que $\pi$ soit utile pour $\mathcal{M}$, ni que $\pi$ soit minoré par un cardinal utile pour $\mathcal{M}$, i.e. qu'on ait $\pi \geqslant \pi_0$, où $\pi_0$ est le plus petit cardinal utile pour $\mathcal{M}$.

`[page 289]`

**4.13.5.** Soit $\underline{S}$ une sous-catégorie *strictement pleine* de $\mathcal{M}$ (catégorie accessible), $\pi'_0$ un cardinal infini. Dire que $\underline{S}$ est $\pi'_0$-accessible dans $\mathcal{M}$ signifie que les conditions suivantes sont satisfaites.

1) $\pi'_0$ est utile pour $\underline{S}$, i.e. $\underline{S} \xleftarrow{\sim} \mathrm{Ind}_{\pi'_0}(\underline{S}_{\pi'_0})$.
2) $\underline{S} \hookrightarrow \mathcal{M}$ est $\pi'_0$-accessible.
3) $\underline{S}_{\pi'_0} \hookrightarrow \mathcal{M}_{\pi'_0}$ (qui implique que $S_{\pi'_0}$ est équivalente à une petite catégorie).

Supposons ces conditions satisfaites, et soit $\pi$ un cardinal $> \pi'_0$. Est-ce que $\underline{S}$ est $\pi$-accessible dans $\mathcal{M}$, i.e. les conditions similaires sont-elles satisfaites pour $\pi$ ? C'est évident pour 2°), mais risque d'être faux pour 1°, 2° `[plutôt 3° ?]`. Mais faisons appel à 4.13.2

c). Posons

$$\pi_1' \;=\; \sup(\pi_0', \operatorname{card}\operatorname{réd} S_{\pi_0'}, \underbrace{\pi_0}_{\substack{\text{plus petit cardinal}\\ \text{infini utile}\\ \text{pour } \mathcal{M}}}) \,.$$

[page 290]

Alors pour $\pi \geqslant \pi_1'$ tel que $\pi^{\pi_0'} = \pi$, $\underline{S}$ est $\pi$-accessible dans $\mathcal{M}$ (4.13.2 b et c). Supposons p.ex.

$$\pi_0' \geqslant \pi_0$$

(pratiquement ce sera toujours vérifié) et de plus

$$\pi_0' \;\geqslant\; \operatorname{card}\operatorname{réd}\mathcal{M}_{\pi_0} \,,$$

i.e. supposons

$$\pi_0' \;\geqslant\; \sup(\pi_0, \operatorname{card}\operatorname{réd}\mathcal{M}_{\pi_0}) \;=\; \pi_1 \,.$$

Alors

$$\pi_1' \;=\; \sup(\pi_0', \operatorname{card}\operatorname{réd} S_{\pi_0'}) \;\leqslant\; \sup(\pi_0', \operatorname{card}\operatorname{réd}\mathcal{M}_{\pi_0'}) \;\leqslant\; 2^{(\pi_0'^{\pi_0})}$$

(4.7.7.1, p. 177). Donc on trouve ceci :

**Corollaire 4.13.6.** *Soit $\pi_0'$ un cardinal $\geqslant \pi_1 = \sup(\pi_0, \operatorname{card}\operatorname{réd}\mathcal{M}_{\pi_0})$ ([118]), et soit $\underline{S}$ une sous-catégorie $\pi_0'$-accessible dans $\mathcal{M}$. Alors pour tout cardinal $\pi$ tel que $\pi \geqslant 2^{(\pi_0'^{\pi_0})}$, et tel que l'on ait $\pi^{\pi_0'} = \pi$ (i.e. $\pi$ de la forme $c^{\pi_0'}$, avec $c$ un cardinal $\geqslant 2^{(\pi_0'^{\pi_0})}$), $\underline{S}$ est $\pi$-accessible dans $\mathcal{M}$. (De plus, ces cardinaux sont réguliers pour $\underline{S}$* et *pour $\mathcal{M}$, donc $\underline{S} \simeq \operatorname{Ind}_\pi(\underline{S}_\pi)$, $\mathcal{M} \simeq \operatorname{Ind}_\pi(\mathcal{M}_\pi)$).*

([119], [120]).

[page 291]

**Proposition 4.13.7** ([121]). *Soient $\mathcal{M}$ une catégorie accessible, $(S_\alpha)_{\alpha\in A}$ une famille de parties de $\operatorname{Ob}\mathcal{M}$, indexée par un petit ensemble $A$, $(\underline{S}_\alpha)_{\alpha\in A}$ la famille des sous-catégories accessibles dans $\mathcal{M}$ correspondante. Soit $S = \bigcap_{\alpha\in A} S_\alpha$, $\underline{S} = \bigcap_{\alpha\in A} \underline{S}_\alpha$, de sorte que $\underline{S}$ est la sous-catégorie pleine de $\mathcal{M}$ définie par $S \subset \operatorname{Ob}\mathcal{M}$. Ceci posé, si les $S_\alpha$ sont accessibles, il en est de même de $S$ – ou encore, si les $\underline{S}_\alpha$ sont accessibles dans $\mathcal{M}$, il en est de même de $\underline{S}$.*

Cela résulte du résultat plus précis :

**Corollaire 4.13.8** ([122]). *Avec les notations de 4.13.7 et 4.13.6, soit, pour tout $\alpha \in A$, $\pi_\alpha'$ un cardinal $\geqslant \pi_1$ tel que $S_\alpha$ soit $\pi_\alpha'$-accessible. Soit*

$$\begin{aligned} \pi_0' &= \sup\nolimits_{\alpha\in A} \pi_\alpha' \\ \pi_0'' &= \sup(\operatorname{card} A, \sup\nolimits_\alpha 2^{(\pi_\alpha'^{\pi_0})}) \end{aligned}$$

*et soit $\pi \geqslant \pi_0''$ un cardinal tel que $\pi^{\pi_0'} = \pi$, i.e. de la forme $c^{\pi_0'}$, avec $c \geqslant \pi_0'$. Alors $S$ est $\pi$-accessible (i.e. $\underline{S}$ est $\pi$-accessible dans $\mathcal{M}$). En particulier, $S$ est $2^{\pi_0''}$-accessible.* ([123]).

[118] **N.B.** $\pi_0$ est le plus petit cardinal utile pour $\mathcal{M}$.

[119] Enchaîner ici avec 4.13.23 etc.

[120] Mettre ici le lemme 4.16.7.11 signalé en marge p. 292.

[121] Le rejeter après 4.13.23.

[122] Cf. reformulation plus raisonnable et plus correcte page 302, 302 bis.

[123] Ça a l'air un peu abracadabrant ! Il faut de plus supposer que $\pi$ n'est pas cardinal limite !

[page 292]

DÉMONSTRATION. Soit $\alpha \in A$. Comme $\pi'_\alpha \leqslant \pi'_0$ et $\pi^{\pi'_0} = \pi$, on a a fortiori

$$\pi^{\pi'_\alpha} = \pi \ , \qquad \text{de plus } \pi \geqslant \pi''_0 \geqslant 2^{(\pi_\alpha^{\pi_0})} \ ,$$

donc en vertu de 4.13.6, $\underline{S}_\alpha$ est $\pi$-accessible dans $\mathcal{M}$. D'autre part, comme $\underline{S}_\alpha$ est $\pi'_\alpha$-accessible, il est stable dans $\mathcal{M}$ par $\varinjlim$ grandes devant $\pi'_\alpha$, a fortiori par $\varinjlim$ grandes devant $\pi'_0$ ($\geqslant \pi'_\alpha$). D'ailleurs, $\pi^{\pi'_0} = \pi$ implique $\pi \geqslant 2^{\pi_0} > \pi'_0$. Donc 4.13.8 résulte du

**Corollaire 4.13.9.** *Soit $\pi > \pi_0$ un cardinal tel que $\underline{S}_\alpha$ soit $\pi$-accessible dans $\mathcal{M}$ pour tout $\alpha \in A$, et tel que* $\operatorname{card} A \leqslant \pi$. *Supposons de plus qu'il existe un cardinal $\pi'_0$ tel que $\pi_0 \leqslant \pi'_0 < \pi$, tel que les $\underline{S}_\alpha$ soient stables dans $\mathcal{M}$ par $\varinjlim$ grandes devant $\pi'_0$. Alors $\underline{S} = \bigcap_{\alpha\in A} \underline{S}_\alpha$ est $\pi$-accessible dans $\mathcal{M}$.*

([124]).

Posons, pour tout $\alpha \in A$,

$$\begin{aligned} \underline{S}_\alpha(\pi) &\overset{\text{déf}}{=} \underline{S}_\alpha \cap \mathcal{M}_\pi \\ \underline{S}(\pi) &\overset{\text{déf}}{=} \underline{S} \cap \mathcal{M}_\pi = \bigcap \underline{S}_\alpha(\pi) \ . \end{aligned}$$

Chaque $\underline{S}_\alpha(\pi)$ est stable dans $\mathcal{M}$ par $\varinjlim$ grandes devant $\pi'_0$ et de cardinal $\leqslant \pi$ (puisqu'il en est ainsi de $\underline{S}_\alpha$ et de $\mathcal{M}_\pi$) (donc il en est de même de leur intersection

[page 293]

$\underline{S}(\pi)$. A fortiori, $\underline{S}(\pi)$ est une sous-catégorie strictement pleine et karoubienne de $\mathcal{M}_\pi$.)

D'autre part, chaque $\underline{S}_\alpha$ étant stable dans $\mathcal{M}$ par $\varinjlim$ grandes devant $\pi'_0$, il en est de même de leur intersection $\underline{S}$. A fortiori, celle-ci est stable par $\varinjlim$ grandes devant $\pi$, donc le foncteur pleinement fidèle canonique $\operatorname{Ind}_\pi(\underline{S}(\pi)) \longrightarrow \mathcal{M}$ se factorise par $S$ en

$$\operatorname{Ind}_\pi \underline{S}(\pi) \hookrightarrow \underline{S} \ ,$$

il faut prouver que ce foncteur est essentiellement surjectif. Soit donc $x \in S = \operatorname{Ob} \underline{S}$, tout revient à prouver que

$$(*) \qquad \varinjlim_{i \in \underline{S}(\pi)/x} x_i \xrightarrow{\sim} x \ ,$$

et que $\underline{S}(\pi)/x$ est grande devant $\pi$.

Notons que, comme $\pi'_0 \geqslant \pi_0$, et $\pi^{\pi'_0} = \pi$, on aura $\pi^{\pi_0} = \pi$, donc $\pi$ est cardinal utile pour $\mathcal{M}$, donc $I = \mathcal{M}_\pi/x$ est grande devant $x$, et on a

$$(**) \qquad \varinjlim_{i \in I = \mathcal{M}_\pi/x} x_i \xrightarrow{\sim} x \ .$$

Donc, si on admet que $\underline{S}(\pi)/x$ est grande devant $\pi$,

[124] Ce serait le moment de formuler ici le Lemme 4.16.7.11 (p. 488), qui devrait même remonter avec les premières généralités sur les parties $\pi$-accessibles dès avant 4.13.7 (immédiat après 4.13.6).

[page 294]

le fait que $(*)$ soit un isomorphisme équivaut à dire que le foncteur canonique

$$J \overset{\text{déf}}{=} \underline{S}(\pi)/x \hookrightarrow \mathcal{M}_\pi = I$$

est *cofinal* (cf. 4.4.2, p. 79). Mais on voit tout de suite que ce foncteur est un foncteur d'inclusion d'une sous-catégorie strictement pleine (stable par $\varinjlim$ grandes devant $\pi_0'$, de cardinal $\leqslant \pi$).

Notons maintenant que la flèche $(**)$ similaire à $(*)$, avec $\underline{S}(\pi)$ remplacée par $\underline{S}_\alpha(\pi)$, est bel et bien un isomorphisme, puisque $x \in \operatorname{Ob} \underline{S} \subset \operatorname{Ob} \underline{S}_\alpha$, et que $\underline{S}_\alpha$ est $\pi$-accessible. Cela s'interprète par le fait que le foncteur d'inclusion

$$J_\alpha \overset{\text{déf}}{=} \underline{S}_\alpha(\pi)/x \hookrightarrow \mathcal{M}_\pi/x = I$$

est cofinal. C'est encore une inclusion d'une sous-catégorie $J_\alpha$ strictement pleine de $I$, stable par $\varinjlim$ grandes devant $\pi_0'$ et de cardinal $\leqslant \pi$, et on a

$$J = \bigcap J_\alpha .$$

Donc la condition voulue résultera du

[page 295]

**Lemme 4.13.10** ([125],[126]). *Soient $\pi_0'$ et $\pi > \pi_0'$ des cardinaux infinis, $I$ une catégorie équivalente à une petite catégorie, $(J_\alpha)_{\alpha\in A}$ une famille de sous-catégories $J_\alpha$ de $I$. On suppose :*

a) *$I$ est grande devant $\pi$* ([127]).

b) *$I$ est stable par $\varinjlim$ de cardinal $\leqslant \pi$, et grandes devant $\pi_0'$* ([128]).

c) *$\forall\ r \in A$, $J_r$ est stable dans $I$ par les limites inductives envisagés dans b) (en particulier, $J_r$ est une sous-catégorie* strictement pleine *de $I$).*

d) *$\forall\, r \in A$, $J_r$ est une sous-catégorie* cofinale *de $I$ (*grande devant $\pi$*).*

e) card $A \leqslant \pi$.

*Soit $J = \bigcap_{r\in A} J_r$. Alors $J$ est encore cofinale dans $I$, et grande devant $\pi$ (et de plus stable dans $I$ par $\varinjlim$ de cardinal $\leqslant \pi$ et grandes devant $\pi_0'$).*

En d'autres termes, si $I$ est grande devant $\pi$, l'intersection $J$ d'une famille $(J_\alpha)_{\alpha\in A}$ de sous-catégories strictement pleines cofinales et grandes devant $\pi$, est encore

[page 296]

cofinale et grande devant $\pi$, *pourvu que* card $A \leqslant \pi$, et que l'on postule une propriété de stabilité de $I$ et des $J_\alpha$ dans $I$, pour les limites inductives de cardinal $\leqslant \pi$ et grandes devant un cardinal convenable $\pi_0' < \pi$ donné.

**4.13.10.1.** Notons d'ailleurs que si $f : J \longrightarrow I$ est un foncteur cofinal *pleinement fidèle,* avec $I$ grande devant $\pi$, alors $J$ est automatiquement grande devant $\pi$. Cela résulte p.ex.

[125] Il faut supposer que $\pi$ ne soit pas un cardinal limite, pour pouvoir conclure que $I$ est stable par $\varinjlim$ de type $I_{\alpha_\pi}$, et les $J_r$ stables dans $I$ par ces limites.

[126] Cf. forme plus générale du lemme dans 4.13.10.2, p. 302.

[127] Il suffit que $I$ soit grande devant tout $\pi' < \pi$.

[128] Il suffit ici la stabilité par $\varinjlim$ de type $I_{\alpha_\pi}$, cf. page 302 [?].

de 4.9.6.3 2° (p. 225) par le critère $c_\pi$ (vu que pour $f$ pleinement fidèle, la condition F $3_\pi$ est tautologiquement satisfaite). On peut aussi le voir ainsi : Soit $B$ un ensemble avec $\operatorname{card} B \leqslant \pi$, il faut prouver que $J \longrightarrow J^B$ est cofinal, or on a

$$\begin{tikzcd} J \arrow[r, "\text{cof. ?}"] \arrow[d, "\text{cof.}"'] & J^B \arrow[d, "\text{cof.}"] \\ I \arrow[r, "\text{cof.}"] & I^B , \end{tikzcd}$$

où trois des quatre flèches du carré sont cofinales, $J^B \longrightarrow I^B$ l'étant comme produit de foncteurs cofinaux entre catégories *filtrantes* (cf. 4.9.6.5, page 227) – on sait en effet déjà que $J$ est filtrante.

[page 297]

Donc le composé

$$J \longrightarrow J^B \xrightarrow{\text{cof.}} I^B$$

est cofinal. Mais comme le deuxième foncteur $J^B \longrightarrow I^B$ est pleinement fidèle, il s'ensuit aussitôt que $J \longrightarrow J^B$ est cofinal (car $\xi\backslash J$ pour $\xi \in \operatorname{Ob} J^B$ est le même, à isomorphisme près, qu'on considère $\xi$ comme objet de $J^B$, ou de $I^B$).

Ainsi dans l'énoncé de la condition d) du lemme, il est inutile de spécifier que $J_\alpha$ est grande devant $\pi$, et de même dans la conclusion sur $J$.

Comme $J \hookrightarrow I$ est pleinement fidèle, pour voir que ce foncteur est cofinal, il suffit de voir qu'il satisfait F 1, i.e. que pour tout $i \in \operatorname{Ob} I$, existe $j \in J$ avec $i \longrightarrow j$. On va construire $j$ comme limite d'un système inductif ordinal d'objets $i_\alpha$ de $I$, indexé par les ordinaux $\alpha$ tels que $\operatorname{card} \alpha < \pi$. Désignons par $\alpha_\pi$ le plus petite ordinal tel que

[page 298]

$\operatorname{card} \alpha_\pi = \pi$. L'ensemble ordonné $I_{\alpha_\pi}$ des ordinaux $\alpha < \alpha_\pi$ étant grande devant $\pi'_0$ ([129]) et de cardinal $\pi$, on pourra donc prendre la limite $\varinjlim_{\alpha \in I_{\alpha_0}} i_\alpha$ dans $I$.

Construction de $(i_\alpha)_{\alpha \in I_{\alpha_0}}$. Soit

$$(1) \qquad \alpha_\pi \;=\; \text{plus petit ordinal } \alpha \text{ tel que } \operatorname{card} \alpha = \pi,$$

donc c'est l'ordinal caractérisé par

$$(2) \qquad \begin{cases} \operatorname{card} \alpha_\pi \;=\; \pi & \\ \alpha < \alpha_\pi \qquad \Longrightarrow \qquad \operatorname{card} \alpha \;<\; \pi \,, \end{cases}$$

ou encore par le fait que l'ensemble ordonné $I_{\alpha_\pi}$ des ordinaux $\alpha < \alpha_\pi$ est *parfaitement bien ordonné.* Ainsi, $I_{\alpha_\pi}$ *est grande devant* $\pi'$ *pour tout cardinal* $\pi' < \pi$ ([130]). Dans les conditions b) c) de 4.3.10, il suffira de supposer $I$ stable par $\varinjlim$ de type $I_{\alpha_\pi}$, et les $J_r$ $(r \in A)$ stables dans $I$ par ce type de limites.

**Lemme 4.13.10.1.** *Soit* $\pi$ *un cardinal infini,* $A$ *un ensemble non vide tel que* $\operatorname{card} A \leqslant \pi$*. Alors*

[129] faux si $\pi$ est un cardinal limite.
[130] Faux si $\pi$ est cardinal limite.

[page 299]

*il existe une application*

$$\varphi \; : \; I_{\alpha_\pi} \longrightarrow A$$

*telle que pour tout* $r \in A$, $\varphi^{-1}(\{r\})$ *soit une partie cofinale de* $I_{\alpha_\pi}$, *ou ce que est plus précis,* $\operatorname{card} \varphi^{-1}(\{r\}) = \pi$.

En effet, il suffit de considérer un ensemble $A'$ de cardinal $\pi$ (p.ex. $A' = I_{\alpha_\pi}$), l'application

$$\psi \; = \; \mathrm{pr}_1 \; : \; A \times A' \longrightarrow A \; ,$$

et de se donner une bijection

$$A \times A' \xrightarrow{\sim} I_{\alpha_\pi}$$

laquelle existe puisque

$$\operatorname{card}(A \times A') \; = \; \operatorname{card} A \cdot \operatorname{card} A' \; = \; \operatorname{card} A' \; = \; \pi \; = \; \operatorname{card} I_{\alpha_\pi} \; ,$$

puisque $0 \neq \operatorname{card} A \leqslant \operatorname{card} A' = \pi$ et $\pi$ infini. On suppose choisie $\varphi$ comme dans 4.13.10.1, et on construira le système inductif $(i_\alpha)_{\alpha \in I_{\alpha_\pi}}$ de telle façon qu'on ait

$$i_\alpha \; \in \; J_{\varphi(\alpha)} \; .$$

Posant

$$j \; = \; \varinjlim_{\alpha \in I_{\alpha_\pi}} i_\alpha \; ,$$

[page 300]

pour tout $r$, comme

$$I_r \; \overset{\text{déf}}{=} \; \varphi^{-1}(r) \; \subset \; I_{\alpha_\pi}$$

est cofinal dans $I_{\alpha_\pi}$, on aura donc

$$j \; = \; \varinjlim_{\alpha \in I_r} i_\alpha \; ,$$

et en vertu de $(*)$, les $i_\alpha$ pour $\alpha \in I_r$ sont dans $J_r$, donc par passage à la limite, utilisant l'hypothèse c), on trouve que $j \in J_r$, donc

$$j \; \in \; \bigcap_{r \in A} J_r \; = \; J \; ,$$

et comme on choisira

$$(**) \qquad\qquad i_0 \; = \; i \; ,$$

on aura bien trouvé $i \longrightarrow j$ avec $i \in J$. Donc il suffit de construire le système inductif $(i_\alpha)$ satisfaisant $(*)$ et $(**)$.

Si le système inductif est construit jusqu'au cran $i_\alpha \in \operatorname{Ob} J_{\varphi(\alpha)}$, on continue par

$$i_\alpha \longrightarrow i_{\alpha+1} \; \in \; \operatorname{Ob} J_{\varphi(\alpha+1)} \; ,$$

ce qui est possible puisque $J_{\varphi(\alpha+1)}$ est

[page 301]

cofinale. Donc il reste à construire $i_\alpha$ pour $\alpha$ ordinal limite. Or l'ensemble des $i_\beta$ pour $\beta < \alpha$ est de cardinal $< \pi$, et comme par a) $I$ est grande devant $\pi$ (il suffit qu'il le soit devant tout cardinal $< \pi$), il existe un $i \in \operatorname{Ob} I$ qui majore tous les $i_\beta$. Choisissons des

$$i_\beta \xrightarrow{v_\beta} i \ .$$

On n'aura pas a priori commutativité dans

$$\begin{tikzcd} i_{\beta'} \arrow[r, "\tau_{\beta,\beta'}"] \arrow[rr, bend right, "v_{\beta'}"'] & i_\beta \arrow[r, "v_\beta"] & i \end{tikzcd} ,$$

mais comme l'ensemble des double-flèches $i_{\beta'} \overset{v_\beta \tau_{\beta,\beta'}}{\underset{v_{\beta'}}{\rightrightarrows}} i$ est de cardinal $< \pi$, $I$ étant grande devant $\pi$, il existe $i \longrightarrow i'$ qui les égalise tous. Comme $J_{\varphi(\alpha)}$ est cofinal dans $I$, il existe $i'' \in J_{\varphi(\alpha)}$, et $i \longrightarrow i''$. On prend $i_\alpha = i''$, avec les homomorphismes composés

$$\begin{tikzcd} i_\beta \arrow[r, "v_\beta"] \arrow[rrr, bend right, "\tau_{\alpha,\beta}"'] & i \arrow[r] & i' \arrow[r] & i'' \end{tikzcd}$$

[page 302]

comme morphismes de transition. Cela achève la démonstration de 4.13.10 et par là de 4.13.9, 4.13.8.

**Remarque 4.13.10.2.** Voici ce qu'on a eu à utiliser vraiment, pour établir la conclusion de 4.13.10, en termes de $I$, $\pi$, $(J_r)_{r\in A}$ (et sans introduire de $\pi'_0$).

a′) $I$ est grande devant tout cardinal $\pi' < \pi$.

b′) $I$ est stable par $\varinjlim$ de type $I_{\alpha_\pi}$.

c′) $\forall\, r \in A$, $J_r$ est stable dans $I$ par les $\varinjlim$ de type $I_{\alpha_\pi}$.

d′) $\forall\, r \in A$, $J_r$ est cofinale dans $I$.

e′) $\operatorname{card} A \leqslant \pi$.

(**N.B.** d′) et e′) ne sont autres que d) et e) de 4.3.10, tandis que a′), b′), c′) sont des versions affaiblies de a), b), c) respectivement.)

**4.13.8 (reformulation).** *Soit pour* $r \in A$, $\pi''_r \geqslant \pi'_r \geqslant \pi_0$ *(= cardinal utile pour* $\mathcal{M}$ *donné) comme spécifié dans 4.13.2 b) (et c), soit* $\pi' = \sup_{r\in A} \pi'_r$, $\pi'' = \sup_{r\in A} \pi''_r$, *de sorte que pour tout cardinal* $\pi$ *avec* $\pi^{\pi'_0} = \pi \geqslant \pi''$, $\underline{S}_r$ *soit* $\pi$*-accessible dans* $\mathcal{M}$ *(et* $\pi$ *utile pour* $\underline{S}_r$ et *pour* $\mathcal{M}$*). Soit* $c$ *un cardinal* non limite *tel que* $c \geqslant \operatorname{card} A$ *et* $c > \pi'$ *(p.ex. le successeur de* $\sup(\operatorname{card} A, \pi')$*). Prenons* $\pi$ *tel que*

$$\pi^{\pi'} = \pi \geqslant \sup(\pi'', c) \ .$$

*Alors* $\underline{S} = \bigcap_{r\in A} \underline{S}_r$ *est* $\pi$*-accessible.*

En effet, si $\alpha_c$ est le premier ordinal de cardinal $c$, comme $c$ n'est pas limite, $I_{\alpha_c}$ est grande devant tout cardinal $c' < c$, en particulier devant $\pi'$. Or pour tout $x \in \operatorname{Ob} \mathcal{M}$, $I = \mathcal{M}_\pi/x$ et les $J_r = \underline{S}_r/x$ sont stables par $\varinjlim$ grandes devant $\pi'$ et de cardinal $\leqslant \pi$,

`[page 302 bis]`

et les $J_r$ stables dans $I$ pour ces limites, donc il en est en particulier ainsi pour les $\varinjlim$ de type $I_{\alpha_c}$. On peut donc appliquer le résultat 4.13.10.2 pour conclure que si les $J_r$ sont cofinaux dans $I$ (qui est grande devant $\pi$, $\pi$ étant utile pour $\mathcal{M}$), alors $J = \underline{S}/x$ l'est également. Cela implique alors, comme on a vu, que $\underline{S}$ est $\pi$-accessible dans $\mathcal{M}$.

**4.13.10.3.** On peut reformuler la reformulation précédente, en utilisant la terminologie introduite plus bas (4.13.23) :

*Soit $c$ un cardinal, $\alpha_c$ le plus petit ordinal $\alpha$ tel que* $\operatorname{card}\alpha = c$, *$\pi$ un cardinal $\geqslant c$. On suppose*

(∗) *$\pi$ est utile pour $\mathcal{M}$, et $\mathcal{M}$ est stable par $\varinjlim$ de type $I_{\alpha_c}$. (Cette deuxième condition est le cas p.ex. si $c$ est* non limite *et $c > \pi_0$, $\pi_0$ étant un cardinal tel que $\mathcal{M}$ satisfait $\mathcal{2}_{\pi_0}$, p.ex. un cardinal* utile *pour $\mathcal{M}$* [131]*).*

*Alors l'ensemble des sous-catégories $\underline{S}$ de $\mathcal{M}$ qui sont $\alpha_c$-$\pi$-accessible dans $\mathcal{M}$ (i.e. qui sont $\pi$-accessibles et stables dans $\mathcal{M}$ par $\varinjlim$ de type $I_{\alpha_c}$) est stable par intersection de cardinal $\leqslant c$. Plus généralement, si $\Phi$ est un ensemble de catégories telles que*

*1°) $I \in \Phi \Longrightarrow \operatorname{card} I \leqslant \pi$ et*

*2°) $I_{\alpha_c} \in \Phi$,*

*alors l'ensemble des sous-catégories de $\mathcal{M}$ qui sont $\Phi$-$\pi$-accessibles dans $\mathcal{M}$, est stable par intersection de cardinal $\leqslant c$.*

`[page 303]`

**Définition 4.13.11** [132]. Soient $\mathcal{M}$ une catégorie accessible, $\pi_0$ un cardinal utile pour $\mathcal{M}$, $\pi > \pi_0$ un cardinal. Une catégorie $I$ est dite $\pi_0$-$\pi$-*adaptée* si

a) $I$ est équivalente à une petite catégorie,

b) $I$ est grande devant $\pi$, et

c) $I$ est stable par $\varinjlim$ de cardinal $\leqslant \pi$, et grandes devant $\pi_0$ [133].

Un système inductif $(x_i)_{i\in I}$ de type $I$ dans $\mathcal{M}$ est dit $\pi_0$-$\pi$-*adapté,* si $I$ est $\pi_0$-$\pi$-adaptée, i.e. satisfait les conditions a) b) c), et si de plus on a

d) le foncteur $i \longmapsto x_i : I \longrightarrow \mathcal{M}$ commute aux $\varinjlim$ (grandes devant $\pi_0$ et de cardinal $\leqslant \pi$) envisagées dans c), et

e) les $x_i$ sont dans $\mathcal{M}_\pi$.

**Proposition 4.13.12.** *Soient $\mathcal{M}$ une catégorie $\pi_0$-accessible, et $\pi > \pi_0$ un cardinal utile pour $\mathcal{M}$. Alors tout $x \in \operatorname{Ob}\mathcal{M}$ admet une représentation comme $x \xleftarrow{\sim} \varinjlim_{j\in J} x_j$, où le système inductif $(x_j)_{j\in J}$ dans $\mathcal{M}$ est $\pi_0$-$\pi$-adapté. De façon précise, on peut prendre $J = \mathcal{M}_\pi/x$.*

`[page 304]`

En effet, la vérification des propriétés a) à d) pour le système inductif canonique, de $\varinjlim$ isomorphe à $x$, est immédiate.

La proposition précédente ne dit pas si on peut prendre pour $J$ un ensemble ordonné. Dans ce cas, la condition c) signifie que pour toute partie $J'$ de $J$ grande devant $\pi_0$ et de

[131] Car alors $I_{\alpha_c}$ est grande devant $\pi_0$.

[132] Refondre avec 4.13.23 etc.

[133] **N.B.** Si $\pi = \pi_0$, la condition c) équivaut à dire que $I$ est stable par facteurs directs.

cardinal $\leqslant \pi$, $J$ admet une borne supérieure $i_J$ dans $J$, et la condition d) que l'on a alors $x_{i_J} \xleftarrow{\sim} \varinjlim_{i \in J'} x_i$.

L'idée naturelle, pour construire un système inductif $\pi_0$-$\pi$-adapté $(x_j)_{j\in J}$, avec $J$ ordonnée, en partant de celui qu'on a canoniquement, avec $J = \mathcal{M}_\pi/x$, est de prendre pour $I$ l'ensemble, ordonné par inclusion, des sous-catégories $J'$ de $J_0$ (sous-catégorie pleine petite de $J$ équivalente à $J$) qui sont de cardinal $\leqslant \pi$ et grandes devant $\pi_0$. (Comparer (4.7.3.3), page 165). Cet ensemble ordonné est bel et bien (petit et) *grand devant* $\pi$, si on suppose que $\pi^{\pi_0} = \pi$ (cf. démonstration 4.7.5, p. 168-171).

[page 305]

**Lemme 4.13.13.** *Soient $\pi_0$, $\pi > \pi_0$ des cardinaux infinis tels que $\pi^{\pi_0} = \pi$, et $J$ une petite catégorie, grande devant $\pi$. Soit $I$ l'ensemble des sous-catégories $J'$ de $J$ qui sont grandes devant $\pi_0$, et de cardinal $\leqslant \pi$. Alors $I$ est $\pi_0$-$\pi$-adaptée.*

Il reste à voir que pour tout ensemble ordonné $A$ grand devant $\pi_0$ et de cardinal $\leqslant \pi$, si $r \longmapsto J_r$ est une famille croissante d'éléments de $I$ indexée par $A$, alors

$$J \overset{\text{déf}}{=} \bigcup_{r\in A} J_r \;=\; \varinjlim_{r\in A} J_r$$

est dans $I$, i.e. est une sous-catégorie de $I$ de cardinal $\leqslant \pi$ (ce qui est clair) et *grande devant* $\pi_0$. Cela va résulter du

**Lemme 4.13.13.1.** *Soit $(J_r)_{r\in A}$ un système inductif de catégories grandes devant $\pi_0$, indexé par un ensemble ordonné $A$ grand devant $\pi_0$. Alors $J = \varinjlim_{r\in A} J_r$ est grande devant $\pi_0$.*

[page 306]

Il faut voir que si $B$ est un ensemble de cardinal $\leqslant \pi_0$, alors le foncteur diagonal

$$(*) \qquad \delta \;:\; J \longrightarrow J^B$$

est cofinal. Or comme $A$ est grande devant $\pi_0$, $\operatorname{card} B \leqslant \pi_0$, les produits indexés par $B$ commutent aux $\varinjlim$ de type $A$ (SGA 4 I 9.8 appliqué à Cat et à $\pi_0$). Donc la flèche $(*)$ s'interprète comme limite inductive des flèches similaires

$$(**) \qquad \delta_r \;:\; J_r \longrightarrow J_r^B \,,$$

lesquelles sont cofinales, donc $\delta$ est cofinal comme limite inductive de foncteurs cofinaux.

**Lemme 4.13.13.2.** *Sous les hypothèses de 4.13.13, soient $\mathcal{M}$ une catégorie satisfaisant $L_{\pi_0}$, et $(x_j)_{j\in J}$ (où $J \longrightarrow \mathcal{M}$) un système inductif dans $\mathcal{M}$, indexé par $J$. Pour toute $J' \in I$, posons*

$$x_{J'} \;=\; \varinjlim_{j\in J'} x_j$$

[page 307]

*(qui existe dans $\mathcal{M}$, puisque $\mathcal{M}$ satisfait à $L_{\pi_0}$). Alors les $(x_{J'})_{J'\in I}$ forment un système inductif dans $\mathcal{M}$, et $I \longrightarrow \mathcal{M}$ commute aux limites inductives grandes devant $\pi_0$ et de cardinal $\leqslant \pi$. Si $\mathcal{M}$ est $\pi_0$-accessible, et les $x_j$ ($j \in \operatorname{Ob} J$) sont dans $\mathcal{M}_\pi$, alors $(x_{J'})_{J'\in I}$ est un système inductif $\pi_0$-$\pi$-adapté dans $\mathcal{M}$.*

Tout ceci est essentiellement trivial, et donne :

**Corollaire 4.13.14** (de 4.13.12). *Sous les conditions de 4.13.12, si $\pi^{\pi_0} = \pi$, on peut pour tout $x \in \operatorname{Ob} \mathcal{M}$ trouver une représentation $x \simeq \varinjlim_{i \in I} x_i$, où $(x_i)_{i\in I}$ est un système inductif $\pi_0$-$\pi$-adapté avec $I$* ensemble ordonné. *De plus, si $\pi' > \pi$ et si $x \in \mathcal{M}_{\pi'}$, on peut prendre $I$ tel qu'on ait*

$$\operatorname{card} I \ \leqslant\ \pi'^{\pi} \ .$$

Ce dernier complément est immédiat,

`[page 308]`

via les majorations habituelles.

**Théorème 4.13.15** ([134]). *Soient $\mathcal{M}$ une catégorie $\pi_0$-accessible, et $\pi > \pi'_0 \geqslant \pi_0$ tels que $\pi^{\pi_0} = \pi$* ([135]). *Soit $\underline{S}$ une sous-catégorie strictement pleine de $\mathcal{M}$, et soit $\underline{S}(\pi) = \underline{S} \cap \mathcal{M}_\pi$. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

- a) *$\underline{S}$ est $\pi$-accessible dans $\mathcal{M}$ (4.13.3) et $\underline{S}$ est stable dans $\mathcal{M}$ par limites inductives grandes devant $\pi'_0$.*
- a′) *$\underline{S}$ est $\pi$-accessible dans $\mathcal{M}$, et $\underline{S}(\pi)$ est stable dans $\mathcal{M}_\pi$ par limites inductives grandes devant $\pi'_0$ et de cardinal $\leqslant \pi$* ([136]).
- b) *Pour tout objet $x$ de $\mathcal{M}$, on a ceci : la sous-catégorie strictement pleine $\underline{S}(\pi)/x$ de $J = \mathcal{M}_\pi/x$ est cofinale dans $\mathcal{M}_\pi/x$ si et seulement si $x \in \operatorname{Ob} \underline{S}$. De plus, $\underline{S}(\pi)$ est stable dans $\mathcal{M}_\pi$ pour $\varinjlim$ grandes devant $\pi'_0$ et de cardinal $\leqslant \pi$.*
- c) *Pour tout objet $x$ de $\mathcal{M}$ et pour toute représentation $x \simeq \varinjlim_{i\in I} x_i$, où $(x_i)_{i\in I}$ est un système inductif $\pi'_0$-$\pi$-adapté, (4.13.11), on a ceci : la sous-catégorie strictement pleine $I_{\underline{S}}$ de $I$ formée des $i \in \operatorname{Ob} I$ tels que $x_i \in \operatorname{Ob} \underline{S}$, est cofinale dans $I$ si et seulement si $x \in \operatorname{Ob} \underline{S}$. De plus, $S(\pi)$ est stable dans $\mathcal{M}_\pi$ par $\varinjlim$ grandes devant $\pi'_0$ et de cardinal $\leqslant \pi$.*

`[page 309]`

- c′) *Comme d)* `[plutôt c)]`, *avec $I$ ensemble ordonné.*

**Corollaire 4.13.16.** *Les hypothèses sur $\mathcal{M}$, $\pi_0$, $\underline{S}$ étant celles de 4.13.15, pour qu'il existe des cardinaux $\pi > \pi'_0 \geqslant \pi_0$ satisfaisant les conditions $\pi^{\pi'_0} = \pi$ (a fortiori $\pi^{\pi_0} = \pi$) et les conditions équivalentes a) à d′)* `[plutôt c′)]` *de 4.13.15, il (faut et il) suffit que $\underline{S}$ soit accessible dans $\mathcal{M}$. De façon plus précise, si $\underline{S}$ est accessible dans $\mathcal{M}$, soit $\pi'_0 \geqslant \pi_0$ un cardinal tel que $\underline{S}$ soit $\pi'_0$-accessible dans $\mathcal{M}$, et soit $\pi$ un cardinal $> \pi'_0$ tel que $\pi^{\pi'_0} = \pi$. Alors $(\underline{S}, \pi'_0, \pi)$ satisfait aux conditions équivalentes de 4.13.15.*

En effet, le “il faut” est évident sur la condition a) de 4.13.15. Pour le “il suffit” on note que $\underline{S}$ $\pi'_0$-accessible dans $\mathcal{M}$ implique que $\underline{S}$ est stable dans $\mathcal{M}$ par $\varinjlim$ grandes devant $\pi'_0$. Donc pour vérifier a), il suffit de vérifier que $\underline{S}$ est $\pi$-accessible dans $\mathcal{M}$. Or comme $\underline{S}$ est

[134] Cf. version plus générale et plus symétrique du théorème 4.13.15 dans 4.13.22.

[135] On peut se borner à supposer $\pi$ utile pour $\mathcal{M}$ (au lieu de $\pi^{\pi_0} = \pi$), alors on trouve que a, a′, b, c sont équivalentes et impliquent c′, mais ne sont peut-être pas équivalentes à c′.

[136] donner un nom à cette dernière condition, soit $\mathrm{L}(\pi'_0, \pi)$ (pour $\underline{S}(\pi)$ dans $\mathcal{M}_\pi$).

[page 310]

$\pi'_0$-accessible et que $\pi > \pi'_0$ satisfait $\pi^{\pi'_0} = \pi$, on en conclut que $\underline{S}$ est $\underline{S}_\pi$-accessible, i.e. $\underline{S} \xleftarrow{\sim} \mathrm{Ind}_\pi(\underline{S}_\pi)$. Donc en vertu de 4.13.3, il reste à voir que $\underline{S}_\pi \subset \mathcal{M}_\pi$, ou ce qui revient au même, que $\underline{S}_\pi \subset \underline{S}(\pi) \overset{\text{déf}}{=} \underline{S} \cap \mathcal{M}_\pi$. (En fait, on aura même égalité, car il est clair que $\underline{S}(\pi) \subset \underline{S}_\pi \ldots$). Or $\underline{S}(\pi)$ est une sous-catégorie de $\underline{S}$ stable par $\varinjlim$ grandes devant $\pi'_0$ et de cardinal $\leqslant \pi$ (puisque $\underline{S}$ et $\mathcal{M}_\pi$ sont stables par ces limites *dans* $\mathcal{M}$*,* et que ces limites dans $\underline{S}$ et dans $\mathcal{M}$ sont itou), et $\underline{S}(\pi)$ contient $S_{\pi'_0}$. Donc $\underline{S}(\pi)$ contient $\underline{S}_\pi$, en vertu de 4.7.1 (page 161), implication c) $\Longrightarrow$ b$'$), appliquée à $\underline{S}$, $\pi'_0$, $\pi$ au lieu de $\mathcal{M}$, $\pi_0$, $\pi$. Cela prouve donc le corollaire 4.13.16.

Démonstration de 4.13.15. Voici les implications $\pm$ tautologiques,

$$(*) \qquad \begin{tikzcd} & & & \mathrm{c}' \\ \mathrm{a} \arrow[r, Rightarrow] & \mathrm{a}' \arrow[r, Rightarrow, "\bullet"] & \mathrm{c} \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \\ & & & \mathrm{b}\ , \end{tikzcd}$$

[page 311]

que je vais expliciter un peu. On a a $\Longrightarrow$ a$'$ puisque si a est satisfait, $\underline{S}$ *et* $\mathcal{M}_\pi$ sont stables *dans* $\mathcal{M}$ par $\varinjlim$ grandes devant $\pi'_0$ et de cardinal $\leqslant \pi$, donc aussi leur intersection $\underline{S}(\pi)$, qui est donc aussi stable dans $\mathcal{M}_\pi$ par lesdites limites. L'implication c $\Longrightarrow$ c$'$ est une tautologie, et c $\Longrightarrow$ b aussi, compte tenu de 4.13.12, qui nous dit que le système inductif canonique $(x_i)_{i\in I}$, avec $I = \mathcal{M}_\pi/x$, de limite $x$ est $\pi_0$-$\pi$-adapté. (**N.B.** Comme $\pi^{\pi'_0} = \pi$ et $\pi'_0 \geqslant \pi_0$, on a aussi $\pi^{\pi_0} = \pi$, donc $\pi$ est utile pour $\mathcal{M}$, de sorte que 4.13.12 s'applique.)

Reste à prouver la "$\pm$ tautologie" a$'$ $\Longrightarrow$ c. Soit donc une représentation $\pi_0$-$\pi$-adaptée

$$x \ \simeq\ \varinjlim_{i\in I} x_i\ ,$$

prouvons que

$$x \ \in\ \mathrm{Ob}\,\underline{S} \qquad \Longleftrightarrow \qquad I_{\underline{S}} \text{ cofinal dans } I.$$

L'implication $\Longleftarrow$ provient du fait que, $\underline{S}$ étant $\pi$-accessible dans $\mathcal{M}$, est stable dans $\mathcal{M}$ par $\varinjlim$ grandes devant $\pi$ ([137]). Reste à prouver

[page 312]

que si $x \in \mathrm{Ob}\,\underline{S}$, alors $I_{\underline{S}}$ est cofinal dans $I$. Considérons donc le diagramme de catégories

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "\varphi"] & J = \mathcal{M}_\pi/x \\ I' = I_{\underline{S}} \arrow[u, hook] \arrow[r, "\varphi'"] & J' = \underline{S}(\pi)/x\ , \arrow[u, hook, "\alpha"'] \end{tikzcd}$$

c'est un carré cartésien ($I' = I_{\underline{S}}$ est l'image inverse par $\varphi : I \longrightarrow J$ de la sous-catégorie strictement pleine $J'$ de $J$). On a les propriétés suivantes

[137] On n'utilise ici, pour $\Longleftarrow$, de l'hypothèse $(x_i)_{i\in I}$ $\pi_0$-$\pi$-adapté, que le seul fait que $I$ soit grande devant $\pi$.

1) $I$ est grande devant $\pi$, et $\varphi$ cofinal ($\Longrightarrow J$ grande devant $\pi$).
2) $I$ stable par $\varinjlim$ grandes devant $\pi'_0$ et de cardinal $\leqslant \pi$, et $\varphi$ commute à ces $\varinjlim$.
3) $J'$ est stable par $\varinjlim$ du type précédent et $\alpha$ y commute ([138]).
4) $J'$ cofinal dans $J$.

On vient de conclure que $I' = \varphi^{-1}(J')$

[page 313]

est cofinale dans $I$. Comme c'est une sous-catégorie pleine (et même strictement pleine), il suffit de prouver la propriété F 1, i.e. que pour tout $i \in \mathrm{Ob}\, I$, existe $i' \in \mathrm{Ob}\, I'$ et une flèche $i \longrightarrow i'$.

On va construire encore $i'$ par construction transfinie, sur l'intervalle ordinal $I_{\alpha_\pi}$, en construisant un système inductif

$$(i_\alpha)_{\alpha \in I_{\alpha_\pi}} \;, \qquad i_\alpha \in \mathrm{Ob}\, I \;,$$

d'objets de $I$, et un système inductif $(j_\alpha)_{\alpha \in I_{\alpha_\pi}}$, $j_\alpha \in \mathrm{Ob}\, J'$, flèches de transition notées $\tau_{\beta,\alpha} : i_\alpha \longrightarrow i_\beta$, $\tau'_{\beta,\alpha} : j_\alpha \longrightarrow j_\beta$, enfin pour tout $\alpha$ dans $I_{\alpha_\pi}$ des flèches

$$(*) \qquad \begin{tikzcd} \varphi(i_\alpha) \arrow[r, "u_\alpha"] \arrow[rr, dotted, bend right, "\varphi(\tau_{\alpha+1,\alpha})"'] & j_\alpha \arrow[r, "v_\alpha"] \arrow[rr, dotted, bend left, "\tau'_{\alpha+1,\alpha}"] & \varphi(i_{\alpha+1})\ ( \arrow[r, dotted, "u_{\alpha+1}"] & j_{\alpha+1}\ ) \end{tikzcd}$$

dans $J$, telles que

$$(**) \qquad \begin{cases} v_\alpha u_\alpha &= \varphi(\tau_{\alpha+1,\alpha}) \\ u_{\alpha+1} v_\alpha &= \tau'_{\alpha+1,\alpha} \end{cases} \qquad ({}^{139}) \;.$$

[page 314]

Montrons comment la construction d'un tel système d'objets et de flèches avec

$$(***) \qquad i_0 \;=\; i$$

va impliquer l'existence de $i' \in \mathrm{Ob}\, I'$ et de $i \longrightarrow i'$. En effet, comme $I_{\alpha_\pi}$ est grande devant $\pi'_0$ (il est grand devant tout cardinal $< \pi$), il existe

$$i' \overset{\text{déf}}{=} \varinjlim_{i \in I_{\alpha_\pi}} i_\alpha$$

dans $I$, et on a une flèche de transition

$$i \;=\; i_0 \longrightarrow i' \;,$$

donc il reste à prouver que $i' \in \mathrm{Ob}\, I'$, i.e. $\varphi(i') \in \mathrm{Ob}\, J'$. Or $\varphi$ commutant aux $\varinjlim$ de type $I_{\alpha_\pi}$, on aura

$$\varphi(i) \;=\; \varinjlim \varphi(i_\alpha) \;.$$

Il me faut encore des compatibilités

[138] C'est ici qu'intervient l'hypothèse de stabilité faite dans b), car d'après b), $\underline{S}$ est $\pi$-accessible dans $\mathcal{M}$.

[139] cf. aussi ($****$), page suivante.

$$(****)\qquad \begin{tikzcd} \varphi(i_\alpha) \arrow[r, "u_\alpha"] \arrow[d, "\varphi(\tau_{\beta,\alpha})"'] & j_\alpha \arrow[d, "\tau'_{\beta,\alpha}"] \\ \varphi(i_\beta) \arrow[r, "u_\beta"] & j_\alpha \end{tikzcd} \quad \text{et} \quad \begin{tikzcd} j_\alpha \arrow[r, "v_\alpha"] \arrow[d, "\tau'_{\beta,\alpha}"'] & \varphi(i_{\alpha+1}) \arrow[d, "\varphi(\tau_{\beta+1,\alpha+1})"] \\ j_\beta \arrow[r, "v_\beta"] & \varphi(i_{\beta+1}) \end{tikzcd}$$

oubliées tantôt.

[page 315]

Les compatibilités $(****)$ impliquent qu'on a des homomorphismes

$$\varphi(i) \underset{v}{\overset{u}{\rightleftarrows}} j \qquad \text{où } j \overset{\text{déf}}{=} \varinjlim_{\alpha\in I_{\alpha_\pi}} j_\alpha \quad (\text{limite } \textit{dans } J', \text{ donc dans } J)\ ,$$

et les compatibilités $(**)$ impliquent que

$$vu \ = \ \mathrm{id}_{\varphi(i)}\ , \qquad uv = \mathrm{id}_J\ ,$$

donc que $u$, $v$ sont des isomorphismes inverses l'un de l'autre. Comme $J'$ est une sous-catégorie *strictement* pleine de $J$, il s'ensuit bien que $\varphi(i) \in J'$, i.e. $i \in I'$, q.e.d.

Donc tout revient à construire les

$$\underbrace{i_\alpha}_{\in \mathrm{Ob}\, I}\ , \qquad \tau_{\beta,\alpha}\ , \qquad \underbrace{j_\alpha}_{\in \mathrm{Ob}\, J'}\ , \qquad \tau'_{\beta,\alpha}\ , \qquad u_\alpha\ , \qquad v_\alpha\ ,$$

satisfaisant aux contraintes $(**)$, $(***)$, $(****)$. On va faire la construction en trois étapes.

1 Départ :

$$i_0 \ = \ i\ .$$

Comme $J'$ est cofinal dans $J$, existe $j_0 \in \mathrm{Ob}\, J'$ et

$$\varphi(i_0) \xrightarrow{u_0} j_0\ .$$

[page 316]

2 Supposons que les $i_\beta$, $j_\beta$ soient construits pour $\beta < \alpha$, ainsi que les $\tau_{\beta',\beta} : i_\beta \longrightarrow i_{\beta'}$, $\tau'_{\beta',\beta} : j_\beta \longrightarrow j_{\beta'}$ pour $\beta, \beta' < \alpha$, enfin les $u_\beta : \varphi(i_\beta) \longrightarrow j_\beta$, $v_\beta : j_\beta \longrightarrow \varphi(i_{\beta+1})$ pour $\beta < \alpha$ resp. pour $\beta+1 < \alpha$, de façon à satisfaire aux contraintes $(**)$, $(****)$, i.e. commutativités dans

(1)
$$\begin{tikzcd} \varphi(i_\beta) \arrow[r, "u_\beta"] \arrow[rr, bend right, "\varphi(\tau_{\beta+1,\beta})"'] & j_\beta \arrow[r, "v_\beta"] & \varphi(i_{\beta+1}) \end{tikzcd}$$

(2)
$$\begin{tikzcd} j_\beta \arrow[r, "v_\beta"] \arrow[rr, bend right, dotted, "\tau'_{\beta+1,\beta}"'] & \varphi(i_{\beta+1}) \arrow[r, "u_{\beta+1}"] & j_{\beta+1} \end{tikzcd}$$

*si* $\beta+1<\alpha$

(3)
$$\begin{tikzcd} \varphi(i_\beta) \arrow[r, "u_\beta"] \arrow[d, "\varphi(\tau_{\beta',\beta})"'] & j_\beta \arrow[d, "\tau'_{\beta',\beta}"] \\ \varphi(i_{\beta'}) \arrow[r, "u_{\beta'}"] & j_{\beta'} \end{tikzcd}$$

si $\beta<\beta'<\alpha$

(4)
$$\begin{tikzcd} j_\beta \arrow[r, "v_\beta"] \arrow[d, "\tau'_{\beta',\beta}"'] & \varphi(i_{\beta+1}) \arrow[d, "\varphi(\tau_{\beta'+1,\beta+1})"] \\ j_{\beta'} \arrow[r, "v_{\beta'}"] & \varphi(i_{\beta'+1}) \end{tikzcd}$$

si $\beta<\beta'$ et $\beta'+1<\alpha$ ,

[page 317]

il faut construire

1) $i_\alpha \in \operatorname{Ob} I$, et un homomorphisme $(i_\beta)_{\beta\in I_\alpha} \longrightarrow i_\alpha$, i.e. des $\tau_{\alpha,\beta}$ : $i_\beta \longrightarrow i_\alpha$ $(\beta \in I_\alpha)$, compatibles aux translations $\tau_{\beta',\beta}$ pour $\beta<\beta'<\alpha$.

2) $j_\alpha \in \operatorname{Ob} J'$, et un homomorphisme $(j_\beta)_{\beta\in I_\alpha} \longrightarrow j_\alpha$, i.e. des $\tau'_{\alpha,\beta}$ : $j_\beta \longrightarrow j_\alpha$ $(\beta \in I_\alpha)$, compatibles aux translations $\tau'_{\beta',\beta}$ pour $\beta<\beta'<\alpha$.

3) Une flèche
$$u_\alpha : \varphi(i_\alpha) \longrightarrow j_\alpha \ .$$

4) Si $\alpha$ n'est pas ordinal limite, i.e. $\alpha=\alpha_0+1$, une flèche
$$v_{\alpha_0} : j_{\alpha_0} \longrightarrow \varphi(i_{\alpha_0+1}) = \varphi(i_\alpha) \ ;$$

et ceci de façon à satisfaire aux contraintes (1) (2) (3) (4) quand on y suppose $\beta+1\leqslant\alpha$ (au lieu de $\beta'<\alpha$) dans (1) et (2) , et $\beta'\leqslant\alpha$ (au lieu de $\beta'<\alpha$) dans (3) , et $\beta'+1\leqslant\alpha$ (au lieu de $\beta'+1<\alpha$) dans (4) . Donc pour les contraintes 1°, 2°, 4°, il n'y a en tenir compte *que* si $\alpha$ n'est pas ordinal limite, donc $\alpha=\alpha_0+1$, et en y faisant
$$\beta' \ = \ \alpha_0 \ .$$

Quant à la contrainte 3°, il faut en

[page 318]

tenir compte pour $\beta' = \alpha$. Donc au total, il faut exiger

$$(3_\alpha)(\beta) \qquad \begin{tikzcd} \varphi(i_\beta) \arrow[r, "u_\beta"] \arrow[d, "\varphi(\tau_{\alpha,\beta})"'] & j_\beta \arrow[d, "\tau'_{\alpha,\beta}"] \\ \varphi(i_\alpha) \arrow[r, "u_\alpha"] & j_\beta \end{tikzcd} \qquad \text{commutatif pour } \beta < \alpha \text{ ([140])},$$

(par restriction sur $\alpha$), et si $\alpha = \alpha_0 + 1$ est ordinal non limite, il faut exiger de plus

$$(4_\alpha)(\beta) \qquad \begin{tikzcd} j_\beta \arrow[r, "v_\beta"] \arrow[d, "\tau'_{\alpha_0,\beta}"'] & \varphi(i_{\beta+1}) \arrow[d, "\varphi(\tau_{\alpha,\beta+1})"] \\ j_{\alpha_0} \arrow[r, "v_{\alpha_0}"] & \varphi(i_{\alpha_0+1}) = \varphi(i_\alpha) \end{tikzcd} \qquad \beta < \alpha_0$$

$$(1_\alpha) \qquad \begin{tikzcd} \varphi(i_{\alpha_0}) \arrow[r, "u_{\alpha_0}"] \arrow[rr, bend right, "\varphi(\tau_{\alpha,\alpha_0})"'] & j_{\alpha_0} \arrow[r, "v_{\alpha_0}"] & \varphi(i_{\alpha_0+1}) = \varphi(i_\alpha) \end{tikzcd}$$

$$(2_\alpha) \qquad \begin{tikzcd} j_{\alpha_0} \arrow[r, "v_{\alpha_0}"] \arrow[rr, bend right, "\tau'_{\alpha,\alpha_0}"'] & \varphi(i_{\alpha_0+1}) = \varphi(i_\alpha) \arrow[r, "u_\alpha"] & j_\alpha \end{tikzcd} .$$

Dans ces compatibilités, j'ai cerclé les flèches $\tau_{\alpha,\beta}$, $\tau'_{\alpha,\beta}$ $(\beta < \alpha)$, $\Big( \tau_{\alpha,\beta+1}\ (\beta + 1 < \alpha) \Big)$, $v_{\alpha_0}$, $\Big( \tau_{\alpha,\alpha_0} \Big)$, $u_\alpha$, $\Big( \tau'_{\alpha,\alpha_0} \Big)$, qui ont été introduites dans les donnés 1) 2) 3) 4), page 317.

[page 319]

On va distinguer donc les deux cas.

*2 A)* $\alpha = \alpha_0 + 1$.

Pour construire $i_\alpha$ et les $\tau_{\alpha,\beta} : i_\beta \longrightarrow i_\alpha$, il suffit de construire $i_\alpha$ et

$$\tau_{\alpha,\alpha_0} : \ i_{\alpha_0} \longrightarrow i_\alpha = i_{\alpha_0+1} .$$

De même pour $j_\alpha$ et les $\tau'_{\alpha,\beta}$, il suffit de construire

$$\tau'_{\alpha,\alpha_0} : \ j_{\alpha_0} \longrightarrow j_\alpha .$$

Il faut de plus se donner

$$j_{\alpha_0} \xrightarrow{v_{\alpha_0}} \varphi(\underbrace{i_\alpha}_{=i_{\alpha_0+1}}) \xrightarrow{u_\alpha} j_\alpha ,$$

donc en tout deux objets $i_\alpha$, $j_\alpha$ (dans $I$ et dans $J'$ respectivement) et quatre flèches $\tau_{\alpha,\alpha_0}$, $\tau'_{\alpha,\alpha_0}$, $v_{\alpha_0}$, $u_\alpha$. Il faut quatre compatibilités (page 318), où les deux dernières $3_\alpha(\beta)$, $4_\alpha(\beta)$ dépendent d'un paramètre $\beta < \alpha$, i.e. $\beta \leqslant \alpha_0$, ou de $\beta < \alpha_0$.

[140]**N.B.** Il suffit de l'exiger pour $\beta = \alpha_0$, dans le cas $\alpha = \alpha_0 + 1$, cf. ci-dessous, p. 323.

[page 320 biffé]

[page 321]

On va d'abord s'occuper de deux premières compatibilités $1_\alpha$, $2_\alpha$, en termes de la donnée de

$$i_{\alpha_0} \in \operatorname{Ob} I\ , \qquad j_{\alpha_0} \in \operatorname{Ob} J'\ , \qquad u_{\alpha_0} : \varphi(i_{\alpha_0}) \longrightarrow j_{\alpha_0}\ .$$

Les deux compatibilités voulues pour les deux objets $i_\alpha$, $j_\alpha$ et les quatre flèches $\tau_{\alpha,\alpha_0}$, $\tau'_{\alpha,\alpha_0}$, $v_{\alpha_0}$, $u_\alpha$ sont indiquées dans le diagramme

$$(*) \qquad \begin{tikzcd} \varphi(i_{\alpha_0}) \arrow[r, "u_{\alpha_0}"] \arrow[rr, bend right, "\varphi(\tau_{\alpha,\alpha_0})"'] & j_{\alpha_0} \arrow[r, "v_{\alpha_0}\ ?"] \arrow[rr, bend left, "\tau'_{\alpha,\alpha_0}"] & \varphi(\underbrace{i_\alpha}_{?}) \arrow[r, "u_\alpha\ ?"] & j_\alpha \end{tikzcd} .$$

On note que comme $\varphi$ est cofinal, $\exists\ i_\alpha = i \in \operatorname{Ob} I$ et $j_{\alpha_0} \xrightarrow{v_{\alpha_0}} \varphi(i)$. Mais on veut que le composé

$$w\ :\ \varphi(i_{\alpha_0}) \xrightarrow{u_{\alpha_0}} j_{\alpha_0} \xrightarrow{v_{\alpha_0}} \varphi(i)$$

soit de la forme $\varphi(\tau)$, où $\tau = \tau_{\alpha,\alpha_0} : i_{\alpha_0} \longrightarrow i_\alpha$ est une flèche dans $I$. Comme $\varphi$ est un foncteur cofinal de catégories filtrantes, on sait

[page 322]

qu'on peut trouver $i \xrightarrow{\rho} i'$ dans $I$, tel que la flèche composée $\varphi(i_{\alpha_0}) \xrightarrow{w} \varphi(i) \xrightarrow{\varphi(\rho)} \varphi(i')$ soit de la forme $\varphi(\tau)$. Donc quitte à remplacer $i$ par $i'$, et $v_{\alpha_0}$ par le composé $v'_{\alpha_0}$ : $j_{\alpha_0} \xrightarrow{v_{\alpha_0}} \varphi(i) \xrightarrow{\varphi(\rho)} \varphi(i')$, on peut supposer que $v_{\alpha_0}u_{\alpha_0}$ est de la forme $\varphi(\tau)$. Cela nous donne donc en principe l'objet $i = i_\alpha$, et les flèches $v_{\alpha_0} : j_{\alpha_0} \longrightarrow \varphi(i)$ et $\tau_{\alpha,\alpha_0} : i_{\alpha_0} \longrightarrow i_\alpha$, de façon à satisfaire à la première compatibilité dans $(*)$. Il reste à construire $j_\alpha$, $\tau'_{\alpha,\alpha_0}$, $u_\alpha$ de façon à satisfaire à la deuxième compatibilité $(*)$. Or $J'$ étant cofinal dans $J$, il existe $j_\alpha$ dans $J'$ et une flèche $u_\alpha : \varphi(i_\alpha) \longrightarrow j_\alpha$. D'autre part, comme $J' \longrightarrow J$ est pleinement fidèle, la flèche composée $j_{\alpha_0} \xrightarrow{v_{\alpha_0}} \varphi(i_\alpha) \xrightarrow{u_\alpha} j_\alpha$ dans $J$, entre objets de $J'$, provient d'une unique flèche $\tau'_{\alpha,\alpha_0} : j_{\alpha_0} \longrightarrow j_\alpha$ dans $J'$.

[page 323]

Ainsi, on a construit les deux objets et les quatre flèches voulues, de façon à satisfaire aux contraintes $1_\alpha$, $2_\alpha$ de la page 318. Les contraintes $3_\alpha(\beta)$, $4_\alpha(\beta)$ sont-elles alors satisfaites automatiquement ?

$$\begin{tikzcd} \varphi(i_\beta) \arrow[r, "u_\beta"] \arrow[d] & j_\beta \arrow[d] \\ \varphi(i_{\alpha_0}) \arrow[r, "u_{\alpha_0}"] \arrow[d, "\varphi(\tau_{\alpha,\alpha_0})"'] & j_{\alpha_0} \arrow[d, "\tau'_{\alpha,\alpha_0}"] \\ \varphi(i_\alpha) \arrow[r, "u_\alpha"] & j_\alpha \end{tikzcd} \qquad \beta < \alpha, \text{ i.e. } \beta \leqslant \alpha_0\ .$$

Le carré supérieur est commutatif par hypothèse de récurrence, pour que le carré total (composé) soit commutatif, il suffit que le carré inférieur le soit. On a donc une double-flèche $(\tau'_{\alpha,\alpha_0} u_{\alpha_0}, u_\alpha \varphi(\tau_{\alpha,\alpha_0})) : \varphi(i_\alpha) \rightrightarrows j_\alpha$, elle n'est peut-être pas triviale, mais on sait, $J'$ étant filtrante, qu'on peut l'égaliser par une flèche $j_\alpha \longrightarrow \bar{j}_\alpha$ dans $J'$. Donc quitte à remplacer $j_\alpha$ par

[page 324]

$\bar{j}_\alpha$, $u_\alpha$ par le composé $\bar{u}_\alpha : \varphi(i_0) \longrightarrow j_\alpha \longrightarrow \bar{j}_\alpha$ et $\tau'_{\alpha,\alpha_0}$ par le composé $\bar{\tau}'_{\alpha,\alpha_0} : j_{\alpha_0} \longrightarrow j_\alpha \longrightarrow \bar{j}_\alpha$ (sans toucher à $i_\alpha$, $v_{\alpha_0}$, $\tau_{\alpha_0,\alpha}$), on peut obtenir la commutativité, d'où $3_\alpha(\beta)$.

Reste la contrainte $4_\alpha(\beta)$. Pour ceci, considérons le diagramme composite

$$\begin{tikzcd} j_\beta \arrow[r, "v_\beta"] \arrow[d, "\tau'_{\alpha_0,\beta}"'] & \varphi(i_{\beta+1}) \arrow[d, "\varphi(\tau_{\alpha,\beta+1})"] \\ j_{\alpha_0} \arrow[r, "v_{\alpha_0}"] & \varphi(i_{\alpha_0+1}) = \varphi(i_\alpha) \ . \end{tikzcd}$$

Si $\alpha_0$ n'est pas un ordinal limite, mais de la forme $\alpha_1 + 1$, on peut encore se ramener au cas où $\beta = \alpha_1$, en procédant comme ci-dessus. Mais on peut procéder dans tous les cas, sans un tel artifice ( !), en considérant les double-flèches

$$(*) \qquad j_\beta \underset{v_{\alpha_0}\tau'_{\alpha_0,\beta}}{\overset{\varphi(\tau_{\alpha,\beta+1})v_\beta}{\rightrightarrows}} \varphi(i_\alpha)$$

déduites du carré précédent. Comme

[page 325]

l'ensemble de ces double-flèches est de cardinal $\operatorname{card}\alpha < \pi$, et que $J$ est grande devant $\pi$ (il suffirait qu'il le soit pour les cardinaux $\pi' < \pi$), on peut trouver une flèche $\varphi(i_\alpha) \xrightarrow{u} j$ dans $J$ qui égalise toutes ces double-flèches. Comme $\varphi$ est cofinal, on peut supposer que $j$ est de la forme $\varphi(i)$. Comme $\varphi$ est un foncteur cofinal de catégories filtrantes, il existe alors $i \xrightarrow{\rho} i'$ dans $I$, tel que le composé $\varphi(i_\alpha) \xrightarrow{u} \varphi(i) \xrightarrow{\varphi(\rho)} \varphi(i')$ soit de la forme $\varphi(\sigma)$, pour $\sigma : i_\alpha \longrightarrow i'$. Au total, on a trouvé $\sigma : i_\alpha \longrightarrow i'$, tel que $\varphi(\sigma)$ $(= \varphi(\rho)u) : \varphi(i_\alpha) \longrightarrow \varphi(i')$ égalise toutes les double-flèches envisagées dans $(*)$, p. 324. Donc il s'impose de remplacer $i_\alpha$ par $\bar{i}_\alpha = i'$, $v_{\alpha_0}$ par le composé $j_{\alpha_0} \longrightarrow \varphi(i_\alpha) \xrightarrow{\varphi(\sigma)} \varphi(\bar{i}_\alpha)$, $\tau_{\alpha,\alpha_0}$

[page 326]

par le composé $\bar{\tau}_{\alpha,\alpha_0} : i_{\alpha_0} \xrightarrow{\tau_{\alpha,\alpha_0}} i_\alpha \xrightarrow{\sigma} \bar{i}_\alpha$.

Pour résumer, voici la recette pour construire, d'abord $i_\alpha$, $v_{\alpha_0}$, $\tau_{\alpha,\alpha_0}$, et *ensuite* $j_\alpha$, $u_\alpha$, $\tau'_{\alpha,\alpha_0}$.

On procède d'abord comme page 321, 322 pour construire le premier triple, de façon à satisfaire à la première compatibilité $(*)$ (p. 321), i.e. à $1_\alpha$. On "corrige" ensuite ce choix de $i_\alpha$, $v_{\alpha_0}$, $\tau_{\alpha,\alpha_0}$, en remplaçant $i_\alpha$ par $\bar{i}_\alpha$ pour $\sigma : i_\alpha \longrightarrow \bar{i}_\alpha$, $v_{\alpha_0}$ par $\bar{v}_{\alpha_0} = \varphi(\sigma)v_{\alpha_0}$, et $\tau_{\alpha,\alpha_0}$ par $\bar{\tau}_{\alpha,\alpha_0} = \sigma\tau_{\alpha,\alpha_0}$, de sorte à obtenir les compatibilités $4_\alpha(\beta)$ pour $\beta < \alpha_0$, comme on vient de l'indiquer. On ne touchera plus à ces choix de $i_\alpha$, $v_{\alpha_0}$, $\tau_{\alpha,\alpha_0}$, dans la suite de la construction. On construit $(j_\alpha, u_\alpha, \tau'_{\alpha,\alpha_0})$ de façon à satisfaire à la deuxième compatibilité $(*)$ (p. 321), comme

[page 327]

indiqué page 322. Ensuite, on corrige ce choix, en remplaçant $j_\alpha$ par $\bar{j}_\alpha$, avec $\rho : j_\alpha \longrightarrow \bar{j}_\alpha$, et $u_\alpha$ par $\bar{u}_\alpha = \rho u_\alpha$, $\tau'_{\alpha,\alpha_0}$ par $\bar{\tau}'_{\alpha,\alpha_0} = \rho\tau'_{\alpha,\alpha_0}$, de façon à satisfaire aux contraintes $3_\alpha(\beta)$ de la page 318.

Cela achève la construction dans le cas où $\alpha = \alpha_0 + 1$.

*Cas 2 B : $\alpha$ est ordinal limite.*

Il faut donc construire les données 1) 2) 3) de la page 317 (à l'exclusion de la donnée 4), de façon à satisfaire à la seule contrainte $3_\alpha(\beta)$.

On commence à construire $i_\alpha$ et les $\tau_{\beta,\alpha}$ dans $I$. C'est possible, car $I_\alpha = \{\beta \mid \beta < \alpha\}$ est de cardinal $\pi_\alpha < \pi$ – il suffit donc de supposer $I$ grande devant les cardinaux $\pi' < \pi$.

On construit ensuite de même $J_\alpha$ dans $J'$ et les $\tau'_{\beta,\alpha}$ $(\beta < \alpha)$, en utilisant le

[page 328]

fait que $J'$ est grande devant $\operatorname{card}\alpha = \operatorname{card} I_\alpha$. On doit de plus construire une flèche

$$u_\alpha \ : \ \varphi(i_\alpha) \longrightarrow j_\alpha \ .$$

C'est possible, car $J'$ étant cofinale dans $J$, il existe $j'$ dans $J'$ et $\varphi(i_\alpha) \longrightarrow J'$, et $J'$ étant filtrante, il existe $\bar{j}_\alpha$ et des flèches $\begin{tikzcd} j_\alpha \arrow[rr] & & j_\alpha \\ & j' \arrow[ur] & \end{tikzcd}$, donc quitte à remplacer $j_\alpha$ par $\bar{j}_\alpha$, les $\tau'_{\alpha,\beta}$ par des $\bar{\tau}'_{\alpha,\beta}$, on trouve bien une flèche $u_\alpha : \varphi(i_\alpha) \longrightarrow j_\alpha$. Il faut ensuite s'occuper des compatibilités $3_\alpha(\beta)$, donc des double-flèches

$$\varphi(i_\beta) \ \underset{u_\alpha\varphi(\tau_{\alpha,\beta})}{\overset{\tau'_{\alpha,\beta}u_\beta}{\rightrightarrows}} \ j_\alpha \ .$$

Comme l'ensemble de ces double-flèches est de cardinal $\operatorname{card}\alpha < \pi$, et que $J'$ est grande devant ledit cardinal, on

[page 329]

trouve donc une flèche

$$\rho : j_\alpha \longrightarrow j$$

dans $J$ qui les égalise toutes. Comme $J'$ est cofinal, on peut supposer $j$ dans $J'$, soit $\bar{j}_\alpha$. Donc quitte à remplacer $j_\alpha$ par $\bar{j}_\alpha$, et les $\tau'_{\alpha,\beta}$ par $\bar{\tau}'_{\alpha,\beta} = \rho\tau'_{\alpha,\beta}$, enfin $u_\alpha : \varphi(i_\alpha) \longrightarrow j_\alpha$ par $\bar{u}_\alpha = \rho u_\alpha : \varphi(i_\alpha) \longrightarrow \bar{j}_\alpha$, on satisfait à toutes les contraintes voulues.

Je résume le résultat ("$\pm$ tautologique" !) prouvé dans les pages 313-329.

**Lemme-clef 4.13.17.** *Considérons un carré cartésien dans* Cat

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "\varphi"] & J \\ I' \arrow[u, hook] \arrow[r] & J' \arrow[u, hook, "\psi"'] \end{tikzcd} \ .$$

*On fait les hypothèses suivantes :*

[page 330]

1) *$\varphi$ et $\psi$ sont cofinaux, $\psi$ est l'inclusion d'une sous-catégorie strictement pleine $J'$ de $J$, $I$ est filtrant (donc $J$ et $J'$ aussi).*

*On cherche des conditions pour que l'inclusion de la sous-catégorie strictement pleine $I' \longrightarrow I$ soit cofinale (auquel cas on voit tout de suite que $I'$ est filtrante, et $I' \longrightarrow J'$ est aussi cofinal). Pour ceci, on suppose qu'il existe un ordinal limite $\alpha_0$ ayant les propriétés supplémentaires suivantes :*

2) *$I$ et $J'$ sont stables par $\varinjlim$ de type $I_{\alpha_0}$ ($= \{\beta \mid \beta$ ordinal $< \alpha_0\}$), et les foncteurs $\varphi$, $\psi$ commutent à ces limites.*
3) *Pour tout $\alpha \in I_{\alpha_0}$, $I$ est grande devant* $\operatorname{card}\alpha$. *(Donc, $\varphi$ étant cofinal, $J$ est également grande devant* $\operatorname{card}\alpha$*, et de même, $\psi$ étant pleinement fidèle, et cofinal, $J'$ est grande devant* $\operatorname{card}\alpha$*.)*

*Sous ces conditions, $I'$ est cofinal dans $I$ (donc aussi grande devant* $\operatorname{card}\alpha$*, pour tout $\alpha \in I_{\alpha_0}$).*

La démonstration est celle donnée ci-dessus. On n'a pas eu à utiliser que l'ordinal $\alpha_0 = \alpha_\pi$ était de cette espèce particulière, seulement que c'était un cardinal limite.

[page 331]

Ce lemme implique, comme on l'a vu à la page 312, l'implication b $\Longrightarrow$ d dans le diagramme d'implications $(*)$ page 310, lequel est donc à présent prouvé.

Pour achever de prouver le théorème 4.13.15, il reste à prouver les implications

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{c}' \arrow[dr, Rightarrow] & & \\
& \mathrm{a}' \arrow[r, Rightarrow] & \mathrm{a}\ . \\
\mathrm{b} \arrow[ur, Rightarrow] & &
\end{tikzcd}$$

Démontrons donc (b ou c$'$) $\Longrightarrow$ a$'$. Il reste à prouver que $\underline{S}$ est $\pi$-accessible dans $\mathcal{M}$, i.e. que le foncteur pleinement fidèle

$$(*) \qquad \operatorname{Ind}_\pi(\underline{S}(\pi)) \longrightarrow \mathcal{M}$$

a pour image essentielle $\underline{S}$. Donc il faut prouver que si $x \in \operatorname{Ob}\mathcal{M}$, alors

$(*)$ $\quad x \in \operatorname{Ob}\underline{S} \overset{(?)}{\Longleftrightarrow}$ $x$ est dans l'image essentielle de $\operatorname{Ind}_\pi(\underline{S}(\pi))$, i.e. $x$ est isomorphe à $\varinjlim_{i\in I} x_i$, les $x_i$ dans $\operatorname{Ob}\underline{S}(\pi)$, $I$ grande devant $\pi$.

[page 332]

( Supposons d'abord que $\underline{S}$ satisfasse b) ([141]). Donc on sait que

$$(**) \qquad x \in \operatorname{Ob}\underline{S} \iff \underline{S}/x \text{ est cofinale dans } \mathcal{M}_\pi/x\ .$$

[141] Maladroit, on peut traiter les deux cas b) et c) en même temps, cf. bas de page 333.

Nous voulons déduire l'équivalence $(*)$ de l'équivalence $(**)$.

Prouvons $\Longrightarrow$ dans $(*)$, i.e. supposons $x \in \mathrm{Ob}\,\underline{S}$, et prouvons que $x$ est dans l'image essentielle de $\mathrm{Ind}_\pi \underline{S}(\pi)$. En vertu de $(**)$, $\underline{S}(\pi)/x$ est une sous-catégorie (strictement pleine) cofinale dans $\mathcal{M}_\pi/x$, donc comme $\mathcal{M}_\pi/x$ est grande devant $\pi$, $\underline{S}(\pi)/x$ l'est aussi. Comme on sait que

$$x \;=\; \varinjlim_{i \in \mathcal{M}_\pi/x} x_i$$

($\pi$ étant cardinal utile pour $\mathcal{M}$), il s'ensuit par cofinalité qu'on a aussi

$$x \;=\; \varinjlim_{i \in \underline{S}(\pi)/x} x_i \;,$$

et comme $\underline{S}(\pi)/x$ est grande devant $\pi$, cela implique que $x$ appartient à l'image essentielle de $\mathrm{Ind}_\pi(\underline{S}(\pi))$.

Prouvons $\Longleftarrow$ dans $(*)$, i.e. supposons que $x$ soit dans l'image essentielle de $\mathrm{Ind}_\pi(\underline{S}(\pi))$,

`[page 333]`

$$x \;=\; \varinjlim_{i \in I} x_i \;, \qquad \text{les } x_i \text{ dans } \underline{S}(\pi),\ I \text{ grande devant } \pi.$$

Alors le foncteur composé $i \longmapsto x_i$,

$$I \longrightarrow \underline{S}(\pi)/x \hookrightarrow \mathcal{M}_\pi/x$$

est cofinal (cf. 4.4.2, page 79), donc $\underline{S}(\pi)/x \longrightarrow \mathcal{M}_\pi/x$ satisfait la condition F 1 (puisque le composé le satisfait), et comme $\underline{S}(\pi)/x \longrightarrow \mathcal{M}_\pi/x$ est pleinement fidèle, cela implique déjà que ce foncteur est cofinal. Donc par $(**)$ on en conclut $x \in \mathrm{Ob}\,\underline{S}$, q.e.d.

Supposons maintenant que $S$ satisfasse c′ (au lieu de b), et prouvons encore l'équivalence $(*)$. Pour ceci, écrivons

$$\square \qquad x \;=\; \varinjlim_{i \in I} x_i \qquad \left\{ \begin{array}{l} \text{les } x_i \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{M}_\pi,\ I \textit{ ensemble ordonné, } (x_i)_{i\in I} \text{ est } \pi_0\text{-}\pi\text{-} \\ \text{adaptée } (^{142}). \end{array} \right.$$

ce qui est possible puisque $\pi$ est utile pour $\mathcal{M}$ $\Big)$. Définissons $I_{\underline{S}}$ comme dans l'énoncé de c), donc comme image inverse de $\underline{S}(\pi)/x \hookrightarrow \mathcal{M}_\pi/x$ par $I \longrightarrow \mathcal{M}_\pi$. Par hypothèse d′) `[plutôt c′)]`, on a

$$(**') \qquad\qquad x \in \mathrm{Ob}\,\underline{S} \quad \Longleftrightarrow \quad I_{\underline{S}} \text{ est cofinal dans } I\ .$$

En utilisant $(**')$, prouvons encore $(*)$ (page 331). En fait, on utilisera seulement qu'on a

`[page 334]`

l'isomorphisme $\square$, avec $I$ grande devant $\pi$, et qu'on a l'équivalence $(**')$, sans avoir à utiliser que $I$ est ordonnée. Donc la démonstration vaut aussi dans le cas c).

Prouvons $\Longrightarrow$ dans $(*)$, i.e. supposons $x \in \mathrm{Ob}\,\underline{S}$, prouvons que $x$ est dans l'image essentielle de $\mathrm{Ind}_\pi(\underline{S}(\pi))$. En vertu de $(**')$, $I_{\underline{S}}$ est cofinale dans $I$, et comme $I_{\underline{S}} \longrightarrow I$ est une

[142] **N.B.** Ça existe, grâce à 4.13.14.

inclusion pleinement fidèle, il s'ensuit que $I_{\underline{S}}$ est également grande devant $\pi$, d'autre part on aura par cofinalité

$$x \;=\; \varinjlim_{i \in I_{\underline{S}}} x_i \ ,$$

où cette fois les $x_i$ sont dans $\underline{S}(\pi) = \underline{S} \cap \mathcal{M}_\pi$, d'où résulte que $x$ est dans l'image essentielle de $\mathrm{Ind}_\pi(\underline{S}(\pi))$.

Prouvons $\Longleftarrow$ dans $(*)$, i.e. supposons que l'on ait

$$x \;=\; \varinjlim_{j \in J} x_j \ , \qquad \text{les } x_j \text{ dans } \underline{S}(\pi),\ J \text{ grande devant } \pi \ .$$

`[page 335]`

En invoquant à nouveau 4.4.2, on trouve que $J \longrightarrow \mathcal{M}_\pi/x$ est cofinal, et comme ce foncteur se factorise par le foncteur d'inclusion pleinement fidèle $\underline{S}(\pi)/x \hookrightarrow \mathcal{M}_\pi/x$, il s'ensuit comme tantôt que ce dernier est cofinal. Nous allons admettre pour un moment que ceci implique que l'image inverse $I_{\underline{S}}$ de cette sous-catégorie strictement pleine, par le foncteur également cofinal $I \longrightarrow \mathcal{M}_\pi/x$, est cofinal dans $I$. Ceci étant, l'équivalence $(**')$ (p. 333) implique $x \in \mathrm{Ob}\,\underline{S}$, ce qu'on voulait.

Donc il reste à prouver que si

$$J' \;=\; \underline{S}(\pi)/x \hookrightarrow \mathcal{M}_\pi/x \;=\; J$$

est cofinal, alors $I' = I_{\underline{S}} \longrightarrow I$ l'est aussi. Il semble qu'il faille bel et bien à nouveau invoquer les conditions de stabilité $\mathrm{L}(\pi_0, \pi)$ faites dans d$'$) `[plutôt c')]` ce qui n'avait pas été nécessaire pour le cas c) et

`[page 336]`

le lemme-clef (un peu) vache 4.13.17, où on prendra (comme dans la démonstration écrite avant l'énoncé de cet lemme) $\alpha = \alpha_\pi \overset{\text{déf}}{=}$ plus petit ordinal $\alpha$ tel que $\mathrm{card}\,\alpha = \pi$. Donc $I_\alpha$ est de cardinal $\pi$, et grande devant tout cardinal $\pi' < \pi$, et en particulier devant $\pi'_0$. L'hypothèse 2°) de 4.13.17 est vérifiée pour $I$, par définition d'un système inductif $\pi_0$-$\pi$-adapté, et pour $J'$, grâce à l'hypothèse $\mathrm{L}(\pi_0, \pi)$ sur $\underline{S}(\pi)$. De même, l'hypothèse 3°) ($I$ grande devant tout cardinal $< \pi$) est satisfaite par définition des systèmes $\pi_0$-$\pi$-adaptés – $I$ est même grande devant $\pi$. L'hypothèse 1°) a déjà été vue.

On a donc prouvé (par voie circulaire)

$$\begin{tikzcd} & & & \mathrm{c}' \\ \mathrm{a} \arrow[r, Rightarrow] & \mathrm{a}' \arrow[r, Leftrightarrow] & \mathrm{c} \arrow[ur, Leftrightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \\ & & & \mathrm{b} \end{tikzcd} ,$$

`[et aussi b` $\Longrightarrow$ `c,]` en ayant à invoquer le lemme-clef vache pour les *deux* implications

$$\mathrm{a}' \Longrightarrow \mathrm{c} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{c}' \Longrightarrow \mathrm{a}'$$

(donc pour deux implications *en sens inverses*, chose étrange ...).

[page 337]

Il reste seulement encore à prouver l'implication

$$\mathrm{a}' \qquad \Longrightarrow \qquad \mathrm{a}\ ,$$

ce qui est essentiellement sorital.

Cela achève la démonstration du critère d'accessibilité 4.13.15 d'une sous-catégorie pleine $\underline{S}$ de $\mathcal{M}$.

On va donner une variante un peu décantée de 4.13.15, qui (avec des hypothèses un peu plus faibles) capte l'essentiel de sa substance. L'énoncé 4.13.15 en est une conséquence quasi immédiate :

[page 338]

**Corollaire 4.13.18** (de 4.13.15). *Soient $\mathcal{M}$ une catégorie accessible, $\pi$ un cardinal utile pour $\mathcal{M}$, $\alpha_0$ un* ordinal limite *tel que l'on ait* $\operatorname{card}\alpha_0 \leqslant \pi$. *Soit $I_{\alpha_0} = \{\alpha \mid \alpha < \alpha_0\}$, et supposons que $\mathcal{M}$ soit stable par $\varinjlim$ de type $I_{\alpha_0}$.*

*Soit alors $\underline{S}$ une sous-catégorie strictement pleine de $\mathcal{M}$, $\underline{S}(\pi) = \underline{S} \cap \mathcal{M}_\pi$. Désignons par $L(\alpha_0)$ la condition : $\underline{S}(\pi)$ est stable dans $\mathcal{M}_\pi$ (ou ce qui revient au même, dans $\mathcal{M}$) par $\varinjlim$ de type $I_{\alpha_0}$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes.*

*a) $\underline{S}$ est $\pi$-accessible dans $\mathcal{M}$, et est stable dans $\mathcal{M}$ par $\varinjlim$ de type $I_{\alpha_0}$.*

*a') $\underline{S}$ est $\pi$-accessible et $\underline{S}(\pi)$ satisfait $L(\alpha_0)$.*

*b) $\underline{S}(\pi)$ satisfait $L(\alpha_0)$, et pour tout $x \in \operatorname{Ob}\mathcal{M}$, on a ceci : $x \in \operatorname{Ob}\underline{S}$ si et seulement si la sous-catégorie strictement pleine $\underline{S}(\pi)/x$ de $\mathcal{M}(\pi)/x$ est cofinale dans $\mathcal{M}(\pi)/x$* `[lire` $\mathcal{M}_\pi/x$`]`.

*c) $\underline{S}(\pi)$ satisfait $L(\alpha_0)$, de plus pour tout $x \in \operatorname{Ob}\mathcal{M}$, et toute représentation*

$$x \ \simeq\ \varinjlim_{i\in I} x_i$$

[page 339]

*qui est "$\alpha_0$-$\pi$-adaptée", i.e. telle que*

*1°) $I$ équivalente à une petite catégorie, et grande devant $\pi$,*

*2°) les $\varinjlim$ de type $I_{\alpha_0}$ existent dans $I$,*

*3°) le foncteur $I \longrightarrow \mathcal{M}$, $i \longmapsto x_i$, commute aux $\varinjlim$ de type $I_{\alpha_0}$, et enfin*

*4°) les $x_i \in \operatorname{Ob}\mathcal{M}_\pi$*

*(comparer 4.13.11), on a ceci (où on désigne par $I_{\underline{S}}$ la sous-catégorie strictement pleine de $I$ formée des $i$ tels que $x_i \in \operatorname{Ob}\underline{S}$) : on a $x \in \operatorname{Ob}\underline{S}$ si et seulement si $I_{\underline{S}}$ est cofinale dans $I$.*

*c') (*Si *$I_{\alpha_0}$ est grande devant $\pi_0$, et $\pi^{\pi_0} = \pi$, pour pouvoir invoquer 4.13.14, cf. p. 335.) Comme c), mais en supposant $I$ ordonnée.*

([143]).

Démonstration. Elle se fait suivant le même diagramme logique que celle de 4.13.15,

---

[143]**N.B.** Si on ne suppose par $I_{\alpha_0}$ grande devant $\pi_0$ et $\pi^{\pi_0} = \pi$, alors toutes les conditions de a) à c) (a, a′, b, c) sont équivalentes et *impliquent* c, mais ne lui sont peut-être pas équivalentes.

ici, il faut supposer $I_{\alpha_0}$ grande devant $\pi_0$ et $\pi^{\pi_0} = \pi$.

$$\begin{tikzcd}[arrows=Rightarrow]
 & & & \mathrm{c}' \arrow[dr, "!"] & & \\
\mathrm{a} \arrow[r] & \mathrm{a}' \arrow[r, "!"] & \mathrm{c} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \mathrm{a}' \arrow[r] & \mathrm{a} \; , \\
 & & & \mathrm{b} \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

où on a marqué du signe ! les deux implications qui sont “vaches”, en ce sens qu'elles font appel au lemme-clef 4.13.17 (pages 329-330), qui se prouve par une construction transfinie un peu vissée. La démonstration des sept implications du diagramme est essentiellement celle donné dans les pages précédentes 311-337,

[page 340]

à l'exception de $\mathrm{a}' \Longrightarrow \mathrm{a}$, qui est un peu plus simple dans le cas actuel. On va la dégager sous forme de lemme un peu plus général. (**N.B.** La démonstration de $\mathrm{a}' \Longrightarrow \mathrm{a}$ dans 4.13.15 avait été omise comme “soritale” !, cf. page 337 ...)

**Lemme 4.13.19.** *Soient $\mathcal{M}$ une catégorie accessible dans $\mathcal{M}$, $\pi$ un cardinal utile pour $\mathcal{M}$ et tel que $\underline{S}$ soit $\pi$-accessible, i.e. $\underline{S}$ est l'image essentielle de $\mathrm{Ind}_\pi(\underline{S}(\pi))$ par le foncteur pleinement fidèle canonique $\mathrm{Ind}_\pi(\underline{S}(\pi)) \longrightarrow \mathcal{M}$, où $\underline{S}(\pi) = \underline{S} \cap \mathcal{M}_\pi$. On suppose qu'il existe un ordinal limite $\alpha$, tel que $\mathrm{card}\,\alpha \leqslant \pi$ et tel que $\mathcal{M}_\pi$ et $\underline{S}(\pi)$ $(= \underline{S}_\pi)$ soient stables par $\varinjlim$ de type $I_\alpha$ soient stables par $\varinjlim$ de type $I_\alpha$, et que le foncteur d'inclusion $\underline{S}(\pi) \longrightarrow \mathcal{M}_\pi$ y commute. Soit $\Phi$ un ensemble de catégories telles que $\forall\ I \in \Phi$, on ait $\mathrm{card\,réd}\, I \leqslant \pi$, et supposons que $\mathcal{M}_\pi$ soit stable par $\varinjlim$ de type $\Phi$, et que $\underline{S}(\pi)$ soit stable dans $\mathcal{M}_\pi$ par lesdites limites (ou ce qui revient au même, qu'il soit stable en lui-même par ces $\varinjlim$, et que le foncteur d'inclusion y commute). Alors $\mathcal{M}$ et $\underline{S}$ sont stables par $\varinjlim$ de type $\Phi$, et le foncteur d'inclusion $\underline{S} \longrightarrow \mathcal{M}$ y commute, i.e. $\mathcal{M}$ est stable par ces limites, et $\underline{S}$ stable dans $\mathcal{M}$ par ces mêmes limites.*

[page 341]

Démonstration. On applique 4.11.1 (p. 267-268) séparément à $\mathcal{M} \simeq \mathrm{Ind}_\pi \mathcal{M}_\pi$ et à $\underline{S} \simeq \mathrm{Ind}_\pi \underline{S}(\pi)$, pour conclure que $\mathcal{M}$ et $\underline{S}$ sont stables séparément par $\varinjlim$ de type $\Phi$. Il reste à voir que le foncteur $\underline{S} \longrightarrow \mathcal{M}$ y commute. Cela se voit comme dans la démonstration de 4.11.1, on obtient plus généralement ceci :

**Lemme 4.13.20** (cor. à 4.11.1). *Soient $f_0 : C \longrightarrow C'$ un foncteur entre catégories équivalentes à des petites catégories, $\pi$ un cardinal infini, $f : \mathcal{M} \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{Ind}_\pi C \longrightarrow \mathcal{M}' \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{Ind}_\pi C'$ l'extension canonique $\mathrm{Ind}_\pi(f_0)$ de $f_0$. Soient $\Phi$ et $\alpha$ comme dans 4.11.1, et supposons que $I_\alpha \in \Phi$ et que $f_0$ commute aux $\varinjlim$ de type $\Phi$. Alors $f$ commute à ces mêmes limites inductives.* ([144]).

**Corollaire 4.13.21.** *Sous les conditions de 4.13.20, supposons que $\Phi$ contienne les catégories de cardinal $\leqslant \pi$ (resp. les catégories filtrantes de cardinal $\leqslant \pi$, resp. les catégories filtrantes grandes devant $\pi_0$ de cardinal $\leqslant \pi$, resp. les catégories discrètes de cardinal $\leqslant \pi$). Alors $f$ commute aux petites $\varinjlim$ (resp. aux petites $\varinjlim$ filtrantes, resp. aux petites $\varinjlim$ filtrantes grandes devant $\pi_0$, resp. aux petites sommes). (Réciproque claire et “laissée au lecteur”.)*

Se voit comme 4.4.14 et 4.4.14.1 (p. 97, 98).

[144] Il vaut mieux prendre des foncteurs $f_0 : C \longrightarrow \mathcal{N}$, et $\mathcal{N}$ [?] que $f_0$ commute aux $\varinjlim$ de type $\Phi$, donc il en est de même de son extension $\mathrm{Ind}_\pi(C,\mathcal{N}) \longrightarrow \mathcal{N}$. (**N.B.** On suppose que $\mathcal{N}$ satisfait $\mathrm{L}_\pi$.)

`[page 342]`

Voici enfin, il me semble, la forme définitive ( ?) de 4.13.15, 4.13.18.

**Théorème 4.13.22** ([145]). *Soient $\mathcal{M}$ une catégorie accessible, $\pi$ un cardinal infini, utile pour $\mathcal{M}$, et $\Phi$ un ensemble de catégories satisfaisant les deux conditions :*

*1°) $J \in \Phi$ implique* $\operatorname{card\,réd} J \leqslant \pi$.

*2°) Il existe un* ordinal limite $\alpha_0$ *avec* $I_{\alpha_0} \in \Phi$.

*On suppose $\mathcal{M}$ stable par $\varinjlim$ de type $\Phi$. Soient $\underline{S}$ une sous-catégorie* strictement pleine *de $\mathcal{M}$, et $\underline{S}(\pi) = \underline{S} \cap \mathcal{M}_\pi$. Désignons par $L(\varphi)$ la condition sur $\underline{S}(\pi)$ : $\underline{S}(\pi)$ est stable dans $\mathcal{M}$ (où ce qui revient au même, dans $\mathcal{M}_\pi$) par $\varinjlim$ de type $\Phi$. Ceci posé, les conditions suivantes sur $\underline{S}$ sont équivalentes :*

a) *$\underline{S}$ est $\pi$-accessible dans $\mathcal{M}$, et stable dans $\mathcal{M}$ par $\varinjlim$ de type $\Phi$.*

a′) *$\underline{S}$ est $\pi$-accessible dans $\mathcal{M}$, et $\underline{S}(\pi)$ satisfait à $L(\Phi)$.*

`[page 343]`

b) *$\underline{S}(\pi)$ satisfait à $L(\Phi)$, et pour tout $x \in \operatorname{Ob} \mathcal{M}$, on a ceci : $x \in \operatorname{Ob} \underline{S}$ si et seulement si la sous-catégorie strictement pleine $\underline{S}(\pi)/x$ de $\mathcal{M}(\pi)/x$ est cofinale dans $\mathcal{M}(\pi)/x$* `[lire` $\mathcal{M}_\pi/x$`]`.

c) *$\underline{S}(\pi)$ satisfait à $L(\Phi)$, et pour tout $x \in \operatorname{Ob} \mathcal{M}$ et toute représentation $x \simeq \varinjlim_{i \in I} x_i$ qui est $\Phi$-$\pi$-adaptée (cf. définition plus bas), on a ceci : $x \in \operatorname{Ob} \underline{S}$ si et seulement si $I_{\underline{S}}$ est cofinale dans $I$, où $I_{\underline{S}}$ est la sous-catégorie strictement pleine de $I$ formée des $i \in \operatorname{Ob} I$ tels que $x_i \in \operatorname{Ob} \underline{S}$ (ou encore, $x_i \in \operatorname{Ob} \underline{S}(\pi)$).* **N.B.** *On dit qu'un système inductif $(x_i)_{i \in I}$ dans $\mathcal{M}$ est $\Phi$-$\pi$-adapté si*

*1) $I$ équivalente à une petite catégorie, et $I$ grande devant $\pi$,*

*2) les $\varinjlim$ de type $\Phi$ existent dans $I$,*

*3) le foncteur $i \longmapsto x_i$ de $I$ dans $\mathcal{M}$ commute aux $\varinjlim$ de type $\Phi$, et enfin*

*4) les $x_i \in \operatorname{Ob} \mathcal{M}_\pi$.*

c′) *(Si $\pi^{\pi_0} = \pi$, où $\pi_0$ est un cardinal $\leqslant \pi$ utile pour $\mathcal{M}$, et si $J \in \Phi$ implique que $J$ est grande devant $\pi_0$.) Comme c), avec $I$* ordonnée.

([146],[147]).

**Définition 4.13.23** ([148]). Soient $\mathcal{M}$ une catégorie accessible, $\pi$ un cardinal, $\Phi$ un ensemble de catégories, satisfaisant les deux conditions :

a) $J \in \Phi \Longrightarrow \operatorname{card\,réd} J \leqslant \pi$.

b) Il existe un ordinal limite $\alpha_0$, tel que $I_{\alpha_0} \in \Phi$ ([149]).

`[page 344]`

Soit $S$ une partie de $\operatorname{Ob} \mathcal{M}$, $\underline{S}$ la sous-catégorie pleine qu'elle définit. On dit que $S$ est une *partie $\Phi$-$\pi$-accessible de* $\operatorname{Ob} \mathcal{M}$, ou que $\underline{S}$ est une *sous-catégorie $\Phi$-$\pi$-accessible dans $\mathcal{M}$,* si les conditions suivantes sont satisfaites.

[145] cf. variante 4.13.36, page 358.

[146] **N.B.** Quand les conditions restrictives ci-contre `[parenthèse dans c′)]` ne sont pas satisfaites, alors a, a′, b, c sont encore équivalentes, et impliquent c′, mais ne sont peut-être pas équivalentes à c′).

[147] **N.B.** Il faudrait réénoncer les conditions annexes [ ?] (Si ...), cf. p. 359-360.

[148] **N.B.** Il y aurait intérêt à remonter cette définition (*sans* b), dès avant 4.13.15.

[149] Si c'est pour poser une définition, on peut se passer de la condition b).

1°) $\pi$ est utile pour $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}$ est stable par $\varinjlim$ de type $\Phi$ ([150]).

2°) $\underline{S}$ est une sous-catégorie $\pi$-accessible dans $\mathcal{M}$.

3°) $\underline{S}$ est stable dans $\mathcal{M}$ par $\varinjlim$ de type $\Phi$.

([151]).

**N.B.** Quand la condition préliminaire 1°) *sur* $\mathcal{M}$ est satisfaite, la validité des conditions 2°) 3°) équivaut donc à la condition que $\underline{S}$ soit *strictement* pleine dans $\mathcal{M}$, et que de plus $\underline{S}$ satisfasse la condition a) du théorème 4.13.22. D'autre part, cette condition est équivalente à chacune des conditions a$'$, b, c de ce même théorème, et aussi à la dernière condition c$'$, sous réserve qu'on ait $\pi^{\pi_0} = \pi$ (pour un cardinal $\pi_0 < \pi$ utile pour $\mathcal{M}$) et que $J \in \Phi$ implique que $J$ est grande devant $\pi_0$.

Conceptuellement, c'est la définition donnée dans 4.13.23, i.e. la condition a de 4.13.22, qui paraît la plus claire, ou sa variante immédiate a$'$. Mais du point de vue pratique, du travail avec les parties accessibles, c'est par propriété c qui paraît la plus commode. Le poids principal du théorème 4.13.22 est bien

`[page 345]`

l'implication a $\Longrightarrow$ c (via a $\Longrightarrow$ a$'$ $\overset{!}{\Longrightarrow}$ c). Donc il faut surtout voir ce théorème comme donnant un critère remarquable d'appartenance à $\mathrm{Ob}\,\underline{S}$ d'un objet $x$ de $\mathcal{M}$ qui est présenté par un système inductif $\Phi$-$\pi$-adapté :

$$(*) \qquad x \in \mathrm{Ob}\,\underline{S} \quad \Longleftrightarrow \quad I_{\underline{S}} \text{ cofinal },$$

et dans cette équivalence, c'est l'implication $\Longrightarrow$ qui est la partie non soritale, et remarquable.

**Proposition 4.13.24.** *Soient $\mathcal{M}$, $\pi$, $\Phi$ comme dans 4.13.23* ([152]), *on suppose que la condition 1° de 4.13.23 est satisfaite ($\pi$ utile pour $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}$ stable par $\varinjlim$ de type $\Phi$). Soit $\Sigma'^{\Phi}_{\pi}$ l'ensemble des sous-catégories $\underline{S}$ de $\mathcal{M}$ qui sont $\Phi$-$\pi$-accessibles dans $\mathcal{M}$, et $\Sigma^{\Phi}_{\pi}$ l'ensemble des sous-catégories $\underline{S}(\pi)$ de $\mathcal{M}_\pi$ qui sont strictement pleines, et stables dans $\mathcal{M}_\pi$ par $\varinjlim$ de type $\Phi$. (Ces sous-catégories sont forcément karoubiennes, car stables par $\varinjlim$ de type $I_{\alpha_0}$, donc aussi par facteurs directs.) Alors les bijections (4.13.4.1) (page 288) induisent des bijections inverses l'une à l'autre*

$$\Sigma^{\Phi}_{\pi} \rightleftarrows \Sigma'^{\Phi}_{\pi} \ .$$

`[page 346]`

**Proposition 4.13.25.** *Soient $\mathcal{M}$, $\pi$, $\Phi$ comme dans 4.13.23, avec $I_{\alpha_\pi} \in \Phi$ ($\alpha_\pi$ étant le plus petit ordinal de cardinal $\Phi$* `[plutôt π]`*). Alors l'ensemble $\Sigma'^{\Phi}_{\pi}$ des sous-catégories de $\mathcal{M}$ $\Phi$-$\pi$-accessibles dans $\mathcal{M}$ est stable par intersection de familles de cardinal $\leqslant \pi$* ([153]).

(**N.B.** La bijection $\Sigma^{\Phi}_{\pi} \xrightarrow{\sim} \Sigma'^{\Phi}_{\pi}$ de 4.13.24 respecte les relations d'ordre naturelles d'inclusion, donc transforme intersections en intersections.)

[150] Condition préliminaire sur $\mathcal{M}$.

[151] **N.B.** Quand $\Phi = \{I_{\alpha_0}\}$, on dit aussi que $\underline{S}$ est $\alpha_0$-$\pi$-accessible dans $\mathcal{M}$. Si $\Phi$ est formé des catégories de cardinal $\leqslant \pi$ et grandes devant $\pi_0$, on dit que $\underline{S}$ est $\pi_0$-$\pi$-accessible dans $\mathcal{M}$.

[152] **N.B.** La condition $I_{\alpha_0} \in \Phi$ n'est pas utile.

[153] Si $\pi$ n'est pas cardinal limite. Sinon, il faut dire : familles de cardinal $< \pi$. Cf. 4.13.10.3, où je donne un énoncé rectifié légèrement plus général.

Se voit comme 4.13.7 (qui est contenu dans l'énoncé actuel), en utilisant le lemme 4.13.10.

**4.13.26.** Soient $\mathcal{M}$, $\pi$, $\Phi$ comme dans 4.13.23, et soit $\underline{S}$ une sous-catégorie *strictement pleine* de $\mathcal{M}$, $f : \underline{S} \longrightarrow \mathcal{M}$ le foncteur d'inclusion. La condition que $\underline{S}$ soit $\Phi$-$\pi$-accessible dans $\mathcal{M}$ se décompose en :

1) $\pi$ est utile pour $\mathcal{M}$ *et* pour $\underline{S}$.
2) $\mathcal{M}$ et $\underline{S}$ sont stables par $\varinjlim$ de type $\Phi$.
3) $f$ commute auxdites limites.
4) $f$ est $\pi$-accessible.
5) $f(\underline{S}_\pi) \subset \mathcal{M}_\pi$.

`[page 347]`

Soit alors $\pi' > \pi$ un autre cardinal, quand peut-on assurer que si $\underline{S}$ est $\Phi$-$\pi$-accessible dans $\mathcal{M}$, il soit aussi $\Phi$-$\pi'$-accessible ? Les conditions 2) 3) 4) sont visiblement stables par passage de $\pi$ à $\pi'$. Restent les conditions 1) et 5). On sait que si $\pi'^{\pi} = \pi'$, alors la condition 1) reste valable pour $\pi'$. Plus généralement, si $\pi_0$ est un cardinal $\leqslant \pi$ tel que $\pi_0$ soit utile pour $\mathcal{M}$ et pour $\underline{S}$, alors si $\pi' > \pi_0$ est tel que $\pi'^{\pi_0} = \pi'$, alors $\pi'$ est aussi utile pour $\mathcal{M}$ et pour $\underline{S}$. Si on admet l'HCG (hypothèse du continu généralisée), il en est ainsi pour tout $\pi' > \pi_0$, donc pour tout $\pi' > \pi$.

Reste la condition 5), pour laquelle une réponse est donnée par 4.12.1 (p. 273). Si $\pi_0 \leqslant \pi$ est choisi de façon que $f$ soit $\pi_0$-accessible (p.ex. $\pi_0 = \pi$), et si

$$\begin{aligned} \pi'_1 &= \operatorname{card\,réd} \underline{S}_{\pi_0} \qquad ( \leqslant \operatorname{card\,réd} \underline{S}(\pi) ) \\ \pi''_1 &= \sup(\pi'_1, \pi) , \end{aligned}$$

on voit que si $\pi' \geqslant \pi''_1$ (i.e. $\pi' \geqslant \pi'_1, \pi$) est tel que $\pi'^{\pi_0} = \pi'$, alors on a bien

$$f(\underline{S}_{\pi'}) \subset \mathcal{M}_{\pi'} .$$

`[page 348]`

Si donc de plus $\pi' > \pi \geqslant \pi_0$ (comme supposé au début), et si on suppose l'HCG, alors la condition $\pi'^{\pi_0} = \pi'$ est automatique, et il reste la seule condition $\pi' \geqslant \pi''_1$, i.e. en définitive $\pi' \geqslant \operatorname{card\,réd} \underline{S}_{\pi_0}$. Pour résumer :

**Proposition 4.13.27.** *Sous les conditions de 4.13.23 (sans condition b) sur $\Phi$), soit $\underline{S}$ une sous-catégorie de $\mathcal{M}$ qui est $\Phi$-$\pi$-adaptée. Soit $\pi_0 \leqslant \pi$ un cardinal qui est utile pour $\underline{S}$ et pour $\mathcal{M}$, et tel que $f : \underline{S} \longrightarrow \mathcal{M}$ soit $\pi_0$-accessible, i.e. tel que $\underline{S}$ soit stable dans $\mathcal{M}$ par $\varinjlim$ grandes devant $\pi_0$ (on peut p.ex. prendre $\pi_0 = \pi$). Alors pour tout cardinal $\pi' > \pi$ tel que*

*a)* $\pi'^{\pi_0} = \pi'$ *et*

*b)* $\pi' \geqslant \operatorname{card\,réd} \underline{S}_{\pi_0}$,

*$\underline{S}$ est $\Phi$-$\pi'$-accessible dans $\mathcal{M}$. Donc si $\pi' > \pi$ est tel que $\pi'^{\pi} = \pi'$, $\pi' > \operatorname{card\,réd} \underline{S}_\pi$, alors $\underline{S}$ est $\Phi$-$\pi'$-accessible. (Il suffit p.ex. de prendre $\pi' = 2^c$, avec $c \geqslant \sup(\pi, \operatorname{card\,réd} \underline{S}(\pi))$.) Si on admet l'HCG, il suffit donc qu'on ait $\pi' > \sup(\pi, \operatorname{card\,réd} \underline{S}(\pi))$.*

[page 349]

**Proposition 4.13.28** ([154]). *Soient $\mathcal{M}$, $\pi$, $\Phi$ comme dans 4.13.23. Supposons de plus que $J \in \Phi$ implique que $J$ est* filtrante. *Alors l'ensemble $\tilde{\Sigma}^{\Phi}_{\pi}$ des sous-ensembles $\Phi$-$\pi$-accessibles de $\mathcal{M}$ est stable par réunions finies. Plus généralement, soit $\lambda$ un cardinal $< \pi$ tel que $\forall\ J \in \Phi$, $J$ soit grande devant $\lambda$. Alors l'ensemble $\tilde{\Sigma}^{\Phi}_{\pi}$ est stable par réunions $(S_r)_{r\in A}$, indexées par des ensembles $A$ de cardinal $\leqslant \lambda$.*

**Corollaire 4.13.29.** *L'ensemble des parties accessibles de $\mathrm{Ob}\,\mathcal{M}$ est stable par "petites" réunions – i.e. si $(S_r)_{r\in A}$ est une petite famille de parties accessibles de $\mathrm{Ob}\,\mathcal{M}$, alors $\bigcup_{r\in A} S_r$ est aussi accessible.*

La démonstration de 4.13.28 repose sur le lemme suivant (je n'explicite par la démonstration) :

[page 350]

**Lemme 4.13.30.** *Soit $I$ une catégorie grande devant $\pi$, et $(J_r)_{r\in A}$ une famille des sous-catégories pleines telles que $\mathrm{card}\,A \leqslant \pi$, telle que $\bigcup_{r\in A} \mathrm{Ob}\,J_r$ soit cofinal dans $\mathrm{Ord}(I)$, i.e. pour tout $i \in \mathrm{Ob}\,I$ $\exists\ j \in \bigcup_{r\in A} \mathrm{Ob}\,J_r$, et une flèche $i \longrightarrow j$. Alors il existe $r \in A$ tel que $J_r$ soit cofinal dans $I$.*

**Théorème 4.13.31.** *Soient $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ des catégories accessibles, $f : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$ un foncteur accessible, $T \subset \mathrm{Ob}\mathcal{N}$ une partie de $\mathcal{N}$, $\underline{T} \subset \mathcal{N}$ la sous-catégorie strictement pleine correspondante de $\mathcal{N}$, $S = f^{-1}(T)$, $\underline{S} = f^{-1}(\underline{T})$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{M}$ associée. Si $T$ est accessible, alors $S$ est accessible ; en d'autres termes, si $\underline{T}$ est accessible dans $\mathcal{N}$, $\underline{S}$ est accessible dans $\mathcal{M}$.*

Cela résulte de l'énoncé plus précis :

**Corollaire 4.13.32.** *Soient $\pi_0$ et $\pi > \pi_0$ des cardinaux ayant les propriétés suivantes :*

[page 351]

- *a) $\underline{T}$ est $\pi_0$-$\pi$-accessible dans $\mathcal{N}$ (4.13.23).*
- *b) $\pi_0$ est utile pour $\mathcal{M}$ (il l'est pour $\mathcal{N}$, à cause de a)).*
- *c) $f(\mathcal{M}_\pi) \subset \mathcal{N}_\pi$.*
- *d) $\mathcal{M}$ satisfait à $L_{\pi_0}$, et $f$ est $\pi_0$-accessible.*

*(L'existence d'un tel couple $(\pi_0, \pi)$ résulte aussitôt de 4.13.16 et de 4.12.1.) Alors $\underline{S}$ est $\pi_0$-$\pi$-accessible dans $\mathcal{N}$.*

Comme $f$ commute aux $\varinjlim$ grandes devant $\pi_0$ en vertu de d), et que $\underline{T}$ est stable par ces limites par a) (cf. 4.13.23, 3°), il en est donc de même de $\underline{S}$, i.e. le 3° de la définition 4.13.23 est satisfait. D'autre part, la condition 1° ($\pi$ utile pour $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}$ stable par $\varinjlim$ grandes devant $\pi_0$ et de cardinal $\leqslant \pi$) est vérifiée par b) et d). Donc il reste à vérifier la condition 2°, i.e. que $\underline{S}$ est $\pi$-accessible. Posons

$$\begin{aligned} \underline{T}(\pi) &= \underline{T} \cap \mathcal{N}_\pi \\ \underline{S}(\pi) &= \underline{S} \cap \mathcal{M}_\pi \underbrace{\subset}_{\text{grâce à c)}} f^{-1}(\underline{T}(\pi)) \,. \end{aligned}$$

[154] À rejeter plus bas, après 4.13.31, qui est la première application importante de 4.13.22, alors que 4.13.28 se prouve sans avoir à utiliser 4.13.22 ou ses variantes.

Comme $\underline{S}$ est stable dans $\mathcal{M}$ par $\varinjlim$ grandes devant $\pi_0$ (lesquelles existent dans $\mathcal{M}$ par d), et a fortiori par $\varinjlim$ grandes devant $\pi$, on a un foncteur canonique pleinement fidèle

$$\mathrm{Ind}_\pi \underline{S}(\pi) \longrightarrow \underline{S} \ .$$

[page 352]

D'ailleurs, $\underline{T}$ étant strictement pleine dans $\mathcal{N}$, $\underline{S}$ est strictement pleine dans $\mathcal{M}$, et il reste à vérifier que le foncteur précédent est essentiellement surjectif. Soit donc $x \in \mathrm{Ob}\,\underline{S}$. On aura, grâce à b),

$$x \ = \ \varinjlim_I x_i \ , \qquad x_i \in \mathcal{M}_\pi, \ I = \mathcal{M}_\pi/x \ .$$

D'ailleurs, le système inductif précédent est $\pi_0$-$\pi$-adapté, i.e. (p. 339) :

1) $I$ équivalente à une petite catégorie, $I$ grande devant $\pi$ (résulte du fait que $\pi$ est utile pour $\mathcal{M}$, cf. b ).
2) Les limites inductives grandes devant $\pi_0$ est de cardinal $\leqslant \pi$ existent dans $I$ (résulte de $\mathrm{L}_{\pi_0}$ sur $\mathcal{M}$ (cf. d )).
3) Le foncteur $\xi : I \longrightarrow \mathcal{M}$ y commute.
4) Les $x_i$ sont dans $\mathcal{M}_\pi$.

Comme $f$ commute aux $\varinjlim$ grandes devant $\pi_0$ (cf. 1 ), a fortiori à celles grandes devant $\pi$, on a donc

$$f(x) \ \simeq \ \varinjlim_I f(x_i) \ ,$$

je dis que le système inductif $(f(x_i))_{i \in I}$ dans $\mathcal{N}$ est $\pi_0$-$\pi$-adapté. Les conditions 1), 2) sont *ne varietur* (ne concernent que $I$), le foncteur $I \longrightarrow \mathcal{N}$ est le composé $I \xrightarrow{\xi} \mathcal{M} \xrightarrow{f} \mathcal{N}$, donc commute aux $\varinjlim$ grandes devant $\pi_0$ et de cardinal $\leqslant \pi$ ([155]), puisqu'il en est ainsi de $\xi$ et de $f$, enfin les $f(x_i)$ sont dans $\mathcal{N}_\pi$ puisque par c $f(\mathcal{M}_\pi) \subset \mathcal{N}_\pi$.

[page 353]

Par ailleurs $f(x) \in \mathrm{Ob}\,\underline{T}$ (puisque $x \in \mathrm{Ob}\,\underline{S}$, où $\underline{S} \overset{\text{déf}}{=} f^{-1}(\underline{T})$). Donc on peut appliquer 4.13.22 a $\Longrightarrow$ c à la situation $(\mathcal{N}, \pi_0, \pi, \underline{S})$ et au système inductif $(f(x_i))_{i \in I}$, pour conclure que la sous-catégorie $I'$ de $I$ formée des $i$ tels que $f(x_i) \in \mathrm{Ob}\,\underline{S}$ `[plutôt` $\mathrm{Ob}\,\underline{T}$`]`, i.e. tels que $x_i \in \underline{S}$, donc $x_i \in \underline{S}(\pi)$, est *cofinale* dans $I$. Donc on a

$$x \ \simeq \ \varinjlim_{i \in I'} x_i \ ,$$

avec cette fois les $x_i$ dans $\underline{S}(\pi)$, et $I'$ grande devant $\pi$ (car cofinale et pleine dans $I$, qui est grande devant $\pi$), ce qui prouve que $x$ est dans l'image essentielle de $\mathrm{Ind}_\pi(\underline{S}(\pi))$, q.e.d.

**Question 4.13.33.** On vient de voir que si $f : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$ est un foncteur accessible entre catégories accessibles, alors l'image inverse d'une partie accessible de $\mathrm{Ob}\,\mathcal{N}$ est une partie accessible de $\mathrm{Ob}\,\mathcal{M}$. Je conjecture que l'énoncé similaire, non pas pour les images directes, mais pour les *images essentielles,* est

[155] cette commutation devrait avoir un nom, condition $\mathrm{L}(\pi_0, \pi)$ sur un foncteur.

[page 354]

vraie, i.e. que pour toute sous-catégorie $\underline{S}$ de $\mathcal{M}$ accessible dans $\mathcal{M}$, son image essentielle dans $\mathcal{N}$ est accessible dans $\mathcal{N}$ ([156]). Dans cette question, on peut supposer que $\underline{S} = \mathcal{M}$, et la question revient à celle-ci : tout foncteur accessible $f : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$ entre catégories accessibles se factorise-t-il en un foncteur (accessible) *essentiellement surjectif,* et un foncteur accessible pleinement fidèle $\mathcal{M} \longrightarrow \underline{T} \longrightarrow \mathcal{N}$ (où $\underline{T}$ est elle-même accessible) ([157]) ? Si oui, cela me paraîtrait peut-être le résultat le plus profond (peut-être le seul véritablement profond) en théorie des catégories.

Voici une question qui me paraît très voisine. Soient $\mathcal{M}$ une catégorie accessible, $A$ une sous-catégories pleine petite. Supposons que $\mathcal{M}$ satisfasse à $\mathrm{L}_{\pi_0}$ (p.ex. $\pi_0$ utile pour $\mathcal{M}$), et soit $\underline{S}$ la plus petite sous-catégorie strictement pleine de $\mathcal{M}$ contenant $A$, et stable par limites grandes devant $\pi_0$. Je conjecture que $\underline{S}$ est accessible dans $\mathcal{M}$.

[page 355]

De même, si $\Phi$ est un petit ensemble de petites catégories, tel que $\mathcal{M}$ soit stable par $\varinjlim$ de type $\Phi$, on peut prendre l'enveloppe $\underline{S}$ de $A$ pour les $\varinjlim$ grandes devant $\pi_0$ *et* les $\varinjlim$ de type $\Phi$, et je conjecture encore que $\underline{S}$ est accessible. Dans cette direction, on a du moins le résultat très partiel suivant.

**Proposition 4.13.34.** *Soit $\mathcal{M}$ une catégorie accessible stable par petites $\varinjlim$ filtrantes, et soit $\underline{S}$ une sous-catégorie strictement pleine de $\mathcal{M}$. Conditions équivalentes :*

*a) $\underline{S}$ est accessible dans $\mathcal{M}$, et stable dans $\mathcal{M}$ par petites $\varinjlim$ filtrantes.*

*b) Il existe une petite sous-catégorie pleine $A$ de $\mathcal{M}$, telle que $\underline{S}$ soit la plus petite sous-catégorie strictement pleine de $\mathcal{M}$ contenant $A$ et stable par petites $\varinjlim$ filtrantes.*

[page 356]

On a a) $\Longrightarrow$ b), car si $\underline{S}$ est $\pi$-accessible dans $\mathcal{M}$, il est immédiat (sans autre condition de stabilité sur $\underline{S}$) que $\underline{S}$ est la plus petite sous-catégorie strictement pleine de $\mathcal{M}$ contenant $\underline{S}(\pi) \overset{\text{déf}}{=} \underline{S} \cap \mathcal{M}_\pi$ et stable par $\varinjlim$ grandes devant $\pi$. Si donc on sait déjà que $\underline{S}$ est même stable par *toutes* $\varinjlim$ filtrantes petites, il s'ensuit que $\underline{S}$ est la plus petite sous-catégorie de $\mathcal{M}$ ayant cette propriété de stabilité plus forte, et contenant $A$.

Prouvons b $\Longrightarrow$ a. Soit $\pi$ un cardinal utile pour $\mathcal{M}$, et tel que $A \subset \mathcal{M}_\pi$. Soit $B$ la plus petite sous-catégorie strictement pleine de $\mathcal{M}$ contenant $A$ et stable par $\varinjlim$ filtrantes de cardinal $\leqslant \pi$. On a donc $B \hookrightarrow \mathcal{M}_\pi$ et $B \subset \underline{S}$, et $\underline{S}$ est aussi la L-enveloppe de $B$. D'ailleurs $B$ est stable par

[page 357]

facteurs directs. Considérons alors l'image essentielle $\underline{S}'$ de $\mathrm{Ind}_\pi(B)$ dans $\mathcal{M}$. On a $\underline{S}' \subset \underline{S}$, et tout revient à prouver que $\underline{S}' = \underline{S}$, d'où résultera en effet que $\underline{S}$ est $\pi$-accessible dans $\mathcal{M}$, a fortiori accessible dans $\mathcal{M}$, d'où a). Pour prouver que $\underline{S}' = \underline{S}$, par définition de $\underline{S}$ comme la L-enveloppe de $A$, il suffit de voir que $\underline{S}'$ est stable par petites $\varinjlim$ filtrantes. Or cela résulte du fait que $B \subset \mathcal{M}_\pi$ est stable dans $\mathcal{M}_\pi$ par $\varinjlim$ filtrantes de cardinal $\leqslant \pi$, et de 4.13.19, qui implique tout au moins, comme $B = \underline{S}' \cap \mathcal{M}_\pi$ (en vertu de 4.13.4) que $\underline{S}'$ est stable par $\varinjlim$ filtrantes *de cardinal* $\leqslant \pi$. Qu'il soit même stable par petites $\varinjlim$ filtrante quelconques, résulte de ceci, et du fait qu'il l'est par $\varinjlim$ grandes devant

[156] Faux, même si on prend la $\natural$-clôture de l'image essentielle (“image $\natural$-essentielle”).

[157] Il faut se borner tout au moins à essentiellement $\natural$-surjectif – mais même cela est trop optimiste.

$\pi$. (Cf. 4.13.21 ...)

[page 358]

**Définition 4.13.35.** Soient $\mathcal{M}$ une catégorie accessible, stable par petites $\varinjlim$ filtrantes, $S$ une partie de $\operatorname{Ob}\mathcal{M}$, $\underline{S}$ la sous-catégorie pleine correspondante dans $\mathcal{M}$. On dit que $S$ est *L-accessible,* ou que $\underline{S}$ est L-accessible dans $\mathcal{M}$, si $\underline{S}$ est accessible dans $\mathcal{M}$, et de plus stable par petites $\varinjlim$ filtrantes ([158]).

**Proposition 4.13.36.** *Soient $\mathcal{M}$, $S$, $\underline{S}$ comme dans 4.13.35, et soit $\pi$ un cardinal utile pour $\mathcal{M}$. Supposons $\underline{S}$ stable dans $\mathcal{M}$ par petites $\varinjlim$ filtrantes, ou seulement $\underline{S}(\pi) \overset{\text{déf}}{=} \underline{S} \cap \mathcal{M}_\pi$ stable par petites $\varinjlim$ filtrantes de cardinal $\leqslant \pi$. Conditions équivalentes :*

a) *$\underline{S}$ est $\pi$-accessible. (Il sera automatiquement stable par petites $\varinjlim$ filtrantes, donc L-accessible.)*

b) *Pour tout $x \in \operatorname{Ob}\mathcal{M}$, on a $x \in \operatorname{Ob}\underline{S}$ si et seulement si $\underline{S}(\pi)/x$ est cofinale dans $\mathcal{M}_\pi/x$.*

c) *Pour tout $x \in \operatorname{Ob}\mathcal{M}$, et toute représentation $x \simeq \varinjlim_{i\in I} x_i$*

[page 359]

*qui est L-$\pi$-adaptée (cf. page 343, c), on a ceci : $x \in \operatorname{Ob} S$ si et seulement si $I_{\underline{S}}$ est cofinal dans $I$.*

c′) *Comme c), avec $I$ ordonnée.*

c″) *(Si on a choisi, pour tout $x \in \operatorname{Ob}\mathcal{M}$,* une *représentation $\pi$-adaptée $x \simeq \varinjlim_I x_i$) : $x \in \operatorname{Ob}\underline{S} \iff$ l'ensemble $I_{\underline{S}}$ est cofinal dans $I$.*

Démonstration. C'est essentiellement l'énoncé de 4.13.22 dans le cas particulier où $\Phi$ = ensemble des catégories *filtrantes* de cardinal $\leqslant \pi$, mais où, pour simplifier, on a supposé d'avance que $\underline{S}(\pi)$ satisfait à $\mathrm{L}(\Phi)$. L'équivalence de a) b) c) est contenue dans 4.13.22, ainsi que c $\Longrightarrow$ c′. Mais pour c′ $\Longrightarrow$ a, l'hypothèse accessoire $\pi^{\pi_0} = \pi$ et que les $J \in \Phi$ seront grandes devant $\pi_0$, n'est pas satisfaite ici, et il faut un démonstration indépendante, calquée sur celle des pages 333-336. Il suffit pour cela, à l'endroit [de] $\square$, page 333, d'invoquer le

**Lemme 4.13.37.** *Soient $\mathcal{M}$ une catégorie*

[page 360]

*accessible stable par $\varinjlim$ filtrantes, $\pi$ un cardinal utile pour $\mathcal{M}$. Alors pour tout $x \in \operatorname{Ob}\mathcal{M}$, on a une représentation*

$$x = \varinjlim_{i\in I} x_i$$

*L-$\pi$-adaptée (i.e. avec*

1) *$I$ équivalente à une petite catégorie, et $I$ grande devant $\pi$,*
2) *$I$ stable par $\varinjlim$ filtrantes de cardinal $\leqslant \pi$,*
3) *$I \longrightarrow \mathcal{M}$ commute à ces $\varinjlim$,*

d) *$x_i \in \operatorname{Ob}\mathcal{M}_\pi\ \forall\, i \in I$),*

---

[158] **N.B.** L'ensemble des parties L-accessibles de $\operatorname{Ob}\mathcal{M}$ est stable par petites intersections, et par réunions *finies.* L'image inverse d'une partie L-accessible par un foncteur ([159]) $f : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$ de catégories accessibles est L-accessible.

[159] un $L_0$-*foncteur* : qui commute aux petites $\varinjlim$ filtrantes.

*avec de plus I* ordonné.

En effet, on part de

$$x \ = \ \varinjlim_{j\in J} x_j \ , \qquad J \ \simeq \ \underbrace{(\mathcal{M}_\pi/x)_0}_{\substack{\text{sous-catégorie réduite} \\ \text{équivalente à } \mathcal{M}_\pi/x}} \quad .$$

On définit $I$ comme l'ensemble des sous-catégories *filtrantes* $J'$ de $J$, de cardinal `[“cardinal” biffé]` $\leqslant \pi$, $I$ ordonné par inclusion, et on pose, pour $J' \in I$,

$$x_{J'} \ = \ \varinjlim_{j\in J'} x_j \ .$$

Il est immédiat qu'on obtient ainsi un système inductif dans $\mathcal{M}$, indexé par $I$.

`[page 361]`

D'autre part, il est clair que $I$ est petite, je dis que $I$ est stable par $\varinjlim$ filtrantes de cardinal $\leqslant \pi$, et que le foncteur $J' \longmapsto x_{J'} : I \longrightarrow \mathcal{M}$ y commute, enfin que les $x_{J'}$ sont dans $\mathcal{M}_\pi$. Il reste à voir que $I$ est grande devant $\pi$, i.e. que si on a $(J'_r)_{r\in A}$, avec $\operatorname{card} A \leqslant \pi$, les $J'_r$ dans $I$, alors $\exists\ J' \in I$ qui majore les $J'_r$. Soit $K$ la sous-catégorie de $J$ engendrée par les $J'_r$, on voit facilement que $\operatorname{card} K \leqslant \pi$. Tout `[“tout” biffé]` revient à prouver :

**Lemme 4.13.38** ([160]). *Soient $J$ une catégorie grande devant $\pi$, $K$ une sous-catégorie de $J$ de cardinal $\leqslant \pi$. Alors il existe une sous-catégorie $K'$* filtrante *de $J$, contenant $K$, de cardinal $\leqslant \pi$. Si on suppose que l'on n'est pas, dans le cas où $J$ contient un objet maximal, et que $K$ contienne tous les objets maximaux de $J$,*

`[page 362]`

*on peut même prendre $K'$ telle que* $\operatorname{Ob} K' = \operatorname{Ob} K \cup \{e\}$, *où $e$ est un* objet final *de $K'$, et $K$ est une sous-catégorie pleine de $K'$. (Donc si $K' \neq K$, $K'$ est isomorphe au cône à droite construit sur $K$, “déduit de $K$ en lui ajoutant un objet final”.)*

Démonstration. Si $K$ admet un objet final, on prend $K' = K$. Sinon, comme $J$ est grande devant $\operatorname{card} \operatorname{Ob} K$, il existe un $j \in \operatorname{Ob} J$ qui majore tous les objets de $K$. Choisissons, pour tout $k \in \operatorname{Ob} K$, une flèche

$$\alpha_k \ : \ k \longrightarrow j \ .$$

Pour toute flèche

$$u \ : \ k' \longrightarrow k$$

dans $K$, considérons la double-flèche

$$(\alpha_k \circ u, \alpha_{k'}) \ : \ k' \rightrightarrows j \ .$$

L'ensemble de ces double-flèches, de but $j$, est de cardinal $\leqslant \operatorname{card} \operatorname{Fl} K \leqslant \pi$, donc $J$ étant grande devant $\pi$, il existe une flèche $\rho : j \longrightarrow e$ dans $J$ qui égalise toutes ces double-flèches. Soit $K' \subset J$, ayant comme objets $\operatorname{Ob} K \cup \{e\}$, et ayant comme flèches, en plus de

[160]**N.B.** Pour la démonstration de 4.13.37, il suffit de prouver 4.13.38 dans le cas où $J$ est ordonnée, auquel cas les contorsions de la fin sont inutiles.

`[page 363]`

celles de $K$, les flèches $\rho\alpha_k : k \longrightarrow e$ (pour $k \in \operatorname{Ob} K$), et $\mathrm{id}_e$. *Si* $e \notin \operatorname{Ob} K$, on voit que c'est bien une sous-catégorie, admettant $e$ comme objet final et $K$ comme sous-catégorie pleine. Si on avait $e \in \operatorname{Ob} K$, et s'il existe un objet $e'$ de $J$ qui majore $e$ et qui n'est pas dans $K$, on se ramène aussitôt au cas précédent, en remplaçant $e$ par $e'$.

( ([161]). Donc il reste le cas où il existe un objet $e$ dans $K$ qui est un plus grand élément dans $K$, et tel que tout objet de $J$ majorant $e$ soit dans $K$. Cela implique, $J$ étant filtrante, que $e$ est un plus grand objet de $J$. (Car si $x \in J$, $\exists\, x'$ majorant commun de $x$ et $e$, donc $x'$ est dans $K$, donc majoré par $e$, qui majore donc $x$.) On voit comme tantôt qu'il existe une flèche $p : e \longrightarrow j$ dans $J$, qui égalise toutes les double-flèches $k \rightrightarrows e$ de but $e$ *dans* $K$. Quitte à composer avec $j \longrightarrow e$, on peut supposer $j = e$. On a donc un endomorphisme $p$ de $e$ dans $J$, tel que $pu = pv$ pour toute double-flèche $k \overset{u}{\underset{v}{\rightrightarrows}} e$ dans $K$, de but $e$.

`[page 364]`

Pour $k \in \operatorname{Ob} K$, soit

$$f_k \ : \ k \longrightarrow e$$

la valeur commune des $pu$, pour $u \in \operatorname{Hom}_K(k, e)$. On voit tout de suite que si on a $k' \xrightarrow{v} k$ dans $K$, alors

$$f_{k'} \ = \ f_k \circ v \ .$$

En particulier, prenant $k' = e$, on trouve

$$f_k \circ v \ = \ f_e \ ( = \ p \ ) \qquad \text{si } v : e \longrightarrow k \ .$$

Soit donc $K'$ la sous-catégorie de $J$ ayant mêmes objets que $K$, et comme flèches, en plus de celles de $K$, les flèches composées $k \xrightarrow{u} e \xrightarrow{p^r} e \xrightarrow{v} k'$, avec $u$, $v$ dans $K$, et $r \geqslant 1$, i.e. les flèches composées $k \xrightarrow{f_k} e \xrightarrow{p^{r'}} e \xrightarrow{v} k'$, avec $k, k' \in \operatorname{Ob} K$, $v \in \operatorname{Fl} K$, $r' \geqslant 0$. Il faut voir que c'est stable par composition (pour avoir bien une sous-catégorie). C'est clair pour $vu$ si $u$ ou $v$ sont dans $\operatorname{Fl} K$. Si `[ni]` $u$ ni $v$ ne le sont, on doit prendre un composé

$$\begin{tikzcd} k \arrow[r, "u_1"] & e \arrow[r, "p^r", "r\geqslant 1"'] & e \arrow[r, "u_2"] \arrow[rr, bend right] & k' \arrow[r, "v_1"] & e \arrow[r, "p^s", "s\geqslant 1"'] & e \arrow[r, "v_2"] & k'' \end{tikzcd} ,$$

avec $u_1$, $u_2$, $v_1$, $v_2$ dans $\operatorname{Fl} K$, $r, s \geqslant 1$. Or on a

$$p(v_1 u_2) \ = \ p \ , \qquad \text{d'où} \qquad p^s(v_1 u_2) \ = \ p^{s-1}(p v_1 u_2) \ = \ p^{s-1} p \ = \ p^s \ ,$$

donc le composé est

$$k \xrightarrow{u_1} e \xrightarrow{p^{r+s}} e \xrightarrow{v_2} k'' \ ,$$

qui

[161] La construction qui suit est contenue dans l'énoncé plus général et plus précis 4.13.39.

`[page 365]`

est donc bien dans $\mathrm{Fl}\, K'$.

Ainsi, $K'$ est une sous-catégorie de $J$, mais est-elle filtrante ? La condition PS $1'$ est évidente, puisque $e$ est un plus grand élément de $J$, reste la condition PS 2 de la double-flèche. On voit aisément que cette condition est satisfaite dans $K'$, si et seulement si elle est satisfaite pour toute double-flèche

$$e \underset{p^s}{\overset{p^r}{\rightrightarrows}} e \qquad \text{avec } r, s \geqslant 0 \ .$$

(En effet, on se ramène aussitôt aux double-flèches de but $e$, et on note que toute flèche de $K'$ de but $e$ s'écrit comme un composé $k \xrightarrow{u} e \xrightarrow{p^r} e \xrightarrow{v} e$, avec $r \geqslant 0$ et $u$, $v$ des flèches dans $K'$. En composant avec $e \xrightarrow{p} e$, on trouve alors, comme $pv = pu$, $k \xrightarrow{u} e \xrightarrow{p^{r+1}} e$, soit $k \xrightarrow{f_k} e \xrightarrow{p^r} e$.) Mais on voit aussitôt que la possibilité d'égaliser $(p^r, p^s)$ dans $K'$ équivaut à l'existence de $t \geqslant 0$ tel que $p^{r+t} = p^{s+t}$. Donc $K'$ est filtrante si et seulement si $r \longmapsto p^r$ est une suite stationnaire (faire $r = 0$, $s = 1$, d'où $p^r = p^{r+1}$ pour $r$ grand). Ce n'est

`[page 366]`

pas forcément le cas.

Posons donc $K = K_0$, $K' = K_1$, et construisons par induction une suite croissante de sous-catégories $K_i$ ($i \in \mathbf{N}$), avec $\mathrm{Ob}\, K_i = \mathrm{Ob}\, J$, et (pour $i \geqslant 1$) $K_i$ étant déduites de $K_{i-1}$ en lui rajoutant une flèche $p_i : e \longrightarrow e$, comme ci-dessus. Ainsi toute double-flèche dans un $K_i$ peut s'égaliser dans $K_{i+1}$. Prenons $K_\infty = \varinjlim K_i$, $K_\infty$ est une sous-catégorie *filtrante* de $J$, contenant $K$ et de cardinal $\leqslant \pi$, q.e.d. )

On peut préciser cette construction ainsi :

**Corollaire 4.13.39.** *Sous les conditions de 4.13.38, supposons que $K$ contienne un objet $e$ maximal dans $J$. Soit $\Sigma$ l'ensemble des endomorphismes $p$ de $e$ dans $J$, tels que pour toute double-flèche* $k \underset{v}{\overset{u}{\rightrightarrows}} e$ dans $K$, *on ait $pu = pv$. Alors $\Sigma$ est stable par composition, et il existe une partie non vide $\Sigma_\infty$* [$= \Sigma_0$] *de $\Sigma$, telle que pour $p, p' \in \Sigma_0$, existe*

`[page 367]`

*$q \in \Sigma_0$ tel que $qp = qp'$ (i.e. telle que la sous-catégorie $J_0$ de $J$ dont l'ensemble des objets est $\{e\}$, et l'ensemble des flèches $\{\mathrm{id}_e\} \cup \Sigma_\infty$, soit filtrante). Si $\Sigma_0$ est choisie ainsi, soit $\mathcal{F}$ l'ensemble réunion de* $\mathrm{Fl}\, K$ *et de l'ensemble des flèches composées*

$$(*) \qquad k \xrightarrow{u} e \xrightarrow{p} e \xrightarrow{v} k' \ ,$$

*avec $u, v \in$* $\mathrm{Fl}\, J$, *$p \in \Sigma_\infty$. Alors $\mathcal{F}$ est l'ensemble des flèches d'une sous-catégorie $K'$ de $J$, ayant mêmes objets que $J$, et admettant $e$ pour plus grand élément. De plus, $K'$ contient $K$ et est filtrante.*

Démonstration. Que $\Sigma$ soit stable par composition est clair. Pour construire $\Sigma_\infty$ ayant les propriétés énoncées, on note que, $J$ étant grande devant $\pi$, $\Sigma$ est non vide ([162]). On construit par récurrence une suite d'éléments

$$p_0 \ , \ p_1 \ , \ \ldots \ , \ p_n \ , \ \ldots$$

[162] cf. argument plus bas pour construction de $p_i$.

de $\Sigma$, en prenant pour $p_0$ un élément quelconque de $\Sigma$, et pour $i \geqslant 1$, prenant $p_i \in \Sigma$ tel que pour toute double-flèche $(p, p')$ du sous-monoïde $M_{i-1}$ de $\mathrm{End}_J(e)$ engendré par $(p_j)_{0 \leqslant j \leqslant i-1}$, on ait $p_i p = p_i p'$. Un tel $p_i$ existe, car prenant l'ensemble des double-flèches de la forme précédente $(p, p')$, avec $p, p' \in M_{i-1}$, et de celles de la forme $(u, v) : k \rightrightarrows e$, avec $u, v \in \mathrm{Fl}\, J$, l'ensemble de

[page 368]

toutes ces double-flèches est de cardinal $\leqslant \pi$ ($M_{i-1}$ étant dénombrable, donc de cardinal $\leqslant \pi$), donc il existe une flèche $e \longrightarrow j$ dans $J$ qui les égalise toutes ($J$ étant grande devant $\pi$). Quitte à composer avec $j \longrightarrow e$ ($e$ étant objet maximal de $J$), on trouve le $p_i : e \longrightarrow e$ cherché.

Soit alors $\Sigma_0$ le sous-ensemble multiplicatif de $\Sigma$ engendré par les $p_i$ ($i \in \mathbf{N}$), limite inductive des ensembles similaires $\Sigma_i$ engendrés par les $p_j$ pour $j \in [0, i]$. Si $p$, $p'$ sont dans $\Sigma_\infty$, il sont dans un même $\Sigma_i$, donc on aura $p_{i+1} p = p_{i+1} p'$, ce qui prouve que $\Sigma_\infty$ a la propriété filtrante exigée.

Prouvons maintenant que $\mathcal{F}$ est l'ensemble de flèches d'une sous-catégorie $K'$ de $J$, ayant $\mathrm{Ob}\, K$ comme ensemble d'objets. Il reste à établir la stabilité par composition $vu$. Mais si $u$ et $v$ sont dans $\mathrm{Fl}\, K$, ou si l'un des deux est dans $\mathrm{Fl}\, K$, l'autre non (donc de la forme $(*)$), cette stabilité est évidente. Reste à voir le cas où ni [$u$] ni $v$ sont dans $\mathrm{Fl}\, K$, donc sont tous deux de la forme $(*)$ :

$$k \xrightarrow{u} e \xrightarrow{p} e \xrightarrow{v} k' \xrightarrow{u'} e \xrightarrow{p'} e \xrightarrow{v'} k'' ,$$

avec $u, v, u', v' \in \mathrm{Fl}\, K$, $p, p' \in \Sigma_\infty$. Comme $(u'v, \mathrm{id}_e)$ est une double-flèche de

[page 369]

$K$ de but $e$, on a

$$p'u'v \;=\; p'\mathrm{id}_e \;=\; p' ,$$

donc le composé en question s'écrit aussi

$$k \xrightarrow{u} e \xrightarrow{p'p} e \xrightarrow{v'} k'' ,$$

où $p'p \in \Sigma_\infty$ puisque $\Sigma_\infty$ est stable par composition, donc il est dans $\mathcal{F}$, q.e.d.

Il est clair que $K'$ contient $K$, et ayant mêmes objets que $K$ qui admet $e$ comme plus grand élément, que $e$ est un plus grand élément de $K'$. Reste à prouver que $K'$ est filtrante. Comme $K'$ a un plus grand élément, il reste à voir que toute double-flèche $k \rightrightarrows l$ dans $K'$ peut être égalisée dans $K'$. Quitte à composer avec $l \longrightarrow e$, on peut supposer $l = e$. Or on voit que toute flèche $k \longrightarrow e$ dans $K'$ est de la forme

$$k \xrightarrow{u} e \xrightarrow{p} e \xrightarrow{v} e ,$$

avec $u, v \in \mathrm{Fl}\, K$ et $p \in \Sigma_\infty \cup \{\mathrm{id}_e\}$. Quitte à composer avec $p_0 \in \Sigma_\infty$ fixé, cette flèche devient (puisque $p_0 v = p_0 \mathrm{id}_e = p_0$)

$$k \xrightarrow{u} e \xrightarrow{p_0 p} e , \qquad \text{i.e. } p_0 p u .$$

Pour une flèche $v'p'u' : k \longrightarrow e$, on trouve $p_0 p' u'$. Soit alors $q \in \Sigma_0$ tel que $q(p_0 p) = q(p_0 p')$, soit $r$ ($q$ existe puisque $p_0 p, p_0 p' \in \Sigma_\infty$). Donc $(q(p_0 p u), q(p_0 p' u')) = (ru, ru')$, et on a $ru = ru'$ puisque $r \in \Sigma_\infty$. Au total, $q p_0$ égalise les deux flèches $vpu$ et $v'p'u'$, q.e.d.

[page 370]

## 4.14 Critères d'accessibilité pour grosses catégories

**Théorème 4.14.1.** *Soient $\mathcal{C}$ une catégorie équivalente à une petite catégorie, $\Phi$, $\Psi$ deux petits ensembles de catégories, équivalentes à des petites catégories. Pour toute catégorie $I$, on désigne par $I_\bullet$ (resp. ${}_\bullet I$) le cône droit (resp. gauche) sur $I$, déduit de $I$ en ajoutant un objet final (resp. initial) $e = e_I$. Soit $\Lambda_1$ (resp. $\Lambda_2$) un ensemble de couples $(I, \varphi)$ (resp. $(I, \psi)$), où $I \in \Phi$ (resp. $I \in \Psi$), et où*

(4.14.1.1) $$\varphi \,:\, I \longrightarrow \mathcal{C} \qquad (\textit{resp. } \psi \,:\, I \longrightarrow \mathcal{C}\ )$$

*est un foncteur. Pour toute catégorie $\mathcal{N}$ stable ([163]), par $\varinjlim$ de type $\Phi$ et par $\varprojlim$ de type $\Psi$ on désigne par*

(4.14.1.2) $$\underline{\mathrm{Hom}}_{\Lambda_1}^{\Lambda_2}(\mathcal{C}, \mathcal{N}) \ \subset\ \underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{C}, \mathcal{N})$$

*la sous-catégorie strictement pleine de $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{C}, \mathcal{N})$ formée des foncteurs $f : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{N}$ ayant la propriété suivante :*

*a)* $\forall\, (I, \varphi) \in \Lambda_1$, *le foncteur composé*

$$I_\bullet \xrightarrow{\ \varphi\ } \mathcal{C} \xrightarrow{\ f\ } \mathcal{N}$$

*est $I$-exact à gauche, i.e. fait de $(f\varphi)(e_I)$ une $\varinjlim_I$ de $f\varphi|I$.*

[page 371]

*b) Pour tout $(I, \psi) \in \Lambda_2$, le foncteur composé*

$${}_\bullet I \xrightarrow{\ \psi\ } \mathcal{C} \xrightarrow{\ f\ } \mathcal{N}$$

*est $I$-exact à droite, i.e. fait de $(f\psi)(e_I)$ une limite projective de $(f\psi)|I$.*

*Avec ces notations : si $\mathcal{N}$ est une catégorie accessible, il en est de même de $\underline{\mathrm{Hom}}_{\Lambda_1}^{\Lambda_2}(\mathcal{C}, \mathcal{N})$.*

**Commentaire.** On utilisera ce théorème surtout quand on a $\Lambda_2 = \emptyset$ ou $\Lambda_1 = \emptyset$, auquel cas on note $\underline{\mathrm{Hom}}_{\Lambda_1}(\mathcal{C}, \mathcal{N})$, resp. $\underline{\mathrm{Hom}}^{\Lambda_2}(\mathcal{C}, \mathcal{N})$, la catégorie $\underline{\mathrm{Hom}}_{\Lambda_1}^{\Lambda_2}(\mathcal{C}, \mathcal{N})$. On appliquera le théorème surtout quand $\mathcal{C}$ elle-même est stable par $\varinjlim$ de type $\Phi$ et par $\varprojlim$ de type $\Psi$, et quand $\Lambda_1$ (resp. $\Lambda_2$) est déjà formé de foncteurs $\varphi$ (resp. $\psi$) qui sont $I$-exacts à gauche (resp. à droite). Donc $\underline{\mathrm{Hom}}_{\Lambda_1}^{\Lambda_2}(\mathcal{C}, \mathcal{N})$ est alors formée des $f : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{N}$ qui commutent à certaines $\varinjlim$ de type $\Phi$, et à certaines $\varprojlim$ de type $\Psi$. En particulier, on trouve :

[page 372]

**Corollaire 4.14.2.** *Soient $\mathcal{C}$ une catégorie équivalente à une petite catégorie, $\mathcal{N}$ une $\mathfrak{U}$-catégorie, $\Phi$ et $\Psi$ deux petits ensembles de catégories $I$, équivalentes à des petites catégories. On suppose $\mathcal{C}$ et $\mathcal{N}$ stables par $\varinjlim$ de type $\Phi$, par $\varprojlim$ de type $\Psi$. Soit $\underline{\mathrm{Hom}}_{\Phi}^{\Psi}(\mathcal{C}, \mathcal{N})$ la sous-catégorie strictement pleine de $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{C}, \mathcal{N})$ formée des $f : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{N}$ qui commutent aux $\varinjlim$ de type $\Phi$ et aux $\varprojlim$ de type $\Psi$. Alors, si $\mathcal{N}$ est accessible, il en est de même de $\underline{\mathrm{Hom}}_{\Phi}^{\Psi}(\mathcal{C}, \mathcal{N})$.*

[163] Cette propriété de stabilité n'est pas nécessaire pour la définition de $\underline{\mathrm{Hom}}_{\Lambda_1}^{\Lambda_2}(\mathcal{C}, \mathcal{N})$, et il est presque sûr que le théorème est valable sans faire cette hypothèse sur $\mathcal{N}$. Cf. 4.14.16, où on voit que c'est en tous cas inutile pour $\Psi$.

Voici des cas particuliers remarquables de ce corollaire :

**Corollaire 4.14.3.** *Soient $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ deux catégories accessibles, et $\pi_0$ un cardinal infini, tel que $\mathcal{M}$ satisfasse à $L_{\pi_0}$. Soit $\underline{\mathrm{Hom}}_{\pi_0}(\mathcal{M},\mathcal{N})$ la sous-catégorie strictement pleine de $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{M},\mathcal{N})$ formée des foncteurs $\pi_0$-accessibles. Alors $\underline{\mathrm{Hom}}_{\pi_0}(\mathcal{M},\mathcal{N})$ est accessible.*

`[page 373]`

(Le cas où $\pi_0$ est utile pour $\mathcal{M}$ a déjà été traité.)

Démonstration. Dans le cas général, soit $\pi > \pi_0$ un cardinal utile pour $\mathcal{M}$, de sorte qu'on a

$$\mathcal{M} \xleftarrow{\sim} \mathrm{Ind}_\pi(\mathcal{C}) \qquad \text{avec } \mathcal{C} = \mathcal{M}_\pi \ .$$

On peut supposer $\mathcal{M} = \mathrm{Ind}_\pi(\mathcal{C})$. Le fait que $\mathcal{M}$ satisfasse à $\mathrm{L}_{\pi_0}$ implique que $\mathcal{C}$ est stable par $\varinjlim$ grandes devant $\pi_0$, et de cardinal $\leqslant \pi$. Soit $\Phi$ l'ensemble des catégories de cette nature. $\Phi$ n'est pas petit, mais il existe $\Phi_0 \subset \Phi$ petit, tel que toute $I \in \Phi$ soit isomorphe à une $I_0 \in \Phi_0$, ce qui suffira pour la validité de 4.14.1 et 4.14.2 (où on fera ici $\Psi = \emptyset$). On peut considérer $\underline{\mathrm{Hom}}_{!\,\pi_0}(\mathcal{M},\mathcal{N})$ comme une sous-catégorie strictement pleine de $\underline{\mathrm{Hom}}_{!\,\pi}(\mathcal{M},\mathcal{N}) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{C},\mathcal{N})$ (cf. 4.12.3, p. 275). Pour un foncteur $f : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$ qui est $\pi$-accessible, dire qu'il est même $\pi_0$-accessible revient à dire que sa restriction à $\mathcal{C}$, i.e. son image dans $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{C},\mathcal{N})$, commute aux $\varinjlim$ de type $\Phi$. (Cf. 4.13.20, page 341 ([164]), où on prend $\alpha = \alpha_\pi$, notant que $J_{\alpha_\pi}$ grande devant $\pi_0$ puisque $\pi > \pi_0$).

`[page 374]`

Donc on trouve

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{!\,\pi_0}(\mathcal{M},\mathcal{N}) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Hom}}_{\Phi}(\mathcal{C},\mathcal{N}) \ ,$$

et le corollaire 4.14.2 donne la conclusion voulue.

**Corollaire 4.14.4.** *Soient $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ deux catégories accessibles, $\Phi$ et $\Psi$ deux ensembles des catégories comme dans 4.14.2, on suppose que $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ satisfassent $L_{\pi_0}$, et* `[soient]` *stables par $\varinjlim$ de type $\Phi$ et par $\varprojlim$ de type $\Psi$. Soit $\underline{\mathrm{Hom}}^{\Psi}_{\Phi,\pi_0}(\mathcal{M},\mathcal{N})$ la sous-catégorie strictement pleine de $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{M},\mathcal{N})$ formée des foncteurs $\pi_0$-accessibles qui commutent aux $\varinjlim$ de type $\Phi$, et aux $\varprojlim$ de type $\Psi$. Alors $\underline{\mathrm{Hom}}^{\Psi}_{\Phi,\pi_0}(\mathcal{M},\mathcal{N})$ est accessible.*

Démonstration. Cette fois, on choisit $\pi > \pi_0$ tel qu'on ait $\mathrm{card\,réd}\, I \leqslant \pi$ pour tout $I$ dans $\Phi$ ou dans $\Psi$. La catégorie envisagée s'interprète alors (posant encore $\mathcal{C} = \mathcal{M}_\pi$) comme

`[page 375]`

$$\underline{\mathrm{Hom}}^{\Psi}_{\Phi,\pi_0}(\mathcal{M},\mathcal{N}) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Hom}}^{\Psi}_{\Phi'}(\mathcal{C},\mathcal{N}) \ ,$$

où $\Phi'$ est formée des catégories qui sont soit dans $\Phi$, ou qui sont grandes devant $\pi_0$ et de cardinal $\leqslant \pi$. Il suffit donc d'appliquer encore 4.14.2.

**Corollaire 4.14.5.** *Considérons les trois ensembles suivants :*

- *a)* $\Phi_1$ *est formée de toutes les catégories équivalentes à des petites catégories.*
- *b)* $\Phi_2$ *comme a), mais en restreignant aux catégories filtrantes.*
- *c)* $\Phi_3$ *formé des catégories discrètes, et de celles qui sont grandes devant $\pi_0$ ($\pi_0$ un cardinal infini donné).*

[164]La référence n'est pas tout à fait adéquate. Il faudrait réunir dans un paragraphe à part tous les énoncés de ce type, dont certains utilisent le théorème de représentation indicielle.

*Soit $\Phi$ l'un des ensembles de catégories $\Phi_1$, $\Phi_2$, $\Phi_3$, $\Phi_2 \cup \Phi_3$ ou la réunion d'un de ceux-ci et d'un petit ensemble $\Phi_0$ de catégories essentiellement petites* ([165])*. Soit $\Psi$ un petit ensemble de catégories. Soient $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ des catégories accessibles, stables par $\varinjlim$ de type $\Phi$, et par $\varprojlim$ de type $\Psi$. Alors $\underline{\mathrm{Hom}}_{\Phi}^{\Psi}(\mathcal{M},\mathcal{N})$ est accessible.*

[page 376]

Démonstration. Soit $\pi_0' \geqslant \pi_0$ un cardinal utile pour $\mathcal{M}$, $\pi$ un cardinal ayant les propriétés suivantes.

a) $\pi \geqslant \sup(\pi_0', \operatorname{card\,réd} \mathcal{M}_{\pi_0'})$, $\pi > \pi_0$.

b) $\pi^{\pi_0'} = \pi$.

c) $I \in \Phi_0 \cup \Psi \Longrightarrow \operatorname{card\,réd} I \leqslant \pi$.

Soit $\mathcal{C} = \mathcal{M}_\pi$, d'où $\mathcal{M} \simeq \mathrm{Ind}_\pi(\mathcal{C})$. Dans tous les cas envisagés, $\Phi$ contient l'ensemble des catégories essentiellement petites qui sont grandes devant $\pi_0$, a fortiori celles qui sont grandes devant $\pi$, donc la catégorie $\underline{\mathrm{Hom}}_{\Phi}^{\Psi}$ s'interprète comme une sous-catégorie strictement pleine de

$$\underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{C},\mathcal{N}) \ .$$

Si d'autre part $\Phi_\pi$ désigne l'ensemble des $I \in \Phi$ telles que $\operatorname{card} I \leqslant \pi$, on trouve

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\Phi}^{\Psi}(\mathcal{M},\mathcal{N}) \ \simeq \ \underline{\mathrm{Hom}}_{\Phi_\pi}^{\Psi}(\mathcal{C},\mathcal{N}) \ ,$$

et on applique 4.14.2.

[page 377]

En particulier, on trouve :

**Corollaire 4.14.6.** *Soient $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ deux catégories accessibles, supposons $\mathcal{M}$ stable par petites $\varinjlim$ (i.e. $\mathcal{M}$ est une catégorie paratopos). Alors la catégorie $\underline{\mathrm{Hom}}_!(\mathcal{M},\mathcal{N})$ des foncteurs $f : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$ qui commutent aux petites $\varinjlim$ est accessible. Si $\mathcal{N}$ est elle aussi un paratopos, $\underline{\mathrm{Hom}}_!(\mathcal{M},\mathcal{N})$ est un paratopos.*

Démonstration. La première assertion est le cas particulier de 4.14.5 relatif au cas où $\Phi = \Phi_0$, $\Psi = \emptyset$. La deuxième assertion en résulte, puisque $\underline{\mathrm{Hom}}_!(\mathcal{M},\mathcal{N})$ est visiblement stable par petites $\varinjlim$, donc c'est un paratopos étant accessible (4.8.9, page 207).

**Corollaire 4.14.7.** *Soient $\Phi$, $\Psi$, $\mathcal{M}$ comme dans 4.14.5. Alors pour toute catégorie accessible $\mathcal{N}$, la catégorie*

[page 378]

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\Psi}^{\Phi}(\mathcal{M}^\circ,\mathcal{N}) \ \simeq \ (\underline{\mathrm{Hom}}_{\Phi}^{\Psi}(\mathcal{M},\mathcal{N}^\circ))^\circ$$

*est accessible.*

Démonstration. On procède comme pour 4.14.5, pour expliciter

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\Phi}^{\Psi}(\mathcal{M},\mathcal{N}^\circ) \xrightarrow{\ \simeq\ } \underline{\mathrm{Hom}}_{\Phi_\pi}^{\Psi}(\mathcal{C},\mathcal{N}^\circ) \ ,$$

[165] On pourrait faire ici un énoncé qui englobe 4.14.4 en rajoutant un

d) $\Phi_4$ formé des catégories grandes devant $\pi_0$,

et prendre $\Phi$ de la forme de $\Phi_1$, $\Phi_2$, $\Phi_4$, $\Phi_3$, $\Phi_3 \cup \Phi_2$, $\Phi_3 \cup \Phi_4$, ou la réunion de ceux-ci et d'un $\Phi_0$.

d'où

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\Psi}^{\Phi}(\mathcal{M}^{\circ},\mathcal{N}) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Hom}}_{\Psi}^{\Phi_{\pi}}(\mathcal{C}^{\circ},\mathcal{N}) ,$$

et on applique 4.14.2 à $\mathcal{C}^{\circ}$, $\Psi$, $\Phi_{\pi}$.

**Corollaire 4.14.8.** *Soient $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux catégories paratopos. Alors*

$$\mathcal{M} \boxtimes \mathcal{N} \ \simeq\ \underline{\mathrm{Hom}}^{!}(\mathcal{M}^{\circ},\mathcal{N}) \qquad \textit{(cf. 4.2 et 4.3)}$$

*est un paratopos.*

En effet, en vertu de 4.14.7 (avec $\Phi = \Phi_{\pi}$ [ ?], $\Psi = \emptyset$), c'est une catégorie accessible.

[page 379]

D'autre part, il est immédiat qu'elle est stable par petites $\varprojlim$ , $\mathcal{N}$ l'étant. Donc on conclut encore par 4.8.9 (page 207) que c'est une catégorie paratopos.

**Corollaire 4.14.9.** *Soient $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ deux catégories paratopos, et $\underline{\mathrm{Hom}}^{!}(\mathcal{M},\mathcal{N})$ la catégorie des foncteurs $\mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$ qui commutent aux petites $\varprojlim$ . On a alors une équivalence de catégories*

$$\begin{array}{ccc} \underline{\mathrm{Hom}}^{!}(\mathcal{M},\mathcal{N}) & \xrightarrow{\sim} & \underline{\mathrm{Hom}}_{!}(\mathcal{N},\mathcal{M})^{\circ} \\ f & \longmapsto & \textit{adjoint à gauche de } f \ , \end{array}$$

! ! *et par suite la catégorie* **opposée** *à $\underline{\mathrm{Hom}}^{!}(\mathcal{M},\mathcal{N})$ est accessible.*

Ceci résulte du

**Lemme 4.14.10** (pour mémoire). *Soient $\mathcal{M}$* [une] *catégorie pseudo-topos, $f : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$ un foncteur. Pour que $f$ admette un adjoint à gauche (resp. à droite), il faut et il suffit que $f$ commute aux petites $\varprojlim$ (resp. aux petites $\varinjlim$ ).*

[page 380]

Ceci équivaut au cas particulier :

**Corollaire 4.14.11.** *Soit $\mathcal{M}$ un paratopos, et $f$ un foncteur covariant (resp. contravariant) de $\mathcal{M}$ dans* Ens. *Pour que $f$ soit représentable, il faut et il suffit que $f$ commute aux $\varprojlim$ .*

Ça a été vu – le cas des contrafoncteurs étant le plus évident (cf. 4.1 – il suffit que $\mathcal{M}$ soit un paratopos, et même que $\mathcal{M}$ admette une petite sous-catégorie pleine génératrice, cf. SGA 4 I 8.12.7 (pour l'énoncé dual). Dans les cas d'un foncteur covariant, la difficulté provient du fait que $\mathcal{M}$ n'admet pas forcément de petite sous-catégorie cogénératrice. Il faut utiliser l'existence d'une filtration cardinale (généralisée), cf. loc. cit. 8.3.12.)

Après tous ces beaux corollaires, on est mûr pour s'attaquer à la démonstration de 4.14.1 !

[page 381]

Démonstration de 4.14.1. On sait que $\mathcal{M} = \underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{C},\mathcal{N})$ est accessible (4.9.5, p. 220), et $\underline{\mathrm{Hom}}_{\Lambda_1}^{\Lambda_2}(\mathcal{C},\mathcal{N})$ est une sous-catégorie strictement pleine de cette catégorie. Il suffit de prouver que c'est une sous-catégorie accessible dans $\mathcal{M}$ (4.13.1, p. 281). Pour tout $\xi = (I,\varphi) \in \Lambda_1$, on a un foncteur

$$L_{\xi} \ : \ \mathcal{M} \ = \ \underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{C},\mathcal{N}) \ \longrightarrow \ \underline{\mathrm{Fl}}(\mathcal{N}) \ ,$$

donné par

$$L_\xi(f) \;=\; \text{flèche canonique } \varinjlim_{i\in I} f\varphi(i) \longrightarrow f\varphi(e_I)\ .$$

Je dis que le foncteur $L_\xi$ est *accessible.* En effet, soit $\pi_0$ un cardinal tel que $\mathcal{N}$ satisfasse à $\mathrm{L}_{\pi_0}$, il en est donc de même de $\mathcal{M} = \underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{C},\mathcal{N})$ et de $\underline{\mathrm{Fl}}(\mathcal{N}) \overset{\text{déf}}{=} \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{\Delta}_1,\mathcal{N})$, les limites en question se calculent argument par argument. Je dis que $L_\xi$ est $\pi_0$-accessible, i.e. commute aux $\varinjlim$ grandes devant $\pi_0$. Il suffit de voir qu'il en est ainsi des foncteurs composés avec les foncteurs

$$\underline{\mathrm{Fl}}(\mathcal{N}) \underset{\rho}{\overset{\sigma}{\rightrightarrows}} \mathcal{N}$$

“source” et “but”, i.e. des foncteurs

$$f \longmapsto \varinjlim_{i\in I} f\varphi(i) \qquad \text{et} \qquad f \longmapsto f\varphi(e_I)\ .$$

`[page 382]`

Or le premier foncteur, $f \longmapsto \varinjlim_{i\in I} f\varphi(i)$, est le composé de

$$f \longmapsto f\circ\varphi_I \ :\ \underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{C},\mathcal{N}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(I,\mathcal{N})$$

(lequel commute aux $\varinjlim$ qui sont représentables dans $\mathcal{N}$, et en particulier aux $\varinjlim$ grandes devant $\pi_0$) et du foncteur

$$\varinjlim_{I} \ :\ \underline{\mathrm{Hom}}(I,N) \longrightarrow \mathcal{N}\ ,$$

qui lui aussi commute aux limites inductives représentables dans $\mathcal{N}$, et en particulier à celles grandes devant $\pi_0$. Quant au foncteur $f \longmapsto (f\circ\varphi)(e_I) = f(\varphi(e_I))$, il est clair qu'il commute également aux $\varinjlim$ représentables dans $\mathcal{N}$, donc il est $\pi_0$-accessible.

Ceci posé, notons que

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\Lambda_1}(\mathcal{C},\mathcal{N}) \;=\; \bigcap_{\xi\in\Lambda_1} \underline{\mathrm{Hom}}_{\{\xi\}}(\mathcal{C},\mathcal{N})\ ,$$

et que $\underline{\mathrm{Hom}}_\xi(\mathcal{C},\mathcal{N})$ est l'image inverse, par le foncteur accessible $L_\xi$ précédent, de la sous-catégorie strictement pleine $\underline{\mathrm{Is}}(\mathcal{N})$ de $\underline{\mathrm{Fl}}(\mathcal{N})$ formée des *isomorphismes* dans $\mathcal{N}$. Si on prouve que cette dernière est accessible dans $\underline{\mathrm{Fl}}(\mathcal{N})$, il s'ensuit que

`[page 383]`

$\underline{\mathrm{Hom}}_\xi(\mathcal{C},\mathcal{N})$ est accessible dans $\mathcal{M}$ (4.3.31, page 350). Donc, $\Phi$ étant petite, il s'ensuit que $\underline{\mathrm{Hom}}_{\Lambda_1}(\mathcal{C},\mathcal{N})$ est accessible dans $\mathcal{M}$ (4.13.7, page 291).

On prouve de la même façon que $\underline{\mathrm{Hom}}^{\Lambda_2}(\mathcal{C},\mathcal{N})$ est accessible dans $\mathcal{M} = \mathrm{Hom}(\mathcal{C},\mathcal{N})$. Ici, on doit considérer les foncteurs

$$L'_\xi \ :\ \mathcal{M} = \underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{C},\mathcal{N}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Fl}}(\mathcal{N})$$

définis par

$$L'_\xi \;=\; \text{flèche canonique } f\varphi(e'_I) \longrightarrow \varprojlim_{i\in I} f\varphi(i)\ .$$

Pour prouver que ce foncteur est accessible, on procède comme tantôt, en prenant cependant $\pi_0$ assez grand pour qu'on ait

$$\begin{cases} I \in \Psi \implies \operatorname{card}\operatorname{réd} I \leqslant \pi_0. \\ \mathcal{N}_{\pi_0} \text{ est génératrice dans } \mathcal{N}. \end{cases}$$

Je dis qu'alors $L'_\xi$ est $\pi_0$-accessible : en effet, en procédant comme tantôt pour $L_\xi$, on est ramené à voir que

$$\varinjlim_I \underline{\mathrm{Hom}}(I, \mathcal{N}) \longrightarrow \mathcal{N}$$

est $\pi$-accessible. Or cela est contenu dans SGA 4 I 9.8.

[page 384]

Ainsi, on a prouvé que les deux sous-catégories strictement pleines

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\Lambda_1}(\mathcal{C}, \mathcal{N}) \ , \qquad \underline{\mathrm{Hom}}^{\Lambda_2}(\mathcal{C}, \mathcal{N})$$

de $\mathcal{M} \overset{\text{déf}}{=} \underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{C}, \mathcal{N})$ sont accessibles dans $\mathcal{M}$. Il en est donc de même de leur intersection (4.13.7)

$$\underline{\mathrm{Hom}}^{\Lambda_2}_{\Lambda_1}(\mathcal{C}, \mathcal{N}) \ = \ \underline{\mathrm{Hom}}_{\Lambda_1}(\mathcal{C}, \mathcal{N}) \cap \underline{\mathrm{Hom}}^{\Lambda_2}(\mathcal{C}, \mathcal{N}) \ ,$$

q.e.d.

Il reste à prouver le

**Lemme 4.14.12.** *Soit $\mathcal{N}$ une catégorie accessible. Alors la catégorie $\underline{\mathrm{Fl}}(\mathcal{N}) \overset{\text{déf}}{=} \underline{\mathrm{Hom}}(\boldsymbol{\Delta}_1, \mathcal{N})$ est accessible (4.9.5), et la sous-catégorie strictement pleine $\underline{\mathrm{Is}}(\mathcal{N})$ formée des flèches inversibles dans $\mathcal{N}$ est accessible dans $\underline{\mathrm{Fl}}(\mathcal{N})$. (Il en est de même de la sous-catégorie strictement pleine $\underline{\mathrm{Mon}}(\mathcal{N})$ formée des monomorphismes dans $\mathcal{N}$.)*

Démonstration. Soit $\mathcal{C}$ une petite sous-catégorie strictement génératrice de $\mathcal{N}$, et considérons la petite famille des foncteurs

$$h_x \ = \ (y \longmapsto \mathrm{Hom}(x, y)) \ : \ \mathcal{N} \longrightarrow \mathrm{Ens} \ ,$$

[page 385]

d'où des foncteurs

$$\underline{\mathrm{Fl}}(h_\xi) \ : \ \underline{\mathrm{Fl}}(\mathcal{N}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Fl}}(\mathrm{Ens}) \ .$$

Pour qu'une flèche $u : y \longrightarrow z$ dans $\mathcal{N}$ soit isomorphe (resp. monomorphe), il faut et il suffit que pour tout $x \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, $h_x(u)$ le soit. Ainsi, $\underline{\mathrm{Is}}(\mathcal{N})$ (resp. $\underline{\mathrm{Mon}}(\mathcal{N})$) apparaît comme l'intersection des images inverses, par les foncteurs $\underline{\mathrm{Fl}}(h_\xi)$ ci-dessus, de la sous-catégorie $\underline{\mathrm{Is}}(\mathrm{Ens})$ (resp. $\underline{\mathrm{Mon}}(\mathrm{Ens})$) de $\underline{\mathrm{Fl}}(\mathrm{Ens})$. Cela nous ramène au cas où $\mathcal{N} = (\mathrm{Ens})$. Mais si $\mathcal{C}$ désigne la sous-catégorie strictement pleine de Ens formée des ensembles *finis,* ceux-ci forment une famille strictement génératrice formée d'objets de *présentation finie,* et comme Ens est stable par petites $\varinjlim$, donc par $\varinjlim$ filtrantes, il s'ensuit qu'on a

$$(*) \qquad \mathrm{Ind}(\mathcal{C}) \longrightarrow (\mathrm{Ens}) \ ,$$

d'où aussitôt (SGA 4 I 8.8.5, p. 104)

[page 386]

$$(*) \qquad \mathrm{Ind}(\underline{\mathrm{Fl}}(\mathcal{C})) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Fl}}(\mathrm{Ens}) .$$

Donc le résultat d'accessibilité voulu résulte des deux lemmes suivants :

**Lemme 4.14.13.** *L'équivalence* $(*)$ *précédente induit des équivalences*

$$\begin{aligned} \mathrm{Ind}(\underline{\mathrm{Is}}(\mathcal{C})) &\xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Is}}(\mathrm{Ens}) \\ \mathrm{Ind}(\underline{\mathrm{Mon}}(\mathcal{C})) &\xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Mon}}(\mathrm{Ens}) \end{aligned}$$

*(où* $\mathcal{C} = (\mathrm{Ensf})$ *est la sous-catégorie pleine de* (Ens) *formée des ensembles* finis.*)*

**Lemme 4.14.14** ([166]). *Soit* $\mathcal{C}$ *une catégorie équivalente à une petite catégorie. Alors :*

*a)* $\mathcal{M} \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{Ind}(\mathcal{C})$ *est une catégorie accessible.*

*b) Pour toute sous-catégorie pleine* $\mathcal{D}$ *dans* $\mathcal{C}$*, l'image essentielle de* $\mathrm{Ind}\,\mathcal{D}$ *dans* $\mathcal{M} = \mathrm{Ind}(\mathcal{C})$ *est une sous-catégorie L-accessible dans* $\mathcal{M}$*.*

Démonstration des deux lemmes immédiate et "laissée au lecteur". Le b) dans 4.14.14 provient du fait que le foncteur $\mathrm{Ind}(\mathcal{D}) \longrightarrow \mathrm{Ind}(\mathcal{C})$ provenant d'un foncteur $\mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ (ici un

[page 387]

foncteur d'inclusion) est un L-foncteur (i.e. commute aux petites $\varinjlim$ filtrantes), et a fortiori est accessible (et même $\aleph_0$-accessible).

**4.14.15.** On ne peut s'empêcher de se demander si pour $\mathcal{N}$ accessible, la sous-catégorie strictement pleine $\underline{\text{Ép}}(\mathcal{N})$ dans $\underline{\mathrm{Fl}}(\mathcal{N})$, formée des épimorphismes dans $\mathcal{N}$, est accessible dans $\mathcal{N}$. Il est immédiat que si $\mathcal{N}$ satisfait à $\mathrm{L}_{\pi_0}$, alors $\underline{\text{Ép}}(\mathcal{N})$ est stable dans $\underline{\mathrm{Fl}}(\mathcal{N})$ par les $\varinjlim$ de type $\mathrm{L}_{\pi_0}$, a fortiori par facteurs directs. Elle aurait donc dû mal à ne pas être accessible dans $\underline{\mathrm{Fl}}(\mathcal{N})$. Notons quand même :

**Corollaire 4.14.15.1** (de 4.14.13). *Soit* $\mathcal{N}$ *une catégorie accessible stable par sommes amalgamées* $y \amalg_x z$ ([167]). *Alors* $\underline{\text{Ép}}(\mathcal{N})$ *est une sous-catégorie accessible dans* $\underline{\mathrm{Fl}}(\mathcal{N})$*.*

[page 388]

Considérons en effet le foncteur

$$\begin{aligned} \gamma \ : \ \underline{\mathrm{Fl}}(\mathcal{N}) &\longrightarrow \underline{\mathrm{Fl}}(\mathcal{N}) \\ (x \longrightarrow y) &\longmapsto (y \amalg_x y \xrightarrow{\text{codiag}} y) \ . \end{aligned}$$

Ce foncteur commute aux types de $\varinjlim$ qui sont représentables dans $\mathcal{N}$, en particulier, il est accessible. D'autre part, $\underline{\text{Ép}}(\mathcal{N})$ est l'image inverse par $\gamma$ de la sous-catégorie strictement pleine $\underline{\mathrm{Is}}(\mathcal{N})$ de $\underline{\mathrm{Fl}}(\mathcal{N})$. Donc le corollaire résulte du fait que par 4.14.13 cette dernière est accessible dans $\underline{\mathrm{Fl}}(\mathcal{N})$.

[166]**N.B.** À équivalence près, on trouve les catégories accessibles $\mathcal{M}$ stables par petites $\varinjlim$ filtrantes, et telles que $\mathcal{M}_{\mathrm{pf}}$ (sous-catégorie des objets de présentation *finie*) soit strictement génératrice.

[167]Je suis presque sûr que cette hypothèse est superflue. Comparer page 390.

**4.14.16.** Je présume que 4.14.1 reste valable sans supposer $\mathcal{N}$ stable par les $\varinjlim$ de type $\Phi$ et par les $\varprojlim$ de type $\Psi$. Si on a une essentiellement petite catégorie $I$, la question est de savoir si la sous-catégorie strictement pleine $\underline{\mathrm{Hom}}_{\square}(I_\bullet, \mathcal{N})$ de $\underline{\mathrm{Hom}}(I_\bullet, \mathcal{N})$, formée des foncteurs satisfaisant

[page 389]

la condition a) de 4.14.1, est accessible dans $\underline{\mathrm{Hom}}(I_\bullet, \mathcal{N})$, et de même pour $\underline{\mathrm{Hom}}^{\square}({}_\bullet I, \mathcal{N})$. Pour ce deuxième cas, ça a l'air OK, car si $\mathcal{C}$ est une petite sous-catégorie strictement génératrice de $\mathcal{N}$, et si pour tout $x \in \mathrm{Ob}$ [$\mathcal{C}$] on considère encore le foncteur

$$h_x \ : \ \mathcal{N} \longrightarrow \mathrm{Ens}\ ,$$

d'où

$$\bar{h}_x \ : \ \underline{\mathrm{Hom}}({}_\bullet I, \mathcal{N}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}({}_\bullet I, \mathrm{Ens})\ ,$$

on voit que $\underline{\mathrm{Hom}}^{\square}({}_\bullet I, \mathcal{N})$ est l'intersection des images inverses des sous-catégories $\underline{\mathrm{Hom}}^{\square}({}_\bullet I, \mathrm{Ens})$ de $\underline{\mathrm{Hom}}({}_\bullet I, \mathrm{Ens})$. Donc ces dernières étant accessibles dans $\underline{\mathrm{Hom}}({}_\bullet I, \mathrm{Ens})$, par 4.14.1 ((Ens) étant stable par petites $\varprojlim$ ), il s'ensuit bien que $\underline{\mathrm{Hom}}^{\square}({}_\bullet I, \mathcal{N})$ l'est dans $\underline{\mathrm{Hom}}({}_\bullet I, \mathcal{N})$, q.e.d.

Le cas de $\underline{\mathrm{Hom}}_{\square}(I_\bullet, \mathcal{N})$ dans $\underline{\mathrm{Hom}}(I_\bullet, \mathcal{N})$ semble plus délicat, dans le cas où

[page 390]

$$I = \begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small] & {} \\ \bullet \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & {} \end{tikzcd} \quad , \qquad \text{donc} \qquad I = \begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small] & {} \arrow[dr] & \\ \bullet \arrow[ur] \arrow[dr] & & {} \\ & {} \arrow[ur] & \end{tikzcd} \quad ,$$

si l'énoncé envisagé est vrai, on en conclura que $\underline{\mathrm{\acute{E}p}}(\mathcal{N})$ est accessible dans $\underline{\mathrm{Fl}}(\mathcal{N})$, pour toute catégorie accessible, car c'est l'image inverse de $\underline{\mathrm{Hom}}_{\square}(I_\bullet, \mathcal{N})$ par le foncteur canonique (accessible)

$$\begin{array}{ccc} \underline{\mathrm{Fl}}(\mathcal{N}) & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Hom}}(I_\bullet, \mathcal{N}) \\ (x \xrightarrow{u} y) & \longmapsto & \left( \begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small] & y \arrow[dr, "\mathrm{id}_y"] & \\ x \arrow[ur, "u"] \arrow[dr, "u"'] & & y \\ & y \arrow[ur, "\mathrm{id}_y"'] & \end{tikzcd} \right) . \end{array}$$

C'est dire que la généralisation envisagée de 4.14.1 n'est pas oiseuse, mais est sans doute utile.

[page 391]

**Théorème 4.14.17** ([168]). *Soit $p : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{C}$ un foncteur cofibrant ou fibrant, avec $\mathcal{C}$ essentiellement petite (i.e. équivalente à une petite catégorie), et tel que les catégories fibres soient accessibles, et les foncteurs cochangement de base (cas cofibrant) ou de changement de base (cas fibrant) associés aux flèches $u$ de $\mathcal{C}$ soient accessibles. Alors la catégorie*

[168] Cf. généralisation dans [le] théorème page 422, th. 4.14.26.

*$\underline{\Gamma}(\mathcal{E}/\mathcal{C})$ des sections de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{C}$ est accessible, et pour tout $s \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$, le foncteur "évaluation en $s$" $\varepsilon_s : \underline{\Gamma}(\mathcal{E}/\mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{E}_s$ est accessible.*

**Corollaire 4.14.18.** *Soit $\pi_0$ un cardinal infini tel que les catégories fibres satisfassent la condition $L_{\pi_0}$, et que les foncteurs cochangement de base (resp. changement de base) entre icelles satisfassent également $L_{\pi_0}$. (Un tel $\pi_0$ existe.)*

ⓐ *Alors $\mathcal{M} = \underline{\Gamma}(\mathcal{E}/\mathcal{C})$ satisfait la condition $\underline{L}_{\pi_0}$, et les foncteurs $\varepsilon_s$ aussi, i.e. les $\varinjlim$ grandes devant $\pi_0$ dans $\underline{\Gamma}(\mathcal{E}/\mathcal{C})$ se calculent argument par argument.*

ⓑ *Soit un cardinal $\pi \geqslant \sup(\pi_0, \operatorname{card}\operatorname{réd}\mathcal{C})$. Pour qu'un objet $f$ de $\mathcal{M}$ appartienne à $\mathcal{M}_\pi$, il* suffit *que $\forall\ s \in \operatorname{Ob} C$, $f(s) \overset{\text{déf}}{=} \varepsilon_s(x)$* `[plutôt` $\varepsilon_s(f)$`]` *soit dans $\mathcal{E}_{s\pi}$. (Comparer 4.5.8, page 119.)*

ⓒ *Supposons $pi_0$ choisi de façon*

`[page 392]`

*à satisfaire les conditions supplémentaires suivantes : $\pi_0$ est utile pour $\mathcal{M} = \underline{\Gamma}(\mathcal{E}/\mathcal{C})$, et pour chacune des catégories fibres $\mathcal{E}_s$ ($s \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$) (un tel $\pi_0$ existe). Soit*

$$\pi_1 \ = \ \sup(\pi_0, \operatorname{card}\operatorname{réd}\mathcal{C}, \operatorname{card}\operatorname{réd}\mathcal{M}_{\pi_0}) \ .$$

*Alors pour tout cardinal $\pi \geqslant \pi_1$ et tel que $\pi^{\pi_0} = \pi$, on a*

$$\mathcal{M}_\pi \ = \ \begin{cases} \textit{sous-catégorie strictement pleine de } \mathcal{M} \textit{ formée des } f \in \\ \operatorname{Ob}\mathcal{M} \textit{ telles que } f(s) \in \operatorname{Ob}\mathcal{E}_{s\pi}\ \forall\ s \in S \ \texttt{[plutôt } s \in \\ \operatorname{Ob} C\texttt{]}. \end{cases}$$

*Si de plus $\pi$ est choisi tel qu'on ait*

$$\pi \ \geqslant \ \sup_{s \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}} \operatorname{card}\operatorname{réd}\mathcal{E}_{s\,\pi_0} \ ,$$

*alors la sous-catégorie strictement pleine $\mathcal{E}(\pi)$ de $\mathcal{E}$ telle que $\operatorname{Ob}\mathcal{E}(\pi) = \bigcup_{s \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}} \operatorname{Ob}\mathcal{E}_{s\pi}$ est une sous-catégorie $\mathcal{C}$-cofibrée (resp. $\mathcal{C}$-fibrée) de $\mathcal{E}$, et on a*

$$\underline{\Gamma}(\mathcal{E}/\mathcal{C})_\pi \xleftarrow{\ \sim\ } \underline{\Gamma}(\mathcal{E}(\pi)/C),$$

*donc ($\pi$ étant utile pour $\mathcal{E}$) on a une équivalence de catégories*

$$\underline{\Gamma}(\mathcal{E}/\mathcal{C}) \xleftarrow{\ \sim\ } \operatorname{Ind}_\pi(\underline{\Gamma}(\mathcal{E}(\pi)/\mathcal{C})) \ .$$

`[page 393]`

Toutes ces assertions se prouvent facilement dans l'ordre où elles sont données, en utilisant 4.14.17 et les résultats généraux déjà prouvés. Bien sûr, on peut commencer par remplacer $\mathcal{C}$ par une sous-catégorie réduite $\mathcal{C}_0$ équivalente et $\mathcal{E}$ par $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}|\mathcal{C}$ `[plutôt` $\mathcal{E}|\mathcal{C}_0$`]`, de façon à se réduire (dans b) et c)) au cas où $\operatorname{card}\mathcal{C} \leqslant \pi$.

**Corollaire 4.14.19.** *Sous les conditions de 4.14.17, la sous-catégorie $\underline{\Gamma}_{\text{cocart}}(\mathcal{E}/\mathcal{C})$ de $\mathcal{M} = \underline{\Gamma}(\mathcal{E}/\mathcal{C})$ (cas $p$ cofibrant), resp. la sous-catégorie $\underline{\Gamma}_{\text{cart}}(\mathcal{E}/\mathcal{C})$ (cas $p$ fibrant) est accessible dans $\mathcal{M}$, donc accessible et le foncteur d'inclusion* `[est]` *accessible.*

(**N.B.** Ces deux catégories sont strictement pleines dans $\underline{\Gamma}(\mathcal{E}/\mathcal{C})$, donc l'assertion qu'elles soient accessibles dans celle-ci *équivaut* à la dernière assertion.)

Démonstration de 4.14.19. On peut supposer $\mathcal{C}$ réduite, donc petite. Considérons le cas où $p$ est cofibrant. Pour toute flèche $\lambda : s \longrightarrow t$ dans $\mathcal{C}$, considérons le foncteur

$$\varphi_\lambda \ : \ \mathcal{M} \longrightarrow \underline{\operatorname{Fl}}(\mathcal{E}_t)$$

défini par

[page 394]

$$\varphi_\lambda(f) \;=\; (\lambda_*(f(s)) \xrightarrow{f(\lambda)^\natural} f(t))\ .$$

C'est un foncteur accessible, car son composé avec les foncteurs source et but sont les foncteurs $\lambda_*\varepsilon_s$ et $\varepsilon_t$, donc accessibles, $\varepsilon_s$, $\varepsilon_t$ et $\lambda_*$ étant accessibles. Considérons la sous-catégorie strictement pleine

$$\underline{\mathrm{Is}}(\mathcal{E}_t) \;\subset\; \underline{\mathrm{Fl}}(\mathcal{E}_t)\ ,$$

on sait qu'elle est accessible dans $\underline{\mathrm{Fl}}(\mathcal{E}_t)$ (4.14.12). Donc son image inverse par $\varphi_\lambda$ est accessible dans $\mathcal{M}$, et par suite aussi

$$\underline{\Gamma}_{\mathrm{cart}}(\mathcal{E}/\mathcal{C}) \;\overset{\text{déf}}{=}\; \bigcap_{\lambda\in\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}} \varphi_\lambda^{-1}(\underline{\mathrm{Is}}(\mathcal{E}_t))$$

comme intersection d'une *petite* famille de sous-catégories accessibles dans $\mathcal{M}$, q.e.d. Le cas où $p$ est fibrant se traite de façon similaire, en introduisant les foncteurs

$$\psi_\lambda \;:\; \mathcal{M} = \underline{\Gamma}(\mathcal{E}/\mathcal{C}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Fl}}(\mathcal{E}_s)$$

donnés par

$$\psi_\lambda(f) \;=\; (f(s) \xrightarrow{f(\lambda)^\flat} \lambda^* f(t))\ .$$

[page 395]

**Corollaire 4.14.20.** *Soit $\pi_0$ un cardinal infini choisi comme dans 4.14.18 a).*

(a) *Alors $\mathcal{M}_{\mathrm{c}} = \underline{\Gamma}_{\mathrm{cocart}}(\mathcal{E}/\mathcal{C})$ (resp. $\mathcal{M}_{\mathrm{c}} = \underline{\Gamma}_{\mathrm{cart}}$) est $L_{\pi_0}$-stable dans $\mathcal{M} = \underline{\Gamma}(\mathcal{E}/\mathcal{C})$, ou ce qui revient au même (comme elle est strictement pleine), elle satisfait $L_{\pi_0}$, et le foncteur d'inclusion satisfait à $L_{\pi_0}$. Les $\varinjlim$ grandes devant $\pi_0$ dans cette catégorie se calculent argument par argument.*

(b) *Pour tout cardinal $\pi \geqslant \pi_0$, tout objet de $\mathcal{M}_{\mathrm{c}}$ qui est $\pi$-accessible dans $\mathcal{M}$ l'est (tautologiquement) dans $\mathcal{M}_{\mathrm{c}}$. Si $\pi \geqslant \sup(\pi_0, \mathrm{card\,réd}\,\mathcal{C})$, alors (par 4.14.18 b) tout objet $f$ de $\mathcal{M}_{\mathrm{c}}$ tel que $f(s) \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{E}_{s\,\pi}$ $\forall\ s \in S$* `[plutôt` $s \in \mathrm{Ob}\,C$`]` *est dans $\mathcal{M}_\pi$* et *dans $\mathcal{M}_{\mathrm{c}\,\pi}$.*

(c) *Supposons $\pi_0$ choisi comme dans 4.14.18 c, et que de plus $\mathcal{M}_{\mathrm{c}}$ soit $\pi_0$-accessible dans $\mathcal{M}$. (Un tel $\pi_0$ existe.) On a donc, pour $\pi \geqslant \pi_1 = \sup(\pi_0, \mathrm{card\,réd}\,\mathcal{C}, \mathrm{card\,réd}\,\mathcal{M}_\pi)$ tel que $\pi^{\pi_0} = \pi$,*

$$(\mathcal{M}_{\mathrm{c}})_\pi \;=\; \mathcal{M}_\pi \cap \mathcal{M}_{\mathrm{c}} \;=\; \begin{array}{l}\textit{Sous-catégorie strictement pleine de } \mathcal{M}_{\mathrm{c}} \textit{ formée des } f \\ \textit{telles que } f(s) \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{E}_{s\,\pi}\ \forall\ s \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}.\end{array}$$

[page 396]

*Si de plus $\pi$ est choisi tel qu'on ait $\pi \geqslant \sup_{s\in\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}} \mathrm{card\,réd}\,\mathcal{E}_{s\,\pi_0}$, alors*

$$\begin{cases} \qquad \mathcal{M}_{\mathrm{c}\,\pi} \xleftarrow{\sim} \underline{\Gamma}_{\mathrm{cocart}}(\mathcal{E}(\pi)/\mathcal{C}) \\ \textit{resp.}\ \ \mathcal{M}_{\mathrm{c}\,\pi} \xleftarrow{\sim} \underline{\Gamma}_{\mathrm{cart}}(\mathcal{E}(\pi)/\mathcal{C})\ , \end{cases}$$

*donc ($\pi$ étant utile pour $\mathcal{M}_{\mathrm{c}}$) une équivalence de catégories*

$$\begin{array}{rrcl} & \underline{\Gamma}_{\mathrm{cocart}}(\mathcal{E}/\mathcal{C}) & \xleftarrow{\sim} & \mathrm{Ind}_\pi(\underline{\Gamma}_{\mathrm{cocart}}(\mathcal{E}(\pi)/\mathcal{C})) \\ \textit{resp.} & \underline{\Gamma}_{\mathrm{cart}}(\mathcal{E}/\mathcal{C}) & \xleftarrow{\sim} & \mathrm{Ind}_\pi(\underline{\Gamma}_{\mathrm{cart}}(\mathcal{E}(\pi)/\mathcal{C})). \end{array}$$

DÉMONSTRATION. Tout est clair dans l'ordre où c'est donné en utilisant les deux corollaires précédents.

**Corollaire 4.14.21.** *Considérons un diagramme de foncteurs*

$$(*) \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{E}_1 \arrow[dr, "p_1"] & & \mathcal{E}_2 \arrow[dl, "p_2"'] \\ & \mathcal{E}_0 , & \end{tikzcd}$$

*les catégories et les foncteurs étant accessibles.*

[page 397]

*a) Le produit 2-fibré*

$$\mathcal{M}_0 \;=\; \mathcal{E}_1 \overset{2}{\times}_{\mathcal{E}_0} \mathcal{E}_2$$

*est accessible, et les foncteurs canoniques $\mathcal{M} \to \mathcal{E}_1$, $\mathcal{M} \to \mathcal{E}_2$ sont accessibles.*

*b)* ([169]). *La catégorie $\mathcal{M}$ des triples $(x_1, x_2, u)$ avec $x_1 \in \operatorname{Ob} \mathcal{E}_1$, $x_2 \in \operatorname{Ob} \mathcal{E}_2$, et*

$$u \;:\; p_1(x_1) \longrightarrow p_2(x_2) \;,$$

*est accessible, et les foncteurs canoniques $\mathcal{M} \to \mathcal{E}_1$, $\mathcal{M} \to \mathcal{E}_2$ sont accessibles.*

*c) La sous-catégorie strictement pleine $\mathcal{M}_0$ de $\mathcal{M}$ est accessible dans $\mathcal{M}$.*

DÉMONSTRATION. Soit $\mathcal{C}$ la catégorie

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[dr] & & 2 \arrow[dl] \\ & 0 , & \end{tikzcd}$$

et $\mathcal{E}$ la catégorie cofibrée sur $\mathcal{C}$ définie par le diagramme $(*)$. On est sous les conditions de 4.14.17. La catégorie $\Gamma = \underline{\Gamma}(\mathcal{E}/\mathcal{C})$ s'interprète

[page 398]

comme la catégorie des quintuplets $(x_0, x_1, x_2, u_1, u_2)$, avec $x_i \in \operatorname{Ob} \mathcal{E}$ pour $i \in \{0, 1, 2\}$, et $u_1, u_2 \in \operatorname{Fl} \mathcal{E}_0$,

$$(**) \qquad \begin{tikzcd} p_1(x_1) \arrow[dr, "u_1"] & & p_2(x_2) \arrow[dl, "u_2"'] \\ & x_0 \;. & \end{tikzcd}$$

En vertu de 4.14.18, cette catégorie $\underline{\Gamma}$ est accessible. La catégorie $\mathcal{M}$ est équivalente à la sous-catégorie strictement pleine $\Gamma_0$ de $\Gamma$, formée des quintuplets pour lesquels on a $u_2 \in \underline{\operatorname{Is}}\, \mathcal{E}_0$. On a en effet des foncteurs quasi-inverses l'un de l'autre

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M} \arrow[r, shift left, "\alpha"] & \Gamma_1 \arrow[l, shift left, "\beta"] \end{tikzcd}$$

[169] Ceci est contenu dans 4.14.22.1 ci-dessus (p. 406), appliqué à $\Pi = \mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2$, $\Pi' = \mathcal{E}_0$, et $F, G : \Pi \rightrightarrows \Pi'$ donnés par $F = p_1 \circ \mathrm{pr}_1$ et $G = p_2 \circ \mathrm{pr}_2$. D'autre part, a) et c) résultent facilement de b).

donnés par

$$\begin{aligned}\alpha(x_1, x_2, u) &= (p_2(x_2), x_1, x_2, u, \mathrm{id}_{p_2(x_2)}) \\ \beta(x_0, x_1, x_2, u_1, u_2) &= (x_1, x_2, u_2^{-1}u_1) ,\end{aligned}$$

on a alors

$$\begin{aligned}\beta\alpha &= \mathrm{id}_{\mathcal{M}} \\ \alpha\beta &\xrightarrow{\sim} \mathrm{id}_{\Gamma_1} .\end{aligned}$$

D'autre part, $\Gamma_1$ est évidemment accessible dans $\mathcal{M}$, comme image inverse de $\underline{\mathrm{Is}}(\mathcal{E}_0)$ (qui

`[page 399]`

est accessible dans $\underline{\mathrm{Fl}}(\mathcal{E}_0)$ par le foncteur accessible

$$\underline{\Gamma} \longrightarrow \underline{\mathrm{Fl}}(\mathcal{E}_0)$$

donné par $(x_1, x_1, x_2, u_1, u_2) \longmapsto u_2$. Cela prouve que $\mathcal{M}$, qui est équivalente à $\Gamma_1$, est également accessible, et l'accessibilité du foncteur canonique $\mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{E}_i$ $(i \in \{1,2\})$ résulte de celle de $\Gamma \longrightarrow \mathcal{E}_i$, impliquant celle du composé $\Gamma_1 \hookrightarrow \Gamma \longrightarrow \mathcal{E}_i$. Cela prouve donc b). Pour prouver a), il suffit de voir que $\mathcal{M}_0$ est accessible dans $\mathcal{M}$, or c'est encore l'image inverse de $\underline{\mathrm{Is}}(\mathcal{E}_0) \subset \underline{\mathrm{Fl}}(\mathcal{E}_0)$ par le foncteur accessible canonique

$$\mathcal{M} \longrightarrow \underline{\mathrm{Fl}}(\mathcal{E}_0) ,$$

donc $\mathcal{M}$ est bien accessible dans $\mathcal{M}$, comme image inverse d'une sous-catégorie accessible dans $\underline{\mathrm{Fl}}(\mathcal{E})$. On peut d'ailleurs aussi interpréter $\mathcal{M}$, à équivalence de catégories près, comme

`[page 400]`

$$\mathcal{M}_0 \simeq \underline{\Gamma}_{\mathrm{cocart}}(\mathcal{E}/\mathcal{C}) ,$$

les foncteurs canoniques $\mathcal{M}_0 \longrightarrow \mathcal{E}_i$ $(i \in \{0,1\})$ s'interprètant comme des foncteurs évaluation, ce qui donne a) directement, comme cas particulier de 4.14.19.

**4.14.22.** Démonstration de 4.14.17. Le cas où $p$ est cofibrant a déjà été démontré (th. 4.10.8, p. 263). Nous allons voir que le cas où $p$ est fibrant se ramène au théorème précédent (dans un cas très particulier), en utilisant à fond les résultats généraux sur les parties accessibles d'une catégorie accessible. Notons que les assertions a) et b) du corollaire 4.14.18 se prouvent de façon AQT `[âne qui trotte]` sans avoir à faire appel à 4.14.17. Le a) implique déjà que les foncteurs évaluation $\varepsilon_s : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{E}_s$ sont accessibles. Il reste donc à prouver

`[page 401]`

que $\mathcal{M} = \underline{\Gamma}(\mathcal{E}/\mathcal{C})$ est accessible, dans le cas où $p$ est *fibrant.* On supposera de plus que $\mathcal{C}$ est petite (quitte à remplacer $\mathcal{C}$ par une petite sous-catégorie pleine équivalente).

Soient

$$\begin{aligned}\Pi &= \textstyle\prod_{s \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}} \mathcal{E}_s \\ \Pi' &= \textstyle\prod_{\lambda \in \mathrm{Fl}\,\mathcal{C}} \mathcal{E}_{s(\lambda)} ,\end{aligned}$$

où $s(\lambda)$ désigne la *source* $s$ de la flèche $\lambda : s \longrightarrow t$ dans $\mathcal{C}$. $\Pi$, $\Pi'$ sont des catégories accessibles, comme (petits) produits de catégories accessibles. (Cas particulier trivial de 4.10.8, pour une catégorie d'indices discrète.) On va définir deux foncteurs

$$\Pi \underset{G}{\overset{F}{\rightrightarrows}} \Pi'$$

en définissant pour tout $\lambda : s_0 \longrightarrow t_0$ dans $\mathrm{Fl}\,\mathcal{C}$ deux foncteurs

`[page 402]`

$$\begin{cases} \Pi \underset{G_\lambda}{\overset{F_\lambda}{\rightrightarrows}} \mathcal{E}_{s(\lambda)=s_0} & \\ F_\lambda = \mathrm{pr}_{s_0} & \text{projection de } \Pi = \prod_s \mathcal{E}_s \text{ sur le facteur } \mathcal{E}_{s_0} \\ G_\lambda = \lambda^* \mathrm{pr}_{s_1} & \text{composé } \Pi \xrightarrow{\mathrm{pr}_{s_1}} \mathcal{E}_{s_1} \xrightarrow{\lambda^*} \mathcal{E}_{s_0} \\ & [\texttt{plutôt } \lambda^*\mathrm{pr}_{t_0} \texttt{ resp. } \Pi \xrightarrow{\mathrm{pr}_{t_0}} \mathcal{E}_{t_0} \xrightarrow{\lambda^*} \mathcal{E}_{s_0}] \end{cases} \quad ([170], [171]) .$$

Soit $f \in \mathcal{M} = \underline{\Gamma}(\mathcal{E}/\mathcal{C})$, alors pour tout $\lambda \in \mathrm{Fl}\,\mathcal{C}$, $f$ définit une flèche

$$\alpha_\lambda(f) \ : \ \underbrace{f(s)}_{= F_\lambda(\varepsilon(f))} \xrightarrow{f(\lambda)^\flat} \underbrace{\lambda^*(f(t))}_{= G_\lambda(\varepsilon(f))} ,$$

*fonctorielle* en $f$. On a un foncteur

$$\varepsilon \ = \ (\varepsilon_s)_{s \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}} \ : \ \mathcal{M} \longrightarrow \Pi ,$$

et pour tout $\lambda \in \mathrm{Fl}\,\mathcal{C}$ un homomorphisme fonctoriel

$$\alpha_\lambda \ : \ F_\lambda \circ \varepsilon \longrightarrow G_\lambda \circ \varepsilon ,$$

d'où un homomorphisme fonctoriel

$$\alpha \ = \ (\alpha_\lambda)_{\lambda \in \mathrm{Fl}\,\mathcal{C}} \ : \ F \circ \varepsilon \longrightarrow G \circ \varepsilon .$$

Soit alors $\mathcal{M}'$ la catégorie suivante :

`[page 403]`

$\mathcal{M}'$ = catégorie des couples $(X, u)$, avec $X$ dans $\mathrm{Ob}\,\Pi$, et $u : F(X) \longrightarrow G(X)$ une flèche dans $\Pi'$.

L'homomorphisme fonctoriel $\alpha : F \circ \varepsilon \longrightarrow G \circ \varepsilon$ définit un foncteur

$$\mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}' ,$$

et il est immédiat que ce foncteur est pleinement fidèle. En fait, la catégorie $\mathcal{M}'$ est isomorphe à la catégorie formée des couples $(f_0, f_1)$ de deux applications

$$\begin{array}{llcllcl} f_0 : & \mathrm{Ob}\,\mathcal{C} & \longrightarrow & \mathrm{Ob}\,\mathcal{E} & s & \longmapsto & f_0(s) \\ f_1 : & \mathrm{Fl}\,\mathcal{C} & \longrightarrow & \mathrm{Fl}\,\mathcal{E} & \lambda & \longmapsto & f_1(\lambda) \end{array}$$

de telle façon que $f_1$ et $f_0$ soient compatibles avec les applications source et but, i.e. qu'ils définissent un homomorphisme de *diagrammes* $f : \mathrm{diag}\,\mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{diag}\,\mathcal{E}$, et que cet homomorphisme soit inverse à droit de $\mathrm{diag}(p) : \mathrm{diag}\,\mathcal{E} \longrightarrow \mathrm{diag}\,\mathcal{C}$.

[170] Il est immédiat que les $F_\lambda$, $G_\lambda$, donc $F$ et $G$, sont des foncteurs *accessibles.*

[171] **N.B.** On suppose choisi pour tout $\lambda \in \mathrm{Fl}\,\mathcal{C}$ un foncteur image inverse $\lambda^* : \mathcal{E}_t \longrightarrow \mathcal{E}_s$. On suppose que si $\lambda$ est une flèche identique, $\mathrm{id}_s$, `[on]` choisit $\lambda^* = \mathrm{id}_{\mathcal{E}_s}$.

`[page 404]`

Le foncteur précédent $\mathcal{M} \hookrightarrow \mathcal{M}'$ s'interprète comme le foncteur qui associe à toute sections $f$ de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{C}$, le morphisme de diagrammes correspondant. C'est donc l'inclusion d'une sous-catégorie *strictement pleine* de $\mathcal{M}'$. Donc pour prouver que $\mathcal{M}$ est accessible, il suffit de prouver :

a) $\mathcal{M}'$ est accessible.

b) $\mathcal{M}$ est accessible dans $\mathcal{M}'$.

Prouvons d'abord b) (en admettant a). La sous-catégorie $\mathcal{M}$ de $\mathcal{M}'$ est définie par deux types des conditions, sur un objet $f = (f_0, f_1)$ de $\mathcal{M}'$ :

1°) $\forall\, s \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C},\ f_1(\mathrm{id}_s) = \mathrm{id}_{f_0(s)}$.

2°) Si $s \xrightarrow{\lambda} t \xrightarrow{\mu} u$ sont deux flèches composables dans $\mathcal{C}$, alors

$$f_1(\mu\lambda) \;=\; f_1(\mu) f_1(\lambda)\ .$$

Ces conditions s'explicitent l'une et `[l'autre par]` l'égalité d'une double-flèche dans $\mathcal{E}_s$,

`[page 405]`

savoir

$$f_0(s) \underset{\mathrm{id}_{f_0(s)}}{\overset{f_1(\mathrm{id}_s)}{\rightrightarrows}} f_0(s)$$

dans le cas 1°), et

$$f_0(s) \underset{(f_1(\mu)f_1(\lambda))^\flat}{\overset{f_1(\mu\lambda)^\flat}{\rightrightarrows}} (\mu\lambda)^*(f_0(u))$$

dans le cas 2°). Dans l'un et l'autre cas, on a un foncteur

$$\mathcal{M}' \xrightarrow{\gamma_s \text{ resp. } \gamma_{\lambda,\mu}} \underline{\mathrm{Hom}}(I, \mathcal{E}_s)$$

dans la catégorie des double-flèches de $\mathcal{E}_s$ ($I$ désignant la catégorie double-flèche type $0 \rightrightarrows 1$), foncteur qui est (trivialement) accessible. Soit alors $I \xrightarrow{i} \mathbf{\Delta}_1$ le foncteur canonique, et

$$\underbrace{\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{\Delta}_1, \mathcal{E}_s)}_{\simeq\, \underline{\mathrm{Fl}}(\mathcal{E}_s)} \hookrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(I, \mathcal{E}_s)$$

le foncteur $u \longmapsto u \circ i$, qui est un foncteur strictement pleine fidèle, ayant comme image la sous-catégorie des double-flèches $(u, v)$ telles que $u = v$. Comme le foncteur d'inclusion est accessible et $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{\Delta}_1, \mathcal{E}_s)$ et $\underline{\mathrm{Hom}}(I, \mathcal{E}_s)$ accessibles

`[page 406]`

(cas particulier de 4.14.1, ou aussi de 4.10.8 !), on voit que la sous-catégorie strictement pleine de $\underline{\mathrm{Hom}}(I, \mathcal{E}_s)$ des double-flèches égalisées dans $\mathcal{E}_s$, est accessible dans $\underline{\mathrm{Hom}}(I, \mathcal{E}_s)$. Donc, son image inverse dans $\mathcal{M}'$ est accessible. Donc l'intersection de ces images inverses pour $s \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ et $(\lambda, \mu) \in \mathrm{Fl}_2(\mathcal{C})$ variables, l'est également ($\mathcal{C}$ étant petite).

Donc tout revient à prouver que $\mathcal{M}'$ est accessible, ce qui est contenu dans le

**Lemme 4.14.22.1.** *Soient* $\Pi$, $\Pi'$ *deux catégories accessibles,* $F, G : \Pi \rightrightarrows \Pi'$ *deux foncteurs accessibles, et* $\mathcal{M}'$ *la catégorie des couples* $(X, u)$, *avec* $X \in \mathrm{Ob}\,\Pi$ *et* $u : F(x) \longrightarrow G(x)$ *une flèche de* $\Pi'$. *Alors* $\mathcal{M}'$ *est accessible, et le foncteur canonique* $\mathcal{M}' \longrightarrow \Pi$ *est accessible.*

Démonstration du Lemme. La donnée de $\Pi$, $\Pi'$, $F$, $G$ définit une catégorie cofibrée $\mathcal{F}$ sur la catégorie $I = (0 \rightrightarrows 1)$

[page 407]

précédente. La catégorie $\underline{\Gamma}(\mathcal{F}/I)$ s'interprète, à isomorphisme près, comme la catégorie des triples $(x,u,v)$ avec $x \in \operatorname{Ob}\Pi$, $x' \in \operatorname{Ob}\Pi'$, et $u$ et $v$ des flèches

$$\begin{tikzcd} F(x) \arrow[dr, "u"'] & & G(x) \arrow[dl, "v"] \\ & x' & \end{tikzcd}$$

dans $\Pi'$. La catégorie $\mathcal{M}'$ est équivalente à la sous-catégorie strictement pleine de $\underline{\Gamma}(\mathcal{F}/I)$, formée des triples $(x,u,v)$ tels que $v$ soit un isomorphisme, i.e. à la sous-catégorie de $\underline{\Gamma}(\mathcal{F}/I)$, image inverse de $\underline{\mathrm{Is}}(\Pi')$ par le foncteur $(x,u,v) \longmapsto v$,

$$\underline{\Gamma}(\mathcal{F}/I) \longrightarrow \underline{\mathrm{Fl}}(\Pi') .$$

Or par 4.10.8, $\underline{\Gamma}(\mathcal{F}/I)$ est accessible, et le foncteur précédent est bien sûr accessible. Enfin, par 4.14.12,

[page 408]

$\underline{\mathrm{Is}}(\Pi')$ est accessible dans la catégorie accessible $\underline{\mathrm{Fl}}(\Pi')$. Donc son image inverse $\mathcal{M}'$ dans $\underline{\Gamma}(\mathcal{F}/I)$ est accessible dans $\underline{\Gamma}(\mathcal{F}/I)$, donc accessible. Donc il en est de même de la catégorie équivalente, q.e.d.

Ainsi, grâce aux résultats généraux sur les parties accessibles des catégories accessibles, le théorème 4.14.17, dans le cas où $p$ est fibrant, est ramené aux cas cofibrant, dans le cas très particulier où la catégorie d'indices est $I = (0 \rightrightarrows 1)$. On pourrait d'ailleurs faire une réduction similaire dans le cas où $p$ est cofibrant, par une démonstration pratiquement identique. En d'autres termes, le théorème 4.10.8 se ramène au cas où la catégorie d'indices est $I = (0 \rightrightarrows 1)$. Mais je suspecte que la démonstration du théorème dans ce cas particulier, n'est pas essentiellement plus simple que dans le cas général.

[page 409]

**4.14.23.** On peut se demander de trouver un énoncé assurant l'accessibilité d'une catégorie $\underline{\Gamma}(\mathcal{E}/\mathcal{C})$, qui coiffe les deux cas envisagés dans 4.14.17. Voici ce que je peux proposer. Je vais faire l'hypothèse suivante sur les foncteur $p : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{C}$ (en plus de celle que $\mathcal{C}$ soit essentiellement petite) :

H) Pour tout $\lambda \in \operatorname{Fl}\mathcal{C}$, la catégorie $\mathcal{E}_\lambda = \mathcal{E} \times_{\mathcal{C}} (\mathbf{\Delta}_1, i_\lambda)$, où $i_\lambda : \mathbf{\Delta}_1 \longrightarrow \mathcal{C}$ est le foncteur défini par $\lambda$, est accessible, et le foncteur canonique $\mathcal{E}_\lambda \xrightarrow{p_\lambda} \mathbf{\Delta}_1$ est accessible.

Notons que si $\lambda : s \longrightarrow t$ dans $\mathcal{C}$ est tel que $\mathcal{E}_\lambda$ et $p_\lambda$ soient accessibles, alors $\mathcal{E}_s$ et $\mathcal{E}_t$ sont accessible, car isomorphes aux catégories image inverse par $p_\lambda : \mathcal{E}_\lambda \longrightarrow \mathbf{\Delta}_1$ des sous-catégories $\{0\}$ resp. $\{1\}$ de $\Delta_1$, lesquelles sont accessibles dans la catégorie accessible $\mathbf{\Delta}_1$, donc

[page 410]

$\mathcal{E}_{\lambda_0}$ et $\mathcal{E}_{\lambda_1}$ sont accessibles dans $\mathcal{E}_\lambda$, donc sont accessibles, donc aussi $\mathcal{E}_s$ et $\mathcal{E}_t$. Ainsi, l'hypothèse H) implique que les catégories fibres sont accessibles. Notons de plus :

**Lemme 4.14.23.1.** *Supposons que $p : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{C}$ soit cofibrant ou fibrant, et soit $(\lambda : s \longrightarrow t) \in \operatorname{Fl}(\mathcal{C})$. Pour que $\mathcal{E}_\lambda$ soit accessible et $\mathcal{E}_\lambda \xrightarrow{p_\lambda} \mathbf{\Delta}_1$ accessible, il faut et il suffit* *que $\mathcal{E}_s$, $\mathcal{E}_t$ soient accessibles et $\lambda_* : \mathcal{E}_s \longrightarrow \mathcal{E}_t$ resp. $\lambda^* : \mathcal{E}_t \longrightarrow \mathcal{E}_s$ soit un foncteur accessible.*

Démonstration. On peut supposer que $\mathcal{C} = \mathbf{\Delta}_1$, et que $\mathcal{E}$ est la catégorie cofibrée (resp. fibrée) sur $\mathbf{\Delta}_1$ définie par un foncteur $\varphi : \mathcal{E}_0 \longrightarrow \mathcal{E}_1$ (resp. $\psi : \mathcal{E}_1 \longrightarrow \mathcal{E}_0$), et à montrer que $\mathcal{E}$ et $p : \mathcal{E} \longrightarrow \mathbf{\Delta}_1$ sont accessibles si et seulement si $\mathcal{E}_0$ et $\mathcal{E}_1$ et $\varphi$ (resp. $\psi$) le sont.

[page 411]

Prouvons le "il faut". On a déjà vu que si $\mathcal{E}$, $p$ sont accessibles, $\mathcal{E}_0$ et $\mathcal{E}_1$ sont accessibles dans $\mathcal{E}_s$, donc accessibles, et les foncteurs d'inclusion

$$\mathcal{E}_0 \hookrightarrow \mathcal{E} \hookleftarrow \mathcal{E}_1$$

accessibles. Dire que $p$ est cofibrant (resp. fibrant) signifie que le foncteur d'inclusion $\mathcal{E}_1 \hookrightarrow \mathcal{E}$ admet un adjoint à droite $\bar{\varphi}$ (resp. que le foncteur $\mathcal{E}_0 \hookrightarrow \mathcal{E}$ admet un adjoint à gauche $\tilde{\psi}$). Alors $\varphi$ (resp. $\psi$) est le composé $\mathcal{E}_0 \longrightarrow \mathcal{E} \xrightarrow{\bar{\varphi}} \mathcal{E}_1$ (resp. le composé $\mathcal{E}_1 \hookrightarrow \mathcal{E} \xrightarrow{\tilde{\psi}} \mathcal{E}_1$). Donc pour prouver que $\varphi$ (resp. $\psi$) est accessible, il suffit de prouver que $\bar{\varphi}$ (resp. $\tilde{\psi}$) l'est. Cela est un cas particulier du

**Lemme 4.14.23.2.** *Soient $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$ deux catégories accessibles* ([172]), *et $\mathcal{E} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathcal{E}'$ un couple de foncteurs adjoints entre $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$. Alors $F$ et $G$ sont accessibles.*

[page 412]

En effet, $F$ est accessible, car il commute aux petites $\varinjlim$ quelconques, a fortiori il satisfait $\mathrm{L}_{\pi_0}$ (où $\pi_0$ est tel que $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$ satisfassent $\mathrm{L}_{\pi_0}$). Prouvons que $G$ est accessible. Si $S$ est un petit ensemble d'éléments générateur dans $\mathcal{E}$, de sorte que la petite famille des foncteurs

$$h_\xi \;=\; (x \longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(\xi, x)) \;:\; \mathcal{E} \longrightarrow \mathrm{Ens}$$

est conservative, pour prouver que $G$ est accessible, il suffit de prouver que les $h_\xi \circ G$ ($\xi \in S \subset \mathrm{Ob}\,\mathcal{E}$) le sont. Or

$$L_\xi \circ G(x') \;=\; \mathrm{Hom}(\xi, G(x')) \;\simeq\; \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}'}(F(\xi), x')\;,$$

et comme $F(\xi)$ est un objet accessible de $\mathcal{E}'$, le foncteur

$$x' \;\longmapsto\; (L_\xi \circ G)(x') \;\simeq\; \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}'}(F(\xi), x')$$

est bien accessible, q.e.d.

Cela prouve le "il faut" dans 4.14.23.1. Prouvons le "il suffit", i.e. supposons $\mathcal{E}_s$, $\mathcal{E}_t$ accessibles, et $\varphi$ (resp. $\psi$) accessible.

[page 413]

Dans les deux cas, $\mathcal{E}_0$ est un ouvert de $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}_1$ est le fermé complémentaire, et $\mathcal{E}$ est la catégorie "recollée" à l'aide du bifoncteur

$$H \;:\; \mathcal{E}_0^\circ \times \mathcal{E}_1 \longrightarrow \mathrm{Ens}$$

[172]**N.B.** Il suffit que $\mathcal{E}$ admette une petite sous-catégorie génératrice, et que les objets de $\mathcal{E}'$ soient accessibles.

donné par

$$\begin{cases} H(x_0, x_1) &= \operatorname{Hom}(\varphi(x_0), x_1) \\ \quad\text{resp.} & \\ H(x_0, x_1) &= \operatorname{Hom}(x_0, \psi(x_1)) \ , \end{cases}$$

suivant qu'on est dans le cas $p$ cofibrant ou $p$ fibrant. On va utiliser la

**Proposition 4.14.24** ([173]). *Soit $\mathcal{E}$ une catégorie, $\mathcal{E}_0$ une sous-catégorie ouverte, $\mathcal{E}_1$ la sous-catégorie fermée complémentaire. Conditions équivalentes :*

*a) $\mathcal{E}$ est accessible, et $\mathcal{E} \longrightarrow \mathbf{\Delta}_1$ (de fibres $\mathcal{E}_0$, $\mathcal{E}_1$) est accessible.*

*b) $\mathcal{E}$ est accessible, et $\mathcal{E}_0$, $\mathcal{E}_1$ sont accessibles dans $\mathcal{E}$.*

*c) $\mathcal{E}_0$, $\mathcal{E}_1$ sont accessibles, et pour tout $x_0 \in \operatorname{Ob} \mathcal{E}_0$, le foncteur*

$$x_1 \longmapsto \underline{\operatorname{Hom}}_{\mathcal{E}}(x_0, x_1) \ : \ \mathcal{E}_1 \longrightarrow \operatorname{Ens}$$

[page 414]

*est accessible, et il existe $\pi$ tel que pour tout $x_1 \in \operatorname{Ob} \mathcal{E}_1$, le foncteur*

$$x_0 \longmapsto \underline{\operatorname{Hom}}_{\mathcal{E}}(x_0, x_1)^\circ \ : \ \mathcal{E}_0 \longrightarrow (\operatorname{Ens})^\circ$$

*soit $\pi$-accessible.*

Admettons ce lemme `[plutôt cette proposition]`, achevons la démonstration de 4.14.23.1. On suppose $\mathcal{E}_0$, $\mathcal{E}_1$ et $\varphi$ (resp. $\psi$) accessibles, on veut prouver la condition a) de 4.14.23.3. Pour ceci, il suffit de prouver la condition c). Or on a, dans le cas $p$ cofibrant,

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{E}}(x_0, x_1) \ \simeq \ \operatorname{Hom}_{\mathcal{E}_1}(\varphi(x_0), x_1) \ ,$$

c'est bien accessible en $x_1$, puisque $\mathcal{E}_1$ est accessible, et $\pi$-accessible en $x_0$ si $\varphi$ l'est, comme composé de $\varphi$ avec $\mathcal{E}_1 \longrightarrow \operatorname{Ens}$, $\operatorname{Hom}(-, x_1)$, qui l'est. Dans le cas $p$ fibrant, on a

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{E}}(x_0, x_1) \ \simeq \ \operatorname{Hom}_{\mathcal{E}_0}(x_0, \psi(x_1)) \ ,$$

c'est accessible en $x_1$, comme le composé du foncteur accessible $\psi : \mathcal{E}_1 \longrightarrow \mathcal{E}_0$, et du foncteur également accessible $\operatorname{Hom}(x_0, -) : \mathcal{E}_0 \longrightarrow \operatorname{Ens}$, qui est $\pi$-accessible en $x_0$ tautologiquement.

Pour achever la démonstration de 4.14.23.1, il reste donc à prouver la proposition 4.14.24. On a déjà noté qu'on a a $\Longrightarrow$ b, et b $\Longrightarrow$ c clair, puisque le foncteur envisagé $\mathcal{E} \longrightarrow \operatorname{Ens}$ est le composé $\mathcal{E}_1 \overset{\text{incl.}}{\hookrightarrow} \mathcal{E} \xrightarrow{\operatorname{Hom}_{\mathcal{E}}(x_0,-)} \operatorname{Ens}$, est accessible comme composé de deux

[page 415]

foncteurs accessibles. Reste donc à prouver c $\Longrightarrow$ a. Soit donc $\pi_0$ un cardinal utile pour $\mathcal{E}_0$, et tel que les foncteurs

$$x_0 \longmapsto H(x_0, x_1) \ : \ \mathcal{E}_0 \longrightarrow \operatorname{Ens}^\circ$$

soient $\pi_0$-accessibles, soit $\pi$ un cardinal $\geqslant \sup(\pi_0, \operatorname{card} \operatorname{réd} \mathcal{E}_{0\,\pi_0})$ tel que $\pi^{\pi_0} = \pi$ (donc utile pour $\mathcal{E}_0$), utile pour $\mathcal{E}_1$, et tel que les foncteurs

$$x_1 \longmapsto H(x_0, x_1) \ : \ \mathcal{E}_1 \longrightarrow \operatorname{Ens}$$

[173]cf. énoncés plus généraux et démonstration sympathique, 4.15.1 et 4.15.4 (p. 425, 432).

soient $\pi$-accessibles, pour $x_0 \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{E}_{0\,\pi_0}$. Soit $\mathcal{E}(\pi)$ la sous-catégorie strictement pleine de $\mathcal{E}$, telle que

$$\mathrm{Ob}\,\mathcal{E}(\pi) \;=\; \mathrm{Ob}\,\mathcal{E}_{0\,\pi} \cup \mathrm{Ob}\,\mathcal{E}_{1\,\pi}\;.$$

Je dis que

1°) $\mathcal{E}$ satisfait à $\mathrm{L}_\pi$, et $\mathcal{E}_0$ et $\mathcal{E}_1$ sont stables dans $\mathcal{E}$ sous $\mathrm{L}_\pi$, les foncteurs $\mathcal{E}_0 \longrightarrow \mathcal{E}$, $\mathcal{E}_1 \longrightarrow \mathcal{E}$, $\mathcal{E} \longrightarrow \mathbf{\Delta}_1$ satisfont $\mathrm{L}_\pi$ ([174]).

2°) $\mathcal{E}(\pi) = \mathcal{E}_\pi$ (d'où un foncteur pleinement fidèle

$$\mathrm{Ind}_\pi(\mathcal{E}(\pi)) \longrightarrow \mathcal{E}\ \ ).$$

3°) Ledit foncteur est essentiellement surjectif,

[page 416]

donc une équivalence de catégories.

Notons que 2°) et 3°) impliquent que $\mathcal{E}$ est accessible, et 1°) que $\mathcal{E} \longrightarrow \mathbf{\Delta}_1$ est accessible, d'où la condition a) du lemme qu'il s'agit d'établir. Donc tout revient à prouver les 1°, 2°, 3° ci-dessus.

1°) Comme $\mathcal{E}_1$ est fermée dans $\mathcal{E}$, il est clair que $\mathcal{E}$ est stable par toutes $\varinjlim$ représentables dans $\mathcal{E}$, et plus précisément, que pour un foncteur $I \longrightarrow \mathcal{E}_1$, sa limite inductive dans $\mathcal{E}_1$ existe si et seulement si elle existe dans $\mathcal{E}$, et les deux sont isomorphes. Supposons $I$ grande devant $\pi$, et soit $\varphi : I \longrightarrow \mathcal{E}$, $i \longmapsto x_i$. Distinguons deux cas.

a) $\varphi$ prend ses valeurs dans $\mathcal{E}_0$. Soit $x_0$ sa limite inductive *dans* $\mathcal{E}_0$. Je dis que c'est aussi une limite inductive dans $\mathcal{E}$. Il faut prouver que pour $x_1 \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{E}_1$, la flèche

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(x_0, x_1) \longrightarrow \varprojlim_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(x_i, x_1)$$

est isomorphe. Or c'est le cas

[page 417]

par hypothèse sur $\pi$,

$$\xi \longmapsto H(\xi, x_1) \;:\; \mathcal{E}_0 \longrightarrow (\mathrm{Ens})^\circ$$

satisfait à $\mathrm{L}_\pi$ pour tout $x_1$ dans $\mathrm{Ob}\,\mathcal{E}_1$.

b) $\varphi$ ne se factorise pas par $\mathcal{E}_0$, i.e. $\exists\, i_0 \in \mathrm{Ob}\, I$ avec $\varphi(i_0) \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{E}_1$. Alors on a $\varphi(i) \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{E}_1$ pour tout $i \in \mathrm{Ob}\, I[i_0]$, où $I[i_0]$ désigne la sous-catégorie strictement pleine de $I$ formée des $i$ tels que $i \geqslant i_0$. Cette catégorie est cofinale dans $I$, donc grande devant $\pi$ comme $I$, et pour que $\varinjlim_I x_i$ existe, il faut et il suffit que $\varinjlim_{I[i_0]} x_i$ existe, ce qui est le cas d'après les cas a) déjà traité.

Cela prouve donc en même temps que $\mathcal{E}$ satisfait à $\mathrm{L}_\pi$, et que $\mathcal{E}_0$ et $\mathcal{E}_1$ sont $\mathrm{L}_\pi$-stables. La démonstration montre en même temps que le foncteur $p : \mathcal{E} \longrightarrow \mathbf{\Delta}_1$ satisfait à $\mathrm{L}_\pi$.

2°) De ceci résulte aussitôt que $\mathcal{E}_\pi \subset \mathcal{E}(\pi)$. Prouvons qu'on a aussi

$$\mathcal{E}(\pi) \;\subset\; \mathcal{E}_\pi\;,$$

et distinguons encore deux cas, pour

---

[174]il suffit que $\mathcal{E}_0$ et $\mathcal{E}_1$ satisfassent $\mathrm{L}_\pi$, et que

$$x_0 \longmapsto H(x_0, x_1) \;:\; \mathcal{E}_0 \longrightarrow \mathrm{Ens}^\circ$$

satisfasse $\mathrm{L}_\pi$ $\forall\, x \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{E}$.

[page 418]

$x \in \operatorname{Ob} E(\pi)$, suivant que $x$ est dans $\mathcal{E}_{0\,\pi}$ ou $\mathcal{E}_{1\,\pi}$. S'il est dans $\mathcal{E}_{1\,\pi}$, pour prouver que

$$(*) \qquad \operatorname{Hom}_{\mathcal{E}}(x, \underbrace{\varinjlim y_i}_{y}) \xleftarrow{\sim} \varinjlim_i \operatorname{Hom}_{\mathcal{E}}(x, y_i)$$

(pour un système inductif $(y_i)_{i \in I}$ dans $\mathcal{E}$ grand devant $\pi$), si les $y_i$ sont dans $\mathcal{E}_0$, donc $y \in \mathcal{E}_0$, alors les deux membres sont vides, et c'est OK. Sinon, on peut supposer (quitte à remplacer $I$ par un $I[i_0]$) que les $x_i$ sont dans $\mathcal{E}_1$, et alors c'est OK aussi, puisque $y$ est aussi la $\varinjlim$ dans $\mathcal{E}_1$, d'après 1°).

Si $x$ est dans $\mathcal{E}_{0\,\pi}$, alors $(*)$ est clair si les $y_i$ sont dans $\mathcal{E}_0$. Sinon, on peut supposer encore que les $y_i$ sont dans $\mathcal{E}_0$, et $(*)$ s'écrit

$$H(x, \varinjlim y_i) \xleftarrow{\sim} \varinjlim H(x, y_i) ,$$

pour $x \in \operatorname{Ob} \mathcal{E}_{0\,\pi}$, les $y_i$ dans $\mathcal{E}_1$, $I$ grande devant $\pi$. En d'autres termes, il faut prouver que le foncteur

$$x_1 \longmapsto H(x_0, x_1) \ : \ \mathcal{E}_1 \longrightarrow \mathrm{Ens}$$

[page 419]

est $\pi$-accessible, quand $x_0$ est dans $\mathcal{E}_{0\,\pi}$. Or par hypothèse sur $\pi$, il est $\pi$-accessible si $x_0$ est dans $\mathcal{E}_{0\,\pi_0}$. Mais si $x$ est dans $\mathcal{E}_{0\,\pi}$, on aura

$$x_0 \ = \ \varinjlim_{i \in I} x_{0\,i} \qquad \begin{cases} I \ \text{grande devant} \ \pi_0, \\ \text{les} \ x_{0\,i} \ \text{dans} \ \mathcal{E}_{0\,\pi_0}, \\ \operatorname{card} I \leqslant \pi \end{cases}$$

(car $\pi_0$ est utile pour $\mathcal{E}_0$ par hypothèse, et $\pi$ satisfait $\pi^{\pi_0} = \pi \geqslant \operatorname{card\,réd} \mathcal{E}_{\pi_0}$). Comme $x_0 \longrightarrow H(x_0, x_1) : \mathcal{E}_0 \longrightarrow \mathrm{Ens}$ satisfait à $\mathrm{L}_{\pi_0}$, pour tout $x_1$ dans $\mathcal{E}_1$, on aura donc

$$H(x_0) \ \simeq \ \varprojlim_{i \in I} H(x_{0\,i})$$

(où pour $x_0$ dans $\mathcal{E}_0$, $H(x)$ désigne le foncteur $x_1 \longmapsto H(x_0, x_1) : \mathcal{E}_1 \longrightarrow (\mathrm{Ens})$). Comme les foncteurs $H(x_{0\,i})$ sont $\pi$-accessibles, et $\operatorname{card} I \leqslant \pi$, il s'ensuit que leur $\varprojlim_I$ $H(x_0)$ est $\pi$-accessible (SGA 4 I 9.6 (ii)). Cela achève de prouver donc 2°).

3°). Pour prouver que $\operatorname{Ind}_\pi(\mathcal{E}(\pi)) \longrightarrow \mathcal{E}$ est essentiellement surjectif, il suffit de voir [2mm] que tout $x \in \operatorname{Ob} \mathcal{E}_0$ et tout $x \in \operatorname{Ob} \mathcal{E}_1$

[page 420]

est dans l'image essentielle. Or cela résulte de l'hypothèse que $\pi$ est utile pour $\mathcal{E}_0$ et $\mathcal{E}_1$, et de 1°) qui implique que $\mathcal{E}_0 \longrightarrow \mathcal{E}$ et $\mathcal{E}_1 \longrightarrow \mathcal{E}$ satisfont $\mathrm{L}_\pi$.

Cela achève de prouver la proposition 4.14.24, et de même le résultat suivant, plus précis que l'implication c) $\Longrightarrow$ a).

**Corollaire 4.14.25.** *Soient $\mathcal{E}$ une catégorie, $\mathcal{E}_0$ une sous-catégorie ouverte, $\mathcal{E}_1$ la sous-catégorie fermée complémentaire,*

$$H \ = \ ((x_0, x_1) \longmapsto \operatorname{Hom}_{\mathcal{E}}(x_0, x_1)) \ : \ \mathcal{E}_0^\circ \times \mathcal{E}_1 \longrightarrow \mathrm{Ens}$$

*le foncteur recollement.*

1°) *Soit $\pi$ un cardinal infini. Pour ce que $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}_0$ satisfassent à $L_\pi$, et le foncteur d'inclusion $\mathcal{E}_0 \hookrightarrow \mathcal{E}$ itou, il faut et il suffit que $\mathcal{E}_0$ satisfasse à $L_\pi$, et que pour tout $x_1$ dans $\mathcal{E}_1$, le foncteur $x_0 \longmapsto H(x_0,x_1) : \mathcal{E}_0 \longrightarrow \mathrm{Ens}^\circ$ satisfasse à $L_\pi$. Alors $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_1 \hookrightarrow \mathcal{E}$ satisfont aussi à $L_\pi$,*

[page 421]

*et on a*

$$\mathcal{E}_\pi \subset \mathcal{E}(\pi) \overset{\text{déf}}{=} \begin{array}{l}\textit{sous-catégorie strictement pleine de } \mathcal{E} \textit{ telle que}\\ \operatorname{Ob}\mathcal{E}(\pi) = \operatorname{Ob}\mathcal{E}_{0\,\pi} \cup \operatorname{Ob}\mathcal{E}_{1\,\pi}.\end{array}$$

2°) *Supposons que la condition c) de 4.14.24 soit satisfaite, et soit $\pi_0$ un cardinal infini tel que $\pi_0$ soit utile pour $\mathcal{E}_0$, et que les foncteurs $x_0 \longmapsto H(x_0,x_1) : \mathcal{E}_0 \longrightarrow \mathrm{Ens}^\circ$ définis par les $x_1 \in \operatorname{Ob}\mathcal{E}_1$ soient $\pi_0$-accessibles. Soit $\pi$ un cardinal tel que $\pi^{\pi_0} = \pi \geqslant \sup(\pi_0, \operatorname{card\,réd}\mathcal{E}_{0\,\pi_0})$, et tel que pour tout $x_0 \in \operatorname{Ob}\mathcal{E}_{\pi_0}$, le foncteur $x_1 \longmapsto H(x_0,x_1) : \mathcal{E}_1 \longrightarrow \mathrm{Ens}$ soit $\pi$-accessible. Alors on a*

$$\mathcal{E}_\pi = \mathcal{E}(\pi) .$$

3°) *Si $\pi_0$ et $\pi$ sont comme dans 2°), et si de plus $\pi$ est utile pour $\mathcal{E}_1$, alors $\pi$ est utile pour $\mathcal{E}$, donc (en vertu de 2°)*

$$\mathcal{E} \xleftarrow{\sim} \operatorname{Ind}_\pi(\mathcal{E}(\pi)) .$$

Nous pouvons maintenant énoncer la généralisation cherchée de 4.14.17 :

[page 422]

**Théorème 4.14.26** (généralisation de 4.14.13). *Soit $p : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{C}$ un foncteur, avec $\mathcal{C}$ petite. On suppose que p satisfait à l'hypothèse H) de la page 409, qui équivaut (moyennant 4.14.24) à la suivante :*

H′) *$\forall\ s \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$, la catégorie fibre $\mathcal{E}_s$ est accessible, et pour tout $\lambda : s \longrightarrow t$ dans $\operatorname{Fl}\mathcal{C}$, le foncteur*

$$\begin{cases} H_\lambda : \mathcal{E}_s^\circ \times \mathcal{E}_t & \longrightarrow \quad \mathrm{Ens} \\ \qquad (x_0,x_1) & \longmapsto \quad \operatorname{Hom}_\lambda(x_0,x_1) \end{cases}$$

*satisfait les deux conditions suivantes :*

- *a) $\forall\ x_0 \in \operatorname{Ob}\mathcal{E}_s^\circ$, $x_1 \longmapsto H_\lambda(x_0,x_1) : \mathcal{E}_t \longrightarrow \mathrm{Ens}$ est accessible.*
- *b) Il existe un cardinal infini $\pi_\lambda$, tel que pour tout $x_1 \in \operatorname{Ob}\mathcal{E}_t$, le foncteur $x_0 \longmapsto H_\lambda(x_0,x_1) : \mathcal{E}_s \longrightarrow (\mathrm{Ens})^\circ$ soit $\pi_\lambda$-accessible.*

*Ceci posé, la catégorie $\underline{\Gamma}(\mathcal{E}/\mathcal{C})$ des sections de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{C}$ est accessible, et les foncteurs $\varepsilon_s : \underline{\Gamma}(\mathcal{E}/\mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{E}_s$ sont accessibles. On peut préciser de façon similaire à 4.14.18 (énoncé en forme laissé au lecteur).*

[page 423]

Démonstration de 4.14.26. Elle se fait exactement comme celle de 4.14.17 (p. 400 ff.), mais est conceptuellement plus simple. On suppose $\mathcal{C}$ petite, et on introduit les catégories

$$\Pi = \prod_{s\,\in\,\operatorname{Ob}\mathcal{C}} \mathcal{E}_s , \qquad \Pi' = \prod_{\lambda\,\in\,\operatorname{Fl}\mathcal{C}} \mathcal{E}_\lambda ,$$

où

$$\mathcal{E}_\lambda \;=\; \mathcal{E} \times_{\mathcal{C}} (\mathbf{\Delta}_1, i_\lambda) \;,$$

et les deux foncteurs canoniques

$$\Pi \overset{F}{\underset{G}{\rightrightarrows}} \Pi'$$

de composantes

$$\begin{aligned} F_\lambda &= i_\lambda \circ \mathrm{pr}_{s(\lambda)} \\ G_\lambda &= j_\lambda \circ \mathrm{pr}_{b(\lambda)} \;, \end{aligned}$$

où pour $\lambda : s \longrightarrow t$, on pose

$$s(\lambda) \;=\; s \;, \qquad b(\lambda) \;=\; t \;,$$

et $i_\lambda$, $j_\lambda$ sont les inclusions canoniques

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E}_s \arrow[r, "i_\lambda"] \arrow[d, no head, "\wr"] & \mathcal{E}_\lambda \arrow[d, "p_\lambda"] & \mathcal{E}_t \arrow[l, "j_\lambda"'] \arrow[d, no head, "\wr"] \;. \\ (\mathcal{E}_\lambda)_0 & \left(\mathbf{\Delta}_1\right) & (\mathcal{E}_\lambda)_1 \end{tikzcd}$$

[page 424]

On désigne par $\mathcal{M}'$ la catégorie

$$\mathcal{M}' \;=\; \begin{array}{l} \text{catégorie des couples } (X, u)\text{, avec} \\ X \in \mathrm{Ob}\,\Pi,\ u : F(x) \longrightarrow G(x), \end{array}$$

qui est constructible par 4.14.22.1 est accessible (car $\Pi$ et $\pi'$ et les foncteurs $F$ et $G$ le sont, par l'hypothèse H) faite sur $p$). On peut l'interpréter comme la catégorie des sections de $\mathrm{Diag}(\mathcal{E})$ sur $\mathrm{Diag}(\mathcal{C})$. On a un foncteur strictement pleinement fidèle

$$\mathcal{M} \overset{\text{déf}}{=} \underline{\Gamma}(\mathcal{E}/\mathcal{C}) \hookrightarrow \mathcal{M}' \;,$$

qui permet d'interpréter $\mathcal{M}$ comme une sous-catégorie strictement pleine de $\mathcal{M}'$. On voit alors comme dans le cas de 4.14.17 que cette sous-catégorie est accessible dans $\mathcal{M}'$ – c'est essentiellement sorital. Il s'ensuit que $\mathcal{M}$ est accessible et que les foncteurs $\mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{E}_s$ le sont aussi, comme composés de

$$\mathcal{M} \overset{\text{acc.}}{\hookrightarrow} \mathcal{M}' \overset{\text{acc.}}{\hookrightarrow} \Pi \xrightarrow{\mathrm{pr}_s\ \text{acc.}} \mathcal{E}_s \;,$$

q.e.d.

[page 425]

## 4.15 Catégorie accessible sur une autre

**Proposition 4.15.1.** *Soit $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{C}$ un foncteur avec $\mathcal{C}$ petite. On suppose de plus satisfaite la condition H (p. 409), qu'on explicite ici sous la forme équivalente $H'$ :*

*H 1) Pour tout $s \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, $\mathcal{E}_s$ est accessible.*

*H 2) Pour toute $\lambda \in \mathrm{Fl}\,\mathcal{C}$, $\lambda : s \longrightarrow t$, existe un cardinal infini $\pi_\lambda$ tel que pour tout $x_1 \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{E}_t$, le foncteur*

$$x_0 \longmapsto \mathrm{Hom}_\lambda(x_0, x_1) \ : \ \mathcal{E}_s \longrightarrow (\mathrm{Ens})^\circ$$

*est $\pi_\lambda$-accessible ($\mathcal{E}_s$ satisfaisant de plus à $L_{\pi_\lambda}$).*

*H 3) Pour toute $\lambda \in \mathrm{Fl}\,\mathcal{C}$, $\lambda : s \longrightarrow t$, et pour tout $x_0 \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{E}_s$, le foncteur*

$$x_1 \longmapsto \mathrm{Hom}_\lambda(x_0, x_1) \ : \ \mathcal{E}_t \longrightarrow (\mathrm{Ens})$$

*est accessible.*

*Alors les foncteurs d'inclusion $i_s : \mathcal{E}_s \longrightarrow \mathcal{E}$ sont accessibles. De plus, si $\mathcal{C}$ "est sans projecteurs" (i.e. si tout endomorphisme $p$ d'un objet $s$ de $\mathcal{C}$ tel que $p^2 = p$, est l'identité), alors $\mathcal{E}$ est accessible, et $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{C}$ est accessible.*

Cela résulte du résultat plus précis :

[page 426]

**Corollaire 4.15.2** ([175]). *Les hypothèses sur $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{C}$ sont celles de 4.15.1 ($\mathcal{C}$ petite, et $f$ satisfait $H' =$ H 1) 2) 3)).*

*a) Soit $s \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ et soit $\pi_1$ un cardinal infini tel que pour toute $\lambda : s \longrightarrow t$ (flèche de $\mathcal{C}$ de source $t$), on ait $\pi_1 \geqslant \pi_\lambda$ (où $\pi_\lambda$ est défini dans l'énoncé de H 2). Alors le foncteur $i_s : \mathcal{E}_s \longrightarrow \mathcal{E}$ est $\pi_1$-accessible.*

*b) On suppose $\mathcal{C}$ sans projecteurs. Soit $\pi_1$ un cardinal $\geqslant \sup(\pi_\lambda, \mathrm{card}\,\mathcal{C})$. Alors $\mathcal{E}$ satisfait $L_{\pi_1}$, et $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{C}$ est $\pi$-accessible.*

*c) Supposons encore que $\mathcal{C}$ soit sans projecteurs (p.ex. une catégorie "rigide", p.ex. une catégorie préordonnée). Soient $\pi_0$, $\pi_1$ des cardinaux tels que :*

1° $\forall\, s \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, $\pi_0$ est utile pour $\mathcal{E}_s$ *(un tel $\pi_0$ existe grâce à H 1 et au fait que $\mathcal{C}$, donc $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ petits).*

2° $\pi_1 \geqslant \sup(\pi_0, \mathrm{card}\,\mathcal{C}, \sup_{\lambda \in \mathrm{Fl}\,\mathcal{C}} \pi_\lambda, \sup_{s \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}} \mathrm{card\,réd}\,\mathcal{E}_{s\,\pi_0})$.

3° $\forall \lambda \in \mathrm{Fl}\,\mathcal{C}$, *et $x_0 \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{E}_{s,\pi_0}$, le foncteur $H_\lambda(x_0)$ de H 3, $x_1 \longmapsto \mathrm{Hom}_\lambda(x_0, x_1) : \mathcal{E}_t \longrightarrow \mathrm{Ens}$ est $\pi_1$-accessible.*

*Soit $\pi$ un cardinal tel que $\pi^{\pi_0} = \pi \geqslant \pi_1$. Alors par b), $\mathcal{E}$ satisfait $L_{\pi_1}$, donc $L_\pi$, et $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{C}$ est $\pi_1$-accessible. De plus,*

$$i_s(\mathcal{E}_{s\,\pi}) \ \subset \ \mathcal{E}_\pi \ ,$$

*ou encore*

$$(*) \qquad \mathcal{E}(\pi) \ \subset \ \mathcal{E}_\pi \ ,$$

[175] Pour a) et b) on n'utilise que H 1 et H 2, à l'exclusion de H 3.

*où $\mathcal{E}(\pi)$ est la sous-catégorie pleine de $\mathcal{E}$ telle que*

$$\mathrm{Ob}\,\mathcal{E}(\pi) \ = \ \bigcup_{s\in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}} \mathrm{Ob}\,(\mathcal{E}_{s\,\pi})\ .$$

*Comme $\mathcal{E}_\pi$ satisfait $L_{\pi_1}$ par b), donc a fortiori $L_\pi$, on a donc par $(*)$ un foncteur* pleinement fidèle

$$\mathrm{Ind}_\pi(\mathcal{E}_{s\,\pi}) \xrightarrow{\ \sim\ } \mathcal{E}\ ,$$

*et ce foncteur est une équivalence de catégories (donc $\mathcal{E}$ est accessible).*

d) *En fait, sous les hypothèses de c) sur $\mathcal{C}$, $\pi_0$, $\pi_1$, $\pi$, on a $\mathcal{E}(\pi) = \mathcal{E}_\pi$ (non seulement $\mathcal{E}(\pi) \subset \mathcal{E}_\pi$).*

`[page 427]`

Démonstration de 4.15.1 et 4.15.2. Il est clair que 4.15.1 est contenu dans 4.15.2 a) et c). Nous allons donc prouver 4.15.2.

a) Soit $(x_i)_{i\in I}$ un système inductif dans $\mathcal{E}_s$, avec $I$ grand devant $\pi_0$, et $x$ sa limite inductive dans $\mathcal{E}_s$ (qui existe, car $\mathcal{E}_s$ satisfait à $\mathrm{L}_{\pi_\lambda}$, donc à $\mathrm{L}_{\pi_0}$). Il faut prouver que c'est une limite dans $\mathcal{E}$, donc que pour tout $y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{E}$, la flèche canonique

$$(*) \qquad \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(x,y) \longrightarrow \varprojlim_I \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(x_i,y)$$

est un isomorphisme. Or $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(x,y)$ et les $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(x_i,y)$ sont des objets de $\mathrm{Ens}/\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(s,t)$, où $s = f(x)$, $t = f(y)$, et les flèches de transition sont des flèches dans $\mathrm{Ens}/\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(s,t)$. Cela montre que la bijectivité de $(*)$ revient à celle de

$$(*) \qquad \mathrm{Hom}_{\lambda}(x,y) \longrightarrow \varprojlim_I \mathrm{Hom}_{\lambda}(x_i,y)$$

pour tout $\lambda \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,y)$ `[plutôt` $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(f(x),f(y))$`]`. Pour $\lambda$ fixé, et $y$ fixé dans $\mathrm{Ob}\,\mathcal{E}_t$, la bijectivité dans $(*)$, pour tout système inductif grand devant $\pi_1$ dans $\mathcal{E}_s$, de limite $x$, signifie que le foncteur

$$x \longmapsto \mathrm{Hom}_\lambda(x,y)\ :\ \mathcal{E}_s \longrightarrow (\mathrm{Ens})^\circ$$

est $\pi_0$-accessible. Or c'est bien le cas, par hypothèse sur $\pi_1$, quel que soit la flèche $\lambda : s \longrightarrow t$ de source $s$, et quel que soit $y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{E}_t$.

`[page 428]`

Soit $(x_i)_{i\in I}$ un système inductif grand devant $\pi_1$, et $(s_i)_{i\in I}$ l'image de ce système dans $\mathcal{C}$. Nous prouverons plus bas le

**Lemme 4.15.3** ([176],[177]). *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie, $\pi$ un cardinal, tels que* $\mathrm{card}\,\mathcal{C} \leqslant \pi$, *et que $\mathcal{C}$ soit sans projecteurs. Alors pour tout système inductif $(s_i)_{i\in I}$ grand devant $\pi$ dans $\mathcal{C}$, existe une partie cofinale $J$ dans $I$ telle que le système induit $(s_i)_{i\in J}$ soit* constant, *i.e. tel que les $s_i$ soient égaux à un $s \in \mathcal{C}$, et que les morphismes de transition soient tous égaux à* $\mathrm{id}_s$.

Mais attention, on s'appuie pour prouver 4.15.3 sur le théorème 4.8.13 (page 212-216), que je n'ai toujours pas prouvé. Dans le cas où $\mathcal{C}$ est rigide (i.e. $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(s) = \{\mathrm{id}_s\}\ \forall\ s \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$), la démonstration est cependant immédiate, cf. plus bas.

[176]Cf. démonstration page 452.

[177]sous réserve de la validité de 4.8.13 (Mais c'est à présent établi, sous une forme suffisante, dans 4.15.10).

[page 429]

Pour prouver que $x = \varinjlim_{I} x_i$ existe dans $\mathcal{E}$, et commute à $f$, on peut remplacer $I$ par une sous-catégorie cofinale. Cela nous ramène, grâce au lemme, au cas où $(s_i)_{i\in I}$ est constant, donc au cas où le système inductif provient d'un système inductif dans une catégorie fibre $\mathcal{E}_s$. Mais par a), on sait que sa limite $x$ dans $\mathcal{E}_s$ est une limite dans $\mathcal{E}$, d'où l'existence de cette dernière, et la commutation à $f$, puisque $\varinjlim s_i = s$ ( $\varinjlim$ d'un système inductif filtrant constant).

c) Il faut prouver que si $x \in \operatorname{Ob}\mathcal{E}_s$ est $\pi$-accessible dans $\mathcal{E}_s$, il l'est dans $\mathcal{E}$, i.e. que pour tout système inductif $(y_i)_{i\in I}$ grande devant $\pi$, la flèche canonique

$$(**) \qquad \varinjlim_{i} \operatorname{Hom}(x, y_i) \longrightarrow \operatorname{Hom}(x, y)$$

est bijective. Or comme par 2°) $\pi \geqslant \pi_1 \geqslant \sup(\operatorname{card} S, \sup_\lambda \pi_\lambda)$, il résulte encore du lemme que, quitte à remplacer $I$ par une sous-catégorie cofinale, on peut supposer que le système inductif $(y_i)_{i\in I}$ provient d'un système dans une catégorie fibre $\mathcal{E}_t$, et que $y$ est sa $\varinjlim$ dans $\mathcal{E}_t$. Mais alors les ensembles $\operatorname{Hom}(x,y)$ et $\operatorname{Hom}(x,y_i)$, et les morphismes de transition entre celles-ci, sont encore dans $\operatorname{Ens}/\operatorname{Hom}(s,t)$, et on est ramené

[page 430]

à prouver que pour tout $\lambda : s \longrightarrow t$, la flèche

$$\varinjlim_{i} \operatorname{Hom}_\lambda(x, y_i) \longrightarrow \operatorname{Hom}_\lambda(x, y)$$

est bijective. Pour $x$ et $\lambda$ fixés, et des systèmes inductifs variables dans $\mathcal{E}_t$, grands devant $\pi$, cela signifie que le foncteur

$$H_\lambda(x) \;=\; (y \longmapsto \operatorname{Hom}_\lambda(x,y)) \;:\; \mathcal{E}_t \longrightarrow \operatorname{Ens}$$

est $\pi$-accessible, et ceci quel que soit

$$x \;\in\; \operatorname{Ob}\mathcal{E}_{s\,\pi} \;.$$

Or c'est le cas si $s \in \operatorname{Ob}\mathcal{E}_{s\,\pi_0}$, en vertu de l'hypothèse 3°) (alors $H_\lambda(x_0)$ est $\pi_1$-accessible, et a fortiori $\pi$-accessible). Il faut passer de là au cas où $x \in \operatorname{Ob}\mathcal{E}_{s\,\pi}$. Or comme $\pi_0$ est utile pour $\mathcal{E}_s$ par 1°, on a

$$x \;=\; \varinjlim_{j\in J} x_j \;, \qquad x_j \in \operatorname{Ob}\mathcal{E}_{s\,\pi_0},\ J \text{ grande devant } \pi_0 \;,$$

et comme par 2°, $\pi^{\pi_0} = \pi \geqslant \pi_1 \geqslant \sup(\pi_0, \operatorname{card}\operatorname{réd}\mathcal{E}_{s\,\pi_0})$, on en conclut qu'on peut prendre $J$ de sorte que

$$\operatorname{card} J \;\leqslant\; \pi \;.$$

D'autre part, en vertu de $\pi \geqslant \pi_1 \;\geqslant\; \pi_\lambda$, le foncteur

$$\begin{cases} x_0 & \longmapsto \quad H_\lambda(x_0) \\ \mathcal{E}_s & \longrightarrow \quad (\underline{\operatorname{Hom}}(\mathcal{E}_s, \operatorname{Ens}))^\circ \end{cases}$$

est $\pi_0$-accessible, donc on a

$$H_\lambda(x_0) \;\simeq\; \varprojlim_{j\in J} H_\lambda(x_j) \;.$$

[page 431]

Comme $x_j \in \operatorname{Ob}\mathcal{E}_{s\,\pi_0}$, $H(x_j)$ est un foncteur $\pi_1$-accessible, et comme card $J \leqslant \pi$, la $\varprojlim_{j\in J} H_\lambda(x_j)$ est aussi $\pi$-accessible (cf. SGA 4 I 9.8).

Ainsi on a prouvé $\mathcal{E}_{s\,\pi} \subset \mathcal{E}(\pi)$ pour tout $s \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$, i.e. l'inclusion

$$\mathcal{E}(\pi) \ \subset \ \mathcal{E}_\pi \ ,$$

d'où le foncteur pleinement fidèle

$$(*) \qquad \operatorname{Ind}_\pi(\mathcal{E}(\pi)) \longrightarrow \mathcal{E} \ ,$$

comme $\mathcal{E}$ satisfait à $\mathrm{L}_\pi$. Il reste à prouver que c'est essentiellement surjectif. Mais si $x \in \operatorname{Ob}\mathcal{E}$, $s = f(x)$, on a $x \in \operatorname{Ob}\mathcal{E}_s$, et comme $\pi_0$ est utile pour $\mathcal{E}_s$ par 1°), et $\pi^{\pi_0} = \pi > \pi_0$, $\pi$ est également utile pour $\pi$, donc on a *dans* $\mathcal{E}_s$

$$x \ = \ \varinjlim_I x_i \ , \qquad \text{les } x_i \in \mathcal{E}_{s\,\pi} \subset \mathcal{E}(\pi),\ I \text{ grande devant } \pi \ ,$$

et d'après a) (comme $\pi \geqslant \pi_1 \geqslant \sup_{\lambda\in\operatorname{Fl}\mathcal{C}} \pi_\lambda$) $x$ est aussi limite des $x_i$ dans $\mathcal{E}$, donc il est dans l'image essentielle de $(*)$.

d) Reste à prouver que l'on a $\mathcal{E}_\pi \ \subset \ \mathcal{E}(\pi)$. Mais on sait (par 4.8. ...), comme $\mathcal{E} \simeq \operatorname{Ind}_\pi(\mathcal{E}(\pi))$, que $\mathcal{E}_\pi = \mathcal{E}(\pi)^\natural$, i.e. que pour $x \in \operatorname{Ob}\mathcal{E}_\pi$, $\exists\ y \in \mathcal{E}(\pi)$ et un projecteur $p$ dans $x$, tel que $x$ soit isomorphe à l'image de $p$ dans $\mathcal{E}$. Or $f(p)$ est un projecteur dans $f(y) = s$, donc par hypothèse sur $\mathcal{C}$, $f(p) = \mathrm{id}_s$, i.e. $p$ est un projecteur dans $\mathcal{E}_s$. Comme donc $x$ est dans $\mathcal{E}_s$, et

[page 432]

même dans $\mathcal{E}_{s\,\pi}$, puisque $\mathcal{E}_{s\,\pi}$ est stable dans $\mathcal{E}_s$ par facteurs directs. Cela prouve que $x \in \operatorname{Ob}\mathcal{E}(\pi)$, q.e.d.

On peut présenter 4.15.1 sous une forme plus sympathique.

**Corollaire 4.15.4.** *Soit $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{C}$ un foncteur de $\mathfrak{U}$-catégories. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- *a) Pour tout foncteur $\mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}$, avec $\mathcal{C}'$ petite et sans projecteurs, $\mathcal{E}' \overset{\text{déf}}{=} \mathcal{E} \times_{\mathcal{C}} \mathcal{C}'$ est accessible, et $f' : \mathcal{E}' \longrightarrow \mathcal{C}'$ est accessible.*
- *b) Comme a), mais avec $\mathcal{C}' = \mathbf{\Delta}_1$, en d'autres termes, c'est la condition H p. 409 : pour toute $\lambda \in \operatorname{Fl}\mathcal{C}$, $\mathcal{E}_\lambda = \mathcal{E} \times_{\mathcal{C}} (\mathbf{\Delta}_1, i_\lambda)$ est accessible, et $\mathcal{E}_\lambda \longrightarrow \mathbf{\Delta}_1$ est accessible.*
- *c) La condition $H' = H\,1 + H\,2 + H\,3$, explicitée dans l'énoncé de 4.15.1.*

Démonstration. Elle se fait circulaire,

$$\mathrm{a} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{b} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{c} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{a}\ ,$$

l'implication a $\Longrightarrow$ b étant tautologique, b $\Longrightarrow$ c l'étant presque (cf. 4.14.24, a $\Longrightarrow$ b $\Longrightarrow$ c). En fait, les conditions b et c sont des conditions sur les catégories $\mathcal{E}_s \xrightarrow{f_\lambda} \mathbf{\Delta}_1$ pour $\lambda \in \operatorname{Fl}\mathcal{C}$, donc stables par changement de base. Pour prouver

[page 433]

c $\Longrightarrow$ a, on peut donc supposer que $\mathcal{C}' = \mathcal{C}$, $\mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}$ le foncteur identique, et prouver que si c) est satisfaite et si $\mathcal{C}$ est petite et sans projecteurs, alors $\mathcal{E}$ est accessible et $f$ accessible. Or c'est ce qu'affirme 4.15.1.

**Remarque 4.15.5.** Si $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{C}$ est un foncteur pleinement fidèle, il est immédiat que la condition H est satisfaite (car $\mathcal{E}_\lambda \longrightarrow \mathbf{\Delta}_1$ sera pleinement fidèle, donc $\mathcal{E}_\lambda$ est équivalente à $e$ où à $\mathbf{\Delta}_1$, donc accessible, et tout foncteur de $\mathcal{E}_\lambda$ dans une catégorie quelconque est accessible ...). Mais si on suppose $\mathcal{C}$ petite *sans* supposer $\mathcal{C}$ sans projecteurs, il ne s'ensuit pas que $\mathcal{E}$ soit accessible, ou ce qui revient au même (étant essentiellement petite), que $\mathcal{E}$ soit karoubienne. (L'exemple le plus trivial est celui où $\mathcal{E} = \mathcal{C}$, $f = \mathrm{id}_\mathcal{C}$, $\mathcal{E}$ n'est karoubienne que si $\mathcal{C}$ l'est !) Mais même en supposant $\mathcal{C}$ une petite catégorie karoubienne, il ne s'ensuit pas forcément que $\mathcal{E}$ l'est. En effet, *toute* petite catégorie $\mathcal{E}$ (karoubienne ou non) se plonge comme sous-catégorie pleine dans son enveloppe karoubienne $\mathcal{C}$ – il suffit donc de prendre $\mathcal{E}$ non karoubienne. L'exemple

[page 434]

le plus économique est

$$\mathrm{Ob}\,\mathcal{E} \;=\; \{0\}\ , \qquad \mathrm{Fl}(\mathcal{E}) \;=\; \{\mathrm{id}_0, p\}\ , \qquad \text{avec } p^2 = p \neq \mathrm{id}_0\ ,$$

l'enveloppe de Karoubi de $\mathcal{E}$ est donnée par

$$P \;=\; \left\{ \begin{tikzcd} 1 \arrow[r, shift right, "\sigma"'] & 0 \arrow[l, shift right, "\rho"'] \arrow[loop right, "p"] \end{tikzcd} \qquad \begin{array}{rcl} \rho\sigma & = & \mathrm{id}_1 \\ \sigma\rho & = & p \neq \mathrm{id}_0 \end{array} \quad \Longrightarrow \ p^2 = p \right\} .$$

Cela soulève la question de trouver un énoncé similaire à 4.15.1, donnant des conditions serviables simples, plus fortes que $\mathrm{H}' = \mathrm{H}$ (1+2+3), sur $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{C}$, pour que $\mathcal{E}$ soit accessible et $f$ accessible, en supposant $\mathcal{C}$ *karoubienne.* Ou encore, des conditions nécessaires et suffisants serviables (plus fortes que 4.15.4) sur $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{C}$, pour que toute *petite* catégorie *karoubienne* $\mathcal{C}'$, et tout foncteur $\mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}$, la catégorie $\mathcal{E}' = \mathcal{E} \times_\mathcal{C} \mathcal{C}'$ soit accessible, et le foncteur $\mathcal{E}' \longrightarrow \mathcal{C}'$ accessible. Une idée naturelle, c'est qu'il suffirait que cette conclusion soit vraie quand $\mathcal{C}'$ est une des deux catégories $\mathbf{\Delta}_1$, $P$ (où $P$ est la catégorie à deux objets, à trois flèches non identiques, définie plus haut). Mais je doute qu'il en soit ainsi ([178]).

On va quand même essayer un énoncé un peu très particulier dans ce sens :

[178] Ça devrait marcher par contre si on prend les catégories $0 \longrightarrow 1$,

$$\underbrace{2 \longrightarrow \begin{tikzcd} 1 \arrow[r, shift right, "\sigma"'] & 0 \arrow[l, shift right, "\rho"'] \arrow[loop right, "p"] \end{tikzcd}}_{P} \quad \text{et} \quad \underbrace{2 \longleftarrow \begin{tikzcd} 1 \arrow[r, shift right, "\sigma"'] & 0 \arrow[l, shift right, "\rho"'] \arrow[loop right, "p"] \end{tikzcd}}_{P} \qquad ([179])\ ,$$

3 objets et
5 flèches non
identiques

grâce à 4.15.7, page 440.

[179] ces catégories représentent respectivement les foncteurs $\mathrm{Cat} \longrightarrow \mathrm{Ens}$ associant à une catégorie $\mathcal{C}$ les diagrammes dans $\mathcal{C}$ formés de $(x, y, p, u)$, avec $p$ projecteur dans $p$ `[plutôt dans` $\mathcal{C}$`]`, et $u : y \longrightarrow x^\natural$ (i.e. $u : y \longrightarrow x$ avec $u = pu$), resp. $u : x^\natural \longrightarrow y$ (i.e. $u : x \longrightarrow y$ avec $u = up$).

`[page 435]`

**Proposition 4.15.6** (180). *Soit $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{C}$ un foncteur de $\mathfrak{U}$-catégories. On suppose :*

*a) $f$ est fibrant ou cofibrant* (181).

*b) Les catégories fibres $\mathcal{E}_s$ ($s \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$) sont accessibles, et pour toute flèche $\lambda : s \longrightarrow t$ dans $\mathcal{C}$, le foncteur changement de base $\lambda^* : \mathcal{E}_t \longrightarrow \mathcal{E}_s$ (resp. cochangement de base $\lambda_* : \mathcal{E}_s \longrightarrow \mathcal{E}_t$) est accessible.*

*c) $\mathcal{C}$ est essentiellement petite et karoubienne.*

*Alors $\mathcal{E}$ est accessible, et $f$ est accessible.*

Démonstration. On a déjà vu que les conditions a) et b) impliquent H′, i.e. H (1+2+3). D'ailleurs, si $\mathcal{C}'$ est une catégorie et $\mathcal{C}' \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}$ une équivalence, donc alors $\mathcal{E}' \overset{\text{déf}}{=} \mathcal{E} \times_{\mathcal{C}} \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{E}$ est une équivalence, donc la conclusion voulue pour $\mathcal{E}$, $f$ équivaut à la même conclusion pour $\mathcal{E}'$, $f' : \mathcal{E}' \longrightarrow \mathcal{C}'$. Donc on peut supposer que $\mathcal{C}$ est petite (et même réduite, si on y tient). En vertu de 4.15.2 a), on voit donc que les foncteurs d'inclusion $\mathcal{E}_s \longrightarrow \mathcal{E}$ sont accessibles (et même $\pi_1$-accessibles) dès que $\pi_1 \geqslant \sup_{\lambda \in \operatorname{Fl}\mathcal{C}} \pi_\lambda$. On voit d'ailleurs

`[page 436]`

par AQT `[âne qui trotte]` qu'on peut trouver des cardinaux $\pi_0$, $\pi_1$ ayant les propriétés suivantes :

1°) $\pi_0$ est utile pour $\mathcal{E}_s$, $\forall\, s \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$.

2°) $\pi_1 \geqslant \sup(\pi_0, \operatorname{card}\mathcal{C}, \sup_{\lambda \in \operatorname{Fl}\mathcal{C}} \pi_\lambda, \sup_{s \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}} \operatorname{card}\operatorname{réd}\mathcal{E}_s)$.

3°) $\forall\, (\lambda : s \longrightarrow t) \in \operatorname{Fl}\mathcal{C}$ et $x_0 \in \operatorname{Ob}\mathcal{E}_{s\,\pi_0}$, le foncteur

$$H_\lambda(x_0) \;:\; (x_1 \longmapsto \operatorname{Hom}_\lambda(x_0, x_1)) \;:\; \mathcal{E}_t \longrightarrow (\mathrm{Ens})$$

est $\pi_1$-accessible. (**N.B.** Si $f$ est cofibrant, cela signifie que $\forall\, \lambda \in \operatorname{Fl}\mathcal{C}$, $\lambda : s \longrightarrow t$, $\boxed{\lambda_*(\mathcal{E}_{s\,\pi_0}) \subset \mathcal{E}_{s\,\pi_1}}$. Si $f$ est fibrant, il suffit d'exiger que $\forall\, \lambda \in \operatorname{Fl}\mathcal{C}$, $\lambda^* : \mathcal{E}_t \longrightarrow \mathcal{E}_s$ soit $\pi_1$-accessible.) Mais dans ce cas, on veut aussi $\boxed{\lambda^*(\mathcal{E}_{s\,\pi_0}) \subset \mathcal{E}_{s\,\pi_1}}$.

4°) Les foncteurs $\lambda^*$ (cas $f$ fibrant) resp. $\lambda_*$ (cas $f$ cofibrant) sont $\pi_1$-accessibles.

Soit alors $\pi$ un cardinal tel que

$$(*) \qquad \pi \;=\; \pi^{\pi_0} \;\geqslant\; \pi_1\ ,$$

et soit $\mathcal{E}(\pi)$ la sous-catégorie (strictement) pleine de $\mathcal{E}$ définie par

$$\operatorname{Ob}\mathcal{E}(\pi) \;=\; \bigcup_{s \,\in\, \operatorname{Ob}\mathcal{C}} \operatorname{Ob}\mathcal{E}_{s\,\pi}\ .$$

Grâce à $(*)$, et à 1°, 4° et à

$$\begin{cases} \pi_1 \;\geqslant\; \sup_s(\operatorname{card}\operatorname{réd}\mathcal{E}_{s\,\pi_0}) & \text{(contenu dans 2°)} \\ \lambda^*(\mathcal{E}_{t\,\pi_0}) \;\subset\; \mathcal{E}_{s\,\pi_1} \quad \text{resp.} \quad \lambda_*(\mathcal{E}_{s\,\pi_0}) \;\subset\; \mathcal{E}_{t\,\pi_1} & \text{(contenu dans 3°)}\ , \end{cases}$$

on voit que $\mathcal{E}(\pi)$ est une sous-catégorie

180 *Faux ?*

181 Le cas fibrant n'est pas prouvé, peut-être *faux* – et de même pour le cas cofibrant !

[page 437]

fibrée, resp. une sous-catégorie cofibrée, sur $\mathcal{C}$ (le foncteur $\mathcal{E}(\pi) \longrightarrow \mathcal{E}$ étant donc cartésien resp. cocartésien). À $\mathcal{C}$-équivalence près, $\mathcal{E}$ se reconstitue alors à partir de $\mathcal{E}(\pi)$, en passant au $\mathrm{Ind}_\pi(\mathcal{E}_{s\,\pi})$, qui forment un système fibré resp. cofibré sur $\mathcal{C}$ par les foncteurs $\mathrm{Ind}_\pi(\lambda^*_\pi)$ resp. $\mathrm{Ind}_\pi(\lambda^\pi_*)$ ...

Prouvons que $\mathcal{E}$ satisfait à $\mathrm{L}_\pi$ et que $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{C}$ est $\pi$-accessible ([182]). Comme $\mathcal{C}$ est karoubienne, et $\pi \geqslant \pi_1 \geqslant \operatorname{card} \mathcal{C}$, $\mathcal{C}$ satisfait à $\mathrm{L}_\pi$ et les ind-objets grands devant $\pi$ de $\mathcal{C}$ sont essentiellement constants (4.8.13). Soit alors $I$ grande devant $\pi$, et $I \longrightarrow \mathcal{E}$, $i \longmapsto x_i$, un foncteur, il faut construire une $\varinjlim$ dans $\mathcal{E}$, en utilisant la $\varinjlim$ déjà connue $s$ des $s_i = f(x_i)$. On va prendre un $x$ dans $\mathcal{E}_s$. Prenons d'abord le cas où $f$ est cofibrant. On voit que les $\beta_i(x_i)$ forment un système inductif dans $\mathcal{E}_s$, puisque pour $i = j$, on a

$$\beta_{i\,*}(x_j) \;=\; \beta_{j\,*}\underbrace{\beta_{ji\,*}(x_i)}_{\to\, x_j} \;\longrightarrow\; \beta_{j\,*}(x_j) \;.$$

$$\begin{tikzcd} x_i \arrow[rr, "\alpha_i"] & & x\,? \\ s_i \arrow[rr, "\beta_i"] \arrow[dr, "\beta_{ji}"'] & & s \\ & s_j \arrow[ur, "\beta_j"'] & \end{tikzcd}$$

On pose

[page 438]

$$x \;=\; \varinjlim_I \beta_{i\,*}(x_i) \;, \qquad \varinjlim \;\textit{dans } \mathcal{E}_s \;.$$

On sait que c'est une $\varinjlim$ dans $\mathcal{E}$, donc que pour tout $y$ dans $\mathcal{E}$, on a

$$\mathrm{Hom}(x, y) \xrightarrow{\;\sim\;} \varprojlim_I \mathrm{Hom}(\beta_{i\,*}(x_i), y) \;,$$

ou ce qui revient au même, pour toute flèche $\lambda : s \longrightarrow t$, et $y$ dans $\mathrm{Ob}\,\mathcal{E}_t$, on a

$$\underbrace{\mathrm{Hom}_\lambda(x, y)}_{=\,\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}_t}(\lambda_* x, y)} \;\simeq\; \varprojlim \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}_t}(\underbrace{\lambda_*\beta_{i\,*}(x_i)}_{(\lambda_i\beta_i)_*(x_i)}, y) \;.$$

Cela résulte aussi du fait que $\lambda_*$ est $\pi$-accessible (étant $\pi_1$-accessible) ... On vérifie facilement que c'est une $\varinjlim$ des $x_i$ dans $\mathcal{E}$. Et bien sûr, cette limite commute avec $f$ par construction.

Mais dans le cas où $f$ est fibrant, je ne vois comment faire pour construire une limite dans $\mathcal{E}_s$. Il est vrai qu'on peut supposer que tous les $s_i$ sont égaux à $s$, mais les transitions $\beta_{ji}$ ne sont pas l'identité, ni même des isomorphismes. Il faudrait prendre $\mathcal{C} = P$ pour essayer de comprendre – je ne vais pas insister ([183]).

[182]Ici on utilise seulement $\pi \geqslant \operatorname{card} \mathrm{réd}\, \mathcal{C}$.

[183]J'ai vérifié que si $f$ est fibrant, alors $\mathcal{E}$ est *karoubienne.* Il y a donc de l'espoir ...

`[page 439]`

Dans le cas où $f$ est fibrant, admettons (comme hypothèse supplémentaire au besoin) que $\mathcal{E}$ satisfasse $L$ et que $f$ soit accessible, et prenons $\pi$ assez grand pour que $\mathcal{E}$, $f$ satisfassent $\mathrm{L}_\pi$. Nous pouvons alors terminer la démonstration de 4.15.6. Il faut prouver

$$\mathcal{E}(\pi) \;\subset\; \mathcal{E}_\pi \;,$$

donc que si $x \in \operatorname{Ob}\mathcal{E}_{s\,\pi}$, et $(y_i)_{i\in I}$ est un système inductif dans $\mathcal{E}$ grand devant $\pi$, de limite $y$, on a

$$\varinjlim \operatorname{Hom}_{\mathcal{E}}(x, y_i) \xrightarrow{\;\sim\;} \operatorname{Hom}_{\mathcal{E}}(x, y) \;.$$

Donc il faut prouver que toute flèche $x \xrightarrow{u} y$ se factorise, de façon essentiellement unique $u_i$, par un $y_i$. Mais la flèche $s \xrightarrow{\lambda = f(u)} t$ dans $\mathcal{C}$ se factorise, de façon essentiellement unique, par des $\lambda_i : s \longrightarrow t_i$. Donc on est ramené à trouver un $\lambda_i$-*morphisme* $x \longrightarrow y_i$ pour $i$ grand, qui factorise. Dans le cas fibrant, cela signifie qu'on cherche $x \longrightarrow \lambda_i^*(y_i)$ qui factorise $x \longrightarrow \lambda^*(y)$, or les $\lambda_i^*(y_i)$ forment un système inductif dans $\mathcal{E}_s$, et sa limite *dans* $\mathcal{E}_s$ est $\lambda^*(y)$ (*à vérifier*). Comme $x$ est dans $\mathcal{E}_{s\,\pi}$, l'hom`[omorphisme]` donné $x \longrightarrow \lambda^*(y)$ se factorise de

`[page 440]`

façon essentiellement unique par un $\lambda_i^*(y_i)$.

Cette fois par contre, c'est le cas $f$ cofibrant qui pose problème. En fait, je n'arrive pas à m'en tirer.

Ainsi, on trouve bien un foncteur

$$\operatorname{Ind}_\pi(\mathcal{E}(\pi)) \longrightarrow \mathcal{E} \;,$$

qui est essentiellement surjectif, mais faute de savoir que $\mathcal{E}(\pi) \subset \mathcal{E}_\pi$ dans le cas cofibrant, il n'est pas clair que ce foncteur soit une équivalence de catégories.

**4.15.7.** Il me faut reporter la démonstration du lemme 4.15.3 (p. 428), en admettant 4.8.13. (Non encore démontré – je vais revenir plus bas sur la démonstration de 4.8.13.) On va utiliser le

**Lemme 4.15.7.1.** *Soient $\mathcal{C}$ une catégorie, $\underline{x} = (x_i)_{i\in I}$ un ind-objet de $\mathcal{C}$. Pour que $\underline{x}$ soit essentiellement constant, i.e. isomorphe, dans* $\operatorname{Ind}(\mathcal{C})$, *au ind-objet constant défini par un objet*

`[page 441]`

*de $\mathcal{C}$, il faut et il suffit qu'il existe un foncteur cofinal $\varphi : J \longrightarrow I$, avec $J$ filtrant, de telle façon que le système réindexé $(x_j)_{j\in J}$, avec $x_j = x_{\varphi(j)}$, ait la propriété suivante : pour tout $j \in J$, on peut trouver un projecteur $p_j$ dans $x_j$, de telle façon que :*

*1°) Pour toute flèche $\lambda : j \longrightarrow j'$ dans $J$, on ait commutativité dans*

$$\begin{tikzcd} x_j \arrow[r, "x_\lambda"] \arrow[d, "p_j"] & x_{j'} \arrow[d, "p_{j'}"] \\ x_j \arrow[r, "x_\lambda"] & x_{j'} \end{tikzcd}$$

*(où les $x_\lambda$ sont les flèches de transition), i.e. $p_{j'}x_\lambda = x_\lambda p_j$.*

*2°) Pour tout $j \in \mathrm{Ob}\, J$, il existe une flèche $\lambda : j \longrightarrow j'$ dans $J$ telle que $p_{j'}x_\lambda = x_\lambda p_j = x_\lambda$.*

*3°) Pour tout $j \in \mathrm{Ob}\, J$, le projecteur $p_j$ dans $x_j$ admet un image $x_j^\natural$.*

*4°) Pour toute flèche $\lambda : j \longrightarrow j'$ dans $J$, la flèche $x_\lambda^\natural : x_j^\natural \longrightarrow x_{j'}^\natural$ induite par $x_\lambda$ (grâce à 1°) est un isomorphisme.*

*De plus, si on peut supposer $J$ de la forme $i_0\backslash I$, le foncteur cofinal $J \longrightarrow I$ étant le foncteur canonique $i_0\backslash I \longrightarrow I$ ($i_0$ étant un objet fixé convenable de $I$)* `[phrase incomplète]`

`[page 442]`

Notons tout de suite deux corollaires.

**Corollaire 4.15.7.2.** *Supposons que $\mathcal{C}$ soit sans projecteurs. Alors $\underline{x} = (x_i)_{i\in I}$ est un ind-objet essentiellement constant si et seulement s'il existe un foncteur cofinal, $J \longrightarrow I$, avec $J$ filtrant* ([184]), *de telle façon que le système inductif réindexé $(x_j)_{j\in J}$ soit isomorphe* (dans la catégorie $\underline{\mathrm{Hom}}(J, \mathcal{C})$) *à un système inductif* constant *(i.e. défini par un foncteur constant $J \longrightarrow \mathcal{C}$ : tous les $x_j$ égaux à un même $x$, et les morphismes de transition des identités).*

La suffisance est claire, pour la nécessité on applique 4.15.7.1, qui nous dit qu'on peut réindexer de façon à satisfaire aux conditions 1°) à 4°) (pour des projecteurs $p_j$ convenables dans les $x_j$). Mais l'hypothèse sur $\mathcal{C}$ implique que $p_j = \mathrm{id}_{x_j}\ \forall\, j \in \mathrm{Ob}\, J$, et les conditions 1°, 2°, 3° sont satisfaites tautologiquement pour un tel choix, la condition 4° signifie que les morphismes de transition sont des isomorphismes. Mais il est immédiat que pour un système inductif $(x_j)_{j\in J}$ donné, avec $J$ 1-*connexe* (p.ex. $J$ filtrant), la condition que les $x_j$ sont des isomorphismes est nécessaire et suffisante pour que ce système soit isomorphe à un système inductif constant, d'où la conclusion.

`[page 443]`

**Corollaire 4.15.7.3.** *Supposons que $I$ soit grande devant $\pi_0$, où $\pi_0$ est un cardinal infini tel que $\pi_0 \geqslant \mathrm{card}\, \mathcal{C}$. Alors $(x_i)_{i\in I}$ est essentiellement constant si et seulement si on peut trouver un foncteur cofinal $J \longrightarrow I$ avec $J$ grande devant $\pi_0$ (et ordonnée si on veut)* ([185]), *de telle façon que le système réindexé $(x_j)_{j\in J}$ satisfasse les conditions suivantes :*

*1°) L'application $j \longmapsto x_j$ de $\mathrm{Ob}\, J$ dans $\mathrm{Ob}\, \mathcal{C}$ est constante, i.e. il existe un $x_0 \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}$ tel que $x_j = x_0\ \forall\, j \in \mathrm{Ob}\, J$.*

*2°) Il existe un projecteur $p$ dans $x_0$ tel que pour $j < j'$ dans $J$, on ait $\tau_{j',j} = p$.*

*3°) Le projecteur $p$ admet une image dans $\mathcal{C}$.*

Démonstration. Ces conditions impliquent évidemment celles de 4.15.7.1, en prenant $p_j = p\ \forall\, j \in \mathrm{Ob}\, J$, du moins si $J$ n'admet de plus grand élément (ce qui fait une difficulté pour 2°). Mais si $J$ admet un objet final, il en est de même de $I$, et il est clair alors que tout système inductif indexé par $I$ est essentiellement constant. Donc, dans ces cas, les conditions 1°) 2°) 3°) ci-dessus impliquent que $\underline{x}$ est essentiellement constant. Inverse-

`[page 444]`

[184] et on peut supposer $J = i_0\backslash I \xrightarrow{\text{can.}} I$

[185] La démonstration (légèrement réarrangée) montre qu'on peut prendre pour $J$ une sous-catégorie (pas pleine) d'une catégorie $i_1\backslash I$, pour un objet convenable $i_1$ de $I$. On a donc $\mathrm{card}\, J \leqslant \pi$ si $\mathrm{card}\, I \leqslant \pi$, $\pi$ étant un cardinal infini donné.

ment, supposons que $\underline{x}$ soit essentiellement constant, et prouvons que l'on peut réindexer comme indiqué. Le cas où $I$ admet un objet final est trivial, on prendra $J = e$, $p = \mathrm{id}$. Supposons donc que $I$ n'ait pas d'objet final. Comme $I$ grande devant $\pi_0$ et $\pi_0 > \operatorname{card} \operatorname{Ob} \mathcal{C}$, on voit qu'il existe un $x_0 \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$ tel que la sous-catégorie pleine $I' = I_{x_0}$ de $I$, formée des $i$ tels que $x_i = x_0$, soit cofinale dans $I$. Comme $(x_i)_{i \in I}$ est essentiellement constant, il en est de même de $(x_{i'})_{i' \in I'}$, et on peut lui appliquer le critère 4.15.7.1, avec $J \longrightarrow I'$ cofinal. La démonstration montrera de plus que si $I'$ est grand devant $\pi_0$ (cardinal infini sans autres conditions), on peut supposer $J$ grande devant $\pi_0$ ([186]). De plus, il est clair qu'on peut supposer $J$ ordonnée. Comme $\pi_0 \geqslant \operatorname{card} \operatorname{Hom}(x_0, x_0)$, on voit encore qu'il existe un projecteur $p$ dans $x_0$ tel que la partie $J_1 = J'$ de $J$, formée des $j$ tels que $p_j = p$, soit cofinale. Étant cofinale, elle est également grande devant $\pi_0$. Donc on peut supposer que tous les $p_j$ sont égaux à un même $p$. Les conditions 1°-4° deviennent :

1°) $p\tau_{j'j} = \tau_{j'j}p$ pour $j \leqslant j'$.

2°) Pour tout $j$, existe $j' \geqslant j$ avec

$$p\tau_{j'j} \ = \ \tau_{j'j}p \ = \ \tau_{jj'} \ .$$

3°) L'image $x_0^\natural$ du projecteur $p$ dans $x_0$ existe.

4°) L'endomorphisme $\tau^\natural_{j'j}$ de $x_0^\natural$ est un isomorphisme, pour $j \leqslant j'$.

[page 445]

Or on a le

**Lemme 4.15.7.4.** *Soient $\mathcal{C}$ une catégorie, $x_0$ un objet de $\mathcal{C}$, $p$ un projecteur dans $x_0$, $\tau$ un endomorphisme de $x_0$ satisfaisant les relations*

$$(*) \qquad \tau p \ = \ p\tau \ = \ \tau \ ,$$

*et tel que l'automorphisme de $x_0^\natural \overset{\text{déf}}{=} \operatorname{Im} p$ (défini p.ex. comme objet de $\mathcal{C}^\wedge$, $x_0^\natural = \operatorname{Ker}(\mathrm{id}_{x_0}, p)$ soit l'identité. Alors on a $\tau = p$.*

Démonstration de 4.15.7.4. On est ramené aussitôt, par le procédé standard, au cas où $\mathcal{C} = \mathrm{Ens}$, où la vérification est immédiate : les automorphismes $\tau$ de l'ensemble $E$ $(= x)$ qui satisfait $(*)$ correspondent biunivoquement aux endomorphismes $u$ de $E^\natural = pE$, via

$$\begin{cases} u & \longmapsto \quad \sigma u \rho \\ \tau & \longmapsto \quad \tau | E^\natural \end{cases} \qquad \text{(où } E^\natural \underset{\rho}{\overset{\sigma}{\rightleftarrows}} E \text{ sont les flèches canoniques)} \ ,$$

donc $\tau | E^\natural = \mathrm{id} \Longrightarrow u = \sigma\rho = p$.

Choisissons un $j_0 \in J$, et considérons les homomorphismes

$$\tau^\natural_{j,j_0} \ : \ x_0^\natural \longrightarrow x_0^\natural$$

induits par les $\tau_{j,j_0}$ avec $j \geqslant j_0$. Ici encore, comme l'ensemble des isomorphismes possibles est de

[186] en tenir compte dans la démonstration de 4.15.7.1.

[page 446]

cardinal $\leqslant \pi_1$, et $J/j_0$ est grande devant $\pi_0$, on voit qu'il existe $J' \subset j_0\backslash J$, cofinale dans $j_0\backslash J$, donc dans $J$, telle que pour $j \in J'$, les $\tau^\natural_{j,j_0}$ soient égaux à un même $\tau : x^\natural_0 \xrightarrow{\sim} x^\natural_0$. Donc si $j', j'' \in J'$, avec $j' \leqslant j''$, on a

$$\underbrace{\tau_{j''j_0}}_{\tau} \;=\; \tau_{j''j'}\,\underbrace{\tau_{j'j_0}}_{\tau}\,,$$

d'où

$$\tau_{j''j'} \;=\; \mathrm{id}_{x^\natural_0}\,,$$

puisque la flèche $\tau$ est un isomorphisme. Donc le système inductif réindexé par $J'$, la condition 4° est remplacée par la condition plus stricte $\boxed{\text{4° bis) } \tau^\natural_{j',j} = \mathrm{id}_{x^\natural_0}.}$ Mais la condition 2° devient alors, grâce à 4.15.7.4,

$$\boxed{\text{2° bis) Pour tout } j, \text{ existe } j' \geqslant j \text{ avec } \tau_{j',j} = p}\,.$$

Donc, on peut supposer 1°, 2° bis, 3°, 4° bis (on désigne à nouveau par $J$, au lieu de $J'$, l'ensemble ordonné grand devant $\pi_0$ indexant).

Soit $K$ l'ensemble ordonné défini par

[page 447]

$$\begin{cases} \operatorname{Ob} K \;=\; \operatorname{Ob} J \\ \text{si } j, j' \in \operatorname{Ob} J, \text{ on a } j \overset{K}{\leqslant} j' \text{ si et seulement si } j \overset{\mathrm{J}}{=} j', \text{ ou } j \overset{J}{<} j' \text{ et } \tau_{j',j} = p\,. \end{cases}$$

Il est immédiat que c'est une *relation d'ordre* sur $J$ (car $p^2 = p$), plus fin que la relation d'ordre initiale. Le système inductif induit sur $K$ satisfait aux conditions 1°, 2°, 3° de 4.15.7.3. D'autre part, $K \longrightarrow J$ est cofinal, donc aussi le composé $K \longrightarrow J \longrightarrow I$. Il reste à prouver que $K$ est grande devant $\pi_0$, donc que toute partie $K' \subset K$ telle que $\operatorname{card} K' \leqslant \pi_0$ admet un majorant dans $K$. Elle admet un majorant *dans J,* soit $j$. Par hypothèse 2 bis, il existe $j' \geqslant j$ tel que $\tau_{j'j} = p$, et on peut supposer $j' > j$. (En effet, si $\tau_{j'j} = p$, on voit que

[page 448]

la forme initiale 2°) de la condition 2° bis que l'on a $\tau_{j''j} = p$ pour tout $j'' \geqslant j'$, donc si $j$ n'est par objet final de $J$, on peut supposer $j' > j$. Mais $J$ n'a pas d'objet final, car sinon $I$ en aurait un, cas que l'on avait éliminé. Donc il existe $j'$ tel que $j' \overset{K}{>} j$.) Or on a ceci (qu'on applique au cas $i \in K'$) :

$$i \leqslant j \qquad \text{et} \qquad j \overset{K}{<} j' \qquad \Longrightarrow \qquad i \overset{K}{<} j'\,.$$

$$\underbrace{x_i}_{= x_0} \xrightarrow{\tau_{j,i}} x_j \xrightarrow{\tau_{j',j} = p} x_{j'}\,,$$

$$\tau_{j'i} \;=\; \tau_{j'j}\tau_{ji} = \underbrace{p\tau_{ji}}_{\overset{1°}{=} \tau_{ji}p} \;\overset{?}{=}\; p\,,$$

on a en effet

$$\left.\begin{array}{rcl}\tau_{j',i} & = & p\tau_{j',i} \\ \tau_{j',i} & - & \tau_{j',i}p\end{array}\right\} \quad \overset{\text{par } 4.15.7.4}{\Longrightarrow} \quad \tau_{j',i} \ = \ p \ .$$

Cela achève la démonstration du corollaire 4.15.7.3.

**Corollaire 4.15.7.5** (de 4.15.7.3). *Soit* $(x_i)_{i\in I}$ *un système inductif essentiellement constant grand devant* $\pi_0 \geqslant \operatorname{card}\mathcal{C}$*, dans* $\mathcal{C}$ sans projecteurs. *Alors il existe* $J \longrightarrow I$ *cofinal, avec* $J$ *ordonné grand devant* $\pi_0$*, et tel que le système inductif induit sur* $J$ *soit* constant.

Démontrons le lemme 4.15.7.1. Il faut expliciter l'existence de deux flèches dans $\operatorname{Ind}(\mathcal{C})$,

$$z \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightleftarrows}} \text{"}\varinjlim_{i\in I}\text{"} x_i \ = \ \underline{x} \ ,$$

avec $\beta\alpha = \mathrm{id}_z$, $\alpha\beta = \mathrm{id}_{\underline{x}}$. La donnée

[page 449]

de $x$ équivaut à celle d'un élément de $\varinjlim_{i\in I} \operatorname{Hom}(z, x_i)$, et est donc donné par un

$$\alpha_{i_0} \ : \ z \longrightarrow x_{i_0} \ ,$$

la donnée de $\beta$ équivaut à celle d'un élément de $\varprojlim_{i\in I} \operatorname{Hom}(x_i, z)$, i.e. de flèches

$$\beta_i \ : \ x_i \longrightarrow z \ ,$$

avec la condition de compatibilité habituelle. Quitte à remplacer $I$ par $I'$, avec $I' \longrightarrow I$ cofinal, on peut supposer $I$ ordonnée (et grande devant $\pi_0$, si $I$ initiale l'était), et la condition de compatibilité sur les $\beta_i$ s'écrit

$$\beta_i\tau_{ji} \ = \ \beta_j \qquad \text{si } i \leqslant j \text{ dans } I,$$

où $\tau_{ji} : x_i \longrightarrow x_j$ désigne la flèche de transition. Il faut expliciter, en termes de ces données, les conditions

$$\alpha\beta \ = \ \mathrm{id}_z \ , \qquad \beta\alpha \ = \ \mathrm{id}_{\underline{x}} \ .$$

$$\begin{tikzcd}
z \arrow[r, "\alpha_{i_0}"] \arrow[dr] & x_{i_0} \arrow[r, "\tau_{i,i_0}"] \arrow[d, "\beta_{i_0}"] & x_i \arrow[dl, "\beta_i"] \\
& z &
\end{tikzcd}$$

La relation $\alpha\beta = \mathrm{id}_z$ équivaut à

$(*_{i_0})$ $$\beta_{i_0}\alpha_{i_0} \ = \ \mathrm{id}_z \ ,$$

elle implique d'ailleurs, en posant pour $i \geqslant i_0$,

$$\alpha_i \overset{\text{déf}}{=} \tau_{i,i_0}\alpha_{i_0} \ : \ z \longrightarrow x_i \ ,$$

que l'on a pour $i \geqslant i_0$

$(*_i)$ $$\beta_i\alpha_i \ = \ \mathrm{id}_z \qquad \forall\, i \geqslant i_0 \ .$$

[page 450]

Posons alors

$$p_i \;=\; \alpha_i\beta_i \;:\; x_i \longrightarrow x_i \;,$$

il est clair qu'on a

$$\begin{cases} p_i^2 \;=\; p_i \qquad (p_i \text{ un projecteur}) \\ \alpha_i \;:\; z \longrightarrow x_i \qquad \text{induit un isomorphisme} \\ \qquad z \xrightarrow{\sim} x_i^\natural \overset{\text{déf}}{=} \operatorname{Im} p_i \;=\; \operatorname{Ker}(\mathrm{id}_{x_i}, p_i) \;. \end{cases}$$

L'ensemble ordonné cofinal cherché $J$ est $i_0\backslash I$, il est filtrant, et est grand devant $\pi_0$ si $I$ l'est. À vrai dire, la réduction au cas $I$ ordonné est inutile, on peut prendre directement $J = i_0\backslash I$, il est immédiat que $J$ est filtrante ($I$ l'étant), et $i_0\backslash I \longrightarrow I$ cofinal, enfin que si $I$ est grande devant un cardinal infini $\pi_0$, il en est de même de $i_0\backslash I$.

Exprimons que $\beta\alpha = \mathrm{id}_{\underline{x}}$ ; or on voit que $\beta\alpha$ est défini par l'endomorphisme $(p_j)_{j\in J}$ du système inductif $(x_j)_{j\in J}$ – le fait que ce soit bien un endomorphisme de ce système, i.e. qu'on ait la relation 1°) de 4.15.7.1,

$$p_{j'}x_\lambda \;=\; x_\lambda p_\lambda \qquad \text{si } \lambda : j \longrightarrow j' \text{ dans } J,$$

est immédiat, ça s'écrit

$$\alpha_{j'}\underbrace{\beta_{j'}x_\lambda}_{\beta_j} \;=\; \underbrace{x_\lambda\alpha_j}_{\alpha_{j'}}\beta_j \;, \qquad \text{or les deux membres sont égaux à } \alpha_{j'}\beta_j.$$

[page 451]

Dire que c'est l'identité, est exprimé par la condition 2°) sur $(x_j, p_j)_{j\in J}$. La condition 3° est clair par construction, $p_j$ admettant une image isomorphe à $z$ [ ?] par $\alpha_j$. D'autre part, on voit [tout] de suite que pour une flèche $\lambda : j \longrightarrow j'$ de $J$, on a commutativité dans

$$\begin{tikzcd} x_j \arrow[r, "x_\lambda"] & x_{j'} \\ x_j^\natural \arrow[u, hook] \arrow[r, "x_\lambda"] & x_{j'}^\natural \arrow[u, hook] \\ z \arrow[u, "\overline{\alpha_j}", "\wr"'] \arrow[r, "\mathrm{id}_z", "\sim"'] & z \arrow[u, "\overline{\alpha_{j'}}", "\wr"'] \end{tikzcd} ,$$

où $\overline{\alpha_j}$, $\overline{\alpha_{j'}}$ sont les isomorphismes définis par $\alpha_j$, $\alpha_{j'}$ respectivement. Cela prouve que $x_\lambda^\natural$ est un isomorphisme.

Cela prouve que si $(x_i)_{i\in I}$ est essentiellement constant, il existe $J \longrightarrow I$ comme indiqué. L'inverse est également vrai, car on peut supposer $J = I$, puisque $(x_i)_{i\in I}$ et $(x_j)_{j\in J}$ définissent des ind-objets isomorphes. Alors le système inductif des $x_j^\natural$ a des morphismes de transition des isomorphismes, et comme $J$ est filtrante donc 1-connexe, on en déduit facilement qu'il est isomorphe

[page 452]

à un système inductif constant, de valeur $z$. En choisissant un tel isomorphisme

$$z \xrightarrow[\sim]{\overline{\alpha_i}} x_i^\natural ,$$

on trouve $z \xrightarrow{\alpha} \underline{x}$, et le système des $p_i$ définit des

$$\begin{tikzcd} x_i \arrow[r, "\overline{p_i}"] \arrow[rr, bend right, "\beta_i \overset{\text{déf}}{=} \overline{\alpha_j}^{-1}\overline{p_i}"'] & x_i^\natural \arrow[r, "\overline{\alpha_j}^{-1}"] & z \end{tikzcd} ,$$

et on voit facilement que l'on aura

$$\beta\alpha \;=\; id_z \;, \qquad \alpha\beta \;=\; \mathrm{id}_{\underline{x}} \;,$$

q.e.d.

Je peux maintenant prouver 4.15.3. C'est en effet essentiellement la conjonction des 4.15.7.5 (p. 448), et de 4.8.13, qui nous dit essentiellement que si $\mathcal{C}$ est *karoubienne* (condition vérifiée si $\mathcal{C}$ est sans projecteurs), alors tout système inductif dans $\mathcal{C}$, grand devant $\pi_0$, où $\pi_0 \geqslant \operatorname{card} \operatorname{réd} \mathcal{C}$, est essentiellement constant,

q.e.d.

[page 453]

**4.15.8.** Je veux revenir ici sur la démonstration inachevée de 4.8.13 (p. 212-216). Je reprends la démonstration où je l'avais laissée (p. 215). Il faut prouver que

$$F(\xi) \;=\; \varinjlim_{i\in I} M_i$$

est de cardinal $\leqslant \pi_0$. J'ai annoncé qu'on peut se ramener au cas où $M$ est un monoïde de monomorphismes, i.e. que $uv = uv' \Longrightarrow v = v'$ (pour $u, v, v' \in M$). Je vais expliciter cet argument.

Pour tout $i \in I$, soit

(4.15.8.1) $$N_i \;=\; \left\{ u \in M \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{l'ensemble } I_{i,u} \text{ des } j \in I \text{ tels} \\ j \geqslant i,\ \alpha_{ji} = u \text{ est cofinal} \\ \text{dans } I, \text{ i.e. pour tout } j_0 \in I, \\ \text{existe } j \in I_{i,u}, \text{ avec } j \geqslant j_0 \end{array} \right\} .$$

Comme $I$, donc $i\backslash I$ est grande devant $\pi_0$, et $\operatorname{card} M \leqslant \pi_0$, on voit aussitôt que

(4.15.8.2) $$N_i \;\neq\; \emptyset \;.$$

$\Big($ Si d'autre part $i' \geqslant i$, on trouve

(4.15.8.3) $$N_i \;=\; N_{i'}\alpha_{i'i} \;.$$

L'inclusion $N_{i'}\alpha_{i'i} \subset N_i$ est $\pm$ tautologique, prouvons $N_i \subset N_{i'}\alpha_{i'i}$. Soit $u \in N_i$, l'ensemble $J = I_{i,u} \cap (i'\backslash I)$ des $j \geqslant i'$ tels que $\alpha_{ji} = u$ est cofinal dans $I$, donc grand devant $\pi_0$.

$$\begin{tikzcd} i \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "u = \alpha_{ji}"'] & i' \arrow[r, "\alpha_{ji'}"] & j \end{tikzcd}$$

Donc il existe un $v \in M$ tel que l'ensemble $J'$ de $j \in J$ tels que $\alpha_{ji'} = v$

[page 454]

soit cofinal dans $J$, donc dans $I$. Comme cet ensemble $J'$ est contenu dans $I_{i',v}$, cela implique que $I_{i',v}$ est cofinal dans $I$, i.e. $v \in N_{i'}$. On a d'autre part, pour $j \in J'$,

$$\underbrace{\alpha_{ji'}}_{v}\,\alpha_{i'i} \;=\; \underbrace{\alpha_{ji}}_{u}\;,$$

d'où $u = v\alpha_{i'i}$ avec $v \in N_{i'}$, d'où $u \in N_i\alpha_{i'i}$, q.e.d. $\Big)$

Pour $i \in I$, soit

$$\alpha_i \;:\; \underbrace{\mathrm{Hom}(\xi, \underbrace{x_i}_{=\,\xi})}_{=\,M} \longrightarrow \underbrace{\mathrm{Hom}(\xi, F) \;=\; F(\xi)}_{\simeq\ \varinjlim_i \mathrm{Hom}(\xi, x_i)}$$

le morphisme canonique. On trouve ceci :

(4.15.8.4) Si $u \in N_i$, alors la relation d'équivalence $R_i$ dans $M$ définie par $\alpha_i$ ($v \overset{R_i}{\sim} v' \iff \alpha_i(v) = \alpha_i(v')$) est égale à celle définie par l'application $v \longmapsto uv$ de $M$ dans $M$, i.e.

$$\alpha_i(v) \;=\; \alpha_i(v') \qquad \iff \qquad uv \;=\; uv'\;.$$

C'est immédiate, puisque $I_{i,u}$ étant cofinal dans $I$, on a $\alpha_i(v) = \alpha_i(v')$ si et seulement si $\exists\, j \in I_{i,u}$ avec $\alpha_{ji}v = \alpha_{ji}v'$, or $\alpha_{ji} = u$.

Pour $u \in M$, notons $R_u$ la relation d'équivalence dans $M$ définie par $v \longmapsto uv$. L'ensemble des relations d'équivalence dans [$M$]

[page 455]

obtenu ainsi est de cardinal $\leqslant \operatorname{card} M \leqslant \pi_0$, donc l'ensemble des relations d'équivalences $R_i$ ($i \in I$) est lui aussi de cardinal $\leqslant \pi_0$. Cela montre, $\pi_0$ étant grand devant $\pi_0$, qu'il existe une relation d'équivalence de la forme $R_u$ ($u \in M$), et un ensemble cofinal $I'$ dans $I$, tel que $\forall\, i \in I'$ on ait $R_i = R_u$. Cela montre que, quitte à remplacer $I$ par l'ensemble ordonné cofinal $I'$, qu'on peut supposer que l'on a

(4.15.8.5) $$R_i \;=\; R_u \qquad \forall\, i \in I\;.$$

Soit alors

$$E \;=\; M/R_u \;=\; M/R_i \qquad (\forall\, i \in I)\;,$$

on voit donc que les $\alpha_{ji} \in M$ (pour $i \leqslant j$) sont tels que l'application

$$\tau_{\alpha_{ji}} \;:\; v \longmapsto \alpha_{ji}v \;:\; M \longrightarrow M$$

est compatible avec la relation d'équivalence $R_u$, donc passe au quotient en une application

$$\overline{\alpha_{ji}} \;:\; E \longmapsto E\;,$$

laquelle est d'ailleurs *injective.*

Soit $M'$ le sous-monoïde de $M$ formé des $u \in M$ qui ont la propriété de stabilité précédente, ainsi que la propriété d'injectivité qu'on vient de dire, et $\overline{M'}$ le monoïde image de $M'$ dans le monoïde

$$\mathrm{Mon}(E) \;\subset\; \mathrm{End}_{\mathrm{Ens}}(E)$$

[page 456]

des applications injectives de $E$ dans lui-même. On voit donc que le système inductif donné, défini par les $\alpha_{ji}$, prend ses valeurs dans le sous-monoïde $M'$ de $M$ (i.e. de la sous-catégorie correspondante de la catégorie $B_M$), et que la limite inductive $F(\xi)$ qui nous intéresse (pour prouver $\operatorname{card} F(\xi) \leqslant \pi_0$) est isomorphe à la limite inductive du système inductif d'un système d'ensembles tous égaux à $E$, les morphismes de transition étant les $\overline{\alpha_{ji}} \in \overline{M'} \subset \operatorname{Mon}(E)$. De plus, on aura $\operatorname{card} \overline{M'} \leqslant \operatorname{card} M \leqslant \pi_0$. Le résultat $\operatorname{card} F(\xi) \leqslant \pi_0$ voulu résultera alors du

**Lemme-clef 4.15.8.1.** *Soit $M$ un monoïde de monomorphismes (i.e. tel que $uv = uv' \implies v = v'$, pour $u, v, v' \in M$), et soit $(\alpha_{ji})_{i \leqslant j}$ un système inductif dans $B_M$, indexé par un ensemble ordonné $I$ grand devant $\pi_0$, où $\pi_0$ est un cardinal*

[page 457]

*infini tel que* $\operatorname{card} M \leqslant \pi_0$. *Alors il existe un $i_0 \in I$ tel que pour tout $i \geqslant i_0$, $\alpha_{i_0,i}$ soit un isomorphisme.*

Si on applique ce lemme au cas de $\overline{M'}$ et du $\overline{\alpha_{ji}}$, on trouve donc qu'il existe un $i_0 \in I$ tel que les $\overline{\alpha_{ji_0}}$ soient des isomorphismes. Cela implique que $F(\xi) \simeq \varinjlim_i \underbrace{E_i}_{E}$ est isomorphe à $E_{i_0}$, donc est de cardinal égal à $\operatorname{card} E_{i_0} = \operatorname{card} E \leqslant \pi_0$, ce qui achèvera la démonstration.

D'ailleurs, l'énoncé 4.8.13 implique 4.15.8.1, car dans le système inductif des $(M_i = M, \alpha_{ji})$, de $\varinjlim$ égale à $F(\xi)$, s'il n'existait *pas* de $i_0$ comme stipulé dans 4.15.8.1, alors on en conclurait aisément que l'on aurait $\operatorname{card} F(\xi) > \pi_0$, contrairement à 4.8.13. Nous allons dégager ceci dans un lemme :

[page 458]

**Lemme 4.15.8.2.** *Soit $(E_i)_{i \in I}$ un système inductif d'ensembles, indexé par un ensemble ordonné $I$ grand devant $\pi_0$. On suppose qu'il existe $i_0 \in I$ tel que*

*a) $i \geqslant i_0$ implique* $\operatorname{card} E_i = \pi_0$, *et*

*b) $j \geqslant i \geqslant i_0$ implique que $u_{ji} : E_i \longrightarrow E_j$ est un monomorphisme. Supposons de plus*

*c) $\forall\, i \geqslant i_0\ \exists\, j > i$ tel que $u_{ji}$ ne soit* pas *un isomorphisme (i.e. ne soit pas surjectif). Soit $E_\infty = \varinjlim_{i \in I} E_i$. Alors* $\operatorname{card} E_\infty > \pi_0$.

Ce lemme implique donc l'*équivalence* de 4.8.13 et du “lemme-clef” 4.15.8.1. Pour prouver 4.15.8.2, nous allons prouver quelque chose d'un peu plus précis :

**Corollaire 4.15.8.3.** *Sous les conditions de 4.15.8.2, soit $\alpha_0$ le premier ordinal tel que* $\operatorname{card} \alpha_0 > \pi_0$, *et soit $I_{\alpha_0}$ l'ensemble des ordinaux $\beta < \alpha$ (ensemble ordonné qui est grand devant $\pi_0$). Il existe alors une application strictement croissante*

$$I_{\alpha_0} \longrightarrow I\ , \qquad \alpha \longmapsto i_\alpha\ , \qquad \textit{appliquant } 0 \textit{ dans } i_0\ ,$$

[page 459]

*tel que pour tout $\alpha \in I_{\alpha_0}$, on ait*

$$\underbrace{u_{i_{\alpha+1}, i_\alpha}}_{\substack{\textit{c'est un } \text{monomorphisme,} \\ \textit{d'après b, vu que } i_{\alpha+1} > i_\alpha \geqslant i_0}} \qquad \textit{n'est pas un isomorphisme } ([187]).$$

*On a alors*

$$E'_\infty \overset{\text{déf}}{=} \underbrace{\varinjlim_{\alpha\in I_{\alpha_0}} E_{i_\alpha}}\hookrightarrow \varinjlim_{i\in I} E_i \overset{\text{déf}}{=} E_\infty$$

*et*

$$\operatorname{card} E'_\alpha \geqslant \underbrace{\operatorname{card} I_{\alpha_0}}_{=\ \textit{successeur de}\ \pi_0} > \pi_0\ ,$$

*d'où* $\operatorname{card} E_\infty \geqslant \operatorname{card} E'_\infty > \pi_0$.

Démonstration. La construction des $i_\alpha$ par récurrence transfinie est immédiate, en utilisant c) et le fait que $I$ est grande devant $\pi_0$, et que pour tout $\alpha \in I_{\alpha_0}$, l'ensemble $I_\alpha$ des $\beta < \alpha$ est de cardinal $\leqslant \pi_0$. Le fait que $E'_\infty \longrightarrow E_\infty$ soit injectif résulte de b). Le fait que

$$\operatorname{card} E'_\infty \geqslant \operatorname{card} I_{\alpha_0}$$

résulte du fait que $E'_\infty$ est réunion croissante de sous-ensembles identifiés à $E_{i_\alpha}$, et pour tout

[page 460]

$\alpha$ on peut trouver un

$$\xi_\alpha \in E_{i_\alpha} \setminus \bigcup_{\beta<\alpha} E_{i_\beta}\ .$$

L'application

$$\begin{array}{ccc} \alpha & \longmapsto & \xi_\alpha \\ I_{\alpha_0} & \longrightarrow & E'_\infty \end{array}$$

est injective, donc $\operatorname{card} E'_\infty \geqslant \operatorname{card} I_{\alpha_0}$.

**Corollaire 4.15.8.4.** *Pour un $M$ et un $\pi_0$ donnés, pour que le lemme-clef 4.15.8.1 soit valable, il faut et il suffit qu'il le soit dans le cas où $I = I_{\alpha_0}$, $\alpha_0$ étant le premier ordinal tel que* $\operatorname{card}\alpha_0 > \alpha_0$. *Il revient au même qu'on ne puisse trouver de système inductif $(\alpha_{ji})_{j\geqslant i}$ indexé par $I_{\alpha_0}$, à valeurs dans $M$, tel que pour $i < j$, on ait $\alpha_{ji}$ non inversible dans $M$.*

[page 461]

Je vais résumer ce qui a été obtenu dans un énoncé récapitulatif :

**Théorème 4.15.9.** *Soient $\mathcal{C}$ une petite catégorie, $\pi$ un cardinal tel que $\pi \geqslant \operatorname{card}\mathcal{C}$. Les conditions suivantes sont équivalentes (et je conjecture qu'elles sont toujours satisfaites) :*

- *a)* $\mathcal{M} \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{Ind}_\pi\mathcal{C}$ *est réduit à $\mathcal{M}_\pi$.*
- *a′) (Si $\mathcal{C}$ est karoubienne.) Tout système inductif $\underline{x} = (x_i)_{i\in I}$ dans $\mathcal{C}$, grand devant $\pi$, est essentiellement constant.*
- *a″) Pour tout système inductif $(x_i)_{i\in I}$ dans $\mathcal{C}$, grand devant $\pi$, il existe un foncteur cofinal $J \longrightarrow I$, avec $J$ ensemble ordonné grand devant $\pi$, et tel que le système réindexé $(x_j)_{j\in J}$ satisfasse les conditions suivantes :*
  1. *Tous les $x_j$ sont égaux à un même élément $x$ de $\mathcal{C}$.*
  2. *Il existe un projecteur $p$ dans $x$, tel que l'on ait $\alpha_{j'j} = p$ pour $j < j'$ $(j, j' \in J)$, où $\alpha_{j'j} : x_j \longrightarrow x_{j'}$ est la flèche de transition.*

[187] *mieux :* $\forall\, \alpha \in I_{\alpha_0}$ $\varinjlim_{\beta\in I_\alpha} E_{i_\beta} \longrightarrow E_{i_\alpha}$ n'est pas surjectif.

*b) Pour tout $x \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$, et pour tout monoïde quotient $M'$ de $M = \operatorname{End}_{\mathcal{C}}(x)$, tel que $M'$ soit un monoïde de monomorphismes (i.e. $uv = uv' \Longrightarrow v = v'$ si $u, v, v' \in M'$), et pour tout système inductif grand devant $\pi$ à valeurs dans $B_{M'}$ (définie par un système d'éléments $(\alpha_{ji})_{i \leqslant j,\, i,j \in I}$ d'un ensemble ordonné $I$ grand devant $\pi$, avec $\alpha_{kj}\alpha_{ji} = \alpha_{ki}$ pour $i \leqslant j \leqslant k$), il existe $i_0 \in I$ tel*

`[page 462]`

*que $\alpha_{ii_0} = 1$ pour $i \geqslant i_0$, i.e. $\alpha_{ji} = 1$ pour $j \geqslant i \geqslant i_0$.*

*b') $M'$ étant un monoïde de monomorphismes comme dans b) (donc $\operatorname{card} M' \leqslant \operatorname{card}\mathcal{C} \leqslant \pi$), soit de plus $\alpha_0$ le plus petit ordinal tel que $\operatorname{card}\alpha_0 > \pi$, et soit $I = I_{\alpha_0}$ l'ensemble ordonné des ordinaux $\alpha < \alpha_0$ (lequel ensemble est grand devant $\pi$). Il n'existe* pas *de système inductif dans $B_{M'}$, tel que pour $i < j$ dans $I$, $\alpha_{ji}$ soit un élément non inversible dans $M'$ (donc $u \longmapsto \alpha_{ji}u : M' \longrightarrow M'$ est injectif mais non surjectif).*

Signalons tout de suite le

**Corollaire 4.15.10.** *Les conditions équivalentes précédentes sont satisfaites, si $\pi > \operatorname{card}\mathcal{C}$.*

En effet, soit $\alpha_1$ le plus petit ordinal tel que $\operatorname{card}\alpha_1 > \operatorname{card}\mathcal{C}$. Donc $\pi_1 \overset{\text{déf}}{=} \operatorname{card}\alpha_1$ est le successeur de $\pi_0 \overset{\text{déf}}{=} \operatorname{card}\mathcal{C}$, et on a $\pi \geqslant \pi_1$, donc (si $\alpha_0$ est comme explicité dans b′ ci-dessus) $\operatorname{card}\alpha_0 > \pi_1$, donc $\alpha_1 < \alpha_0$. Soit (avec les notations de b′), pour $\alpha \in I$ `[plutôt` $\alpha \in I_{\alpha_0}$`]`, i.e. $\alpha < \alpha_0$,

$$M_\alpha \;=\; \varinjlim_{i<\alpha} \underbrace{M_i}_{=M} \,,$$

on voit donc, comme les $\alpha_{ji}$ sont injectifs et non surjectifs, que

$$\operatorname{card} M_\alpha \;\geqslant\; \operatorname{card}\alpha \,,$$

`[page 463]`

et que pour $\alpha < \beta$, on a

$$M_\alpha \hookrightarrow M_\beta \qquad \text{injectif}\,.$$

Appliquons ceci au cas où $\alpha = \alpha_1$, donc on trouve

$$\operatorname{card} M_{\alpha_1} \;\geqslant\; \operatorname{card}\alpha_1 \;=\; \pi_1 \,,$$

d'autre part, en prenant $\beta = \alpha_1 + 1$, d'où $M_\beta \simeq M$, on trouve une injection

$$M_{\alpha_1} \hookrightarrow M \,,$$

d'où

$$\pi_1 \;=\; \operatorname{card} M_{\alpha_1} \;\leqslant\; \operatorname{card} M \;=\; \pi_0 \,,$$

une contradiction, ce qui établit b′.

**Corollaire 4.15.11.** *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie essentiellement petite, $\pi$ un cardinal tel que $\pi > \operatorname{card\,réd}\mathcal{C}$. Soit $\mathcal{M} \overset{\text{déf}}{=} \operatorname{Ind}_\pi\mathcal{C}$, alors $\mathcal{M} = \mathcal{M}_\pi$, et c'est une enveloppe de Karoubi de $\mathcal{C}$.*

On peut supposer $\mathcal{C}$ réduite, donc $\operatorname{card}\mathcal{C} < \pi$, et on applique le corollaire précédent.

Ainsi, le résultat litigieux 4.8.13 (p. 212) est finalement prouvé sous une forme légèrement plus faible, avec $\pi > \operatorname{card\,réd}\mathcal{C}$ au lieu de $\pi \geqslant \operatorname{card\,réd}\mathcal{C}$. Du même coup, les applications de 4.8.13 qu'on a fait jusqu'à présent (notamment le lemme 4.15.3).

[page 464]

## 4.16 Exemples et questions

**4.16.0.** J'avais cru que tout foncteur "raisonnable" (ou plus précisément, tout foncteur "logiquement accessible") entre catégories accessibles devrait être accessible. Ce n'est malheureusement pas vrai, puisqu'un composé de deux foncteurs Hom

$$\mathrm{Ens} \longrightarrow \mathrm{Ens}\ , \qquad E \longmapsto \underbrace{\mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(E,I),J)}_{J^{(I^E)}}$$

est non accessible, si $I$, $J$ sont tous deux de cardinal $\geqslant 2$. Prenant p.ex. $I = J = \{0,1\}$, on trouve le foncteur

$$E \longmapsto \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(E))\ ,$$

qui n'est pas accessible.

**4.16.1.** Deuxième désillusion : j'avais cru que pour toute catégories accessible $\mathcal{M}$, toute sous-catégorie $\mathcal{N}$ strictement pleine et stable par facteurs directs "raisonnable" (p.ex. "logiquement accessible") devrait être accessible dans $\mathcal{M}$. Il n'en est rien, même dans le cas particulier de l'image inverse de la sous-catégorie accessible dans Ens

[page 465]

$$\underbrace{\mathrm{Ens}^*}_{=\{E\,\in \mathrm{Ens}\,\mid\, E\neq\emptyset\}} \quad\subset\ \mathrm{Ens}$$

par un contrafoncteur accessible *représentable*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M} & \longrightarrow & (\mathrm{Ens})^\circ \\ x & \longmapsto & \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(x,z)\ , \end{array}$$

i.e. la sous-catégorie ouverte (donc strictement pleine) $\mathcal{M}_z$ de $\mathcal{M}$ formée des objets $x$ tels que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(x,z) \neq \emptyset$, n'est par toujours accessible dans $\mathcal{M}$. Ici, je ne suis pas parvenu à un exemple aussi élémentaire (cf. appendice) – j'ai pris $\mathcal{M} = (k\text{-alg. comm.})$, $k$ un corps infini et $z$ l'objet initial $k$ de $\mathcal{M}$ – j'ai trouvé que $\mathcal{M}_z$ n'est pas $\mathrm{L}_\pi$-stable dans $\mathcal{M}$, quelque soit le cardinal $\pi$ – mais cet exemple utilisait que $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}_1$, plus petit univers contenant $\mathbf{N}$. J'ignore si pour tout autre univers, on peut trouver un corps $k$ de cardinal $\pi \in \mathfrak{U}$ assez grand, de façon que tout $\pi$-ultrafiltre sur un ensemble $E \in \mathfrak{U}$ soit trivial. Peut-être

[page 466]

un tel exemple, où non la construction du couple $(\mathcal{M},\mathcal{N})$, mais la démonstration du fait que $\mathcal{N}$ n'est pas accessible dans $\mathcal{M}$, fait appel à des hypothèses particulières sur l'univers ambiant, ne doit pas être considéré comme (tout à fait !) "logiquement accessible". Pour être vraiment probant, il faudrait un exemple de nature plus élémentaire.

Il reste la possibilité qu'il y ait un théorème métamathématique qui assure que tout couple $(\mathcal{M},\mathcal{N})$ logiquement accessible, avec $\mathcal{M}$ accessible, et $\mathcal{N}$ sous-catégorie strictement pleine $\mathrm{L}_\pi$-stable dans $\mathcal{M}$ pour $\pi$ assez grand, soit accessible dans $\mathcal{M}$ ([188]). Ceci s'appliquerait

[188] C'est faux, même pour une sous-catégorie fermée, cf. 4.16.7.10 ci-dessous.

en particulier au cas d'une sous-catégorie *fermée :* toute sous-catégorie fermée (qui soit logiquement accessible) serait accessible dans $\mathcal{M}$. L'exemple-test le plus simple serait celui du complémentaire fermé $\mathcal{M}'_z$ de la sous-catégorie ouverte $\mathcal{M}_z$ ci-dessus ([189]), i.e. la catégorie des $x \in \operatorname{Ob} \mathcal{M}$ tels que $\operatorname{Hom}_{\mathcal{M}}(x, z) = \emptyset$, ou encore

[page 467]

l'image inverse de la sous-catégorie fermée accessible

$$e \ = \ \{\emptyset\} \ \subset \ (\text{Ens})$$

réduite à $\{\emptyset\}$, par le foncteur représentable $x \longmapsto \operatorname{Hom}(x, z) : \mathcal{M} \longrightarrow \text{Ens}$. Il se pourrait donc qu'une telle catégorie soit toujours accessible dans $\mathcal{M}$. Mais j'ai été incapable de le prouver, même dans le cas particulier ci-dessus, où $\mathcal{M} = (k\text{-alg. comm.})$, $k$ étant un corps commutatif infini. La difficulté est (dans tous les cas) la suivante : trouver, pour $z$ fixé, un cardinal $\pi > \pi_0$ tel que pour tout $x \in \operatorname{Ob} \mathcal{M}$, et tout système (ou *un* système) $\pi_0$-$\pi$-adapté $(x_i)_{i \in I}$ de limite inductive $x_0$ ($\pi_0$ un cardinal donné, utile pour $\mathcal{M}$), *si* $\operatorname{Hom}_{\mathcal{M}}(x, z)$ ($\simeq \varprojlim \operatorname{Hom}_{\mathcal{M}}(x_i, z)$) est vide, alors $\exists\ i_0 \in I$ tel que $\operatorname{Hom}_{\mathcal{M}}(x_{i_0}, z)$ soit déjà vide. Dans l'exemple $\mathcal{M} = (k\text{-alg. comm.})$, il faut donc prouver que l'on peut trouver un cardinal $\pi$ tel que pour tout $k$-algèbre $A$ avec $\operatorname{Hom}_{\mathcal{M}}(A, k) = \emptyset$, il existe une sous-$k$-algèbre $A_i$ de cardinal $\leqslant \pi$, telle que $\operatorname{Hom}_k(A_i, k) = \emptyset$ ([190]). J'ai tendance à croire que ça doit être vrai (et même sans

[page 468]

supposer que $k$ soit un corps, et aussi en prenant la condition $\operatorname{Hom}_{\mathcal{M}}(A, Z) = \emptyset$, où $Z$ est un objet quelconque de $\mathcal{M}$). Ce genre de questions semble étonnement délicat ...

**4.16.2.** Il est possible, plus généralement, que la question suivante ait une réponse affirmative : Soit

$$f \ : \ \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}^{\circ}$$

un foncteur accessible, avec $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ catégories accessibles, et soit $\underline{T}$ une sous-catégorie de $\mathcal{N}$ accessible dans $\mathcal{N}$, et telle qu'il existe un cardinal $\pi$ ayant les propriétés suivantes : $\mathcal{N}^{\circ}$ satisfait $\mathrm{L}_{\pi}$ (i.e. $\mathcal{N}$ stable par $\varprojlim$ grandes devant $\pi_1$). Alors $\underline{S} \overset{\text{déf}}{=} f^{-1}(\underline{T})$ est-elle accessible dans $\mathcal{M}$ ([191]) ? Ceci généralise le cas $\mathcal{N} = (\text{Ens})$, $\underline{T} = \{\emptyset\}$, $f$ foncteur représenté par $z \in \operatorname{Ob} \mathcal{M}$, envisagé tout à l'heure. Avec le même type d'exemple, mais en prenant $\mathcal{N} = (\text{Ens})^*$

[page 469]

au lieu de $\mathcal{N} = \{\emptyset\}$, on voit que la condition supplémentaire de stabilité sur $\underline{T}$ n'est pas superflue. (**N.B.** Elle sont à assurer que $\underline{S}$ est $\mathrm{L}_{\pi}$-stable dans $\mathcal{M}$ pour $\pi$ grand.)

**4.16.3.** Questions apparentée : j'avais espéré que pour un foncteur accessible entre catégories accessibles

$$f \ : \ \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{M} \ ,$$

la $\natural$-image essentielle, formée des $y \in \operatorname{Ob} \mathcal{M}$ qui sont isomorphes à un facteur direct d'un objet de la forme $f(x)$, avec $x \in \operatorname{Ob} \mathcal{N}$, serait accessible dans $\mathcal{N}$. L'exemple ci-dessus

---

[189] **N.B.** elles est accessible dans $\mathcal{M}$ si et seulement si $\mathcal{M}_z$ l'est !

[190] C'est faux, cf. annotation marginale p. 466.

[191] Faux, avec $\mathcal{N} = \text{Ens}$ et un foncteur représentable $\mathcal{M} \longrightarrow \text{Ens}^{\circ}$, prenant $I = \{\emptyset\}$, cf. annotations marginales p. 466, 467.

(nullement élémentaire !) de la sous-catégorie $\mathcal{M}_z$ de $\mathcal{M}$ (formée des $x \in \operatorname{Ob}\mathcal{M}$ tels que $\operatorname{Hom}_{\mathcal{M}}(x,z) \neq \emptyset$) montre qu'il n'en est rien. En effet, $\mathcal{M}_z$ est l'image essentielle, et aussi l'image $\natural$-essentielle, du foncteur

$$\mathcal{M}/z \longrightarrow \mathcal{M}\,,$$

or $\mathcal{M}/z$ est accessible, et le foncteur précédent accessible, si $\mathcal{M}$ est accessible (vérification par AQT `[âne qui trotte]`, cf. plus bas, énoncé plus général).

`[page 470]`

On a l'impression que la raison pour laquelle on a de tels contre-exemples, c'est que l'on a des $\natural$-images essentielles qui ne sont $\mathrm{L}_\pi$-stables dans $\mathcal{M}$ pour aucun cardinal $\pi \in \mathfrak{U}$. Cela amène à modifier la conjecture ainsi : soit $\pi$ un cardinal tel que $\mathcal{M}$ satisfasse à $\mathrm{L}_\pi$, et soit $\underline{S}(\pi)$ la plus petite sous-catégorie strictement pleine de $\mathcal{M}$, $\mathrm{L}_\pi$-stable dans $\mathcal{M}$, et qui contienne l'image essentielle de $f$. (On pourrait appeler $\underline{S}(\pi)$ la $\mathrm{L}_\pi$-image essentielle.) Alors $\underline{S}(\pi)$ est accessible dans $\mathcal{M}$. De plus, la famille (décroissante) des $\underline{S}(\pi)$, pour $\pi$ variable, est stationnaire, i.e. il existe un cardinal $\pi$ tel que $\pi' \geqslant \pi$ implique $\underline{S}(\pi') = \underline{S}(\pi)$. Il est clair alors que $\underline{S}(\pi)$ est la plus petite sous-catégorie de $\mathcal{M}$ qui soit accessible dans $\mathcal{M}$ et qui contienne l'image essentielle de $f$. La même question se pose pour un foncteur $g^\circ : \mathcal{N}^\circ \longrightarrow \mathcal{M}$, où $g : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{M}^\circ$ est un foncteur accessible, $\mathcal{N}$ et $\mathcal{M}$ accessibles. Je conjecture que la réponse est encore affirmative.

`[page 471]`

Soit $\mathcal{M}$ une catégorie satisfaisant la condition L, et admettant une petite sous-catégorie pleine strictement génératrice $\mathcal{C}$, formée d'objets accessibles. On a donc un foncteur pleinement fidèle et accessible

$$\mathcal{M} \hookrightarrow \mathcal{C}^\wedge\,,$$

$\mathcal{M}$ $\mathrm{L}_\pi$-stable dans $\mathcal{C}^\wedge$ pour $\pi$ convenable. Si $\overline{\mathcal{M}}$ est l'image essentielle, de sorte que $\mathcal{M} \simeq \overline{\mathcal{M}}$, c'est donc une sous-catégorie strictement pleine $\mathrm{L}_\pi$-stable dans $\mathcal{C}^\wedge$. Donc on s'attend à ce qu'elle soit accessible dans $\mathcal{C}^\wedge$ (si la situation décrite est "logiquement accessible"), ou ce qui revient au même, que $\mathcal{M}$ soit accessible. (Comparer 4.8.1, p. 187.) Mais il ne doit pas être difficile ([192]), en procédant à un nombre $\pi_{\mathfrak{U}}$ de choix (où $\pi_{\mathfrak{U}} = \operatorname{card}\mathfrak{U}$), de faire quand même des exemples ("logiquement inaccessibles") d'une sous-catégorie strictement pleine $\mathcal{M}$ de $\mathcal{C}^\wedge$ qui soit $\mathrm{L}_\pi$-stable, mais non accessible dans $\mathcal{C}^\wedge$. Cette $\mathcal{M}$ admet donc une petite sous-catégorie strictement génératrice formée d'objets accessibles ([193]) et satisfait à $\mathrm{L}_\pi$, sans pourtant être accessible.

`[page 472]`

**4.16.4** ([194]). Soit $\mathcal{M}$ une catégorie telle que $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}^\circ$ soient accessibles. Je conjecture qu'alors $\mathcal{M}$ est essentiellement petite. Plus généralement, supposons $\mathcal{M}$ accessible, et que $\mathcal{M}$ admette une petite sous-catégorie qui soit *strictement co*génératrice. Alors $\mathcal{M}$ est-elle essentiellement petite ? Plus généralement, si $\mathcal{M}$ admet une petite sous-catégorie strictement génératrice, et aussi une petite sous-catégorie strictement cogénératrice, i.e. si $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}^\circ$ sont toutes deux équivalentes à des sous-catégories pleines d'une $\mathcal{C}^\wedge$, avec $\mathcal{C}$ petite, alors $\mathcal{M}$ est-elle essentiellement petite ?

[192] OK en prenant un *fermé* $\underline{S}$ non accessible dans $\mathcal{M}$ d'une catégorie accessible $\mathcal{M}$, qu'on plonge dans un $\mathcal{C}^\wedge$. Mais ces $\underline{S}$ n'a *pas* une petite famille strictement génératrice !

[193] Ce n'est pas clair, il faudrait pour cela que le foncteur d'inclusion soit un adjoint à gauche !

[194] descendre après 4.16.5.

**4.16.5.** Soit $I$ une petite catégorie, $I_\bullet$ le cône droit sur $I$ (obtenu en rajoutant un objet final $e$), $\mathcal{M}$ une catégorie accessible,

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\square}(I_\bullet, \mathcal{M}) \hookrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(I_\bullet, \mathcal{M})$$

la sous-catégorie strictement pleine de la catégorie (accessible) $\underline{\mathrm{Hom}}(I_\bullet, \mathcal{M})$, formée des foncteurs $f$ qui font de $f(e)$ la limite inductive dans $\mathcal{M}$ des $f(i)$ ($i \in \mathrm{Ob}\, I$). Cette sous-catégorie est $\mathrm{L}_\pi$-stable pour $\pi$ grand, donc il y a lieu

[page 473]

de conjecturer qu'elle est accessible dans $\underline{\mathrm{Hom}}(I_\bullet, \mathcal{M})$. $\Big($ Je rappelle qu'on a vu dans 4.14 que c'est OK si les $\varinjlim$ de type $I$ sont représentables dans $\mathcal{M}$. Et qu'une réponse affirmative, dans le cas où

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & 1 \\ I = 0 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & 2 \end{tikzcd} \quad , \qquad \text{donc} \qquad \begin{tikzcd}[row sep=small] & 1 \arrow[dr] & \\ I = 0 \arrow[ur] \arrow[dr] & & 3 \\ & 2 \arrow[ur] & \end{tikzcd} \quad ,$$

implique que la sous-catégorie $\underline{\mathrm{\acute{E}p}}(\mathcal{M})$ dans $\underline{\mathrm{Fl}}(\mathcal{M})$ est accessible dans $\underline{\mathrm{Fl}}(\mathcal{M})$.$\Big)$

**N.B.** Si $\mathcal{M}$ admet une petite sous-catégorie *co*génératrice, alors la question est justiciable de la conjecture 4.16.2 relative à un foncteur accessible $\mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}^\circ$, ici $\underline{\mathrm{Hom}}(I_\bullet, \mathcal{M}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(I^\circ \times \mathcal{C}, \mathrm{Ens})^\circ \ldots$

**4.16.6.** Il reste la question de l'accessibilité relative d'une catégorie $\mathcal{E}$ sur une petite catégorie $\mathcal{C}$. Je pense à présent, grâce à 4.15.9, et son corollaire 4.15.10, que l'énoncé suivant doit "tomber" par AQT [âne qui trotte] :

**Proposition 4.16.6.1.** *Soit $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{C}$ un foncteur, avec $\mathcal{C}$ petite catégorie karoubienne. On suppose que $f$ satisfait la condition $H' = H$ (1+2+3) de 4.15.1 (page 415), où il suffit H 2, H 3, pour toute flèche $\lambda$* non identique *de $\mathcal{C}$. On suppose de plus que pour une catégorie $\mathcal{C}'$ d'un des deux types qu'on va décrire, et un foncteur $\mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}$, $\mathcal{E}' = \mathcal{E} \times_{\mathcal{C}} \mathcal{C}'$ soit accessible, et $\mathcal{E}' \longrightarrow \mathcal{C}'$ accessible.*

[page 474]

$\Big($ *On prend pour $\mathcal{C}'$ la catégorie*

$$\mathcal{Q} = \left\{ \begin{tikzcd} \xi_0 = \xi^\natural \arrow[r, shift left, "\sigma"] \arrow[dr, "u_0"'] & \xi \arrow[l, shift left, "\rho"] \arrow[d, "u = u_0\rho"] \arrow[loop right, "p"] \\ & \eta \end{tikzcd} \right. \qquad \begin{array}{l} \rho\sigma = \mathrm{id}_{\xi_0} \\[1ex] \sigma\rho = p\,, \quad \text{d'où} \left\{ \begin{array}{l} p^2 = p \\ p\sigma = \sigma \\ \rho p = \rho \end{array} \right. \\[1ex] u = u_0\rho\,, \quad \text{d'où} \left\{ \begin{array}{l} up = u \\ u\sigma = u_0 \end{array} \right. \end{array}$$

*(trois objets $\xi$, $\xi_0$, $\eta$ et cinq flèches non identiques $\sigma$, $\rho$, $p$, $u_0$, $u$, liés par les relations ci-dessus), ou la catégorie (isomorphe à $Q^\circ$)*

$$\mathcal{Q}' = \left\{ \begin{tikzcd} \xi_0 \arrow[r, shift left, "\sigma"] & \xi \arrow[l, shift left, "\rho"] \arrow[loop right, "p"] \\ & \eta \arrow[ul, "u_0"] \arrow[u, "u"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{array}{l} \left.\begin{array}{rcl} \rho\sigma & = & \mathrm{id}_{\xi_0} \\ \sigma\rho & = & p \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} p^2 & = & p \\ p\sigma & = & \sigma \\ \rho p & = & \rho \end{array}\right. \\ \begin{array}{rcl} u & = & \sigma u_0 \end{array} \quad \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} pu & = & u \\ \rho u & = & u_0 \end{array}\right. \end{array} \right.$$

*On se limite aux foncteurs* $\mathcal{Q} \longrightarrow \mathcal{C}$, $\mathcal{Q}' \longrightarrow \mathcal{C}$ *tels que* $p$ *soit transformé en une flèche* non identique *de* $\mathcal{C}$ ([195]) *(donc la condition relative à* $\mathcal{Q}$, $\mathcal{Q}'$ *devient vide, si* $\mathcal{C}$ *est sans projecteurs).* $\Big)$

*Sous ces conditions,* $\mathcal{E}$ *est accessible, et* $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{C}$ *est accessible.*

`[page 475]`

On trouve alors le

**Corollaire 4.16.6.2.** *Soit* $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{C}$ *un foncteur. Conditions équivalentes :*

a) *Pour toute catégorie* $\mathcal{C}'$ petite *et* karoubienne, *et tout foncteur* $\mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}$, $\mathcal{E}' = \mathcal{E} \times_{\mathcal{C}} \mathcal{C}'$ *est accessible, et le foncteur* $\mathcal{E}' \longrightarrow \mathcal{C}'$ *est accessible.*

b) *Comme a), mais* $\mathcal{C}'$ *étant une des trois catégories* $\Delta_1$, $\mathcal{Q}$, $\mathcal{Q}'$ *(où* $\mathcal{Q}$, $\mathcal{Q}'$ *sont définies dans 4.15.6.1 ci-dessus).*

b′) ([196]). *(Si* $\mathcal{C}$ *est sans projecteurs.) Comme b), mais en se limitant au cas* $\mathcal{C}' = \mathbf{\Delta}_1$ *(à l'exclusion de* $\mathcal{Q}$, $\mathcal{Q}'$*).*

**Corollaire 4.16.6.3.** *Supposons* $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{C}$ *fibrant ou cofibrant. Alors les conditions équivalentes précédentes impliquent que :*

1°) *Les* $\mathcal{E}_s$ *sont accessibles* ($s \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$)*.*

2°) *Pour toute flèche* $\lambda : s \longrightarrow t$ *dans* $\mathcal{C}$*, le foncteur* $\lambda^* : \mathcal{E}_t \longrightarrow \mathcal{E}_s$ *(resp.* $\mathcal{E}_s \longrightarrow \mathcal{E}_t$*) est accessible.*

*D'autre part, l'ensemble de ces conditions 1°, 2°) équivaut à la validité de b) ci-dessus, dans le cas* $\mathcal{C}' = \mathbf{\Delta}_1$*, ou encore à la validité*

`[page 476]`

*de a) ci-dessus, quand* $\mathcal{C}'$ *est* sans projecteurs.

**Question 4.16.6.4.** *Les conditions 1° et 2° précédentes impliquent-elles celles de 4.16.6.2 ? En d'autres termes, si la catégorie base* $\mathcal{C}$ *est égale à* $\mathcal{Q}$ *ou à* $\mathcal{Q}'$*, alors ces conditions impliquent-elles que* $\mathcal{E}$ *est accessible, et* $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{C}$ *accessible ?*

Ça semble idiot de ne pas connaître la réponse !

**4.16.6.5.** J'ai envie d'appeler catégorie *accessible sur* $\mathcal{C}$, une catégorie $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{C}$ satisfaisant les conditions équivalentes de 4.16.6.1 – du moins dans le cas où on suppose $\mathcal{C}$ petite. Pour que cette terminologie soit vraiment satisfaisant, il faudrait que l'on sache prouver que ces conditions impliquent ceci : pour toute catégorie accessible $\mathcal{M}$ et tout foncteur accessible $\mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{C}$, la catégorie $\mathcal{E} \times_{\mathcal{C}} \mathcal{M}$ est accessible, et le foncteur $\mathcal{E} \times_{\mathcal{C}} \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$ est accessible.

[195] Je ne suis pas sûr si c'est raisonnable – à vérifier avec soin !

[196] ?, à vérifier avec soin !

[page 476 bis]

L'idée, c'est qu'on appellerait (sous hypothèse de petitesse) *catégorie accessible* $\mathcal{E}$ sur une autre $\mathcal{C}$, une catégorie ayant la propriété qu'on vient de dire – mais en supposant maintenant de plus que $\mathcal{C}$ satisfasse à $\mathrm{L}_\pi$, j'imagine, pour tout foncteur accessible $\mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{C}$, avec $\mathcal{M}$ accessible, $\mathcal{E} \times_{\mathcal{C}} \mathcal{M}$ est accessible et le foncteur canonique $\mathcal{E} \times_{\mathcal{C}} \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{E}$ est accessible.

[page 477]

### 4.16.7. Retour sur les sous-catégories fermées d'une catégorie accessible (4.16.1).

**Proposition 4.16.7.1.** *Soient $\mathcal{M}$ une catégorie accessible, $(\underline{S}_i)_{i\in I}$ une famille de sous-catégories fermées accessibles dans $\mathcal{M}$. On ne suppose que* $\operatorname{card} I$ *soit petit. Soit $\underline{S}$ la sous-catégorie strictement pleine de $\mathcal{M}$ telle que* $\operatorname{Ob}\underline{S} = \bigcup_{i\in I}\operatorname{Ob}\underline{S}_i$. *Alors pour que $\underline{S}$ soit accessible dans $\mathcal{M}$, il faut et il suffit qu'il existe une* petite *partie $J \subset I$, telle que* $\operatorname{Ob}\underline{S} = \bigcup_{i\in J}\underline{S}_i$. *(En particulier, si $I$ est ordonnée, et $i \longmapsto \underline{S}_i$ croissante et grande devant tout petit cardinal, il faut et il suffit qu'il existe un $i \in I$ tel que $\underline{S} = \underline{S}_i$, i.e. tel que $j \geqslant i$ implique $\underline{S}_j = \underline{S}_i$.)*

C'est évidemment suffisant, en vertu de 4.13... Prouvons inversement que si $\underline{S}$ est accessible dans $\mathcal{M}$, alors la condition précédente est satisfaite. Soit $\pi$ un cardinal $\geqslant \pi_0$ tel que $\underline{S}$ soit $\pi$-accessible dans $\mathcal{M}$, donc

$$\underline{S} \xleftarrow{\sim} \operatorname{Ind}_\pi \underline{S}(\pi)\ , \qquad \text{où } \underline{S}(\pi) = \underline{S} \cap \mathcal{M}_\pi .$$

[page 478]

Soit $\underline{S}(\pi)_0$ une sous-catégorie réduite de $\underline{S}(\pi)$, telle que $\underline{S}(\pi)_0 \hookrightarrow \underline{S}(\pi)$ soit une équivalence, de sorte que $\underline{S}(\pi)_0$ est petite. Pour tout $x \in \operatorname{Ob}\underline{S}(\pi)_0$, soit $i_x \in I$ tel que $x \in \operatorname{Ob}\underline{S}_{i_x}$. Soit $J$ l'ensemble de tous les $i_x$, que est une petite partie de $I$, et soit $\underline{S}_J$ la sous-catégorie strictement pleine de $\mathcal{M}$ ayant pour ensemble d'objets $\bigcup_{j\in J}\operatorname{Ob}\underline{S}_j$. Donc $\underline{S}(\pi)_0$ est contenue dans $\underline{S}_J$, donc aussi $\underline{S}(\pi)$, puisque $\underline{S}_J$ est strictement pleine :

$$\underline{S}(\pi) \hookrightarrow \underline{S}_J\ .$$

D'ailleurs $\underline{S}_J$ est accessible dans $\mathcal{M}$ (loc. cit.), et est fermée dans $\mathcal{M}$ comme réunion de sous-catégories fermées, *a fortiori elle satisfait à* $L_\pi$. Donc, comme $\underline{S}(\pi) \subset \underline{S}_J$, le foncteur essentiellement surjectif $\operatorname{Ind}_\pi(\underline{S}(\pi)) \longrightarrow \underline{S}$ se factorise par $\underline{S}_J$. Donc $\underline{S}_J \hookrightarrow \underline{S}$ est essentiellement surjectif, et comme $\underline{S}_J$ est strictement pleine, on en conclut $\underline{S}_J = \underline{S}$, q.e.d.

[page 479]

**Proposition 4.16.7.2.** *Soient $\mathcal{M}$ une catégorie accessible, $x$ un objet de $\mathcal{M}$, et ${}_x\mathcal{M}$ la sous-catégorie fermée de $\mathcal{M}$ engendrée par $x$, formée des $y \in \operatorname{Ob}\mathcal{M}$ tels que* $\operatorname{Hom}(x,y) \neq \emptyset$*, i.e. l'image essentielle de $x\backslash\mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$. Alors ${}_x\mathcal{M}$ est une sous-catégorie de $\mathcal{M}$ accessible dans $\mathcal{M}$.*

En effet, c'est l'image inverse de la sous-catégorie $\mathrm{Ens}^*$ accessible dans Ens par le foncteur représentable (donc accessible)

$$h_x\ :\ y \longmapsto \operatorname{Hom}(x,y)\ :\ \mathcal{M} \longrightarrow \mathrm{Ens}\ ,$$

donc est accessible dans $\mathcal{M}$ en vertu de 4.13...

**Corollaire 4.16.7.3.** *Soit $\mathcal{M}$ une catégorie accessible, $\underline{S}$ une sous-catégorie fermée. Pour que $\underline{S}$ soit accessible, il faut et il suffit qu'il existe une* petite *partie $J$ de $\underline{S}$, telle que* $\operatorname{Ob}\underline{S} = \bigcup_{x\in J}\operatorname{Ob}({}_x\mathcal{M})$.

En effet, on a

$$\operatorname{Ob}\underline{S} \;=\; \bigcup_{x\in\operatorname{Ob}\underline{S}}\operatorname{Ob}({}_x\mathcal{M})\;,$$

i.e. $\underline{S}$ apparaît comme réunion de

[page 480]

la famille (pas nécessairement petite) de sous-catégories fermées ${}_x\mathcal{M}$ de $\mathcal{M}$ (indexées par $x \in \operatorname{Ob}\underline{S}$), accessibles dans $\mathcal{M}$ en vertu de 4.16.7.2. Donc notre assertion est un cas particulier de 4.16.7.1.

On peut aussi, pour toute partie petite $J$ de $\operatorname{Ob}\underline{S}$, considérer la sous-catégorie fermée $\underline{S}_J \subset \underline{S}$ de $\mathcal{M}$ engendrée par $J$. L'ensemble $I$ des parties $J$ en question, ordonné par inclusion, est grand devant tout cardinal $\pi \in \mathfrak{U}$, et $\underline{S}$ est réunion croissante des $\underline{S}_J$. D'autre part, la proposition nous dit que $\underline{S}$ est accessible dans $\mathcal{M}$ si et seulement s'il existe un $J \in I$, tel que $\underline{S}_J = \underline{S}$, i.e. tel que $\underline{S}_J = \underline{S}_{J'}$ pour $J \subset J'$.

**Proposition 4.16.7.4.** *Soit $\mathcal{M}$ une catégorie accessible. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

*a) Il existe une sous-catégorie $\underline{S}$ de $\mathcal{M}$ fermée dans $\mathcal{M}$, et non accessible dans $\mathcal{M}$.*

*b) Soit $I$ l'ensemble des ordinaux $\alpha$ tels que* $\operatorname{card}\alpha \in \mathfrak{U}$, *i.e. des*

[page 481]

*ordinaux $\alpha$ qui sont dans $\mathfrak{U}$. Donc $I = I_{\alpha_0}$, où $\alpha_0$ est le plus petit ordinal qui n'appartienne pas à $\mathfrak{U}$, et $I$ est grand devant tout petit cardinal $\pi$, i.e. devant tout cardinal dans $\mathfrak{U}$ (197). La condition envisagée est la suivante :*

*Il existe une suite transfini*

$$\underline{x} \;=\; (x_\alpha)_{\alpha\in I}$$

*d'éléments de* $\operatorname{Ob}\mathcal{M}$*, telle que l'on ait*

$$\operatorname{Hom}(x_\beta, x_\alpha) \;=\; \emptyset \qquad \textit{si } \beta < \alpha.$$

*De façon précise, pour une telle suite transfinie, soit $\underline{S}$ ou ${}_{\underline{x}}\mathcal{M}$ la sous-catégorie fermée de $\mathcal{M}$ engendrée par la famille des $x_\alpha$, i.e. telle que $\operatorname{Ob}\underline{S} = \bigcup_{\alpha\in I}\operatorname{Ob}{}_{x_\alpha}\mathcal{M} = \bigcup_{\alpha\in I} x_\alpha\backslash\operatorname{Ob}\mathcal{M}$. Alors ${}_{\underline{x}}\mathcal{M}$ est une sous-catégorie fermée non accessible dans $\mathcal{M}$, et toute sous-catégorie fermée non accessible dans $\mathcal{M}$ s'obtient de cette façon.*

Démonstration. Considérons une suite $\underline{x} = (x_\alpha)_{\alpha\in I}$ comme dessus. Si $J$ est une petite partie de $I$, il existe un $\alpha \in I$ qui majore les $\beta \in J$, donc $\operatorname{Hom}(x_\beta, x_\alpha) = \emptyset$, pour $\beta \in J$,

[page 482]

ce qui signifie que $x_\alpha$ n'appartient à aucune des $\underline{S}_\beta = {}_{x_\beta}\mathcal{M}$, pour $\beta \in J$. Donc $\underline{S}$ n'est par réunion d'une petite sous-famille de la famille des ${}_{x_\alpha}\mathcal{M}$, donc en vertu de 4.16.7.1, $\underline{S}$ n'est par accessible dans $\mathcal{M}$.

[197] introduire $I = I_{\mathfrak{U}}$ avant l'énoncé de la proposition.

Inversement, soit $\underline{S}$ une telle sous-catégorie dans $\mathcal{M}$. Considérons un bon ordre sur $\mathrm{Ob}\,\underline{S}$ (objets $s_\alpha$), et construisons la suite des $x_\alpha$ ($\geqslant s_\alpha$) par récurrence transfinie ([198]).

1) On choisit $x_0$ = premier élément de $\mathrm{Ob}\,\underline{S}$ (existe, car $\mathrm{Ob}\,\underline{S} \neq \emptyset$, i.e. $\underline{S} \neq \emptyset$, car sinon, $\underline{S}$ serait accessible dans $\mathcal{M}$).

2) Si les $x_\beta$ ($\beta < \alpha$) sont construits, on prend pour $x_\alpha$ le premier élément de $\underline{S}$ majorant les $x_\beta$ et qui n'appartient pas à la sous-catégorie fermée de $\mathcal{M}$ engendrée par les $x_\beta$ ($\beta < \alpha$). (Cette sous-catégorie fermée est $\subset \underline{S}$, et $\neq \underline{S}$, car $\underline{S}$ n'est pas accessible dans $\mathcal{M}$.) On a donc bien

$$\mathrm{Hom}(x_\beta, x_\alpha) \ = \ \emptyset \qquad \text{si } \beta < \alpha.$$

[page 483]

Ainsi, la récurrence transfinie se poursuit sur $I$ tout entier. On voit par récurrence transfinie qu'on a, pour tout $\alpha \in I$,

$$s_\alpha \ \leqslant \ x_\alpha$$

(card $x_\alpha > x_\beta \geqslant s_\beta$ pour $\beta < \alpha$, donc $x_\alpha > s_\beta$ pour tout $\beta < \alpha$, ce qui équivaut à $x_\alpha \geqslant s_\alpha$). De plus, on trouve aussi, par récurrence transfinie, que

(∗) $\qquad \beta \ < \ \alpha \qquad \Longrightarrow \qquad$ $s_\beta$ appartient à la sous-catégorie fermée $\underline{S}_\alpha$ de $\mathcal{M}$ engendrée par les $x_{\beta'}$ avec $\beta' < \alpha$. ,

puisque par construction $s_\alpha$ est le *premier* des éléments de $\underline{S}$ qui n'est *pas* dans ladite sous-catégorie $\underline{S}_\alpha$ de $\mathcal{M}$. Cela montre que tout $s_\beta$ appartient à la sous-catégorie fermée $_{\underline{x}}\mathcal{M}$ de $\mathcal{M}$ engendrée par la famille de *tous* les $x_\alpha$, donc on trouve que $\underline{S} \subset {}_{\underline{x}}\mathcal{M} \subset \underline{S}$, donc $\underline{S} = {}_{\underline{x}}\mathcal{M}$, q.e.d.

**Proposition 4.16.7.5.** Pour un univers $\mathfrak{U}$ donné (contenant $\mathcal{N}$ comme élément), les conditions suivantes sont équivalentes :

1) Il existe une catégorie $\mathfrak{U}$-accessible $\mathcal{M}$ ayant une sous-catégorie fermée non accessible

[page 484]

dans $\mathcal{M}$.

b) Il existe une catégorie $\mathcal{C} \in \mathfrak{U}$, et une suite transfinie d'éléments de

$$\mathcal{C}^\wedge \overset{\text{déf}}{=} \underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{C}, \mathrm{Ens}_{\mathfrak{U}}) \ ,$$

$\underline{x} = (x_\alpha)_{\alpha \in I}$, indexée par l'ensemble de tous les ordinaux $\alpha \in \mathfrak{U}$, et telle que

$$\mathrm{Hom}(x_\alpha, x_\beta) \ = \ \emptyset \qquad \text{si } \alpha < \beta.$$

Démonstration. On a b) $\Longrightarrow$ a) en prenant $\mathcal{M} = \mathcal{C}^\wedge$, en vertu de la proposition précédente. On voit de même a) $\Longrightarrow$ b), en plongeant $\mathcal{M}$ dans une catégorie $\mathcal{C}^\wedge$ ($\mathcal{C}$ étant une petite sous-catégorie strictement génératrice de $\mathcal{M}$).

Je n'ai pas été capable ([199]) de construire une suite $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ comme exigée dans cette proposition, ni de prouver qu'une telle suite n'existe pas, même dans un cas particulier tel que $\mathcal{M} =$ ($k$-alg. comm.), $k$ un anneau commutatif. Je n'ai pas

[198] **N.B.** On a card $\underline{S} \notin \mathfrak{U}$, sinon, $\underline{S}$ serait petite, donc accessible dans $\mathcal{M}$, contrairement à l'hypothèse.
[199] Mais si, finalement, cf. 4.16.7.10 plus bas.

`[page 485]`

même prouvé qu'on ne puisse trouver une suite transfinie de *corps* $k_\alpha$, ayant les propriétés dites.

A fortiori, je n'ai pu tirer au clair la question si une sous-catégorie $\underline{\mathrm{L}}$-stable d'une catégorie $\mathcal{M}$ accessible est toujours accessible dans $\mathcal{M}$ ([200]). Il se pourrait qu'il n'y ait pas de tel cas. Il se pourrait aussi qu'il y en ait, même avec une sous-catégorie fermée (laquelle est stable par tout type de $\varinjlim$ représentable dans $\mathcal{M}$, sauf la $\varinjlim$ sur une catégorie d'indices vide ...).

Pour les sous-catégories *ouvertes,* je rappelle que j'ai construit (dans l'appendice) un exemple d'une telle sous-catégorie, non accessible dans $\mathcal{M}$. Au sujet des sous-catégories ouvertes, je signale ici l'énoncé (quasi tautologique) :

`[page 486]`

**Proposition 4.16.7.6** ([201]). *Soient $\mathcal{M}$ une catégorie accessible, $\underline{S}$ une sous-catégorie ouverte de $\mathcal{M}$. Pour que $\underline{S}$ soit accessible dans $\mathcal{M}$, il faut et il suffit qu'elle soit $\underline{L}$-stable dans $\mathcal{M}$, i.e. qu'il existe un cardinal $\pi_0$ tel que $\mathcal{M}$ satisfasse à $L_{\pi_0}$, et que $\underline{S}$ soit stable dans $\mathcal{M}$ par $\varinjlim$ de type $L_{\pi_0}$. De façon plus précise, si cette condition est satisfaite, alors pour tout cardinal $\pi$ tel que $\pi \geqslant \pi_0$ et que $\pi$ soit utile pour $\mathcal{M}$, $\underline{S}$ est $\pi$-accessible dans $\mathcal{M}$. Ou encore : si $\pi$ est un cardinal utile pour $\mathcal{M}$, alors $\underline{S}$ est $\pi$-accessible dans $\mathcal{M}$ si et seulement s'il est $L_\pi$-stable dans $\mathcal{M}$.*

Cette dernière assertion résulte aussitôt du corollaire suivant, lui-même tautologique.

**Corollaire 4.16.7.7.** *Soit $\pi$ un cardinal comme indiqué ci-dessus, soit $\underline{S}(\pi) = \underline{S} \cap \mathcal{M}_\pi$, et soit $x \in \operatorname{Ob}\mathcal{M}$ et*

$$x \simeq \varinjlim_{i \in I} x_i \qquad \begin{cases} x_i \in \operatorname{Ob}\mathcal{M}_\pi \\ I \textit{ grande devant } \pi \end{cases}$$

*une représentation de $x$ comme image essentielle d'un objet de $\operatorname{Ind}_\pi \mathcal{M}_\pi$. Alors $x \in \operatorname{Ob}\underline{S} \iff x_i \in \operatorname{Ob}\underline{S}(\pi)\ \forall\, i \in I$.*

`[page 487]`

J'ai finalement tiré au clair la question de l'accessibilité des sous-catégories ouvertes et des sous-catégories fermées d'une catégorie accessible :

**Proposition 4.16.7.8.** *Soient $\mathcal{M}$ une catégorie accessible, $\underline{S}$ une sous-catégorie fermée de $\mathcal{M}$, $\underline{T}$ la sous-catégorie ouverte complémentaire de $\underline{S}$, $\pi$ un cardinal infini utile pour $\mathcal{M}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

*a) $\underline{S}$ est $\pi$-accessible dans $\mathcal{M}$.*

*a′) $\underline{S}$ est le fermé engendré par $\underline{S}(\pi) \overset{\text{déf}}{=} \underline{S} \cap \mathcal{M}_\pi$, i.e. pour $x \in \operatorname{Ob}\mathcal{M}$, on a $x \in \operatorname{Ob}\underline{S}$ si et seulement si $\exists\, \xi \in \operatorname{Ob}\underline{S}(\pi)$ tel que $\operatorname{Hom}_{\mathcal{M}}(\xi, x) \neq \emptyset$.*

*b) $\underline{T}$ est $\pi$-accessible dans $\mathcal{M}$.*

*b′) $\underline{T}$ est $\underline{L}_\pi$-stable dans $\mathcal{M}$.*

[200] C'est faux, cf. plus bas.

[201] Cette proposition et son corollaire sont contenus dans 4.16.7.8 ci-dessous, il n'y a pas lieu d'en faire un énoncé séparé.

Notons tout de suite le

**Corollaire 4.16.7.9.** *Pour $\mathcal{M}$, $\underline{S}$, $\underline{T}$ comme dessus, conditions équivalentes :*

*a)* *$\underline{S}$ est accessible dans $\mathcal{M}$.*

*a′)* *Il existe une* petite *partie $A$ de $\mathrm{Ob}\,\mathcal{M}$, telle que $\underline{S}$ soit la sous-catégorie fermée ${}_A\mathcal{M}$ engendrée par $A$, i.e. $\underline{S} = \bigcup_{\xi\in A}\, {}_\xi\mathcal{M}$, où ${}_\xi\mathcal{M}$ est la sous-catégorie fermée de $\mathcal{M}$ formée des $x \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{M}$ tel que $\mathrm{Hom}(\xi, x) \neq \emptyset$.*

[page 488]

*b)* *$\underline{T}$ est accessible dans $\mathcal{M}$.*

*b′)* *$\underline{T}$ est $\underline{L}$-stable dans $\mathcal{M}$.*

**Corollaire 4.16.7.10.** *Soit $\mathcal{M}$ une catégorie accessible. Les conditions suivantes sont équivalentes* ([202]).

*a)* *Il existe une sous-catégorie fermée de $\mathcal{M}$, non accessible dans $\mathcal{M}$.*

*b)* *Il existe une sous-catégorie ouverte dans $\mathcal{M}$, non accessible dans $\mathcal{M}$.*

*c)* *Il existe une suite transfinie*

$$\underline{x} \;=\; (x_\alpha)_{\alpha\in I}$$

*d'objets de $\mathcal{M}$, indexée par l'ensemble $I$ des ordinaux de l'univers de référence $\mathfrak{U}$, telle que l'on ait*

$$\mathrm{Hom}(x_\alpha, x_\beta) \;=\; \emptyset \qquad \textit{pour } \alpha < \beta.$$

En effet, l'équivalence de a) et b) est claire par le corollaire précédent, et celle de a) et c) n'est autre que 4.16.7.4.

Démonstration de 4.16.7.8. Nous aurons à utiliser le

**Lemme 4.16.7.11.** *Soient $\mathcal{M}$ une catégorie accessible, $\pi$ un cardinal utile pour $\mathcal{M}$, $\underline{S}$ une sous-catégorie pleine de $\mathcal{M}$, $\underline{S}(\pi) \overset{\text{déf}}{=} \underline{S} \cap \mathcal{M}_\pi$, d'où un foncteur pleinement fidèle*

$$\varphi \;:\; \mathrm{Ind}_\pi(\underline{S}(\pi)) \longrightarrow \mathcal{M}\,.$$

[page 489]

*a)* *Soit $x \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{M}$. Pour que $x$ appartienne à l'image essentielle du foncteur $\psi$, il faut et il suffit que la sous-catégorie pleine $\underline{S}(\pi)/x$ de la catégorie $\mathcal{M}_\pi/x$ (qui est filtrante et même grande devant $\pi$) soit cofinale (donc aussi grande devant $\pi$).*

*b)* *Pour que $\underline{S}$ soit $\pi$-accessible dans $\mathcal{M}$, il faut et il suffit que pour tout $x \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{M}$, on ait*

$$x \;\in\; \mathrm{Ob}\,\underline{S} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \underline{S}(\pi)/x \textit{ est cofinale dans } \mathcal{M}_\pi/x$$

*(ou encore, que $\underline{S}$ satisfasse à $L_\pi$, et que pour tout $x$ dans $\mathcal{M}$, on ait*

$$x \;\in \mathrm{Ob}\,\underline{S} \qquad \Longrightarrow \qquad \underline{S}(\pi)/x \textit{ cofinale dans } \mathcal{M}_\pi/x.)$$

Démonstration. La partie b) est une conséquence tautologique de a), que je vais prouver. Dire que $x$ est dans l'image essentielle de $\underline{S}$, signifie que

$$(*) \qquad x \;\simeq\; \varinjlim_{i\in I} x_i\,,$$

[202] Exemple où ces conditions sont satisfaites : $\mathcal{M}$ = ($k$-alg. comm.), $k$ un corps commutatif infini, $\mathfrak{U}$ étant le plus petit univers tel que $\mathbf{N} \in \mathfrak{U}$.

avec $I$ grande devant $\pi$ et les $x_i$ dans $\underline{S}(\pi)$. On sait que $(*)$ implique ($I$ étant filtrante, et $\mathcal{M}$ étant équivalente à $\mathrm{Ind}_\pi(\mathcal{M})$ puisque $\pi$ utile pour $\mathcal{M}$) que $I \longrightarrow \mathcal{M}_\pi/x$ est cofinale (4.4.2, page 79). Or ce foncteur se factorise par le foncteur d'inclusion pleinement fidèle $\underline{S}(\pi)/x \hookrightarrow \mathcal{M}_\pi/x$, lequel est cofinal si et seulement s'il satisfait la condition F 1. Il est immédiat que cette condition est satisfaite quand elle est satisfaite pour le foncteur composé en question, ce qui est bien le cas

`[page 490]`

par hypothèse.

Inversement, supposons que $\underline{S}(\pi)/x$ soit cofinale dans $\mathcal{M}_\pi/x$. Comme on a

$$x \xleftarrow{\sim} \varinjlim_{\mathcal{M}_\pi/x} x_i \ ,$$

$\pi$ étant utile pour $\mathcal{M}$, on aura aussi par cofinalité

$$x \xleftarrow{\sim} \varinjlim_{\underline{S}(\pi)/\pi} x_i \ ,$$

or $\mathcal{M}_\pi$ étant grande devant $\pi$, il en est de même de la sous-catégorie pleine cofinale $\underline{S}(\pi)/x$. Donc $x$ est dans l'image essentielle de $\mathrm{Ind}_\pi \underline{S}(\pi)$, q.e.d.

**Lemme 4.16.7.12.** *Soient $I$ une catégorie filtrante, $J$ une sous-catégorie fermée, $K$ la sous-catégorie ouverte complémentaire. On a alors les équivalences*

$$J \neq \emptyset \iff J \text{ cofinale} \iff K \text{ non cofinale} \iff K \neq I \ .$$

Démonstration immédiate.

Je reviens à la démonstration de 4.16.7.8. On applique le lemme 4.16.7.11 à $\mathcal{M}$, $\pi$, et aux deux

`[page 491]`

sous-catégories $\underline{S}$, $\underline{T}$ de $\mathcal{M}$, en notant que pour $x \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{M}$, $\underline{S}(\pi)/x$ est une sous-catégorie fermée de $\underline{S}(\pi)$, dont le complémentaire ouvert est $\underline{T}(\pi)/x$, de sorte qu'on peut appliquer le lemme 4.16.7.12. On trouve :

$$\begin{aligned}
\underline{S}\ \pi\text{-accessible} &\overset{4.16.7.11}{\iff} \forall\, x \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{M},\ \text{on a } (x \in \mathrm{Ob}\,\underline{S} \iff \underline{S}(\pi)/x \text{ cofinale dans } \mathcal{M}_\pi/x) \\
&\iff \forall\, x \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{M},\ \text{on a } \Big( \underbrace{x \notin \mathrm{Ob}\,\underline{S}}_{(\text{i.e. } x \in \mathrm{Ob}\,\underline{T},\ \text{par } 4.16.7.12)} \iff \underbrace{\underline{S}(\pi)/x \text{ non cofinale dans } \mathcal{M}_\pi/x}_{(\text{i.e. } \underline{T}(\pi)/x \text{ cofinale dans } \mathcal{M}_\pi,\ \text{par } 4.16.7.12)} \Big) \\
&\overset{4.16.7.11}{\iff} \underline{T} \text{ est } \pi\text{-accessible.}
\end{aligned}$$

On a donc l'équivalence de a) et b). D'autre part, $\underline{S}(\pi)/x$ cofinale dans $\mathcal{M}_\pi/x$ signifie simplement $\underline{S}(\pi)/x \neq \emptyset$ (4.16.7.12), donc $\underline{S}$ $\pi$-accessible signifie que $\underline{S}$ est formée des $x \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{M}$ tels que $\underline{S}(\pi) \neq \emptyset$, ce qui signifie aussi que $\underline{S}$ est le fermé dans $\mathcal{M}$ engendré par $\underline{S}(\pi)$, d'où a $\iff$ a$'$. D'autre part, l'équivalence b $\iff$ b$'$ n'est autre que 4.6.7.6 (dernière formulation).

[page 492]

## 4.17 Retour sur les paratopos, et sur les opérations $\mathcal{M} \boxtimes \mathcal{N}$, $\underline{\mathrm{Hom}}_!(\mathcal{M}, \mathcal{N})$

[Ce paragraphe n'existe pas.]