Lettre d'Alexandre Grothendieck sur les Dérivateurs

Éditée par Matthias Künzer

Lettre d'Alexandre Grothendieck à Robert Thomason

Les Aumettes le 2.4.1991

Cher Thomason,

Merci pour ta lettre, et excuse-moi d'avoir tant tardé à t'écrire. Une raison en est que depuis peut-être deux mois j'étais occupé par une réflexion venue un peu en diversion, que je pensais régler en quelques jours (refrain familier...), et j'ai repoussé ma lettre de semaine en semaine. Cette réflexion ne concerne pas l'algèbre homotopique proprement dite, mais plutôt les fondements de la théorie des catégories, et j'en ai fait nettement plus que ce dont j'ai un besoin immédiat [**9**, chapitre XVIII][(1)]. Mais dès à présent j'ai la conviction qu'une algèbre homotopique (ou, dans une vision plus vaste, une "algèbre topologique") telle que je l'envisage, ne pourra être développée avec toute l'ampleur qui lui appartient, sans lesdits fondements catégoriques. Il s'agit d'une théorie des (grosses) catégories que j'appelle à présent *"accessibles",* et des parties accessibles de celles-ci, en reprenant complètement la théorie provisoire que je présente dans SGA 4 I 9 [**2**]. J'ai tissé un tapis de près de deux cents pages sur ce thème d'apparence anodine, et cela me fera plaisir de t'en présenter les grandes lignes, si cela t'intéresse. Il y a aussi quelques problèmes intrigants qui restent, que je pressens difficiles, peut-être même profonds, et qui peut-être (qui sait) t'inspireront, ou quelqu'un d'autre branché sur les fondements de l'outil catégorique. Mais tout cela m'apparaît comme du domaine de l'outil, et je préfère dans cette première lettre te parler de choses plus névralgiques. Les idées-force sont nées pour la plupart depuis vingt-cinq ans et plus, et j'en vois le germe vivace dans mes réflexions solitaires des années 56, 57, quand s'est dégagé pour moi le besoin de catégories de "coefficients" moins prohibitivement gros que les sempiternels complexes de chaînes ou de cochaînes, et l'idée (après de longues perplexités) de construire de telles catégories par passage à une catégorie de fractions (notion qu'il a fallu inventer sur pièces) en "inversant" les quasi-isomorphismes. Le travail conceptuel principal qui restait à faire, et qui m'apparaît maintenant tout aussi fascinant (tant par sa beauté, que par sa portée évidente pour les fondements d'une algèbre cohomologique dans l'esprit d'une théorie des coefficients cohomologiques) qu'en ces temps de mes premières amours avec la cohomologie – c'était de dégager la structure intrinsèque de ces catégories. Le fait que ce travail, que j'avais confié à Verdier vers 1960 et qui était censé faire l'objet de sa thèse [**13**], n'ait toujours pas été fait à l'heure actuelle, même dans le cas des catégories dérivées ordinaires, abéliennes, lesquelles pourtant (par la force des choses) ont bien fini par devenir d'un usage quotidien tant en géométrie qu'en analyse, en dit long sur l'état des mentalités à l'égard des fondements, dans la communauté mathématique.

Ce vent de mépris à l'égard des indispensables travaux de fondements (et plus généralement, pour tout ce qui ne se conforme pas à la mode du jour), je l'ai évoqué

[(1)] N. Éd. Les références bibliographiques ont été ajoutées par l'éditeur.

dans ma dernière lettre, et j'y reviens bien des fois aussi dans les pages de Récoltes et Semailles [**8**], tant c'est là une chose (parmi bien d'autres) qui tout simplement me dépasse. Ta réponse à ma lettre montre d'ailleurs que tu ne l'as absolument pas comprise. Ce n'était pas une lettre pour "me plaindre" de ceci ou de cela qui me déplaisait. Mais c'était une impossible tentative de partager une douleur. Je savais bien au fond que c'était sans espoir ; car tout le monde fuit la douleur, c'est-à-dire fuit la connaissance (car il n'y a pas de connaissance de l'âme qui soit exempte de douleur). Une très rare tentative, peut-être la seule dans ma vie (je ne m'en rappelle pas d'autre en tous cas), et sans doute la dernière...

Il y a deux directions d'idées, intimement solidaires, dont j'ai envie de te parler, que je me suis surtout attaché à développer depuis fin octobre (quand j'ai repris une réflexion mathématique [**9**], pour une durée indéterminée). Elles sont d'ailleurs déjà esquissées ici et là (ainsi qu'un bon nombre d'autres idées maîtresses de l'algèbre topologique) dans Pursuing Stacks [**6**, section 69]. Dans cette réflexion de 1983, qui m'a beaucoup aidé maintenant, je finis par me disperser quelque peu à suivre des avenues latérales, plutôt que de revenir aux idées essentielles de mon propos initial. Comme autre source utile pour quelqu'un intéressé par ces questions de fondements, je te signale deux ou trois lettres à Larry Breen, que je pensais d'ailleurs inclure dans le texte publié de Pursuing Stacks [**7**] (qui sans doute ne verra jamais le jour). D'une part je voudrais te parler de *catégories de modèles* et de la notion de *"dérivateur"* (remplaçant les défuntes "catégories dérivées" de Verdier, décidément inadéquates aux besoins). D'autre part j'ai beaucoup de choses à dire sur Cat en tant que catégorie de modèles pour des "types d'homotopie" en tous genres. Mais ce sera sûrement pour une autre fois (à supposer que ton intérêt survive à la lecture de cette lettre-ci). Donc aujourd'hui ce sera les catégories de modèles et la notion de dérivateur.

1. La seule structure essentielle d'une catégorie de modèles est la donnée du "localiseur" $W \subset \mathbf{Fl}(\mathcal{M})$.

Aussi j'appelle "catégorie de modèles" une catégorie $\mathcal{M}$ munie d'un tel "localiseur" (contenant les isomorphismes, et avec deux parmi trois flèches u, v et uv, aussi la troisième). Les constructions homotopiques essentielles sont indépendantes de toutes structures supplémentaires, tel un ensemble C de "cofibrations" ou un ensemble F de "fibrations" ou les deux à la fois. De telles structures supplémentaires sont utiles, dans la mesure où elles permettent d'expliciter les constructions essentielles, et d'en établir l'existence. Mais elles ne sont pas plus essentielles pour le sens intrinsèque des opérations (qu'elles auraient tendance plutôt à obscurcir, jusqu'à présent) que le choix d'une base plus ou moins arbitraire d'un module, en algèbre linéaire. Comme terminologie, je parlerai de "catégories à cofibrations" (ou à fibrations), ou de "catégories (ou triples) de Quillen", *etc.,* quand de telles structures supplémentaires apparaissent.

Par sa richesse en structures délicatement accordées les unes aux autres, ce sont les *triples de Quillen clos* (W, C, F) qui m'apparaissent comme la plus belle structure de catégorie de modèles "enrichie" découverte jusqu'à ce jour. J'avais cru pouvoir m'en passer, mais finalement n'y suis pas parvenu, et crois qu'ils resteront utiles (sinon absolument indispensables). En sens opposé, par l'économie des moyens mis en œuvre pour arriver pourtant à avoir l'essentiel, c'est la notion de *catégorie à cofibrations* ou à *fibrations* de K. S. Brown [**3**] (avec la généralisation assez évidente apportée par Anderson [**1**]) qui m'apparaît la plus belle. Par contre, je ne suis pas arrivé à comprendre la raison d'être du système d'axiomes que tu me proposes dans ta première lettre, te plaçant plus ou moins à mi-chemin entre Quillen [**10**] et Brown [**3**]. Tes axiomes(2) (s'ils veulent élargir ceux de Quillen) me paraissent prohibitivement exigeants, en comparaison avec ceux de Brown-Anderson – à cela près, seulement, que tu ne sembles pas exiger que les ensembles C et F soient stables par composition. Mais je ne connais guère d'exemple où cet axiome-là ferait problème. Éclaire-moi s'il te plaît s'il y a quelque chose qui m'échappe.

Un exemple : si une structure à fibrations (de Brown-Anderson) satisfait à la condition familière de "propreté" (ce qui est le cas pour les structures considérées d'abord par Brown, où tous les objets sont fibrants sur l'objet final), on peut remplacer cette structure (W, F) par une autre (W, F_W) canoniquement associée au localiseur W, *i.e.* à la catégorie de modèles envisagée, en prenant pour F_W l'ensemble des flèches dans $\mathcal{M}$ qui sont ce que j'appelle des *W-fibrations* $f : X \to Y$, *i.e.* qui sont quarrables et telles que le foncteur changement de base $Y' \mapsto X' = X \underset{Y}{\times} Y'$ de $\mathcal{M}/Y$ dans $\mathcal{M}/X$ transforme quasi-isomorphismes en quasi-isomorphismes. Pour tout localiseur, c'est là un ensemble de flèches qui contient les isomorphismes, est stable par composition, par changement de base, par facteurs directs. Dire que (W, F_W) est une structure de Brown, revient à dire qu'il existe "assez de W-fibrations", par quoi j'entends que toute flèche u se factorise en $u = fi$, avec $i \in W$ et $f \in F_W$. Et dualement pour les catégories à cofibrations (W, C), se remplaçant (dans le cas propre) par des structures (W, C_W) canoniquement associées au localiseur, en introduisant l'ensemble des *W-cofibrations.* Ainsi, j'aurais tendance plutôt à regarder une structure à fibrations (W, F) propre (et non "canonique") comme une recette ou un critère pour caractériser certaines W-fibrations, avec lesquelles on pourra se contenter souvent de travailler, parce qu'il y en a "assez". Pourtant, j'ai trouvé dans le cas de Cat que le travail avec les W-fibrations (beaucoup moins restrictives que les "fibrations" à la Quillen que tu avais introduites) était indispensable. Et je suis persuadé qu'il doit être très utile aussi dans une catégorie de modèles telle que $\mathbf{\Delta}^\wedge$ (ensembles semi-simpliciaux), car tout en étant substantiellement moins exigeante que la notion de fibration de Kan, celle de W-fibration implique déjà tout ce que je considère (à tort ou à raison) comme les propriétés cohomologiques et homotopiques essentielles de ces dernières (lesquelles, selon moi, ne sont pas dans la nature de propriétés de prolongement-relèvement de morphismes). Ainsi, cela doit permettre (par considération de "chemins" infinis) de construire dans $\mathbf{\Delta}^\wedge$ l'analogue des espaces de chemins de Cartan-Serre, sans avoir au préalable à remplacer le complexe K par une enveloppe de Kan. C'est en tous cas ce que j'ai vérifié dans le cas très voisin de Cat (sans jamais avoir à faire de détour par $\mathbf{\Delta}^\wedge$) [**9**, chapitre VII]. Cela fait partie des choses dont je voudrais te parler par la suite.

(2) N. Éd. Lettre de Thomason à Grothendieck du 3 janvier 1991 [**7**]. Voir aussi [**14, 15**].

2. Prédérivateurs, dérivateurs.

Quand j'ai dit que les structures homotopiques essentielles sont déjà contenues dans le localiseur W, je pensais notamment aux suites exactes des fibrations et des cofibrations, qui sont un test décisif. Je reste ébahi que Quillen ne souffle mot à ce sujet dans son brillant (et beau) travail [**10**], et je présume qu'il a réussi (comme bien d'autres après lui) à ne pas le voir. (Pour le voir, il aurait fallu sans doute qu'il ne soit pas aveuglé par le mépris *a priori* qu'il exprime pour toute recherche de fondements qui irait au-delà de celle qu'il venait de faire, avec un tel succès...) Mais la chose devient évidente dans l'optique des dérivateurs.

L'idée de base des dérivateurs m'est apparue à l'occasion de SGA 5 [**5**], quand il s'est avéré (découvert par Ferrand [**4**], chargé de rédiger un de mes exposés sur les traces en cohomologie) que la notion de catégorie dérivée de Verdier ne se prêtait pas au formalisme des traces : la trace n'est pas additive pour les "triangles exacts", car cette notion de triangle (vu comme un diagramme dans la catégorie initiale) n'est pas assez fine. Pour bien faire, il faudrait prendre la catégorie des morphismes de complexes (pour lesquels on a une construction fonctorielle d'un *mapping cone*), et passer à la catégorie dérivée de celle-ci. Cette catégorie s'envoie dans celle des triangles de Verdier par un foncteur essentiellement surjectif, mais qui n'a rien de fidèle, et encore moins pleinement fidèle. C'est là le "péché originel" dans la première approche des catégories dérivées, tentée par Verdier [**12**], [**13**] – approche dont en tout état de cause, faute d'expérience, on n'aurait pas pu faire l'économie. C'est alors que j'ai été frappé par ce fait, d'apparence anodine, que chaque fois qu'on construit une catégorie dérivée à l'aide d'une catégorie de complexes d'une catégorie abélienne, cette catégorie dérivée, en un sens, "ne vient jamais seule". En effet, pour toute catégorie d'indices I (et je pensais alors surtout au cas où I est finie), on a la catégorie abélienne $\mathcal{A}(I)$ des diagrammes de type I dans $\mathcal{A}$, laquelle donne, elle aussi, naissance à une catégorie dérivée, qu'on pourrait noter $\mathrm{D}(I,\mathcal{A})$. La catégorie des "vrais" triangles s'obtient en prenant $I = \mathbf{\Delta}^1$, et les catégories dérivées de complexes filtrés, introduites par Illusie pour sauver la mise à bon compte, correspondent aux cas $I = \mathbf{\Delta}^n$ (simplexe-type de dimension n). Les variances d'Illusie proviennent simplement du fait que $\mathrm{D}(I,\mathcal{A})$, pour $\mathcal{A}$ fixé, est contravariant en I, de façon tautologique. L'idée tentante alors, et que j'ai proposée ici et là sans qu'elle ne rencontre d'écho, c'est que cette structure de foncteur ou, plus exactement, de 2-*foncteur*

$$I \ \mapsto \ \mathrm{D}(I,\mathcal{A}) \ ,$$

allant de la catégorie Cat ou de quelque sous-catégorie assez fournie comme celle des catégories finies ou celle des ensembles ordonnés finis, devrait suffire à incarner toutes les structures essentielles d'une "catégorie dérivée" (encore dans les limbes) ; quitte bien sûr à imposer les axiomes qu'il faut (et que j'ai fini par dégager enfin l'an dernier) [**9**, chapitre I]. On récupère la catégorie dérivée initiale, "nue", en faisant $I = e$ (catégorie ponctuelle). Mais il serait impropre, en toute rigueur, de considérer la structure plus complète (que j'appelle maintenant un *"dérivateur"*) comme une structure supplémentaire sur cette catégorie – laquelle continue cependant, dans le formalisme des dérivateurs, à jouer un rôle important, sous le nom de *"catégorie de* *base"* du dérivateur. La même idée avait l'air de devoir marcher pour les variantes non commutatives de la notion de catégorie dérivée, et le travail de Quillen m'apparaissait comme une incitation puissante à développer ce point de vue. Mais ce n'est qu'il y a quelques mois que je me suis donné le loisir enfin de vérifier que mon intuition était bel et bien justifiée. (Travail d'intendance, quasiment, comme j'en ai fait des centaines et des milliers de fois !)

Ce point acquis, il est bien clair à présent que la notion de dérivateur (plus encore que celle de catégorie de modèles, qui est à mes yeux un simple intermédiaire, "non intrinsèque", pour construire des dérivateurs) est une parmi les quatre ou cinq notions les plus fondamentales, dans l'algèbre topologique, qui depuis une trentaine d'années déjà attend d'être développée. Comme notions d'une portée comparable, je ne vois guère que celle de *topos,* et celles de n*-catégories* et de n*-champs* sur un topos (notions qui n'ont pas encore été définies à ce jour, sauf pour $n \leq 2$). D'autre part, pour moi le "paradis originel" pour l'algèbre topologique n'est nullement la sempiternelle catégorie $\mathbf{\Delta}^\wedge$ semi-simpliciale, si utile soit-elle, et encore moins celle des espaces topologiques (qui l'une et l'autre s'envoient dans la 2-catégorie des topos, qui en est comme une enveloppe commune), mais bien la catégorie Cat des petites catégories, vue avec un œil de géomètre par l'ensemble d'intuitions, étonnamment riche, provenant des topos. En effet, les topos ayant comme catégories des faisceaux d'ensembles les $C^\wedge$, avec C dans Cat, sont de loin les plus simples des topos connus, et c'est pour l'avoir senti que j'insiste tant sur l'exemple de ces topos ("catégoriques") dans SGA 4 IV [**2**].

J'en viens maintenant à la définition en forme de ce que j'entends par un *"prédérivateur"* D – étant entendu déjà que la notion plus délicate de "dérivateur" s'en déduit en imposant quelques axiomes bien naturels, dont je te donnerai la liste si tu me la demandes. Pour développer une algèbre des dérivateurs (et tout d'abord, des prédérivateurs), il faut d'abord se fixer un *"domaine"* commun pour ceux qu'on va envisager, c'est-à-dire, une sous-catégorie pleine Diag de Cat. Le cas qui a ma préférence maintenant est celui ou Diag est Cat tout entier, auquel cas j'interprète un dérivateur comme étant une sorte de "théorie de coefficients" (homologiques ou cohomologiques ou homotopiques, tout cela est pareil) sur Cat, catégorie visualisée comme une catégorie d'objets de nature géométrique et spatiale, comme des "espaces" à proprement parler, bien plus que comme de nature algébrique ; tout comme les anneaux commutatifs (via leurs spectres) et les schémas qu'on construit avec eux, sont pour moi des objets géométrico-topologiques par essence, et nullement algébriques. (L'algèbre étant seulement un intermédiaire pour atteindre à la vision géométrique, qui elle est l'essentiel.) Un cas plus ou moins extrême opposé est celui où Diag est la catégorie des ensembles ordonnés finis, voire même (à la rigueur) une catégorie plus restreinte encore. Mais pour être vraiment à l'aise, il faudra supposer tôt ou tard que la catégorie Diag (des "catégories d'indices" ou des "types de diagrammes", pour les dérivateurs considérés) soit stable par les constructions courantes sur les catégories : produits finis, sous-catégories, sommes amalgamées, voire même catégories $\underline{\mathrm{Hom}}$; et aussi bien sûr par passage à la catégorie opposée, particulièrement fréquent pour passer d'un énoncé à un énoncé dual, notamment. Quand il ne s'agit que d'avoir un prédérivateur, dans tous les cas à ma connaissance on peut prendre comme domaine Cat tout entier. C'est quand il s'agit de vérifier les axiomes assez draconiens des dérivateurs, seulement, qu'on peut être forcé à restreindre considérablement le domaine comme j'ai évoqué, ou sinon, tout au moins, les flèches $u : X \to Y$ qu'on envisage dans Cat, lorsqu'il s'agit de travailler non seulement avec le foncteur correspondant d'image inverse u^*, mais aussi avec les images directes $u_!$ et u_*. Mais là j'anticipe . . .

Au sujet du domaine, je voudrais encore ajouter qu'à mes yeux le domaine Cat ne représente nullement la portée ultime d'un dérivateur donné. Celui-ci, et plus généralement un prédérivateur D, étant défini comme un 2-foncteur entre 2-catégories

$$D \;:\; \mathrm{Diag}^\circ \;\to\; \mathrm{CAT}$$

(où CAT désigne la catégorie des $\mathfrak{U}$-catégories contenues ($\subset$) dans l'univers de référence $\mathfrak{U}$, toujours sous-entendu, alors que Cat désigne la catégorie des "petites" catégories, *i.e.* de celles qui sont éléments de $\mathfrak{U}$), il résulte (d'ailleurs de façon nullement tautologique) des axiomes des dérivateurs (que je n'explicite pas ici) que la catégorie $D(X)$ (des "coefficients de type D sur X") associée à une petite catégorie X, ne dépend à équivalence près que du topos défini par X, donc que de la catégorie $X^\wedge = \underline{\mathrm{Hom}}(X^\circ, \mathrm{Ens})$ des préfaisceaux d'ensembles sur X. Plus précisément, si $f : X \to Y$ est une flèche dans Cat, alors le foncteur "image inverse" pour les coefficients de type D

$$f^* \;:\; D(Y) \;\to\; D(X)$$

est une équivalence de catégories, pourvu que le foncteur similaire $Y^\wedge \to X^\wedge$ (qui correspond à un dérivateur particulièrement important sur Cat . . .) soit une équivalence de catégories ; c'est-à-dire encore pourvu que f soit pleinement fidèle et que tout objet de Y soit facteur direct d'un objet de la forme $f(x)$ (ou encore, que f induise une équivalence entre les "enveloppes de Karoubi" de X et de Y). Cela implique aussi, quand Diag est égal à Cat tout entier, que l'on peut regarder D comme provenant d'un 2-foncteur

$$\underline{\mathrm{Topcat}}^\circ \;\to\; \mathrm{CAT}$$

allant de la 2-catégorie des topos "catégoriques" (*i.e.* équivalents à un topos provenant d'un X dans Cat) dans la catégorie CAT. Ceci vu, on peut espérer étendre le dérivateur, c'est-à-dire la théorie de coefficients envisagée, à la catégorie $\underline{\mathrm{Top}}$ des topos tout entière, *i.e.* en un foncteur (qu'on notera encore D)

$$D \;:\; \underline{\mathrm{Top}}^\circ \;\to\; \mathrm{CAT}\,.$$

J'ai idée que ça doit être toujours possible, et de façon essentiellement unique. Ça l'est en tous cas dans tous les cas concrets que j'ai regardés. Si par exemple D est le dérivateur (abélien) défini par une catégorie abélienne via la catégorie des complexes et la notion de quasi-isomorphisme, on trouve pour tout topos $\mathcal{X}$ (supposant que la catégorie soit celle des k-modules, où k est un anneau quelconque) la catégorie $\mathrm{D}(\mathcal{X}, k)$ dérivée de celle des k-Modules sur $\mathcal{X}$, et cette $\mathrm{D}(\mathcal{X}, k)$ dépend bien de façon contravariante de $\mathcal{X}$. Il est vrai que quand il s'agit de définir les lois *covariantes* $f_!$ et f_*, plus exactement d'en établir l'existence, on bute sur le cas de $f_!$, cet $f_!$ n'existe que moyennant des hypothèses draconiennes sur f. (De toutes façons, j'escroque un peu ici, faute d'avoir explicité des restrictions sur les degrés des complexes, genre $\mathrm{D}^+(\mathcal{X},k)$ ou $\mathrm{D}^-(\mathcal{X},k)$. Mais ce n'est pas le lieu ici d'entrer dans des technicalités.)

Pour ce qui est des axiomes pour les dérivateurs, le plus essentiel de tous est l'existence, pour toute flèche $f : X \to Y$ dans Diag, des foncteurs $f_!$ et $f_* : D(X) \to D(Y)$, adjoints à gauche et à droite de f^*. Ainsi, pour développer (dans la catégorie de base, disons) la théorie de la *suite exacte de suspension,* c'est de l'existence de $f_!$ qu'on a besoin, et il suffit pour cela que Diag contienne les ensembles ordonnés finis (et même nettement moins, si on y tient). Mais je signale que les suites canoniques qu'on construit ainsi à l'aide du seul foncteur $f_!$ et sous l'hypothèse que le dérivateur soit "ponctué" (*i.e.* les $D(X)$ ponctués et les foncteurs f^* compatibles avec les objets neutres), ne sont exactes que moyennant un "axiome d'exactitude" (à gauche) convenable, faisant partie de la poignée des axiomes d'un dérivateur ; et dualement pour la suite exacte de cosuspension. Ces constructions sont valables d'ailleurs non seulement dans toute catégorie $D(e)$, mais aussi comme de juste dans les $D(X)$, pour X dans Diag. (En fait, $D(X)$ peut être considéré comme la catégorie de base d'un "dérivateur induit" $D_X : Y \mapsto D(X \times Y)$, auquel on peut appliquer les résultats généraux. Les axiomes des dérivateurs sont tels qu'ils sont stables par passage d'un dérivateur à un dérivateur induit.) Ceci suggère de dissocier les notions de "dérivateur à gauche" (postulant l'existence des images directes homologiques $f_!$, à l'exclusion des images directes cohomologiques f_*), de "dérivateur à droite" incluant l'aspect dual du formalisme homotopique [(3)]. Mais je signale tout de suite que certaines propriétés des dérivateurs qui me paraissent importantes, et même quand leur énoncé ne fait appel qu'à une des deux structures gauche ou droite, sont établies en utilisant l'existence des deux covariances à la fois.

Pour terminer ces généralités sur la notion de dérivateur, je voudrais souligner qu'il est essentiel, dans la notion de prédérivateur (qui est la donnée de base unique), que $D : \mathrm{Diag} \to \mathrm{CAT}$ est bien un 2-foncteur, et non seulement un foncteur ; en d'autres termes, il faut se donner non seulement les $D(X)$ pour X dans Diag, et les $f^* = f^*_D = D(f)$ pour les flèches $f : X \to Y$, mais pour une flèche $u : f \to f'$ entre deux flèches $f,\, f' : X \rightrightarrows Y$, il faut se donner un homomorphisme fonctoriel

$$u^* \;:\; f'^* \;\to\; f^*$$

(avec des indices D s'il y a risque de confusion). Il faut bien voir que, conceptuellement très simple et évidente (et pour cette raison sans doute, méprisée par le "mathématicien sérieux" comme du *"general nonsense"*), la donnée d'un 2-foncteur entre 2-catégories est une espèce de structure très délicate, d'un genre apparemment nouveau en maths ; et qu'on le veuille ou non, c'est bien cette espèce de structure, et elle seule, qui cerne finement les aspects essentiels, c'est-à-dire intrinsèques (indépendants de la catégorie de modèles particulière choisie, à des fins calculatoires, pour décrire le dérivateur) du formalisme homologico-homotopique ; lequel est dans

(3) N. Éd. Dans "Les Dérivateurs" [**9**], Grothendieck fait le choix contraire concernant la terminologie de dérivateur à gauche ou à droite, choix justifié par les propriétés d'exactitude à gauche ou à droite du prédérivateur, impliquées respectivement par l'existence de f_* ou de $f_!$.

son essence dernière (si je ne me trompe beaucoup) un formalisme de variance de "coefficients". Tout comme la dualité de Poincaré classique m'a mené vers le formalisme des six opérations (ou "variances") valable tant dans le contexte des espaces topologiques, que celui des schémas ou des espaces analytiques (et dans bien d'autres encore, comme Cat, j'en suis à présent persuadé), formalisme qui à mon sens (et si je ne fais erreur) en capte l'essence ultime et en quelque sorte universelle, indépendante de toute hypothèse de non-singularité, *etc.*

Pour stimuler l'intuition habituée à des contextes d'homologie ou de cohomologie familiers, j'ai trouvé utiles des notations du type suivant, pour un dérivateur donné D. Si X est dans Diag, et si ξ est un D-coefficient sur X, *i.e.* un objet de $D(X)$, je dénote par

$$\mathrm{H}^D_\bullet(\xi) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{H}^\bullet_D(\xi)$$

(*"objets d'homologie et de cohomologie de X, à coefficients dans ξ"*) les objets $p_!(\xi)$ et $p_*(\xi)$ respectivement, objets dans la catégorie de base $D(e) = \mathcal{A}_D$ de D, où $p : X \to e$ est la flèche structurale canonique. Plus généralement, si $f : X \to Y$ est une flèche dans Diag, les images de ξ par les deux images directes peuvent être notées

$$\mathrm{H}^D_\bullet(f,\xi) \quad \text{ou} \quad \mathrm{H}^D_\bullet(X/Y,\xi) \ , \qquad \text{et} \qquad \mathrm{H}^\bullet_D(f,\xi) \quad \text{ou} \quad \mathrm{H}^\bullet_D(X/Y,\xi) \ ,$$

c'est l'*homologie* resp. la *cohomologie* relative *de X au-dessus de Y,* à coefficients dans ξ. On peut laisser tomber l'indice ou l'exposant D, quand aucune confusion n'est à craindre. Par ailleurs, je me suis laissé guider par les intuitions et les réflexes acquis tout au long du développement des SGA, pour développer dans le contexte de Cat (pour commencer) la panoplie des propriétés "cohomologiques" essentielles d'un morphisme $f : X \to Y$ dans Cat, relativement à un dérivateur, c'est-à-dire à une "théorie de coefficients", donné. Mais c'est là quelque chose dont je te parlerai à propos de Cat une autre fois, si tu es intéressé.

3. Prédérivateur défini par une catégorie de modèles, et problème d'existence de $f_!$, f_*.

La plupart des dérivateurs que je connais sont définis à l'aide de catégories de modèles $(\mathcal{M}, W)$. Une telle catégorie définit en tous cas un prédérivateur sur Cat tout entier, en posant

$$\mathrm{D}_{(\mathcal{M},W)}(X) \ = \ \mathcal{M}(X)(W(X))^{-1} \ ,$$

où je désigne maintenant par

$$\mathcal{M}(X) \overset{\text{déf}}{=} \underline{\mathrm{Hom}}(X^\circ, \mathcal{M})$$

la catégorie des préfaisceaux sur X à valeurs dans $\mathcal{M}$ (donc celle des "diagrammes de type X°", et non de type X, dans $\mathcal{M}$), et $W(X)$ l'ensemble des flèches dans cette catégorie, qui "sont dans W argument par argument". La loi de 2-foncteur contravariant de $\mathrm{D}(X)$ en X est claire. Quand W est l'ensemble des isomorphismes dans $\mathcal{M}$, j'écris aussi $\mathrm{D}_\mathcal{M}$ au lieu du double indice. C'est un cas qu'on peut considérer comme "trivial", mais qui pour autant ne manque pas d'intérêt. Ainsi, $\mathrm{D}_\mathcal{M}$ est un dérivateur (satisfaisant à tous les axiomes), pourvu seulement que $\mathcal{M}$ soit stable par petites limites inductives et projectives (les unes assurant l'existence des $f_!$, les autres celle des f_*). Dans le cas où $\mathcal{M} = \mathrm{Ens}$, on trouve $\mathrm{D}(X) = X^\wedge$, c'est là un dérivateur important à mes yeux (si trivial soit-il), et les propriétés "cohomologiques" des flèches de Cat, relativement à ce dérivateur, ne sont nullement choses triviales. Dans le cas où W est quelconque, je note aussi D_W au lieu du double indice, il est rare qu'une confusion soit à craindre. La question principale qui se pose alors, c'est bien sûr celle de l'existence des foncteurs $f_!$ et f_*. Contrairement à toi, je n'ai aucun scrupule ici à supposer la catégorie $\mathcal{M}$ stable par tous les types de limites dont on a besoin, donc (si on veut travailler sur Cat tout entier) stable par petites limites inductives et projectives. Je ne serais pas étonné qu'il y ait un théorème qui assure que tout dérivateur sur Cat peut se décrire à l'aide d'une telle catégorie de modèles (à équivalence de dérivateurs près), ou du moins comme limite inductive filtrante de tels dérivateurs. J'entrevois dans ces grandes lignes, une "algèbre des dérivateurs" (consistant en un certain nombre d'opérations fondamentales au sein de la 2-catégorie de tous les dérivateurs, sur Cat disons comme domaine), laquelle serait le reflet d'opérations algébriques de nature similaire, qui s'effectuent au niveau des catégories de modèles. J'ai comme une impression, par une allusion dans ta lettre du mois de janvier, que tu as quelque idée ou intuition de ce genre de structures, et on pourra en reparler. Mais je souligne tout de suite que pour moi, le véritable objet d'opérations au niveau des catégories de modèles, c'est d'obtenir des opérations sur les dérivateurs (ou les prédérivateurs, pour commencer) associés.

À ce sujet, une remarque au sujet de la fonctorialité du prédérivateur associé à une catégorie de modèles $(\mathcal{M}, W)$. Il est clair qu'on obtient un 2-foncteur

$$(*) \qquad \mathrm{MOD} \;\to\; \mathrm{PREDER}$$

allant de la 2-catégorie des catégories de modèles (ce n'est d'ailleurs pas une $\mathfrak{U}$-catégorie, si on ne fait des restrictions sur les catégories envisagées et sur les foncteurs admis, en plus d'être compatibles aux localiseurs). Mais si on a deux catégories de modèles, il y a lieu d'introduire dans la catégorie

$$\underline{\mathrm{Hom}}\big((\mathcal{M}, W), (\mathcal{M}', W')\big) \qquad \text{ou} \qquad \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Loc}}(\mathcal{M}, \mathcal{M}')$$

(cette dernière notation, si les localiseurs W, W' sont sous-entendus dans les notations $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}'$) un localiseur bien naturel $W_{\mathcal{M},\mathcal{M}'}$, formé des morphismes $u : F \to G$ entre morphismes de catégories de modèles F, G, tels que $u(x) : F(x) \to G(x)$ soit dans W', pour tout x dans $\mathcal{M}$. Appelons-les les *"quasi-isomorphismes" (relatifs aux localiseurs W, W').* Il est clair que les quasi-isomorphismes sont transformés en isomorphismes par le 2-foncteur précédent, donc en passant à la catégorie des fractions, on trouve un foncteur (déduit de $(*)$)

$$(**) \qquad \mathcal{H}(\mathcal{M}, \mathcal{M}') \;\to\; \underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{D}_{\mathcal{M}}, \mathrm{D}_{\mathcal{M}'}) \,,$$

où dans la notation il est sous-entendu que $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$ sont munis de leurs localiseurs W, W'. Ainsi, les catégories de modèles peuvent être regardées à présent comme les 0-objets d'une 2-catégorie, dont les catégories de flèches sont les catégories localisées $\mathcal{H}(\mathcal{M}, \mathcal{M}')$ précédentes, et on trouve un 2-foncteur canonique de cette 2-catégorie, que j'ai envie d'appeler catégorie dérivée (?) de la catégorie des catégories de modèles, et de noter DERMOD, dans celle des prédérivateurs, au moyen des foncteurs $(**)$:

$$(***) \qquad \text{DERMOD} \to \text{PREDER}\,.$$

Le point auquel je veux en venir est le suivant : si $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$ sont deux catégories de modèles qui sont *équivalentes* en tant que 0-objets de cette 2-catégorie, alors les prédérivateurs associés sont équivalents, donc à toutes fins pratiques, peuvent être identifiés (du moins, quand l'équivalence initiale est donnée). Ceci (et bien sûr d'innombrables exemples) illustre à quel point une catégorie de modèles est un objet "encombrant" (si j'ose dire), encombré d'aspects inessentiels, en comparaison avec le dérivateur associé, qui à mes yeux représente sa quintessence du point de vue "homotopique" ou "cohomologique". Un peu comme la donnée d'une base pour un espace vectoriel, ou d'un système de générateurs et de relations pour un groupe, ou un système d'équations pour une variété [4]. Il n'y a aucun inconvénient à travailler avec ces "superstructures", et bien souvent on ne peut même s'en passer. Il est cependant important, pour une compréhension en profondeur, de ne pas pour autant laisser brouiller et perdre de vue les objets géométriques essentiels (espace vectoriel, groupe, variété, dérivateur) et leur caractère intrinsèque.

J'ignore s'il est raisonnable de s'attendre, pour le 2-foncteur précédent $(***)$, à des propriétés de fidélité, ou de surjectivité essentielle, en limitant au besoin les catégories de modèles envisagées, de façon par exemple à assurer qu'elles donnent naissance à des dérivateurs, et non seulement des prédérivateurs. Cela fait partie en tous cas des questions qu'on devra bien examiner un jour (dans ce monde-ci, s'il en est temps, ou sinon dans l'autre...) [5]. J'avoue que jusqu'à présent, mon intuition des dérivateurs s'est beaucoup appuyée sur le formalisme des catégories de modèles.

Mais il me faut revenir sur le cas où on se donne une catégorie de modèles fixe $(\mathcal{M}, W)$, et sur la grande perplexité de l'existence des foncteurs $f_!$ et f_*. Techniquement parlant, c'est là, visiblement, une des questions les plus cruciales qui se posent pour le développement de l'algèbre topologique, telle que je l'envisage. Or pour cette question fondamentale, je n'ai que des éléments de réponse bien fragmentaires, et manifestement insatisfaisants (et sans doute aussi insuffisants à la longue). Prenant le cas où Diag est égal à Cat : j'avoue (à ma honte !) que je n'ai pas même construit d'exemple d'une catégorie de modèles, stable par petites limites (inductives et projectives), et telle que les foncteurs $f_!$ et f_* n'existent pas pour toute flèche f dans Cat, pour le prédérivateur associé. Je ne m'attends nullement d'ailleurs à ce qu'ils existent toujours, même si on fait des hypothèses du type : W stable par limites inductives filtrantes, et la catégorie $\mathcal{M}$ accessible et W une partie accessible de $\mathrm{Fl}(\mathcal{M})$ (hypothèses

---

[4] Une première comparaison qui m'était venue (elle s'est perdue en route) me paraît plus frappante : la relation entre catégorie de modèles et dérivateur associé, s'apparente pour moi à celle entre un complexe dans une catégorie abélienne, et l'objet correspondant dans la catégorie dérivée. Et l'effort conceptuel qu'il m'avait fallu faire pour parvenir à la notion de catégorie dérivée, s'apparente un peu à celui (plus modeste à mon sens) que les gens devront fournir un jour pour accéder à la notion de dérivateur et au "yoga des dérivateurs" – lequel ne s'acquiert qu'en travaillant avec !

[5] N. Éd. Ce problème a été étudié par O. Renaudin [**11**].

qui me paraissent relativement anodines). D'autre part, je n'ai pu prouver l'existence de ces foncteurs que dans des cas extrêmement particuliers, que je renonce à expliciter dans cette lettre (devenue prohibitivement longue). Je ne connais pas un cas où je sache l'établir, sans supposer tout au moins que la catégorie de modèles est associée à un triple de Quillen clos (et plus encore) ! La situation est quand même meilleure si on est moins exigeant et prend comme domaine Diag (disons) la catégorie des ensembles ordonnés finis. À ce moment-là, il suffit que W soit associé à une catégorie à cofibrations (pour avoir $f_!$) ou à fibrations (pour avoir f_*), sans qu'il soit nécessaire d'ailleurs (pour avoir bel et bien un dérivateur) que ces deux structures duales soient reliées entre elles autrement que par le localiseur commun W.

C'est le moment de dire que le travail de Anderson [**1**] (dont tu m'as envoyé une photocopie), où il prétend donner une esquisse d'un théorème très général en ce sens (qui aurait en effet comblé mes vœux !), est totalement canulé – même déjà dans le cas d'un ensemble ordonné fini I, et du morphisme structural $I \to e$, *i.e.* pour l'existence des Holim ordinaires sur I. Sa soi-disant idée de démonstration déconne en deux endroits qui me paraissent essentiels, et je doute fort qu'elle soit récupérable, bien que je n'aie pas de contre-exemple au théorème qu'il énonce, et dont il ne daigne pas même donner une démonstration. Ayant regardé ce travail (si on peut l'appeler ainsi) avec attention, je suis heureux qu'il ne soit pas de toi – il me fait grincer des dents du début à la fin, et plus que ça. Je ne le regrette pas, car si je n'ai guère appris de maths en le lisant, j'y ai appris autre chose de moins facile et de moins réjouissant que les maths, et plus important.

Je suis d'ailleurs ébahi que dix ans se soient passés depuis cet article, sans que personne apparemment ne s'aperçoive qu'il ne tient pas debout. Visiblement, ce théorème, c'était comme une pièce de musée, une prouesse pour rien – personne n'en avait rien à foutre. Même chez des plus "cotés" que lui, les théorèmes souvent, ce n'est plus une porte ouverte sur quelque chose, qu'on n'avait pas vue avant et qu'on voit, ni même un outil pour forcer les portes qu'on n'arrive à ouvrir en douceur – mais un trophée. Peu importe alors qu'il soit vrai ou faux – ça ne fait strictement plus aucune différence . . .

Sauf si tu as besoin de précisions, je crois inutile que j'entre dans des détails – tu es bien capable de trouver tout seul où ça foire (sur l'air du "il est évident que" . . .). Et de plus, il est temps que je m'arrête, bien que je ne sois pas parvenu encore à ce qui, techniquement, était prévu comme substance principale de ma lettre : le "théorème de factorisation", et son application à des théorèmes de stabilité pour des structures de Quillen. Ce sera donc sans doute pour ma prochaine lettre, si tu es intéressé à continuer cette correspondance. Auquel cas je serai très heureux de t'avoir comme interlocuteur de mes cogitations !

En attendant, reçois mes amitiés

Références

[1] D. W. Anderson – « Fibrations and geometric realizations », *Bull. Amer. Math. Soc.* **84**, no. 5 (1978), p. 765–788.

[2] M. Artin, A. Grothendieck & J.-L. Verdier – *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas*, Lecture Notes in Mathematics 269, 270, 305, Springer-Verlag, 1972, 1973, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1963–1964 (SGA 4), avec la collaboration de N. Bourbaki, P. Deligne et B. Saint-Donat.

[3] K. S. Brown – « Abstract homotopy theory and generalized sheaf cohomology », *Trans. Amer. Math. Soc.* **186** (1974), p. 419–458.

[4] D. Ferrand – « On the non additivity of the trace in derived categories », arxiv, math/0506589 (2005).

[5] A. Grothendieck – *Cohomologie ℓ-adique et fonctions L*, Lecture Notes in Mathematics 589, Springer-Verlag, 1977, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1965–1966 (SGA 5), édité par L. Illusie.

[6] ———, « *Pursuing stacks* », Manuscrit, édité par G. Maltsiniotis, 1983, à paraître dans *Documents Mathématiques.*

[7] ———, « *Pursuing stacks et correspondance* », Manuscrits, édités par M. Künzer, G. Maltsiniotis & B. Toen, 1983, à paraître dans *Documents Mathématiques.*

[8] ———, *Récoltes et Semailles, Témoignage sur un passé de mathématicien*, Montpellier, 1986.

[9] ———, « *Les dérivateurs* », Manuscrit en cours d'édition par M. Künzer et G. Maltsiniotis, avec la collaboration de J. Malgoire, 1990, accessible à `www.math.jussieu.fr/~maltsin/groth/Derivateurs.html`.

[10] D. G. Quillen – *Homotopical algebra*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 43, Springer-Verlag, 1979.

[11] O. Renaudin – « Plongement de certaines théories homotopiques de Quillen dans les dérivateurs », *J. Pure Appl. Algebra* **213** (2009), p. 1916–1935.

[12] J.-L. Verdier – « Catégories derivées. Quelques résultats (État 0). », manuscrit (1963).

[13] ———, *Des catégories dérivées des catégories abéliennes*, Astérisque, vol. 239, Soc. Math. France, 1996, avec une préface de L. Illusie, édité par G. Maltsiniotis.

[14] C. Weibel – « The mathematical enterprises of Robert Thomason », *Bull. AMS* **34** (1997), p. 1–13.

[15] ———, « Homotopy ends and Thomason model categories », *Sel. math., New ser.* **7** (2001), p. 533–564.