
HOMOLOGIE POLYGRAPHIQUE DES SYSTÈMES LOCAUX

par

Léonard GUETTA & Georges MALTSINIOTIS

À François Métayer pour son départ à la retraite

Résumé. — Dans cet article, on introduit une notion d’homologie polygraphique d’une ∞ -catégorie stricte à coefficients dans un système local, généralisant l’homologie polygraphique à coefficients dans \mathbb{Z} , introduite par François Métayer. On montre que l’homologie d’un ensemble simplicial à coefficients dans un système local coïncide avec l’homologie polygraphique de son image par l’adjoint à gauche du nerf de Street à coefficients dans le système local correspondant. On définit dans ce cadre un morphisme de comparaison entre l’homologie polygraphique d’une ∞ -catégorie stricte et l’homologie de son nerf de Street, et on montre que ce morphisme est un isomorphisme pour les (1-)catégories. Il n’en est pas de même pour une ∞ -catégorie stricte arbitraire. Néanmoins, on conjecture que pour une construction analogue dans le cadre des ∞ -catégories faibles « à la Grothendieck » on obtiendrait toujours un isomorphisme.

Abstract. — In this article, we introduce a notion of polygraphic homology of a strict ∞ -category with coefficients in a local system, generalizing the polygraphic homology with coefficients in \mathbb{Z} , introduced by François Métayer. We show that the homology of a simplicial set with coefficients in a local system coincides with the polygraphic homology of its image by the left adjoint of the Street nerve with coefficients in the corresponding local system. We define in this framework a comparison morphism between the polygraphic homology of a strict ∞ -category and the homology of its Street nerve, and we show that this morphism is an isomorphism for (1-)categories. This is not true for an arbitrary strict ∞ -category. Nevertheless, we conjecture that for an analogous construction in the framework of weak ∞ -categories “à la Grothendieck” we would always obtain an isomorphism.

Table des matières

Introduction.....	2
1. Rappels sur l’homologie d’un système local simplicial.....	8
2. Rappels sur les ∞ -catégories strictes et les polygraphes.....	12

Classification mathématique par sujets (2020). — 18G10, 18G15, 18G35, 18G90, **18N30**, 18N40, 18N50, 18N65, 55N10, **55N25**, 55U10, 55U15.

Mots clefs. — ∞ -catégorie stricte, homologie polygraphique, polygraphe, système local.

3. Homologie polygraphique d'un système local ∞ -catégorique.....	15
4. L'homologie polygraphique d'un système local simplicial.....	31
5. Rappels sur l'homologie d'un système local 1-catégorique.....	37
6. L'homologie polygraphique d'un système local 1-catégorique....	41
Appendice A. Une adjonction.....	48
Appendice B. Homologie et version abélienne de la construction de Grothendieck ∞ -catégorique.....	50
Appendice C. Homologie polygraphique d'une ∞ -catégorie faible..	51
Références.....	53

Introduction

Dans *Pursuing Stacks*, Grothendieck suggère que l'homologie d'un ∞ -groupeïde faible (« ∞ -stack » dans sa terminologie) se calcule par le complexe dont la composante de degré n est le groupe abélien libre engendré par ses n -cellules et dont la différentielle est définie en prenant la différence entre le but et la source d'une n -cellule [27, note 97, page 29]. Cette idée est un peu naïve (elle ne donne même pas l'homologie correcte pour le ∞ -groupeïde ponctuel) mais comme souvent avec Grothendieck, l'intuition sous-jacente semble correcte, sauf qu'il faudrait prendre un foncteur d'abélianisation plus subtil, et remplacer le ∞ -groupeïde considéré par une résolution cofibrante dans un sens adéquat.

Indépendamment, François Métayer a introduit l'homologie polygraphique d'une ∞ -catégorie stricte (qu'on appellera ici simplement ∞ -catégorie) en termes de résolutions polygraphiques, dans un travail qu'il précise avoir effectué en collaboration avec Albert Burroni [42]. La notion de *polygraphe* [17], [18] (ou *computad* [49], [50]) est le concept pertinent de ∞ -catégorie libre et une *résolution polygraphique* est l'analogue ∞ -catégorique d'une résolution libre d'un groupe abélien.

On rappelle que les objets ∞ -catégorie (stricte) de la catégorie Ab des groupes abéliens forment une catégorie équivalente à celle des complexes de chaînes de groupes abéliens en degrés positifs [16]. Le foncteur d'oubli $\infty\text{-Cat}(\text{Ab}) \rightarrow \infty\text{-Cat}$, de la catégorie des objets ∞ -catégorie stricte de Ab vers celle des ∞ -catégories strictes, admet un adjoint à gauche L , le *foncteur d'abélianisation*, qui s'identifie donc à un foncteur de $\infty\text{-Cat}$ vers la catégorie $\text{Comp}(\text{Ab})$ des complexes de groupes abéliens. Si X est une ∞ -catégorie et $n \geq 0$, le groupe $L(X)_n$ est le *quotient* du groupe abélien libre engendré par les n -flèches de X par les relations $x *_i y = x + y$, pour $0 \leq i < n$ et x, y n -flèches i -composables de X , où $x *_i y$ désigne le composé de y suivi de x , au-dessus de la i -source de x , supposée égale au i -but de y . Pour $n > 0$, la différentielle de l'image dans $L(X)_n$ d'une n -cellule est définie par la différence de l'image dans $L(X)_{n-1}$ de son but moins celle de sa source. L'*homologie polygraphique* de X est définie en choisissant une résolution polygraphique $P \rightarrow X$ de X , en posant pour

$n \geq 0$, $H_n^{\text{pol}}(X) = H_n(L(P))$, et en montrant que cette définition est indépendante du choix de la résolution [42].

L'homologie polygraphique s'interprète plus conceptuellement en termes de la structure de catégorie de modèles « folk » sur $\infty\text{-Cat}$, introduite dans [35]. La notion d'équivalence faible pour cette structure généralise celle d'équivalence de catégories, et les objets cofibrants sont les polygraphes [43]. L'homologie polygraphique s'identifie au foncteur dérivé à gauche du foncteur d'abélianisation. Yves Lafont et François Métayer ont montré que l'homologie polygraphique d'un monoïde (vu comme une ∞ -catégorie avec un seul objet et des i -cellules triviales pour $i > 1$) coïncide avec son homologie usuelle [34]. Le premier des auteurs du présent article a montré qu'il en est de même pour toute (1-)catégorie [28], [29]. En revanche, pour une ∞ -catégorie stricte générale X , son homologie polygraphique ne coïncide pas toujours avec son homologie, définie comme étant celle de son nerf de Street [50]. Par exemple, si X est la 2-catégorie ayant un seul objet, l'unité de cet objet comme seule 1-flèche et \mathbb{N} comme monoïde d'endomorphismes de cette unité, l'homologie polygraphique de X est \mathbb{Z} en degrés 0 et 2, et 0 ailleurs, tandis que son homologie est \mathbb{Z} en toute dimension paire et 0 en dimension impaire [29, 4.5.2], [4, Theorem 4.9 et Example 4.10].

Le but de cet article est d'introduire et d'étudier l'homologie polygraphique d'une ∞ -catégorie stricte X à coefficients dans un *système local* sur X (voir plus loin), généralisant ainsi l'homologie polygraphique à coefficients constants \mathbb{Z} de Métayer. Dans un appendice, on adapte cette définition aux ∞ -catégories faibles « à la Grothendieck » et on conjecture que dans ce cadre l'homologie polygraphique coïncide avec la « vraie » homologie.

Si X est un espace topologique, un *système local* sur X est un foncteur contravariant M du groupoïde fondamental de X vers la catégorie des groupes abéliens. Autrement dit, à tout point x de X , on associe un groupe abélien M_x et à tout chemin γ d'origine x_0 et d'extrémité x_1 un isomorphisme de groupes abéliens $\gamma^* : M_{x_1} \rightarrow M_{x_0}$ qui ne dépend que de la classe d'homotopie (à extrémités fixes) de γ , et ceci de façon compatible à la composition des chemins. L'homologie d'un espace X à coefficients dans un système local M a été définie par Steenrod [46, Section 10], [47], comme étant l'homologie d'un complexe de groupes abéliens, généralisant celui qui calcule l'homologie de X à coefficients dans un groupe abélien constant.

Plus précisément, notons Δ_n le simplexe topologique standard de dimension n , enveloppe convexe de la base canonique $(e_i)_{0 \leq i \leq n}$ de \mathbb{R}^{n+1} . On définit un complexe de groupes abéliens $C(X, M)$ comme suit. La composante de dimension n est donnée par la formule

$$C_n(X, M) = \bigoplus_{x : \Delta_n \rightarrow X} M_{x_n := x(e_n)}.$$

La différentielle est définie par

$$d(x, m) = \sum_{0 \leq i < n} (-1)^i (d_i x, m) + (-1)^n (d_n x, x_{n-1}^*(m)), \quad x : \Delta_n \rightarrow X, \quad m \in M_{x_n},$$

où x_{n-1} désigne le chemin dans X image par x du segment $e_{n-1} e_n$ dans Δ_n , et $d_i x$ la restriction de x à la i -ème face de Δ_n , enveloppe convexe de la famille $(e_k)_{k \neq i}$ (dont le « dernier sommet » est e_n si $i < n$ et e_{n-1} si $i = 1$, de sorte que la formule a un sens).

Ces définitions s'adaptent facilement au cadre des ensembles simpliciaux (voir section 1), et l'homologie d'un espace topologique à coefficients dans un système local M s'interprète comme l'homologie de son complexe singulier à coefficients dans le système local induit par M . De plus, une variante d'un théorème de Whitehead montre qu'une application continue ou un morphisme d'ensembles simpliciaux est une équivalence faible topologique ou simpliciale si et seulement si il induit une équivalence des groupoïdes fondamentaux et un isomorphisme sur l'homologie à coefficients dans tout système local sur le but du morphisme (voir théorème 1.6).

Le cas ∞ -catégorique est plus subtil. Si X est une ∞ -catégorie stricte, la *catégorie fondamentale* de X est la catégorie obtenue de X en oubliant les i -flèches pour $i > 1$, et en identifiant deux 1-flèches si elles sont reliées par un zigzag de 2-flèches. Le *groupoïde fondamental* $\Pi_1(X)$ de X est le groupoïde enveloppant de sa catégorie fondamentale (obtenu en inversant formellement toutes les flèches de cette dernière). Un *système local* sur X est un foncteur contravariant du groupoïde $\Pi_1(X)$ vers la catégorie Ab des groupes abéliens. Il revient au même de se donner un ∞ -foncteur $M : X^\circ \rightarrow \text{Ab}$ du dual total de X (obtenu de X en inversant le sens de ses i -flèches pour tout $i > 0$) vers la catégorie des groupes abéliens (vue comme une ∞ -catégorie dont les i -flèches sont des identités pour $i > 1$) tel que l'image par M de toute 1-flèche de X soit un isomorphisme. Pour tout objet x de X , on notera M_x le groupe abélien correspondant et pour toute 1-flèche $x : x_0 \rightarrow x_1$ de X , $x^* = M_x : M_{x_1} \rightarrow M_{x_0}$ l'isomorphisme de groupes abéliens image de x par M .

Pour définir l'homologie polygraphique d'une ∞ -catégorie X à coefficients dans un système local M , on associe d'abord au couple (X, M) un complexe de groupes abéliens $C(X, M)$ défini comme suit. Pour $n \geq 0$, on pose

$$C_n(X, M) = \bigoplus_{x \in X_n} M_{t_0 x} / \sim_n,$$

où X_n désigne l'ensemble des n -flèches de X , $t_0 x$ le 0-but de la n -flèche x , et \sim_n est la plus petite relation d'équivalence compatible à l'addition engendrée par les relations :

$$(*_0) \quad (x_1 *_0 x_0, m) \sim_n (x_1, m) + (x_0, t_1(x_1)^*(m)), \quad m \in M_{t_0(x_1 *_0 x_0) = t_0 x_1},$$

$$(*_i) \quad (x_1 *_i x_0, m) \sim_n (x_1, m) + (x_0, m), \quad 0 < i < n, \quad m \in M_{t_0(x_1 *_i x_0) = t_0 x_1 = t_0 x_0},$$

quand ces composés $x_1 *_i x_0$ ont un sens (où dans la relation $(*_0)$, $t_1(x_1)$ désigne le 1-but de x_1 de sorte que $t_1(x_1)^*(m)$ appartient à $M_{t_0x_0}$). La différentielle

$$d_n : C_n(X, M) \rightarrow C_{n-1}(X, M), \quad n > 0,$$

est définie par la formule

$$d_n(x, m) = \begin{cases} (t_0x, m) - (s_0x, x^*m), & n = 1, \\ (t_{n-1}x, m) - (s_{n-1}x, m), & n > 1. \end{cases}$$

On observe que si M est le foncteur constant de valeur \mathbb{Z} , alors le complexe $C(X, M)$ n'est autre que l'image de la ∞ -catégorie X par le foncteur d'abélianisation.

Comme pour l'homologie polygraphique d'une ∞ -catégorie X à coefficients constants \mathbb{Z} , l'homologie polygraphique de X à coefficients dans un système local M est définie en choisissant une résolution polygraphique $p : P \rightarrow X$, autrement dit une fibration triviale de source cofibrante pour la structure folk sur ∞ -Cat, et en posant, pour $n \geq 0$, $H_n^{\text{pol}}(X, M) = H_n(C(P, p^*(M)))$, où $p^*(M)$ désigne le système local sur P obtenu de M en précomposant avec p . De façon plus sophistiquée, le groupe abélien $H_n^{\text{pol}}(X, M)$ est le n -ème groupe d'homologie de l'objet $H_\bullet^{\text{pol}}(X, M)$ de la catégorie dérivée des groupes abéliens correspondant au complexe $C(P, p^*(M))$. Le résultat clef (théorème 3.16) pour montrer qu'à isomorphisme canonique près $H_\bullet^{\text{pol}}(X, M)$ ne dépend pas de la résolution choisie est que le foncteur

$$F_{X, M} : \infty\text{-Cat}/X \rightarrow \text{Comp}(\text{Ab}), \quad (X', p : X' \rightarrow X) \mapsto C(X', p^*(M)),$$

est un foncteur de Quillen à gauche (admettant un adjoint à droite et respectant les cofibrations et les cofibrations triviales) pour la structure de catégorie de modèles sur $\infty\text{-Cat}/X$ induite de la structure folk sur $\infty\text{-Cat}$, et la structure injective sur $\text{Comp}(\text{Ab})$. Ce théorème est non trivial et pour le démontrer on utilise une description précise des cofibrations triviales génératrices de la structure folk sur $\infty\text{-Cat}$.

En s'inspirant de la variante du théorème de Whitehead mentionnée précédemment, on introduit une classe d'équivalences faibles dans $\infty\text{-Cat}$, les équivalences polygraphiques. On dit qu'un ∞ -foncteur $f : X' \rightarrow X$ est une *équivalence polygraphique* si il induit une équivalence des groupoïdes fondamentaux et si pour tout système local M sur X et tout $n \geq 0$, le morphisme de groupes abéliens $H_n^{\text{pol}}(X', f^*(M)) \rightarrow H_n^{\text{pol}}(X, M)$, induit par f , est un isomorphisme. On vérifie que cette classe satisfait au 2 sur 3 (proposition 4.11), et on démontre le théorème suivant (voir théorème 3.24) :

Théorème 1. — *Toute équivalence folk est une équivalence polygraphique.*

La théorie de l'homotopie des ∞ -catégories strictes [10], [11], [12], [4], [14], généralisant celle des catégories [45], [53], [27], [39], [20], est basée sur le nerf de Street, qui prolonge le nerf usuel (1-)catégorique de Grothendieck [26]. Dans [50], Ross Street

a introduit un objet cosimplicial de $\infty\text{-Cat}$, l'objet cosimplicial des orientaux, qui définit par le procédé de Kan un couple de foncteurs adjoints entre la catégorie des ensembles simpliciaux et celle des ∞ -catégories strictes

$$c : \widehat{\Delta} \longrightarrow \infty\text{-Cat}, \quad N : \infty\text{-Cat} \longrightarrow \widehat{\Delta},$$

formé du foncteur c de réalisation ∞ -catégorique et du foncteur nerf N , connu sous le nom de nerf de Street. Par définition, le type d'homotopie d'une ∞ -catégorie stricte est le type d'homotopie de son nerf de Street. Plus précisément, si on définit les *équivalences de Thomason* comme étant les ∞ -foncteurs dont le nerf de Street est une équivalence faible simpliciale, Andrea Gagna a prouvé que le foncteur N induit une équivalence de catégories entre la localisation de la catégorie $\infty\text{-Cat}$ par les équivalences de Thomason et la catégorie homotopique des ensembles simpliciaux, autrement dit, celle des types d'homotopie [25]. On conjecture même qu'il existe une structure de catégorie de modèles sur $\infty\text{-Cat}$ avec comme équivalences faibles les équivalences de Thomason et comme cofibrations *certaines* cofibrations folk [9].

Le foncteur de réalisation ∞ -catégorique c n'est pas compatible aux équivalences de Thomason, au sens qu'il ne transforme pas les équivalences simpliciales en équivalences de Thomason, et en particulier ne définit pas un quasi-inverse homotopique du nerf de Street. En revanche, ce foncteur est compatible à l'homologie polygraphique à coefficients dans des systèmes locaux, et aux équivalences polygraphiques. Si X est un ensemble simplicial, il est facile de vérifier que son groupoïde fondamental est canoniquement isomorphe au groupoïde fondamental de la ∞ -catégorie $c(X)$, et par suite, les systèmes locaux sur X et sur $c(X)$ se correspondent bijectivement. On démontre le théorème suivant (théorème 4.8 et corollaire 4.10) :

Théorème 2. — *Pour tout ensemble simplicial X , tout système local M sur X , et tout $n \geq 0$, on a un isomorphisme canonique $H_n^{\text{pol}}(c(X), M) \simeq H_n(X, M)$. En particulier, un morphisme d'ensembles simpliciaux est une équivalence d'homotopie faible si et seulement si son image par c est une équivalence polygraphique.*

Par définition, l'homologie singulière, ou plus simplement homologie, d'une ∞ -catégorie est l'homologie de son type d'homotopie, c'est-à-dire de son nerf de Street. Plus précisément, si X est une ∞ -catégorie, le groupoïde fondamental de X est canoniquement isomorphe au groupoïde fondamental de l'ensemble simplicial $N(X)$, les systèmes locaux sur X et sur $N(X)$ se correspondent donc bijectivement, et on définit l'homologie de X à coefficients dans un système local M sur X par la formule $H_n(X, M) = H_n(N(X), M)$, $n \geq 0$. Le morphisme d'adjonction $cN(X) \rightarrow X$ induit un morphisme de groupes abéliens $H_n^{\text{pol}}(cN(X), M) \rightarrow H_n^{\text{pol}}(X, M)$, qui en vertu du théorème 2, définit donc un morphisme de comparaison $H_n(X, M) \rightarrow H_n^{\text{pol}}(X, M)$. On démontre le théorème suivant (théorème 6.1), qui généralise un théorème du premier auteur dans le cas d'un système local constant de valeur \mathbb{Z} [28], [29] :

Théorème 3. — *Pour toute (1-)catégorie X et tout $n \geq 0$, le morphisme de comparaison $H_n(X, M) \rightarrow H_n^{\text{pol}}(X, M)$ est un isomorphisme.*

Pour résumer, on est en présence de trois classes d'équivalences faibles dans $\infty\text{-Cat}$, la classe $\mathcal{W}_{\text{folk}}$ des équivalences faibles de la structure folk, la classe \mathcal{W}_{pol} des équivalences polygraphiques et la classe $\mathcal{W}_{\text{Thom}}$ des équivalences de Thomason. On a des inclusions

$$\mathcal{W}_{\text{folk}} \subset \mathcal{W}_{\text{pol}}, \quad \mathcal{W}_{\text{folk}} \subset \mathcal{W}_{\text{Thom}}$$

(la première en vertu du théorème 1, la seconde en vertu de la proposition 3.6.2 de [29]). En revanche, il n'y a aucune inclusion entre les classes \mathcal{W}_{pol} et $\mathcal{W}_{\text{Thom}}$ (voir scholie 6.7). Par ailleurs, si on note $\mathcal{W}_{\hat{\Delta}}$ la classe des équivalences faibles simpliciales, on a des égalités

$$\mathcal{W}_{\hat{\Delta}} = c^{-1}(\mathcal{W}_{\text{pol}}), \quad \mathcal{W}_{\text{Thom}} = N^{-1}(\mathcal{W}_{\hat{\Delta}})$$

(la première en vertu du théorème 2 et la seconde par définition). Enfin, il résulte du théorème 3 (et du théorème 1.6) que

$$\mathcal{W}_{\text{pol}} \cap \text{Fl}(\text{Cat}) = \mathcal{W}_{\text{Thom}} \cap \text{Fl}(\text{Cat}),$$

où $\text{Fl}(\text{Cat})$ désigne la classe des flèches de Cat . Les classes \mathcal{W}_{pol} et $\mathcal{W}_{\text{Thom}}$ partagent un grand nombre de propriétés formelles (voir remarque 6.11). En particulier, la classe \mathcal{W}_{pol} satisfait à un théorème A de Quillen relatif au dessus d'une (1-)catégorie (proposition 6.9).

On conjecture que dans le cadre des ∞ -catégories faibles « à la Grothendieck » les analogues des classes \mathcal{W}_{pol} et $\mathcal{W}_{\text{Thom}}$ coïncident et que pour les ∞ -groupoïdes faibles les trois classes \mathcal{W}_{pol} , $\mathcal{W}_{\text{Thom}}$ et $\mathcal{W}_{\text{folk}}$ coïncident.

Dans le corps de l'article, on développe la théorie de l'homologie et de l'homologie polygraphique dans un cadre un peu plus général, celui des systèmes locaux faibles (où le rôle du groupoïde fondamental est remplacé par celui de la *catégorie fondamentale*), généralisant ainsi ce qui est connu, dans le cadre des (1-)catégories, comme homologie des foncteurs. Une partie des résultats est valable dans ce contexte plus général, comme par exemple, le théorème 1 (au sens où l'homologie polygraphique à coefficients dans un système local faible est compatible aux équivalences folk) ainsi que le théorème 2, mais pas le théorème 3.

Plan de l'article. — Dans la première section on rappelle la définition de l'homologie d'un ensemble simplicial à coefficients dans un système local, en introduisant une variante, les systèmes locaux faibles, et on esquisse la preuve d'un théorème de Whitehead caractérisant les équivalences faibles simpliciales. Le but de la deuxième section est de fixer la terminologie et les notations relatives aux ∞ -catégories strictes, et faire quelques rappels sur la structure folk ∞ -catégorique. Dans la troisième, on définit l'homologie polygraphique d'une ∞ -catégorie stricte à coefficients dans un système local faible, on montre son invariance par équivalences faibles folk, et on étudie

ses propriétés de fonctorialité. Dans la quatrième, on rappelle la définition du nerf de Street, et on prouve que l'homologie d'un ensemble simplicial à coefficients dans un système local faible coïncide avec l'homologie polygraphique de son image par l'adjoint à gauche du nerf de Street. On introduit les équivalences faibles polygraphiques et on montre qu'elles permettent de caractériser les équivalences faibles simpliciales. La cinquième section est consacrée à l'étude de plusieurs définitions équivalentes de l'homologie d'une catégorie à coefficients dans un système local faible, connue sous le nom d'homologie des foncteurs. Dans la dernière section, on montre que pour un système local, cette homologie coïncide avec l'homologie polygraphique. On démontre également que les équivalences faibles polygraphiques ∞ -catégoriques satisfont à un théorème A de Quillen relatif au-dessus d'une (1-)catégorie. Le but de l'appendice A est de prouver un lemme technique d'adjonction utile dans la section 3. Dans l'appendice B, on interprète l'homologie polygraphique d'un système local libre en termes de la construction de Grothendieck ∞ -catégorique. L'appendice C est consacré à la définition de l'homologie polygraphique d'une ∞ -catégorie faible.

1. Rappels sur l'homologie d'un système local simplicial

Dans cette section, on rappelle quelques résultats sur l'homologie d'un ensemble simplicial à coefficients dans un système local, introduite par Steenrod [47] (pour une exposition plus actuelle, voir par exemple dans [23]). Aucune originalité n'est revendiquée.

1.1. — On note Δ la catégorie des simplexes standard dont les objets sont les ensembles ordonnés

$$\Delta_n = \{0 < 1 < \dots < n\}, \quad n \geq 0,$$

et les morphismes les applications croissantes entre iceux, $\widehat{\Delta}$ la catégorie des ensembles simpliciaux, catégorie des préfaisceaux sur Δ , et pour un ensemble simplicial X , X_n l'ensemble de ses n -simplexes, $X_n = X(\Delta_n)$, et

$$d_i : X_n \rightarrow X_{n-1}, \quad s_i : X_n \rightarrow X_{n+1}, \quad 0 \leq i \leq n,$$

les opérateurs de face et de dégénérescence. Pour tout n -simplexe $x \in X_n$, et toute suite d'entiers $0 \leq i_0 \leq i_1 \leq \dots \leq i_p \leq n$, on désigne par $x_{i_0 i_1 \dots i_p}$ le p -simplexe de X image inverse de x par l'application $k \mapsto i_k$. En particulier,

$$d_i x = x_{1 \dots \widehat{i} \dots n} \quad \text{et} \quad s_i x = x_{1 \dots i-1 \ i \ i+1 \dots n}, \quad 0 \leq i \leq n.$$

1.2. — Soit X un ensemble simplicial. On note $c_1(X)$ (resp. $\Pi_1(X)$) sa *catégorie fondamentale* (resp. son *groupoïde fondamental*). On rappelle que $c_1(X)$ est la catégorie définie par générateurs et relations par le graphe

$$X_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{d_0} \\ \xrightarrow{d_1} \end{array} X_0$$

(d_1 l'application source et d_0 l'application but) et les relations

$$d_1(x) = d_0(x) \circ d_2(x), \quad x \in X_2, \quad 1_x = s_0(x), \quad x \in X_0,$$

et $\Pi_1(X)$ le *groupoïde enveloppant* de $c_1(X)$, autrement dit, le groupoïde obtenu en inversant formellement toutes les flèches de la catégorie $c_1(X)$. On a une équivalence canonique de groupoïdes $\Pi_1(X) \simeq \Pi_1(|X|)$, où $|X|$ désigne la *réalisation topologique* de l'ensemble simplicial X et $\Pi_1(|X|)$ son groupoïde fondamental. Tout morphisme d'ensembles simpliciaux $f : X' \rightarrow X$, induit un morphisme $c_1(f) : c_1(X') \rightarrow c_1(X)$ (resp. $\Pi_1(f) : \Pi_1(X') \rightarrow \Pi_1(X)$), définissant ainsi un foncteur de la catégorie des ensembles simpliciaux vers celle des petites catégories (resp. des groupoïdes).

Un *système local faible* sur X est un préfaisceau abélien sur $c_1(X)$, autrement dit, un foncteur $M : c_1(X)^\circ \rightarrow \text{Ab}$, où Ab désigne la catégorie des groupes abéliens. Pour tout $x \in X_0$, on a donc un groupe abélien M_x , et pour tout $x \in X_1$, un morphisme de groupes abéliens $x^* := x_M^* := M_x : M_{x_1} \rightarrow M_{x_0}$ satisfaisant aux conditions

$$x_{02}^* = x_{01}^* \circ x_{12}^*, \quad x \in X_2, \quad x_{00}^* = 1_{M_x}, \quad x \in X_0.$$

On dit que M est un *système local* si pour tout $x \in X_1$, le morphisme x^* est un isomorphisme, autrement dit, si le foncteur M se factorise par $\Pi_1(X)$.

1.3. — Soient X un ensemble simplicial et M un système local faible sur X . On définit un groupe abélien simplicial $C(X, M)$ en posant

$$C_n(X, M) = \bigoplus_{x \in X_n} M_{x_n}, \quad n \geq 0,$$

et en définissant les opérateurs simpliciaux par

$$d_i(x, m) = \begin{cases} (d_i x, m), & 0 \leq i < n, \\ (d_n x, x_{n-1, n}^*(m)), & i = n, \end{cases}$$

$$s_i(x, m) = (s_i x, m).$$

On en déduit un complexe de chaînes de groupes abéliens noté également $C(X, M)$ dont la différentielle est donnée par

$$d(x, m) = \sum_{0 \leq i < n} (-1)^i (d_i x, m) + (-1)^n (d_n x, x_{n-1, n}^*(m)), \quad x \in X_n, \quad m \in M_{x_n}, \quad n > 0.$$

L'homologie de l'ensemble simplicial X à valeurs dans le système local faible M est définie par $H_n(X, M) = H_n(C(X, M))$. Cette homologie est également celle du complexe normalisé correspondant, quotient de $C(X, M)$ par le sous-complexe engendré par les simplexes dégénérés de X . On remarque que si le foncteur M est constant de valeur un groupe abélien fixe M , alors $H_n(X, M)$ est l'homologie usuelle de l'ensemble simplicial X à valeurs dans le groupe abélien M .

Soient $f : X' \rightarrow X$ un morphisme d'ensembles simpliciaux, et $M : c_1(X)^\circ \rightarrow \text{Ab}$ un système local faible sur X . Le composé

$$c_1(X')^\circ \xrightarrow{c_1(f)^\circ} c_1(X)^\circ \xrightarrow{M} \text{Ab}$$

définit un système local faible sur X' , noté $f^*(M)$, et le morphisme f induit un morphisme de complexes $C(f, M) : C(X', f^*(M)) \rightarrow C(X, M)$, d'où un morphisme de groupes abéliens $H_n(f, M) : H_n(X', f^*(M)) \rightarrow H_n(X, M)$, pour $n \geq 0$.

1.4. — Soit (X, a) un ensemble simplicial pointé connexe. Le *revêtement universel* de (X, a) est l'ensemble simplicial pointé (\tilde{X}, \tilde{a}) défini comme suit :

$$\begin{aligned} \tilde{X}_n &= \{(x, g) \mid x \in X_n, g \in \Pi_1(X; x_n, a)\} \\ d_i(x, g) &= \begin{cases} (d_i x, g), & 0 \leq i < n, \\ (d_n x, g \circ x_{n-1, n}), & i = n, \end{cases} \\ s_i(x, g) &= (s_i x, g), \\ \tilde{a} &= (a, 1_a), \end{aligned}$$

où $\Pi_1(X; x_n, a) = \text{Hom}_{\Pi_1(X)}(x_n, a)$. On a un morphisme d'ensembles simpliciaux pointés

$$\tilde{X} \rightarrow X, \quad (x, g) \mapsto x,$$

dont la réalisation topologique $|\tilde{X}| \rightarrow |X|$ s'identifie au revêtement universel de la réalisation topologique de X . Un morphisme d'ensembles simpliciaux connexes pointés $f : X' \rightarrow X$ induit un morphisme d'ensembles simpliciaux pointés

$$\tilde{f} : \tilde{X}' \rightarrow \tilde{X}, \quad (x, g) \mapsto (f(x), \Pi_1(f)(g)),$$

rendant commutatif le carré

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X}' & \xrightarrow{\tilde{f}} & \tilde{X} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X' & \xrightarrow{f} & X \end{array} .$$

1.5. — On rappelle qu'une *équivalence faible simpliciale* est un morphisme d'ensembles simpliciaux $X' \rightarrow X$ induisant une équivalence d'homotopie $|X'| \rightarrow |X|$ entre les réalisations topologiques.

On a la variante suivante du théorème de Whitehead (voir par exemple [23, Theorem 6.71], ou pour la version cohomologique [44, Chapter II, §3, Proposition 4]), dont on esquisse une preuve pour la commodité du lecteur :

Théorème 1.6. — *Soit $f : X' \rightarrow X$ un morphisme d'ensembles simpliciaux. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (a) *f est une équivalence faible simpliciale ;*
- (b) *$\Pi_1(f)$ est une équivalence de groupoïdes, et pour tout système local M sur X et tout $n \geq 0$, le morphisme de groupes abéliens $H_n(f, M) : H_n(X', f^*(M)) \rightarrow H_n(X, M)$, induit par f , est un isomorphisme ;*
- (c) *$\Pi_1(f)$ est une équivalence de groupoïdes, et pour toute composante connexe X'_0 de X' et tout $n \geq 0$, le morphisme de groupes abéliens $H_n(\tilde{X}'_0, \mathbb{Z}) \rightarrow H_n(\tilde{X}_0, \mathbb{Z})$, où X_0 est la composante connexe de X correspondant à X'_0 par l'équivalence $\Pi_1(f)$, et \tilde{X}'_0 (resp. \tilde{X}_0) le revêtement universel de X'_0 (resp. de X_0) pointé par un de ses points (resp. par l'image par f de ce point), est un isomorphisme.*

Esquisse de preuve. — (a) \Rightarrow (b). Supposons que f est une équivalence faible simpliciale. Par définition, $\Pi_1(f)$ est alors une équivalence de groupoïdes. Il suffit donc de montrer que pour tout système local $M : \Pi_1(X)^\circ \rightarrow \text{Ab}$, le morphisme de complexes $C(f, M) : C(X', f^*(M)) \rightarrow C(X, M)$ est un quasi-isomorphisme. Fixons un tel système local M , et considérons la catégorie $\hat{\Delta}/X$ des ensembles simpliciaux au-dessus de X munie de la structure de catégorie de modèles induite de celle de $\hat{\Delta}$, la catégorie $\text{Comp}(\text{Ab})$ des complexes de groupes abéliens munie de la structure de catégorie de modèles injective (dont les cofibrations sont les monomorphismes et les équivalences faibles les quasi-isomorphismes), et $F : \hat{\Delta}/X \rightarrow \text{Comp}(\text{Ab})$ le foncteur associant à un objet $(T, p : T \rightarrow X)$ le complexe $C(T, p^*(M))$. Il suffit de montrer que ce foncteur respecte les équivalences faibles, et pour cela, comme tous les objets de $\hat{\Delta}/X$ sont cofibrants, qu'il est un foncteur de Quillen à gauche. On vérifie facilement que le foncteur F respecte les monomorphismes, et qu'il commute aux limites inductives et est donc un adjoint à gauche, puisqu'il est un foncteur entre catégories localement présentables. Pour conclure, il reste donc à montrer que ce foncteur envoie les cofibrations triviales génératrices de $\hat{\Delta}/X$ sur des quasi-isomorphismes. Or, les cofibrations triviales génératrices de $\hat{\Delta}/X$ sont les inclusions de cornets au-dessus de X ,

$$\Lambda_n^k \xrightarrow{i} \Delta_n \xrightarrow{p} X,$$

et comme le groupoïde $\Pi_1(\Delta_n)$ est trivial le système local $p^*(M)$ sur Δ_n est isomorphe au système constant de valeur $M_{p(n)}$. On en déduit que l'image du morphisme i au-dessus de X par le foncteur F s'identifie au morphisme $C(\Lambda_n^k, M_{p(n)}) \rightarrow C(\Delta_n, M_{p(n)})$ des complexes calculant l'homologie à valeurs dans le groupe constant $M_{p(n)}$. Ce morphisme de complexes est un quasi-isomorphisme car, d'une part, l'image d'une inclusion de cornets dans la catégorie des ensembles simpliciaux à homotopie près est un isomorphisme, et d'autre part, le foncteur homologie à valeurs dans un groupe abélien constant transforme les homotopies simpliciales en homotopies de complexes.

(b) \Rightarrow (c). Pour montrer cette implication on se ramène aussitôt au cas où X et X' sont 0-connexes. Choisissons un point a' de X' , soit a son image par f , et considérons le revêtement universel \tilde{X}' (resp. \tilde{X}) de l'ensemble simplicial pointé (X', a') (resp. (X, a)) et le morphisme $\tilde{f} : \tilde{X}' \rightarrow \tilde{X}$ induit par f . On définit un système local M sur X comme suit. Pour tout 0-simplexe x de X , M_x est le \mathbb{Z} -module libre engendré par l'ensemble $\Pi_1(X; x, a)$. Pour tout 1-simplexe x de X , on a un morphisme de \mathbb{Z} -modules $x^* : M_{x_1} \rightarrow M_{x_0}$, induit par l'application

$$\Pi_1(X; x_1, a) \rightarrow \Pi_1(X; x_0, a), \quad g \mapsto g \circ x.$$

La définition du groupoïde $\Pi_1(X)$ par générateurs et relations montre que pour tout 2-simplexe x de X , on a $x_{02}^* = x_{01}^* \circ x_{12}^*$, et qu'on définit ainsi un foncteur $M : \Pi_1(X)^\circ \rightarrow \text{Ab}$. Une vérification simple mais fastidieuse montre alors que le morphisme de complexes $C(f, M) : C(X', f^*(M)) \rightarrow C(X, M)$ s'identifie au morphisme $C(\tilde{f}, \mathbb{Z}) : C(\tilde{X}', \mathbb{Z}) \rightarrow C(\tilde{X}, \mathbb{Z})$, ce qui prouve l'implication.

(c) \Rightarrow (a). On peut à nouveau supposer X' et X 0-connexes, choisir un point a' de X' et considérer le morphisme $\tilde{f} : \tilde{X}' \rightarrow \tilde{X}$ induit par f , entre les revêtements universels correspondants. La réalisation topologique $|\tilde{X}'|$ (resp. $|\tilde{X}|$) de \tilde{X}' (resp. \tilde{X}) s'identifie au revêtement universel de X' (resp. X), et $|\tilde{f}|$ au morphisme entre les revêtements universels induit par $|f|$. Or, en vertu d'un théorème d'Eilenberg (voir par exemple [24, Appendix Two, §1]), pour tout ensemble simplicial T et tout $n \geq 0$, on a un isomorphisme $H_n(|T|, \mathbb{Z}) \simeq H_n(T, \mathbb{Z})$, fonctoriel en T . L'hypothèse de la condition (c) implique donc que pour tout $n \geq 0$, le morphisme $H_n(|\tilde{f}|, \mathbb{Z}) : H_n(|\tilde{X}'|, \mathbb{Z}) \rightarrow H_n(|\tilde{X}|, \mathbb{Z})$ est un isomorphisme. Comme les espaces $|\tilde{X}'|$ et $|\tilde{X}|$ sont simplement connexes, le théorème de Whitehead (voir par exemple [30, Corollary 4.33]) implique que $|\tilde{f}|$ est une équivalence d'homotopie. Comme par hypothèse $\Pi_1(f)$, donc aussi $\Pi_1(|f|)$, est une équivalence de groupoïdes, la longue suite exacte des groupes d'homotopie implique que $|f|$, donc aussi f , est une équivalence faible. \square

Remarque 1.7. — Le fait que dans la condition (b) du théorème ci-dessus on a supposé que M est un système local, et pas seulement un système local faible, est essentiel. En effet, il faut se garder de croire que l'homologie à coefficients dans un système local faible soit invariante par les équivalences faibles simpliciales. Par exemple, si $f : X' \rightarrow X$ est le nerf de l'inclusion de la catégorie ponctuelle $\{1\}$ dans la catégorie $\{0 \rightarrow 1\}$, et M le système local faible $M_1 \rightarrow M_0$, avec $M_0 = \mathbb{Z}$ et $M_1 = 0$, alors on vérifie facilement que $H_0(X', f^*(M)) = 0$, tandis que $H_0(X, M) = \mathbb{Z}$.

2. Rappels sur les ∞ -catégories strictes et les polygraphes

Toutes les ∞ -catégories considérées dans cet article seront des ∞ -catégories *strictes* et les ∞ -foncteurs des ∞ -foncteurs *stricts*, et on dira simplement ∞ -catégorie pour

∞ -catégorie stricte et ∞ -foncteur pour ∞ -foncteur strict. Aucune hypothèse d'inversibilité (stricte ou faible) des i -flèches n'est faite en général, autrement dit, il s'agit de (∞, ∞) -catégories.

2.1. — On note $\infty\text{-Cat}$ la catégorie des (petites) ∞ -catégories et ∞ -foncteurs. Pour X une ∞ -catégorie et $n \geq 0$, on note X_n l'ensemble des ses n -cellules, qu'on appellera également *objets*, si $n = 0$, et *n -flèches*, si $n > 0$. Pour $x \in X_n$ et $0 \leq i \leq n$, $s_i x$ et $t_i x$ désignent respectivement la i -cellule i -source et i -but (itérés) de x (en particulier $s_n x = x = t_n x$), et 1_x la $(n+1)$ -flèche unité de x . On dira parfois qu'une n -cellule est *triviale* si elle est l'unité d'une $(n-1)$ -cellule. Pour $0 \leq i < \min\{n_0, n_1\}$, $x_0 \in X_{n_0}$, $x_1 \in X_{n_1}$, on dira que x_0 et x_1 sont *i -composables* si $t_i x_0 = s_i x_1$, et on notera $x_1 *_i x_0$ leur i -composé. Par convention, si $i_1 < i_2$, la i_1 -composition sera prioritaire par rapport à la i_2 -composition. Par exemple, on écrira $x_2 *_1 x_1 *_0 x_0$ pour $x_2 *_1 (x_1 *_0 x_0)$, dès que cette dernière expression a un sens. Pour $n \geq 0$, on dit qu'une n -cellule est *indécomposable* si, ou bien $n = 0$, c'est-à-dire x est un objet, ou bien $n > 0$, x n'est pas une unité, et pour tout $0 \leq i < n$ et toute décomposition $x = x_1 *_i x_0$ de x , au moins une des deux cellules x_0, x_1 est une unité (itérée) d'une i -cellule. On note X° la ∞ -catégorie *dual total* de X , obtenue de X en inversant le sens de ses i -flèches pour tout $i > 0$.

Une n -catégorie (stricte) sera toujours considérée comme une ∞ -catégorie dont les i -cellules sont triviales pour $i > n$. En particulier, la catégorie Cat des petites catégories, sera considérée comme une sous-catégorie pleine de $\infty\text{-Cat}$. L'inclusion de la sous-catégorie pleine de $\infty\text{-Cat}$ formée des n -catégories admet un adjoint à gauche et un adjoint à droite appelés respectivement foncteur de *troncation intelligente* et foncteur de *troncation bête*. Si X est une ∞ -catégorie, son n -tronqué bête est la sous- ∞ -catégorie de X ayant mêmes i -cellules que X pour $0 \leq i \leq n$, et seulement des i -cellules triviales pour $i > n$. Son tronqué intelligent est le quotient de X ayant mêmes i -cellules que X pour $0 \leq i < n$, dont les n -cellules sont obtenues de celles de X en identifiant deux n -cellules si elles sont reliées par un zigzag de $(n+1)$ -cellules de X , et n'ayant que des i -cellules triviales pour $i > n$. La *catégorie fondamentale* de X est son 1-tronqué intelligent, et son *groupoïde fondamental* le groupoïde enveloppant de cette dernière. Par convention, le (-1) -tronqué bête d'une ∞ -catégorie est la ∞ -catégorie vide \emptyset .

Pour $n \geq 0$, on note D_n le *n -disque*, unique à isomorphisme unique près, n -catégorie ayant exactement une n -cellule non triviale ζ_n , appelée sa *cellule fondamentale*, et pour $0 \leq i < n$, exactement deux i -cellules non triviales, égales à $s_i \zeta_n$ et $t_i \zeta_n$.

$$D_0 = \bullet, \quad D_1 = \bullet \longrightarrow \bullet, \quad D_2 = \bullet \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \Downarrow \\ \curvearrowleft \end{array} \bullet, \quad D_3 = \bullet \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \Downarrow \Rightarrow \Downarrow \\ \curvearrowleft \end{array} \bullet, \quad \dots$$

Le couple (D_n, ζ_n) coreprésente le foncteur

$$\infty\text{-Cat} \rightarrow \text{Ens}, \quad X \mapsto X_n,$$

associant à une ∞ -catégorie l'ensemble de ses n -cellules, autrement dit, on a une bijection naturelle en X

$$\mathrm{Hom}_{\infty\text{-Cat}}(D_n, X) \xrightarrow{\sim} X_n, \quad f \mapsto f(\zeta_n).$$

En particulier, la $(n-1)$ -cellule $s_{n-1}\zeta_n$ (resp. $t_{n-1}\zeta_n$) définit le morphisme *cosource* (resp. *cobut*) $D_{n-1} \rightarrow D_n$.

On note S^{n-1} la $(n-1)$ -sphère, $(n-1)$ -tronqué bête de D_n ,

$$S^{-1} = \emptyset, \quad S^0 = \bullet \quad \bullet, \quad S^1 = \bullet \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array} \bullet, \quad S^2 = \bullet \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \Downarrow \\ \Downarrow \\ \curvearrowleft \end{array} \bullet, \quad \dots$$

et $i_n : S^{n-1} \hookrightarrow D_n$ l'inclusion.

2.2. — La notion de ∞ -catégorie libre au sens des polygraphes, ou plus simplement polygraphe, introduite indépendamment par Ross Street [49], [50] (sous le nom de « computad ») et Albert Burroni [17], [18], est l'analogue exact en théorie des ∞ -catégories de la notion de CW-complexe en topologie.

Un *polygraphe* est une ∞ -catégorie X , admettant une filtration notée

$$\emptyset = X_{\leq -1} \hookrightarrow X_{\leq 0} \hookrightarrow X_{\leq 1} \hookrightarrow \dots \hookrightarrow X_{\leq n-1} \hookrightarrow X_{\leq n} \hookrightarrow \dots \hookrightarrow \varinjlim X_{\leq n} = X$$

telle que pour tout $n \geq 0$, il existe un carré cocartésien de ∞ -Cat de la forme

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{I_n} S^{n-1} & \longrightarrow & X_{\leq n-1} \\ \coprod_{I_n} i_n \downarrow & & \downarrow \\ \coprod_{I_n} D_n & \longrightarrow & X_{\leq n} \end{array} .$$

La ∞ -catégorie $X_{\leq n}$ est alors une n -catégorie et s'identifie au n -tronqué bête de X . De plus, la flèche horizontale du bas est déterminée par les images de la cellule principale de D_n par les composantes $D_n \rightarrow X_{\leq n}$ de cette flèche, établissant ainsi une bijection entre l'ensemble I_n des indices et l'ensemble B_n de ces images. On démontre que B_n est l'ensemble des n -cellules indécomposables de X [37, section 5]. Par conséquent, aussi bien la filtration que les carrés cocartésiens ci-dessus sont déterminés par la seule structure de ∞ -catégorie de X . On dit alors que l'ensemble de cellules $B = \coprod_{n \geq 0} B_n$ est la *base* du polygraphe X ou que B engendre librement (au sens des polygraphes) la ∞ -catégorie X .

2.3. — La catégorie $\infty\text{-Cat}$ des ∞ -catégories admet une structure de catégorie de modèles à engendrement cofibrant, connue sous le nom de « structure folk » [35]. Les cofibrations de cette structure sont engendrées par l'ensemble I formé des inclusions canoniques $i_n : S^{n-1} \hookrightarrow D_n$, $n \geq 0$, des sphères dans les disques, et les cofibrations triviales par l'ensemble J des inclusions $j_n : D_n \hookrightarrow J_{n+1}$, $n \geq 0$, définies comme suit. En vertu de l'argument du petit objet, le morphisme $S^n \rightarrow D_n$ envoyant les deux n -cellules non triviales de S^n sur la cellule principale de D_n et induisant un

isomorphisme des $(n - 1)$ -tronqués bêtes, se décompose en une cofibration suivie d'une fibration triviale (flèche ayant la propriété de relèvement à droite relativement aux flèches i_n , $n \geq 0$)

$$S^n \xrightarrow{k_n} J_{n+1} \xrightarrow{r_n} D_n .$$

Le morphisme j_n est le composé de l'inclusion $D_n \rightarrow S^n$, induite par la cosource $D_n \rightarrow D_{n+1}$, suivi de k_n . Les équivalences faibles de cette structure, appelées *équivalences folk*, sont une généralisation ∞ -catégorique naturelle des équivalences de catégories (et de 2-catégories). Si f est une équivalence folk, pour tout $n \geq 0$, le n -tronqué intelligent de f l'est aussi, mais la réciproque est fausse. Les objets cofibrants de cette structure sont les polygraphes [43], et tout objet est fibrant.

3. Homologie polygraphique d'un système local ∞ -catégorique

3.1. — Soit X une ∞ -catégorie. Un *système local faible* sur X est un ∞ -foncteur $M : X^\circ \rightarrow \text{Ab}$, où Ab désigne la catégorie des groupes abéliens vue comme une ∞ -catégorie dont les n -cellules sont des identités pour $n > 1$. Par adjonction, un tel ∞ -foncteur correspond à un foncteur contravariant $c_1(X)^\circ \rightarrow \text{Ab}$ de la catégorie fondamentale (1-tronqué intelligent) de X vers Ab . Il revient donc au même de se donner pour tout objet x de X un groupe abélien M_x et pour toute 1-flèche $x : x_0 \rightarrow x_1$ de X un morphisme de groupes abéliens $x^* := x_M^* := M_x : M_{x_1} \rightarrow M_{x_0}$ satisfaisant aux conditions suivantes. Pour toute 2-flèche $x : x_0 \Rightarrow x_1$ de X , on a $x_0^* = x_1^*$, pour tout couple de 1-flèches composables x_0, x_1 de X , on a $(x_1 *_0 x_0)^* = x_0^* x_1^*$, et pour tout objet x de X , on a $1_x^* = 1_{M_x}$. On dit que le système local faible M est un *système local* si pour toute 1-flèche de X , le morphisme de groupes abéliens x^* est un isomorphisme, autrement dit, si le ∞ -foncteur M se factorise par le groupoïde fondamental $\Pi_1(X)$ de X , groupoïde enveloppant de sa catégorie fondamentale $c_1(X)$.

3.2. — Soient X une ∞ -catégorie et M un système local faible sur X . On définit un complexe de chaînes de groupes abéliens $C(X, M)$ comme suit :

$$C_n(X, M) = \bigoplus_{x \in X_n} M_{t_0 x} / \sim_n, \quad n \geq 0,$$

où \sim_n désigne la plus petite relation d'équivalence compatible à l'addition engendrée par les relations :

$$(*_0) \quad (x_1 *_0 x_0, m) \sim_n (x_1, m) + (x_0, t_1(x_1)^*(m)), \quad m \in M_{t_0(x_1 *_0 x_0) = t_0 x_1},$$

$$(*_i) \quad (x_1 *_i x_0, m) \sim_n (x_1, m) + (x_0, m), \quad 0 < i < n, \quad m \in M_{t_0(x_1 *_i x_0) = t_0 x_1 = t_0 x_0},$$

quand ces composés $x_1 *_i x_0$ ont un sens (en particulier \sim_0 est l'égalité et \sim_1 est engendrée par la seule relation $(*_0)$). La différentielle

$$d_n : C_n(X, M) \rightarrow C_{n-1}(X, M), \quad n > 0,$$

est définie par la formule

$$d_n(x, m) = \begin{cases} (t_0x, m) - (s_0x, x^*m), & n = 1, \\ (t_{n-1}x, m) - (s_{n-1}x, m), & n > 1. \end{cases}$$

Proposition 3.3. — *Les formules ci-dessus définissent bien un complexe de chaînes.*

Démonstration. — Vérifions d'abord la compatibilité de la différentielle d_n , $n > 0$, aux relations $(*_i)$, $0 \leq i < n$. On distingue plusieurs cas :

— $n = 1$, $i = 0$, x_0, x_1 1-cellules 0-composables. On a :

$$\begin{aligned} d_1(x_1 *_0 x_0, m) &= (t_0(x_1 *_0 x_0), m) - (s_0(x_1 *_0 x_0), (x_1 *_0 x_0)^*(m)) \\ &= (t_0x_1, m) - (s_0x_0, x_0^*x_1^*(m)) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} d_1(x_1, m) + d_1(x_0, t_1(x_1)^*(m)) &= \\ &= (t_0x_1, m) - (s_0x_1, x_1^*m) + (t_0x_0, x_1^*m) - (s_0x_0, x_0^*x_1^*(m)) \\ &= (t_0x_1, m) - (s_0x_0, x_0^*x_1^*(m)). \end{aligned}$$

— $n > 1$, $i = 0$, x_0, x_1 n -cellules 0-composables. On a :

$$\begin{aligned} d_n(x_1 *_0 x_0, m) &= (t_{n-1}(x_1 *_0 x_0), m) - (s_{n-1}(x_1 *_0 x_0), m) \\ &= (t_{n-1}x_1 *_0 t_{n-1}x_0, m) - (s_{n-1}x_1 *_0 s_{n-1}x_0, m) \\ &\sim_{n-1} (t_{n-1}x_1, m) + (t_{n-1}x_0, t_1t_{n-1}(x_1)^*(m)) \\ &\quad - (s_{n-1}x_1, m) - (s_{n-1}x_0, t_1s_{n-1}(x_1)^*(m)) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} d_n(x_1, m) + d_n(x_0, t_1(x_1)^*(m)) &= \\ &= (t_{n-1}x_1, m) - (s_{n-1}x_1, m) + (t_{n-1}x_0, t_1(x_1)^*(m)) - (s_{n-1}x_0, t_1(x_1)^*(m)). \end{aligned}$$

Si $n > 2$, on conclut par les relations globulaires, et si $n = 2$ en remarquant que $t_1s_1(x_1)^* = s_1(x_1)^* = t_1(x_1)^*$, puisque la 2-flèche x_1 de X s'envoie sur une identité dans Ab qui est une (1-)catégorie.

— $n > 1$, $0 < i < n - 1$, x_0, x_1 n -cellules i -composables. On a :

$$\begin{aligned} d_n(x_1 *_i x_0, m) &= (t_{n-1}(x_1 *_i x_0), m) - (s_{n-1}(x_1 *_i x_0), m) \\ &= (t_{n-1}x_1 *_i t_{n-1}x_0, m) - (s_{n-1}x_1 *_i s_{n-1}x_0, m) \\ &\sim_{n-1} (t_{n-1}x_1, m) + (t_{n-1}x_0, m) - (s_{n-1}x_1, m) - (s_{n-1}x_0, m) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} d_n(x_1, m) + d_n(x_0, m) &= \\ &= (t_{n-1}x_1, m) - (s_{n-1}x_1, m) + (t_{n-1}x_0, m) - (s_{n-1}x_0, m). \end{aligned}$$

— $n > 1$, $i = n - 1$, x_0, x_1 n -cellules $(n - 1)$ -composables. On a :

$$\begin{aligned} d_n(x_1 *__{n-1} x_0, m) &= (t_{n-1}(x_1 *__{n-1} x_0), m) - (s_{n-1}(x_1 *__{n-1} x_0), m) \\ &= (t_{n-1}x_1, m) - (s_{n-1}x_0, m) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} d_n(x_1, m) + d_n(x_0, m) &= \\ &= (t_{n-1}x_1, m) - (s_{n-1}x_1, m) + (t_{n-1}x_0, m) - (s_{n-1}x_0, m) \\ &= (t_{n-1}x_1, m) - (s_{n-1}x_0, m). \end{aligned}$$

Il reste à prouver que $d_{n-1}d_n = 0$, pour $n \geq 2$;

— $n > 2$. L'égalité est conséquence immédiate des relations globulaires.

— $n = 2$, x 2-cellule de X , $m \in M_{t_0x}$. On a :

$$\begin{aligned} d_1d_2(x, m) &= d_1((t_1x, m) - (s_1x, m)) \\ &= (t_0t_1x, m) - (s_0t_1x, t_1(x)^*(m)) \\ &\quad - (t_0s_1x, m) + (s_0s_1x, s_1(x)^*(m)) = 0, \end{aligned}$$

grâce aux relations globulaires et au fait que $t_1(x)^*(m) = s_1(x)^*(m)$, puisqu'on a une 2-flèche $x : s_1(x) \Rightarrow t_1(x)$. \square

Remarque 3.4. — Pour $n > 0$, la relation $(*_{n-1})$ implique aussitôt que si x est une $(n-1)$ -cellule de X et $m \in M_{t_0x}$, on a $(1_x, m) \sim_n 0$. On en déduit que pour $0 \leq i < n' < n$, la relation $(*_i)$ implique que si x_0, x_1 sont deux cellules i -composables de X et $m \in M_{t_0(x_1 * x_0)}$, et si x_1 est de dimension n et x_0 de dimension n' , on a

$$(x_1 * x_0, m) \sim_n (x_1, m),$$

et inversement, si x_0 est de dimension n et x_1 de dimension n' , on a

$$(x_1 * x_0, m) \sim_n \begin{cases} (x_0, t_1(x_1)^*(m)), & i = 0, \\ (x_0, m), & i > 0. \end{cases}$$

3.5. — Soient $f : X' \rightarrow X$ un ∞ -foncteur strict et $M : X^\circ \rightarrow \text{Ab}$ un système local faible sur X . Le composé

$$X'^\circ \xrightarrow{f^\circ} X^\circ \xrightarrow{M} \text{Ab}$$

définit un système local faible sur X' noté $f^*(M)$. Pour toute 1-flèche x' de X' et tout $m \in f^*(M)_{t_0x'} = M_{f(t_0x')} = M_{t_0(fx')}$, on a alors

$$x'^*(m) = f^*(M)_{x'}(m) = M_{f(x')}(m) = f(x')^*(m)$$

(où « l'étoile en haut » du membre de gauche est relative au système local faible $f^*(M)$ sur X' , tandis que celle du membre de droite est relative au système local faible M sur X).

Pour $n \geq 0$, le ∞ -foncteur f induit, en posant $M' = f^*(M)$, un morphisme de groupes abéliens

$$\bigoplus_{x' \in X'_n} M'_{t_0x'} \rightarrow \bigoplus_{x \in X_n} M_{t_0x}, \quad (x', m) \mapsto (f(x'), m), \quad x' \in X'_n, \quad m \in M'_{t_0x'} = M_{t_0(fx')}$$

qui est compatible aux relations $(*_i)$, $0 \leq i \leq n$, et aux différentielles, et définit donc un morphisme de complexes $C(f, M) : C(X', f^*(M)) \rightarrow C(X, M)$. De plus, pour tout ∞ -foncteur $f' : X'' \rightarrow X'$, on vérifie aussitôt qu'on a l'égalité

$$C(f f', M) = C(f, M) \circ C(f', f^*(M)),$$

et que si $X' = X$ et $f = 1_X$, alors $C(1_X, M) = 1_{C(X, M)}$.

3.6. — Soient X une ∞ -catégorie, et M et M' deux systèmes locaux faibles sur X . Un *morphisme de systèmes locaux faibles sur X* de M' vers M est une transformation naturelle du foncteur M' vers le foncteur M . Concrètement, la donnée d'une telle transformation φ revient à la donnée, pour tout objet x de X , d'un morphisme de groupes abéliens $\varphi_x : M'_x \rightarrow M_x$ tel que pour toute 1-flèche $x : x_0 \rightarrow x_1$, le carré

$$\begin{array}{ccc} M'_{x_1} & \xrightarrow{\varphi_{x_1}} & M_{x_1} \\ x^* = M'_x \downarrow & & \downarrow x^* = M_x \\ M'_{x_0} & \xrightarrow{\varphi_{x_0}} & M_{x_0} \end{array}$$

soit commutatif. Le morphisme φ induit, pour $n \geq 0$, un morphisme de groupes abéliens

$$\bigoplus_{x \in X_n} M'_{t_0 x} \rightarrow \bigoplus_{x \in X_n} M_{t_0 x}, \quad (x, m) \mapsto (x, \varphi_{t_0 x}(m)), \quad x \in X_n, \quad m \in M'_{t_0 x},$$

dont la compatibilité aux relations $(*_i)$ est tautologique pour $0 < i \leq n$, et résulte facilement de la commutativité du carré ci-dessus pour $i = 0$. De même, sa compatibilité aux différentielles d_i est évidente pour $i > 1$, et résulte aussitôt de la commutativité dudit carré pour $i = 1$. Il définit donc un morphisme de complexes $C(X, \varphi) : C(X, M') \rightarrow C(X, M)$. De plus, si $\varphi' : M'' \rightarrow M'$ est un morphisme de systèmes locaux faibles sur X , on a

$$C(X, \varphi \varphi') = C(X, \varphi) \circ C(X, \varphi'),$$

et si $M' = M$ et $\varphi = 1_M$, alors $C(X, 1_M) = 1_{C(X, M)}$.

3.7. — Les functorialités des deux paragraphes précédents satisfont à la compatibilité suivante dont la vérification est immédiate. Soient X une ∞ -catégorie, $\varphi : M' \rightarrow M$ un morphisme de systèmes locaux faibles sur X , et $f : X' \rightarrow X$ un ∞ -foncteur. Alors la transformation naturelle $f^*(\varphi) := \varphi * f^\circ$ définit un morphisme de systèmes locaux faibles $f^*(\varphi) : f^*(M') \rightarrow f^*(M)$ sur X' , et le carré

$$\begin{array}{ccc} C(X', f^*(M')) & \xrightarrow{C(X', f^*(\varphi))} & C(X', f^*(M)) \\ C(f, M') \downarrow & & \downarrow C(f, M) \\ C(X, M') & \xrightarrow{C(X, \varphi)} & C(X, M) \end{array}$$

est commutatif.

3.8. — On peut combiner les functorialités des paragraphes 3.5 et 3.6 comme suit. La *catégorie des systèmes locaux faibles dans ∞ -Cat* est la catégorie ayant comme objets les couples (X, M) , où X est une ∞ -catégorie et M un système local faible sur X , un morphisme $(X', M') \rightarrow (X, M)$ étant un couple (f, φ) , où $f : X' \rightarrow X$ est un ∞ -foncteur et $\varphi : M' \rightarrow f^*(M)$ une transformation naturelle, la composition de deux morphismes composables étant définie par la formule $(f, \varphi) \circ (f', \varphi') = (ff', f'^*(\varphi)\varphi')$.

Si $(f, \varphi) : (X', M') \rightarrow (X, M)$ est un morphisme de systèmes locaux faibles dans ∞ -Cat, le composé

$$C(X', M') \xrightarrow{C(X', \varphi)} C(X', f^*(M)) \xrightarrow{C(f, M)} C(X, M)$$

définit un morphisme de complexes de groupes abéliens

$$C(f, \varphi) : C(X', M') \rightarrow C(X, M).$$

Explicitement, ce morphisme est induit par les morphismes de groupes abéliens

$$\bigoplus_{x' \in X'_n} M'_{t_0 x'} \rightarrow \bigoplus_{x \in X_n} M_{t_0 x}, \quad (x', m') \mapsto (f(x'), \varphi_{t_0 x'}(m')), \quad x' \in X'_n, m' \in M'_{t_0 x'}, n \geq 0.$$

On laisse au lecteur le soin de vérifier que, grâce à la compatibilité du paragraphe précédent, on obtient ainsi un foncteur de la catégorie des systèmes locaux faibles dans ∞ -Cat vers celle des complexes de groupes abéliens. Si $X' = X$ et $f = 1_X$, on a $C(1_X, \varphi) = C(X, \varphi)$ (cf. paragraphe 3.6), et si $M' = f^*(M)$ et $\varphi = 1_{f^*(M)}$, on a $C(f, 1_{f^*(M)}) = C(f, M)$ (cf. paragraphe 3.5).

3.9. — On rappelle qu'étant donnés deux ∞ -foncteurs $f_0, f_1 : X' \rightarrow X$ une *transformation oplax*, ou plus simplement *transformation*, de f_0 vers f_1 est un ∞ -foncteur $\alpha : D_1 \otimes X' \rightarrow X$ tel que $f_k = \alpha \partial_{X'}^k$, $k = 0, 1$, où \otimes désigne le produit de Gray ∞ -catégorique [1], [22], [13, appendice A], D_1 la catégorie $\{0 \rightarrow 1\}$, et $\partial_{X'}^k$ le ∞ -foncteur

$$X' \simeq D_0 \otimes X' \xrightarrow{k \otimes X'} D_1 \otimes X'$$

(D_0 la catégorie ponctuelle et $k : D_0 \rightarrow D_1$ le foncteur défini par l'objet k de D_1). Il revient au même (voir par exemple [13, appendice B]) de se donner, pour tout $n \geq 0$ et toute n -cellule x de X' , une $(n+1)$ -cellule α_x de X satisfaisant aux conditions suivantes :

0) COMPATIBILITÉ AUX SOURCES ET AUX BUTS. Pour tout $n \geq 0$, toute n -cellule x de X' et tout i , $0 \leq i \leq n$, on a

$$s_i \alpha_x = \alpha_{t_{i-1} x} *_{i-1} \cdots *_{1} \alpha_{t_0 x} *_{0} f_0(s_i x),$$

$$t_i \alpha_x = f_1(t_i x) *_{0} \alpha_{s_0 x} *_{1} \cdots *_{i-1} \alpha_{s_{i-1} x}.$$

En particulier, pour $i = 0$, $s_0 \alpha_x = f_0(s_0 x)$ et $t_0 \alpha_x = f_1(t_0 x)$, et si $n = 0$, c'est-à-dire si x est un objet de X' , alors α_x est une 1-flèche de X de source $f_0(x)$ et but $f_1(x)$.

Pour $i = 1$ et $n \geq 1$, on a $s_1 \alpha_x = \alpha_{t_0 x} *_0 f_0(s_1 x)$ et $t_1 \alpha_x = f_1(t_1 x) *_0 \alpha_{s_0 x}$, et si $n = 1$, c'est-à-dire si $x : x_0 \rightarrow x_1$ est une 1-flèche de X' , alors α_x est une 2-flèche de X de source $\alpha_{x_1} *_0 f_0(x)$ et but $f_1(x) *_0 \alpha_{x_0}$.

1) COMPATIBILITÉ AUX UNITÉS. Pour tout $n \geq 0$ et toute n -cellule x de X' , on a $\alpha_{1_x} = 1_{\alpha_x}$.

2) COMPATIBILITÉ AUX COMPOSITIONS. Pour tout $n \geq 0$, tout i , $0 \leq i < n$, et tout couple de n -cellules i -composables x_0, x_1 de X' , on a

$\alpha_{x_1 *_i x_0} = f_1(t_{i+1} x_1) *_0 \alpha_{s_0} *_1 \cdots *_i \alpha_{s_{i-1}} *_i \alpha_{x_0} *_i \alpha_{x_1} *_i \alpha_{t_{i-1}} *_i \cdots *_1 \alpha_{t_0} *_0 f_0(s_{i+1} x_0)$,
où pour tout k , $0 \leq k < i$, on note

$$s_k = s_k x_0 = s_k x_1 \quad \text{et} \quad t_k = t_k x_0 = t_k x_1.$$

En particulier, pour $i = 0$, on a

$$\alpha_{x_1 *_0 x_0} = (f_1(t_1 x_1) *_0 \alpha_{x_0}) *_1 (\alpha_{x_1} *_0 f_0(s_1 x_0)).$$

Si g est un ∞ -foncteur de source X , le composé du ∞ -foncteur $\alpha : X' \otimes D_1 \rightarrow X$ avec g définit une transformation, notée $g * \alpha$, de $g f_0$ vers $g f_1$. De même, si h est un ∞ -foncteur de but X' , le composé $\alpha(h \otimes 1_{D_1})$ définit une transformation, notée $\alpha * h$ de $f_0 h$ vers $f_1 h$.

Lemme 3.10. — Soient P un polygraphe, $q : X' \rightarrow X$ une fibration triviale pour la structure folk sur ∞ -Cat (cf. paragraphe 2.3), $f'_0, f'_1 : P \rightarrow X'$ deux ∞ -foncteurs, et α une transformation oplax de f'_0 vers f'_1 . Alors il existe une transformation oplax α' de f'_0 vers f'_1 telle que $\alpha = q * \alpha'$.

Démonstration. — Considérons le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} P \amalg P & \xrightarrow{(f'_0, f'_1)} & X' \\ \downarrow & & \downarrow q \\ P \otimes D_1 & \xrightarrow{\alpha} & X \end{array},$$

où la flèche verticale de gauche est l'inclusion canonique, qui s'identifie au produit de Gray de l'inclusion $S^0 = D_0 \amalg D_0 \hookrightarrow D_1$ par l'objet cofibrant P , et est donc, en vertu du théorème 5.6 de [8], une cofibration de la structure folk. Comme q est une fibration triviale pour cette structure, ce carré admet un relèvement $\alpha' : P \otimes D_1 \rightarrow X'$, qui est une transformation oplax de f'_0 vers f'_1 telle que $\alpha = q * \alpha'$. (Pour plus de détails voir [28, Lemma 6.5].) \square

3.11. — Soient $f_0, f_1 : X' \rightarrow X$ deux ∞ -foncteurs, $\alpha : f_0 \Rightarrow f_1$ une transformation oplax de f_0 vers f_1 , et M un système local faible sur X . Le composé $\varphi := M * \alpha$ définit un morphisme de systèmes locaux faibles sur X' (cf. paragraphe 3.6)

$$\varphi : f_1^*(M) \rightarrow f_0^*(M).$$

En effet, en vertu des formules de compatibilité de α aux sources et buts, pour tout objet x' de X' , $\alpha_{x'}$ est une 1-flèche de X de source $f_0(x')$ et but $f_1(x')$, d'où un morphisme de groupes abéliens $\varphi_{x'} := \alpha_{x'}^* := M_{\alpha_{x'}} : M_{f_1(x')} \rightarrow M_{f_0(x')}$. De même, pour toute 1-flèche $x' : x'_0 \rightarrow x'_1$ de X' , $\alpha_{x'}$ est une 2-flèche de X de source $\alpha_{x'_1} *_0 f_0(x')$ et but $f_1(x') *_0 \alpha_{x'_0}$. L'existence de cette 2-flèche implique que $M_{\alpha_{x'_1} *_0 f_0(x')} = M_{f_1(x') *_0 \alpha_{x'_0}}$, d'où en vertu de la functorialité contravariante de M , la commutativité du carré

$$\begin{array}{ccc} f_1^*(M)_{x'_1} & \xrightarrow{\varphi_{x'_1} = M_{\alpha_{x'_1}}} & f_0^*(M)_{x'_1} \\ \downarrow x'^* = f_1^*(M)_{x'} = M_{f_1(x')} & & \downarrow x'^* = f_0^*(M)_{x'} = M_{f_0(x')} \\ f_1^*(M)_{x'_0} & \xrightarrow{\varphi_{x'_0} = M_{\alpha_{x'_0}}} & f_0^*(M)_{x'_0} \end{array} .$$

On en déduit un morphisme de systèmes locaux faibles dans $\infty\text{-Cat}$

$$(f_0, \varphi) : (X', f_1^*(M)) \rightarrow (X, M),$$

d'où (cf. paragraphe 3.8) un morphisme de complexes

$$C(f_0, \varphi) : C(X', f_1^*(M)) \rightarrow C(X, M)$$

composé des morphismes

$$C(X', f_1^*(M)) \xrightarrow{C(X', \varphi)} C(X', f_0^*(M)) \xrightarrow{C(f_0, M)} C(X, M).$$

Par ailleurs, on a aussi un morphisme de complexes de même source et même but

$$C(f_1, M) : C(X', f_1^*(M)) \rightarrow C(X, M).$$

Lemme 3.12. — *En gardant les hypothèses et notations ci-dessus, on a une homotopie de morphismes de complexes h de $C(f_0, \varphi)$ vers $C(f_1, M)$, définie par*

$$C_n(X', f_1^*(M)) \rightarrow C_{n+1}(X, M), \quad (x', m) \mapsto (\alpha_{x'}, m), \quad n \geq 0.$$

Démonstration. — Posons $M' = f_1^*(M)$. On remarque d'abord que pour tout $n \geq 0$, tout $x' \in X'_n$, et tout $m \in M'_{t_0 x'}$, comme en vertu des formules de compatibilité d'une transformation aux buts $t_0 \alpha_{x'} = f_1(t_0 x')$ et comme par définition $M'_{t_0 x'} = M_{f_1(t_0 x')}$, on a $m \in M_{t_0 \alpha_{x'}}$, et l'application $(x', m) \mapsto (\alpha_{x'}, m)$ définit donc un morphisme de groupes abéliens

$$\bigoplus_{x' \in X'_n} M'_{t_0 x'} \longrightarrow \bigoplus_{x \in X_{n+1}} M_{t_0 x} .$$

Montrons que ce morphisme est compatible aux relations $(*_i)$ du paragraphe 3.2. Soient donc $0 \leq i < n$ et x'_0, x'_1 deux n -cellules i -composables de X' . On distingue deux cas :

— $i = 0$. En vertu de la formule de compatibilité d'une transformation à la 0-composition, la relation $(*_1)$, et la remarque 3.4, on a

$$\begin{aligned}
h_n(x'_1 *_0 x'_0, m) &= (\alpha_{x'_1 *_0 x'_0}, m) \\
&= ((f_1(t_1 x'_1) *_0 \alpha_{x'_0}) *_1 (\alpha_{x'_1} *_0 f_0(s_1 x'_0)), m) \\
&\sim_{n+1} (f_1(t_1 x'_1) *_0 \alpha_{x'_0}, m) + (\alpha_{x'_1} *_0 f_0(s_1 x'_0), m) \\
&\sim_{n+1} (\alpha_{x'_0}, f_1(t_1 x'_1)^*(m)) + (\alpha_{x'_1}, m) \\
&= (\alpha_{x'_1}, m) + (\alpha_{x'_0}, t_1(x'_1)^*(m)) \\
&= h_n((x'_1, m) + (x'_0, t_1(x'_1)^*(m)))
\end{aligned}$$

(en se souvenant, pour l'avant dernière égalité, que $f_1(t_1 x'_1)^*(m) = t_1(x'_1)^*(m)$, où « l'étoile en haut » du membre de gauche est relative au système local faible M sur X , tandis que celle du membre de droite est relative au système local faible M' sur X').

— $i > 0$. En vertu de la formule de compatibilité d'une transformation à la i -composition, la relation $(*_{i+1})$, et la remarque 3.4, on a

$$\begin{aligned}
h_n(x'_1 *_i x'_0, m) &= (\alpha_{x'_1 *_i x'_0}, m) \\
&\sim_{n+1} (f_1(t_{i+1} x'_1) *_0 \alpha_{s_0 x'_0} *_1 \cdots *_i \alpha_{s_{i-1} x'_0} *_i \alpha_{x'_0}, m) \\
&\quad + (\alpha_{x'_1} *_i \alpha_{t_{i-1} x'_1} *_i \cdots *_1 \alpha_{t_0 x'_1} *_0 f_0(s_{i+1} x'_0), m) \\
&\sim_{n+1} (\alpha_{x'_0}, m) + (\alpha_{x'_1}, m) = h_n((x'_1, m) + (x'_0, m)).
\end{aligned}$$

Il reste à montrer que, pour $n \geq 0$, on a

$$d_{n+1} h_n + h_{n-1} d_n = C_n(f_1, M) - C_n(f_0, \varphi)$$

(avec la convention $d_0 = 0$ et $h_{-1} = 0$). On distingue trois cas :

— $n = 0$, x' objet de X' , $m \in M'_{x'} = M_{f_1 x'}$. On a

$$\begin{aligned}
d_1 h_0(x', m) &= d_1(\alpha_{x'}, m) = (t_0 \alpha_{x'}, m) - (s_0 \alpha_{x'}, \alpha_{x'}^*(m)) \\
&= (f_1(x'), m) - (f_0(x'), \varphi_{x'}(m)) = (C_0(f_1, M) - C_0(f_0, \varphi))(x', m).
\end{aligned}$$

— $n = 1$, x' 1-flèche de X' , $m \in M'_{t_0x'}$. En vertu de la formule de compatibilité d'une transformation aux sources et buts et de la relation $*_0$, on a

$$\begin{aligned}
(d_2h_1 + h_0d_1)(x', m) &= d_2(\alpha_{x'}, m) + h_0((t_0x', m) - (s_0x', x'^*(m))) \\
&= (t_1\alpha_{x'}, m) - (s_1\alpha_{x'}, m) + (\alpha_{t_0x'}, m) - (\alpha_{s_0x'}, x'^*(m)) \\
&= (f_1(x') *_0 \alpha_{s_0x'}, m) - (\alpha_{t_0x'} *_0 f_0(x'), m) \\
&\quad + (\alpha_{t_0x'}, m) - (\alpha_{s_0x'}, x'^*(m)) \\
&\sim_1 (f_1(x'), m) + (\alpha_{s_0x'}, f_1(x')^*(m)) \\
&\quad - (\alpha_{t_0x'}, m) - (f_0(x'), \alpha_{t_0x'}^*(m)) \\
&\quad + (\alpha_{t_0x'}, m) - (\alpha_{s_0x'}, x'^*(m)) \\
&= (f_1(x'), m) - (f_0(x'), \varphi_{t_0x'}(m)) \\
&= (C_1(f_1, M) - C_1(f_0, \varphi))(x', m).
\end{aligned}$$

— $n > 1$, x' n -flèche de X' , $m \in M'_{t_0x'}$. En vertu de la formule de compatibilité d'une transformation aux sources et buts, de la relation $*_{n-1}$, et de la remarque 3.4, on a

$$\begin{aligned}
(d_{n+1}h_n + h_{n-1}d_n)(x', m) &= d_{n+1}(\alpha_{x'}, m) + h_{n-1}((t_{n-1}x', m) - (s_{n-1}x', m)) \\
&= (t_n\alpha_{x'}, m) - (s_n\alpha_{x'}, m) + (\alpha_{t_{n-1}x'}, m) - (\alpha_{s_{n-1}x'}, m) \\
&= (f_1(x') *_0 \alpha_{s_0x'} *_1 \cdots *_n \alpha_{s_{n-1}x'}, m) \\
&\quad - (\alpha_{t_{n-1}x'} *_n \cdots *_1 \alpha_{t_0x'} *_0 f_0(x'), m) \\
&\quad + (\alpha_{t_{n-1}x'}, m) - (\alpha_{s_{n-1}x'}, m) \\
&\sim_n (f_1(x'), m) + (\alpha_{s_{n-1}x'}, m) \\
&\quad - (\alpha_{t_{n-1}x'}, m) - (f_0(x'), \alpha_{t_0x'}^*(m)) \\
&\quad + (\alpha_{t_{n-1}x'}, m) - (\alpha_{s_{n-1}x'}, m) \\
&= (f_1(x'), m) - (f_0(x'), \varphi_{t_0x'}(m)) \\
&= (C_n(f_1, M) - C_n(f_0, \varphi))(x', m),
\end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration du lemme. \square

Proposition 3.13. — Soient $f_0, f_1 : X' \rightarrow X$ deux ∞ -foncteurs, $\alpha : f_0 \Rightarrow f_1$ une transformation oplax de f_0 vers f_1 , et M un système local faible sur X . On suppose que pour tout objet x' de X' , le morphisme de groupes abéliens $\alpha_{x'}^* := M_{\alpha_{x'}} : M_{f_1(x')} \rightarrow M_{f_0(x')}$ est un isomorphisme. Alors le morphisme de complexes $C(f_0, M) : C(X', f_0^*(M)) \rightarrow C(X, M)$ est un quasi-isomorphisme si et seulement si le morphisme $C(f_1, M) : C(X', f_1^*(M)) \rightarrow C(X, M)$ l'est.

Démonstration. — En vertu du lemme 3.12 et dans les notations du paragraphe 3.11, il existe une homotopie entre les morphismes de complexes $C(f_1, M)$ et $C(f_0, \varphi) = C(f_0, M) \circ C(X', \varphi)$. On en déduit que $C(f_1, M)$ est un quasi-isomorphisme

si et seulement si $C(f_0, \varphi)$ l'est. Or, l'hypothèse de la proposition implique aussitôt que $C(X', \varphi)$ est un isomorphisme, ce qui achève la démonstration. \square

Corollaire 3.14. — Soient $j : X' \rightarrow X$ un ∞ -foncteur et M un système local faible sur X . On suppose que j admet une rétraction r et qu'il existe une transformation oplax α de jr vers 1_X telle que pour tout objet x de X , $\alpha_x^* := M_{\alpha_x} : M_{jr(x)} \rightarrow M_x$ soit un isomorphisme. Alors le morphisme de complexes $C(j, M) : C(X', j^*(M)) \rightarrow C(X, M)$ est un quasi-isomorphisme.

Démonstration. — En vertu de la proposition 3.13, l'hypothèse du corollaire implique que le morphisme de complexes $C(jr, M) = C(j, M) \circ C(r, j^*(M))$ est un quasi-isomorphisme. Or, comme r est une rétraction de j , on a l'égalité $1_{C(X', j^*(M))} = C(r, j^*(M)) \circ C(j, r^*j^*(M))$. On en déduit que $C(r, j^*(M))$ est un quasi-isomorphisme, donc $C(j, M)$ aussi. \square

Remarque 3.15. — L'hypothèse sur la transformation α dans la proposition 3.13 et dans le corollaire 3.14 est satisfaite par exemple si M est un système local, et pas seulement un système local faible, ou si pour tout objet x' de X' l'image de $\alpha_{x'}$ dans la catégorie fondamentale de X (1-tronqué intelligent de X) est un isomorphisme.

Théorème 3.16. — Soient X une ∞ -catégorie et M un système local faible. Le foncteur $F = F_{X, M} : \infty\text{-Cat}/X \rightarrow \text{Comp}(\text{Ab})$ de la catégorie des ∞ -catégories au-dessus de X vers celle des complexes de groupes abéliens, associant à $(X', p : X' \rightarrow X)$ le complexe $C(X', p^*(M))$ est un foncteur de Quillen à gauche pour la structure de catégories de modèles sur $\infty\text{-Cat}/X$ induite de la structure folk sur $\infty\text{-Cat}$ et la structure injective sur $\text{Comp}(\text{Ab})$ (ayant les quasi-isomorphismes comme équivalences faibles et les monomorphismes comme cofibrations).

Ce théorème résulte des trois lemmes suivants.

Lemme 3.17. — Soient X une ∞ -catégorie et M un système local faible. Le foncteur

$$F = F_{X, M} : \infty\text{-Cat}/X \rightarrow \text{Comp}(\text{Ab}), \quad (X', p : X' \rightarrow X) \mapsto C(X', p^*(M)),$$

admet un adjoint à droite.

Démonstration. — Voir appendice A. \square

Lemme 3.18. — En gardant les hypothèses et les notations du lemme précédent, le foncteur F respecte les cofibrations.

Démonstration. — Comme, en vertu du lemme 3.17, le foncteur F admet un adjoint à droite, il commute aux limites inductives et par suite il suffit de montrer qu'il transforme les cofibrations génératrices en cofibrations. On rappelle que les cofibrations génératrices de la structure folk sur $\infty\text{-Cat}$ sont les inclusions $S^{n-1} \hookrightarrow D_n$, $n \geq 0$, où

D_n est la n -catégorie ayant une seule cellule non triviale x en dimension n et exactement deux cellules non triviales en dimension $0 \leq i < n$, à savoir $s_i x$ et $t_i x$, et S^{n-1} la sous- n -catégorie de D_n , ayant les mêmes cellules que D_n en dimension $< n$, et pas de cellule non triviale en dimension n [35]. On en déduit que les cofibrations génératrices de la structure induite sur $\infty\text{-Cat}/X$ sont les inclusions $S^{n-1} \hookrightarrow D_n$ au-dessus de X , indexées par $n \geq 0$ et $p : D_n \rightarrow X$, ∞ -foncteur arbitraire. Comme il n'y a aucune composition non triviale dans D_n et S^{n-1} , il résulte de la remarque 3.4 que l'image par le foncteur F d'une telle inclusion s'identifie à l'inclusion des complexes $N' \hookrightarrow N$, où, en posant $M' = p^*(M)$, le complexe N est défini par

$$N_0 = M'_{t_0 x} \oplus M'_{s_0 x}, \quad N_i = M'_{t_0 x} \oplus M'_{t_0 x}, \quad 0 < i < n, \quad N_n = M'_{t_0 x}, \quad N_i = 0, \quad i > n,$$

$$d_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -t_1(x)^* & -t_1(x)^* \end{pmatrix}, \quad d_i = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad 1 < i < n, \quad d_n = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

(avec les adaptations évidentes de ces formules pour $n = 0, 1$) et N' est le sous-complexe de N tel que $N'_n = 0$ et $N'_i = N_i$, pour $0 \leq i < n$, ce qui achève la démonstration. \square

Lemme 3.19. — *En gardant les notations et les hypothèses des lemmes précédents, le foncteur F respecte les cofibrations triviales.*

Démonstration. — Comme en vertu des lemmes 3.17 et 3.18 le foncteur F commute aux limites inductives et respecte les cofibrations, il suffit de montrer qu'il transforme les cofibrations triviales génératrices en équivalences faibles.

On rappelle que les cofibrations triviales génératrices de la structure folk sur $\infty\text{-Cat}$ sont des inclusions de la forme $j_n : D_n \rightarrow J_{n+1}$, $n \geq 0$, admettant une rétraction r_n qui est aussi une fibration triviale [35]. De plus, on peut choisir le polygraphe J_{n+1} de sorte que son $(n+2)$ -tronqué bête soit le $(n+2)$ -polygraphe obtenu de D_{n+1} en adjoignant une $(n+1)$ -flèche v dans le sens opposé de celui de sa cellule principale $u : x \rightarrow y$ et deux $(n+2)$ -flèches $\varepsilon : v *_n u \rightarrow 1_x$ et $\eta : 1_y \rightarrow u *_n v$ [6, Remark 20.4.4]. Le morphisme j_n est alors induit par la cosource $\sigma : D_n \rightarrow D_{n+1}$. On en déduit que pour $n = 0$, la catégorie fondamentale $c_1(J_1)$ de J_1 est un groupoïde trivial, et que pour $n > 1$, les objets de J_{n+1} n'ont pas de 1-endomorphismes non triviaux et que $j_n r_n$ induit l'identité sur les objets.

La famille des inclusions $j_n : D_n \rightarrow J_{n+1}$ au-dessus de X , indexée par $n \geq 0$ et $p : J_{n+1} \rightarrow X$, ∞ -foncteur arbitraire, engendre les cofibrations triviales de $\infty\text{-Cat}/X$. Il s'agit de montrer que $C(j_n, p^*(M))$ est un quasi-isomorphisme. Or, comme J_{n+1} est un polygraphe et la rétraction r_n de j_n une fibration triviale, en vertu du lemme 3.10, la transformation oplax identique de r_n se relève (en remarquant que $r_n j_n r_n = r_n$) en une transformation oplax α de $j_n r_n$ vers $1_{J_{n+1}}$. Pour conclure, il suffit de vérifier que α satisfait aux hypothèses du corollaire 3.14 (relativement à $p^*(M)$). Si $n > 0$, comme $j_n r_n$ induit l'identité sur les objets et comme les objets de J_{n+1} n'admettent pas de

1-endomorphismes non triviaux, pour tout objet x de J_{n+1} on a $\alpha_x = 1_x$, et à plus forte raison l'hypothèse du corollaire est satisfaite. Cette hypothèse est également satisfaite pour $n = 0$, puisque la catégorie fondamentale de J_1 est un groupoïde (cf. remarque 3.15). \square

Corollaire 3.20. — Soient X une ∞ -catégorie et M un système local faible. Le foncteur $F = F_{X,M} : \infty\text{-Cat}/X \rightarrow \text{Comp}(\text{Ab})$ de la catégorie des ∞ -catégories au-dessus de X , munie des équivalences faibles induites de celles de la structure folk, vers celle des complexes de groupes abéliens, munie des quasi-isomorphismes, associant à $(X', p : X' \rightarrow X)$ le complexe $C(X', p^*(M))$ admet un foncteur dérivé total à gauche

$$LF = LF_{X,M} : \text{Ho}(\infty\text{-Cat}/X) \longrightarrow \text{Ho}(\text{Comp}(\text{Ab})) = \text{Der}(\text{Ab})$$

de la catégorie homotopique de $\infty\text{-Cat}/X$ vers la catégorie dérivée des groupes abéliens.

Démonstration. — Le corollaire est conséquence directe du théorème 3.16 et du théorème d'existence des foncteurs dérivés (voir par exemple [31, Theorem 8.5.8]). \square

3.21. — Soient X une ∞ -catégorie et $M : X^\circ \rightarrow \text{Ab}$ un système local faible sur X . On définit l'homologie polygraphique $H_n^{\text{pol}}(X, M)$ de X à coefficients dans le système local faible M comme suit. On choisit une résolution polygraphique $p : P \rightarrow X$ de X , autrement dit, une fibration triviale de source un objet cofibrant pour la structure de catégorie de modèles folk sur la catégorie des ∞ -catégories strictes, et pour tout $n \geq 0$, on pose $H_n^{\text{pol}}(X, M) = H_n(C(P, p^*(M)))$. On rappelle que les objets cofibrants pour cette structure sont les polygraphes, d'où le nom d'homologie polygraphique. On remarque que si M est le foncteur constant de valeur le groupe \mathbb{Z} , on retrouve la définition de l'homologie polygraphique d'une ∞ -catégorie introduite par François Métayer dans [42]. De même, on définit l'homologie polygraphique totale de X à coefficients dans le système local faible M comme étant l'objet $H_\bullet^{\text{pol}}(X, M)$ de la catégorie dérivée des groupes abéliens représenté par le complexe $C(P, p^*(M))$.

En vertu du corollaire 3.20 et de la construction du foncteur dérivé total à gauche d'un foncteur de Quillen à gauche [31, §8.5], [32, §1.3], l'homologie polygraphique $H_n^{\text{pol}}(X, M)$ et l'homologie polygraphique totale définies ci-dessus sont indépendantes, à isomorphisme canonique près, du choix de la résolution polygraphique $p : P \rightarrow M$. Plus précisément, en gardant les notations dudit corollaire, on a un isomorphisme canonique dans la catégorie dérivée des groupes abéliens $H_\bullet^{\text{pol}}(X, M) \simeq LF_{X,M}(X, 1_X)$, et en particulier pour $n \geq 0$, un isomorphisme canonique de groupes abéliens $H_n^{\text{pol}}(X, M) \simeq H_n(H_\bullet^{\text{pol}}(X, M))$, où $H_n : \text{Der}(\text{Ab}) \rightarrow \text{Ab}$ désigne le foncteur homologie de degré n . On remarque que $H_n(H_\bullet^{\text{pol}}(X, M)) = 0$, pour $n < 0$.

On va maintenant s'intéresser à la functorialité de l'homologie polygraphique $H_{\bullet}^{\text{pol}}(X, M)$ en X et en M .

3.22. — Soient $f : X' \rightarrow X$ un ∞ -foncteur et $U = U_f$ le foncteur « d'oubli par f »

$$U : \infty\text{-Cat}/X' \rightarrow \infty\text{-Cat}/X, \quad (T, p : T \rightarrow X') \mapsto (T, fp : T \rightarrow X)$$

entre les catégories $\infty\text{-Cat}/X'$ et $\infty\text{-Cat}/X$ munies chacune de la structure de catégorie de modèles induite par la structure folk sur $\infty\text{-Cat}$. En vertu de la définition des structures induites, ce foncteur respecte les équivalences faibles et les cofibrations et en particulier (comme il admet un adjoint à droite) c'est un foncteur de Quillen à gauche. Il admet donc un foncteur dérivé total à gauche $LU : \text{Ho}(\infty\text{-Cat}/X') \rightarrow \text{Ho}(\infty\text{-Cat}/X)$ qui coïncide avec le foncteur \bar{U} obtenu de U par la propriété universelle de la localisation.

Soit maintenant un système local faible M sur X , et considérons le triangle commutatif de foncteurs de Quillen à gauche

$$\begin{array}{ccc} \infty\text{-Cat}/X' & \xrightarrow{U} & \infty\text{-Cat}/X \\ & \searrow F_{X', f^*(M)} & \swarrow F_{X, M} \\ & \text{Comp}(\text{Ab}) & . \end{array}$$

En vertu du théorème de Quillen de composition des foncteurs dérivés (voir par exemple [32, Theorem 1.3.7]), on a un isomorphisme canonique de foncteurs

$$LF_{X', f^*(M)} \simeq LF_{X, M} \circ LU = LF_{X, M} \circ \bar{U},$$

et en particulier des isomorphismes canoniques dans la catégorie dérivée des groupes abéliens

$$H_{\bullet}^{\text{pol}}(X', f^*(M)) \simeq LF_{X', f^*(M)}(X', 1_{X'}) \simeq LF_{X, M} \circ LU(X', 1_{X'}) = LF_{X, M}(X', f).$$

En composant avec le morphisme

$$LF_{X, M}(X', f) \rightarrow LF_{X, M}(X, 1_X) \simeq H_{\bullet}^{\text{pol}}(X, M)$$

image par le foncteur $LF_{X, M}$ du morphisme $f : (X', f) \rightarrow (X, 1_X)$ de $\infty\text{-Cat}/X$, on obtient un morphisme

$$H_{\bullet}^{\text{pol}}(f, M) : H_{\bullet}^{\text{pol}}(X', f^*(M)) \rightarrow H_{\bullet}^{\text{pol}}(X, M)$$

dans $\text{Der}(\text{Ab})$, et en particulier pour tout $n \geq 0$, un morphisme de groupes abéliens

$$H_n^{\text{pol}}(f, M) : H_n^{\text{pol}}(X', f^*(M)) \rightarrow H_n^{\text{pol}}(X, M).$$

On remarque que $H_{\bullet}^{\text{pol}}(1_X, M) = 1_{H_{\bullet}^{\text{pol}}(X, M)}$, et on laisse le soin au lecteur de vérifier que si $f' : X'' \rightarrow X'$ est un ∞ -foncteur composable avec f , alors on a

$$H_{\bullet}^{\text{pol}}(f f', M) = H_{\bullet}^{\text{pol}}(f, M) \circ H_{\bullet}^{\text{pol}}(f', f^*(M)).$$

Remarque 3.23. — Ce qu'il faut retenir est que, dans les notations du paragraphe précédent, on a un isomorphisme canonique $H_{\bullet}^{\text{pol}}(X', f^*(M)) \simeq LF_{X,M}(X', f)$ identifiant le morphisme $H_{\bullet}^{\text{pol}}(f, M) : H_{\bullet}^{\text{pol}}(X', f^*(M)) \rightarrow H_{\bullet}^{\text{pol}}(X, M)$ au morphisme

$$LF_{X,M}((X', f) \xrightarrow{f} (X, 1_X)).$$

Théorème 3.24. — Soient $f : X' \rightarrow X$ un ∞ -foncteur et M un système local faible sur X . Si f est une équivalence folk, alors $H_{\bullet}^{\text{pol}}(f, M) : H_{\bullet}^{\text{pol}}(X', f^*(M)) \rightarrow H_{\bullet}^{\text{pol}}(X, M)$ est un isomorphisme dans la catégorie dérivée des groupes abéliens, et en particulier, pour tout $n \geq 0$, $H_n^{\text{pol}}(f, M) : H_n^{\text{pol}}(X', f^*(M)) \rightarrow H_n^{\text{pol}}(X, M)$ est un isomorphisme de groupes abéliens.

Démonstration. — En vertu de la définition du morphisme $H_{\bullet}^{\text{pol}}(f, M)$, il suffit de montrer que l'image par $LF_{X,M}$ du morphisme $f : (X', f) \rightarrow (X, 1_X)$ de $\infty\text{-Cat}/X$ est un isomorphisme, ce qui résulte du fait que, par hypothèse, $f : (X', f) \rightarrow (X, 1_X)$ est une équivalence faible de $\infty\text{-Cat}/X$. \square

3.25. — Soient X une ∞ -catégorie, M et M' deux systèmes locaux faibles sur X , et $\varphi : M' \rightarrow M$ un morphisme de systèmes locaux faibles sur X (cf. paragraphe 3.6). Pour tout objet $(X', p : X' \rightarrow X)$ de $\infty\text{-Cat}/X$, on définit une transformation naturelle $p^*(\varphi) : p^*(M') \rightarrow p^*(M)$, en posant $p^*(\varphi) = \varphi * p^\circ$, et par suite, un morphisme de complexes $C(X', p^*(\varphi)) : C(X', p^*(M')) \rightarrow C(X', p^*(M))$. Il résulte aussitôt du paragraphe 3.7 qu'on obtient ainsi une transformation naturelle $F_{X,\varphi} : F_{X,M'} \rightarrow F_{X,M}$, et par 2-fonctorialité des foncteurs dérivés [32, §1.3], une transformation naturelle

$$LF_{X,\varphi} : LF_{X,M'} \rightarrow LF_{X,M},$$

d'où, en évaluant à l'objet $(X, 1_X)$ de $\infty\text{-Cat}/X$, un morphisme

$$H_{\bullet}^{\text{pol}}(X, \varphi) : H_{\bullet}^{\text{pol}}(X, M') \rightarrow H_{\bullet}^{\text{pol}}(X, M)$$

dans la catégorie dérivée des groupes abéliens, et en particulier, pour tout $n \geq 0$, un morphisme de groupes abéliens

$$H_n^{\text{pol}}(X, \varphi) : H_n^{\text{pol}}(X, M') \rightarrow H_n^{\text{pol}}(X, M).$$

La 2-fonctorialité des foncteurs dérivés implique aussitôt que $H_{\bullet}^{\text{pol}}(X, 1_M) = 1_{H_{\bullet}^{\text{pol}}(X, M)}$ et que si $\varphi' : M'' \rightarrow M'$ est un morphisme de systèmes locaux faibles sur X , composable avec φ , alors on a $H_{\bullet}^{\text{pol}}(X, \varphi\varphi') = H_{\bullet}^{\text{pol}}(X, \varphi) \circ H_{\bullet}^{\text{pol}}(X, \varphi')$. De même, si

$f : X' \rightarrow X$ est un ∞ -foncteur, on a (cf. paragraphe 3.7 et remarque 3.23) un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{H}_{\bullet}^{\text{pol}}(X', f^*(M')) & \xrightarrow{\mathbf{H}_{\bullet}^{\text{pol}}(X', f^*(\varphi))} & \mathbf{H}_{\bullet}^{\text{pol}}(X', f^*(M)) \\ \mathbf{H}_{\bullet}^{\text{pol}}(f, M') \downarrow & & \downarrow \mathbf{H}_{\bullet}^{\text{pol}}(f, M) \\ \mathbf{H}_{\bullet}^{\text{pol}}(X, M') & \xrightarrow{\mathbf{H}_{\bullet}^{\text{pol}}(X, \varphi)} & \mathbf{H}_{\bullet}^{\text{pol}}(X, M) \end{array} \quad ,$$

où $f^*(\varphi) : f^*(M') \rightarrow f^*(M)$ désigne le morphisme de systèmes locaux faibles sur X' défini par la transformation naturelle $\varphi * f^{\circ}$.

3.26. — Soit $(f, \varphi) : (X', M') \rightarrow (X, M)$ un morphisme de systèmes locaux faibles dans $\infty\text{-Cat}$ (cf. paragraphe 3.8). On définit un morphisme de la catégorie dérivée des groupes abéliens

$$\mathbf{H}_{\bullet}^{\text{pol}}(f, \varphi) : \mathbf{H}_{\bullet}^{\text{pol}}(X', M') \rightarrow \mathbf{H}_{\bullet}^{\text{pol}}(X, M)$$

en posant

$$\mathbf{H}_{\bullet}^{\text{pol}}(f, \varphi) = \mathbf{H}_{\bullet}^{\text{pol}}(f, M) \circ \mathbf{H}_{\bullet}^{\text{pol}}(X', \varphi).$$

La commutativité du carré ci-dessus implique aussitôt que l'association

$$(X, M) \mapsto \mathbf{H}_{\bullet}^{\text{pol}}(X, M), \quad (f, \varphi) \mapsto \mathbf{H}_{\bullet}^{\text{pol}}(f, \varphi)$$

définit un foncteur de la catégorie des systèmes locaux faibles dans $\infty\text{-Cat}$ vers la catégorie dérivée des groupes abéliens.

Proposition 3.27. — Soient $f_0, f_1 : X' \rightarrow X$ deux ∞ -foncteurs, $\alpha : f_0 \Rightarrow f_1$ une transformation oplax de f_0 vers f_1 , et M un système local faible sur X . On suppose que pour tout objet x' de X' , le morphisme de groupes abéliens $\alpha_{x'}^* := M_{\alpha_{x'}} : M_{f_1(x')} \rightarrow M_{f_0(x')}$ est un isomorphisme. Alors $\mathbf{H}_{\bullet}^{\text{pol}}(f_0, M)$ est un isomorphisme dans la catégorie dérivée des groupes abéliens si et seulement si $\mathbf{H}_{\bullet}^{\text{pol}}(f_1, M)$ l'est.

Démonstration. — Choisissons des résolutions polygraphiques $p : P \rightarrow X$ et $p' : P' \rightarrow X'$ de X et X' respectivement. Pour $\varepsilon = 0, 1$, le morphisme $\mathbf{H}_{\bullet}^{\text{pol}}(f_{\varepsilon}, M)$ s'identifie, par définition (cf. paragraphe 3.22) et construction des foncteurs dérivés, à l'image dans la catégorie dérivée des groupes abéliens du morphisme de complexes $C(f'_{\varepsilon}, p^*(M))$, où $f'_{\varepsilon} : P' \rightarrow P$ désigne un relèvement de f_{ε} . En vertu du lemme 3.10, appliqué à la transformation $\alpha * p'$, il existe une transformation oplax α' de f'_0 vers f'_1 telle que $p * \alpha' = \alpha * p'$. Or, l'hypothèse faite sur α implique que la transformation α' satisfait aux conditions de la proposition 3.13. On en déduit que $C(f'_0, M)$ est un quasi-isomorphisme si et seulement si $C(f'_1, M)$ l'est, ce qui achève la démonstration. \square

Corollaire 3.28. — Soient $j : X' \rightarrow X$ un ∞ -foncteur admettant une rétraction r , et M un système local faible sur X . On suppose qu'il existe une transformation oplax α de jr vers 1_X telle que pour tout objet x de X , $\alpha_x^* := M_{\alpha_x} : M_{jr(x)} \rightarrow M_x$ soit un isomorphisme. Alors les morphismes $H_{\bullet}^{\text{pol}}(j, M)$ et $H_{\bullet}^{\text{pol}}(r, j^*(M))$ de la catégorie dérivée des groupes abéliens sont des isomorphismes.

Démonstration. — En vertu de la proposition 3.27, l'hypothèse du corollaire implique que le morphisme $H_{\bullet}^{\text{pol}}(jr, M) = H_{\bullet}^{\text{pol}}(j, M) \circ H_{\bullet}^{\text{pol}}(r, j^*(M))$ est un isomorphisme. Or, comme r est une rétraction de j , on a l'égalité

$$1_{H_{\bullet}^{\text{pol}}(X', j^*(M))} = H_{\bullet}^{\text{pol}}(r, j^*(M)) \circ H_{\bullet}^{\text{pol}}(j, r^*j^*(M)).$$

On en déduit que $H_{\bullet}^{\text{pol}}(r, j^*(M))$ est un isomorphisme, donc $H_{\bullet}^{\text{pol}}(j, M)$ aussi. \square

Remarque 3.29. — L'hypothèse sur la transformation α dans la proposition 3.27 et dans le corollaire 3.28 est satisfaite par exemple si M est un système local, et pas seulement un système local faible.

Dans le cas où X est un polygraphe, on dispose d'une description plus précise du complexe $C(X, M)$ calculant alors son homologie polygraphique à coefficients dans un système local faible M .

Proposition 3.30. — Soient X une ∞ -catégorie librement engendrée au sens des polygraphes par l'ensemble de cellules B , et M un système local faible sur X . Alors pour tout $n \geq 0$, le composé

$$\bigoplus_{b \in B_n} M_{t_0 b} \hookrightarrow \bigoplus_{x \in X_n} M_{t_0 x} \rightarrow C_n(X, M),$$

de l'inclusion canonique suivie par la surjection canonique, est un isomorphisme.

Démonstration. — L'assertion étant tautologique pour $n = 0$, supposons que $n \geq 1$. Il suffit de montrer que pour tout groupe abélien N l'application

$$\text{Hom}_{\text{Ab}}(C_n(X, M), N) \longrightarrow \text{Hom}_{\text{Ab}}\left(\bigoplus_{b \in B_n} M_{t_0 b}, N\right) \simeq \prod_{b \in B_n} \text{Hom}_{\text{Ab}}(M_{t_0 b}, N),$$

induite par ce composé, est une bijection. Comme le n -tronqué bête d'un polygraphe est un polygraphe et que la formation du complexe $C(X, M)$ commute aux troncations bêtes, on peut supposer que le polygraphe X est une n -catégorie et que le complexe $C(X, M)$ est nul en degré $> n$. On a alors une bijection canonique

$$\text{Hom}_{\text{Ab}}(C_n(X, M), N) \simeq \text{Hom}_{\text{Comp}(\text{Ab})}(C(X, M), N[n]),$$

où $N[n]$ désigne le complexe concentré en degré (homologique) n de valeur N . Or, par adjonction, on a une bijection canonique

$$\text{Hom}_{\text{Comp}(\text{Ab})}(C(X, M), N[n]) \simeq \text{Hom}_{\infty\text{-Cat}/X}(X, GN[n]),$$

où $G = G_{X, M}$ désigne l'adjoint à droite décrit dans l'appendice A. Dans ce cas particulier, $GN[n]$ est une n -catégorie ayant même $(n-1)$ -tronqué bête que X et dont

les n -cellules s'identifient aux couples (x, u_n) , avec x n -cellule de X et $u_n : M_{t_0x} \rightarrow N$. En vertu de la propriété universelle des polygraphes, se donner un ∞ -foncteur de X vers $GN[n]$, induisant l'identité sur son $(n - 1)$ -tronqué bête, revient à se donner pour tout $b \in B_n$ une telle cellule (x, u_n) , de façon compatible aux sources et buts. Pour que ce ∞ -foncteur soit au-dessus de X , il est *nécessaire* que ce couple soit de la forme (b, u_n) , et alors la compatibilité aux sources et buts est automatique. Mais cette condition est également *suffisante* puisqu'en composant ce ∞ -foncteur avec la projection $GN[n] \rightarrow X$ on obtient un ∞ -foncteur qui induit l'identité sur le $(n - 1)$ -tronqué bête et sur les générateurs, ce qui achève la démonstration. \square

Remarque 3.31. — La description de la différentielle en termes des générateurs du polygraphe n'est pas aussi simple que pour l'homologie polygraphique à coefficients constants. Dans la section suivante, on l'explicitera dans un cas particulier.

4. L'homologie polygraphique d'un système local simplicial

4.1. — La théorie de l'homotopie des ∞ -catégories strictes est basée sur le nerf de Street, généralisation du nerf usuel 1-catégorique introduit par Grothendieck [26]. Ross Street a introduit dans [50] un objet cosimplicial dans ∞ -Cat, la catégorie cosimpliciale \mathcal{O} des orientaux. En basse dimension, on a :

$$\begin{aligned} \Delta_0 &\mapsto \mathcal{O}_0 = \{0\} = \text{catégorie ponctuelle,} \\ \Delta_1 &\mapsto \mathcal{O}_1 = \{0 \longrightarrow 1\}, \\ \Delta_2 &\mapsto \mathcal{O}_2 = \left\{ \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & 1 & \\ \nearrow & & \searrow \\ 0 & \xrightarrow{\quad} & 2 \end{array} \\ \uparrow \\ \end{array} \right\}, \\ \Delta_3 &\mapsto \mathcal{O}_3 = \left\{ \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ 0 & & & & 2 \\ & \searrow & \nearrow & & \\ & & 3 & & \end{array} \\ \Downarrow \\ \begin{array}{ccc} 0 & \xrightarrow{\quad} & 2 \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ 0 & \xrightarrow{\quad} & 2 \\ & \Downarrow & \\ & 3 & \end{array} \end{array} \right\} \cong \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & \xrightarrow{\quad} & 2 \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ 0 & \xrightarrow{\quad} & 2 \\ & \Downarrow & \\ & 3 & \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

Ce qu'il faut retenir, dans le cas général, est que \mathcal{O}_n est un n -polygraphe dont les i -cellules génératrices sont en bijection avec les i -simplexes non dégénérés de Δ_n , la source (resp. le but) d'une telle cellule étant un composé des $(i - 1)$ -cellules correspondant aux faces impaires (resp. paires) du i -simplexe. En particulier, \mathcal{O}_n a $n + 1$ objets notés $0, 1, \dots, n$ et une unique n -cellule non triviale ξ_n , qu'on appellera sa cellule principale. Pour $0 \leq j_0 < j_1 < \dots < j_i \leq n$, on notera $(j_0 j_1 \dots j_i)$ à la fois le i -simplexe de Δ_n défini par l'application $k \mapsto j_k$ est la i -cellule correspondante de \mathcal{O}_n . Avec cette notation, on a donc $\xi_n = (01 \dots n)$. La 0-source de ξ_n est 0 et son 0-but est n . On aura besoin du lemme suivant.

Lemme 4.2. — Pour $n \geq 1$ pair, respectivement impair, la source et le but de la cellule principale de \mathcal{O}_n sont des composés

$$s_{n-1}\xi_n = A_{n-1} *_{n-2} \cdots *_{n-2} A_3 *_{n-2} A_1, \quad t_{n-1}\xi_n = A_0 *_{n-2} A_2 *_{n-2} \cdots *_{n-2} A_n,$$

respectivement

$$s_{n-1}\xi_n = A_n *_{n-2} \cdots *_{n-2} A_3 *_{n-2} A_1, \quad t_{n-1}\xi_n = A_0 *_{n-2} A_2 *_{n-2} \cdots *_{n-2} A_{n-1},$$

où pour tout i , A_i est une $(n-1)$ -cellule de \mathcal{O}_n de la forme

$$A_i = L_{n-2} *_{n-3} \cdots *_{n-2} L_2 *_{n-1} L_1 *_{n-2} (0 \dots \widehat{i} \dots n) *_{n-1} R_1 *_{n-2} R_2 *_{n-3} \cdots *_{n-3} R_{n-2},$$

L_k, R_k étant des k -cellules de \mathcal{O}_n , pour $1 \leq k \leq n-2$. De plus, si $0 < i < n$, L_1 et R_1 sont des unités, si $i = 0$, L_1 est une unité et $R_1 = (01)$, et si $i = n$, R_1 est une unité et $L_1 = (n-1, n)$.

Démonstration. — Voir [51] ou [36, section 4.3]. La dernière assertion résulte du fait qu'il n'existe pas de cellule non triviale dans \mathcal{O}_n de 0-but 0 ou de 0-source n , et du fait que la seule 1-cellule de source 0 (resp. $n-1$) et de but 1 (resp. n) est (01) (resp. $(n-1, n)$). \square

Remarque 4.3. — En particulier, dans les notations du lemme, pour $n = 1$, on a

$$s_0(\xi_1) = A_1 = (0\widehat{1}) = 0, \quad t_0(\xi_1) = A_0 = (\widehat{0}1) = 1,$$

pour $n = 2$,

$$s_1(\xi_2) = A_1 = (0\widehat{1}2) = (02), \quad t_1(\xi_2) = A_0 *_{n-2} A_2 = (\widehat{0}12) *_{n-2} (01\widehat{2}) = (12) *_{n-2} (01),$$

et pour $n = 3$,

$$s_2(\xi_3) = A_3 *_{n-1} A_1 = ((23) *_{n-2} (012)) *_{n-1} (023),$$

$$t_2(\xi_3) = A_0 *_{n-1} A_2 = ((123) *_{n-2} (01)) *_{n-1} (013).$$

Pour n arbitraire, ce lemme ne donne pas une description complète de la source et du but de ξ_n , mais fournit des informations suffisantes pour ce qui suit.

4.4. — La ∞ -catégorie cosimpliciale $\mathcal{O} : \Delta \rightarrow \infty\text{-Cat}$ définit par le procédé de Kan un couple de foncteurs adjoints

$$c : \widehat{\Delta} \longrightarrow \infty\text{-Cat}, \quad N : \infty\text{-Cat} \longrightarrow \widehat{\Delta},$$

où c est le prolongement du foncteur \mathcal{O} par limites inductives, et le *nerf de Street* N est défini par

$$C \mapsto (\Delta_n \mapsto \text{Hom}_{\infty\text{-Cat}}(\mathcal{O}_n, C)).$$

On remarque aussitôt que la restriction du foncteur N à Cat est le foncteur nerf usuel et que le foncteur c_1 associant à un ensemble simplicial sa catégorie fondamentale est le composé de c avec le foncteur de troncation intelligente τ_1 , adjoint à gauche de l'inclusion de Cat dans $\infty\text{-Cat}$. Autrement dit, pour tout ensemble simplicial X , sa catégorie fondamentale est canoniquement isomorphe à la catégorie fondamentale de

la ∞ -catégorie $c(X)$, et par suite les groupoïdes fondamentaux de X et de $c(X)$ sont aussi canoniquement isomorphes.

4.5. — Soient X un ensemble simplicial et $M : c_1(X)^\circ \rightarrow \text{Ab}$ un système local faible sur X . En composant le foncteur M avec le morphisme d'adjonction $c(X) \rightarrow \tau_1 c(X) = c_1(X)$, on obtient un système local faible sur $c(X)$ qu'on notera également $M : c(X)^\circ \rightarrow \text{Ab}$. Réciproquement, si $M : c(X)^\circ \rightarrow \text{Ab}$ est un système local faible sur la ∞ -catégorie $c(X)$, comme Ab est une (1-)catégorie le foncteur M se factorise par $\tau_1 c(X) = c_1(X)$, et définit donc un système local faible sur l'ensemble simplicial X . Ainsi les systèmes locaux faibles sur X et sur $c(X)$ se correspondent bijectivement.

Le but de la suite de cette section est de montrer que si X est un ensemble simplicial et M un système local faible sur X , pour tout $n \geq 0$, le groupe d'homologie $H_n(X, M)$ est canoniquement isomorphe au groupe d'homologie polygraphique $H_n^{\text{pol}}(c(X), M)$. Plus précisément, on va montrer que le complexe normalisé du groupe abélien simplicial $C(X, M)$ est canoniquement isomorphe au complexe $C(c(X), M)$. Comme la ∞ -catégorie $c(X)$ est un polygraphe, on obtient donc un isomorphisme canonique $H_\bullet(X, M) \simeq H_\bullet^{\text{pol}}(c(X), M)$ dans la catégorie dérivée des groupes abéliens.

4.6. — Soient X un ensemble simplicial et M un système local faible sur X . On note $N(X, M)$ le complexe normalisé associé au groupe abélien simplicial $C(X, M)$. On rappelle que pour $n \geq 0$,

$$N_n(X, M) = \bigoplus_{x \in X_n^{\text{nd}}} M_{x_n}, \quad n \geq 0,$$

où X_n^{nd} désigne l'ensemble des n -simplexes non dégénérés de X , la différentielle étant définie par

$$d(x, m) = \sum_{0 \leq i < n} (-1)^i (d_i x, m) + (-1)^n (d_n x, x_{n-1, n}^*(m)), \quad x \in X_n^{\text{nd}}, m \in M_{x_n}, n > 0,$$

avec la convention que les termes où $d_i x$ est dégénéré sont nuls.

Un n -simplexe x de X définit par Yoneda un morphisme d'ensembles simpliciaux $\tilde{x} : \Delta_n \rightarrow X$, d'où par application du foncteur c , un ∞ -foncteur $c(\tilde{x}) : \mathcal{O}_n \rightarrow c(X)$, et par suite, une n -cellule $c(x) := c(\tilde{x})(\xi_n)$ de $c(X)$, où ξ_n est la cellule principale de \mathcal{O}_n . Pour toute application croissante $\varphi : \Delta_{n_0} \rightarrow \Delta_{n_1}$ et tout n_1 -simplexe x_1 de X , si $x_0 = X_\varphi(x_1)$, de sorte que $\tilde{x}_0 = \tilde{x}_1 \varphi$, on a

$$c(x_0) = c(\tilde{x}_0)(\xi_{n_0}) = c(\tilde{x}_1 \varphi)(\xi_{n_0}) = c(\tilde{x}_1)(\mathcal{O}_\varphi(\xi_{n_0})).$$

En particulier, pour φ un opérateur de face, on obtient que si x est un n -simplexe et $0 \leq i \leq n$, on a

$$c(d_i x) = c(\tilde{x})(0 \dots \hat{i} \dots n).$$

De même, pour φ un opérateur de dégénérescence, on obtient que si x est un n -simplexe dégénéré la n -cellule $c(x)(\xi_n)$ est une unité. Enfin, pour φ l'application

$\Delta_0 \rightarrow \Delta_n$, $0 \mapsto n$, on obtient $t_0c(x) = c(x_n)$. Ainsi, on définit un morphisme de groupes abéliens

$$f_n : N_n(X, M) = \bigoplus_{x \in X_n^{\text{nd}}} M_{x_n} \longrightarrow \bigoplus_{y \in c(X)_n} M_{t_0y} / \sim_n = C_n(c(X), M)$$

$$(x, m) \longmapsto (c(x), m) .$$

Proposition 4.7. — *Le morphisme de groupes abéliens gradués $f = (f_n)_{n \geq 0}$ est un isomorphisme de complexes.*

Démonstration. — Vérifions la compatibilité de f aux différentielles. Soient donc $n \geq 1$, x un n -simplexe de X , et $m \in M_{x_n}$. On distingue plusieurs cas.

— $n = 1$. On a :

$$\begin{aligned} df_1(x, m) &= d(c(x), m) = (t_0(c(x)), m) - (s_0(c(x)), c(x)^*m) \\ &= (t_0(c(\tilde{x})(\xi_1)), m) - (s_0(c(\tilde{x})(\xi_1)), x^*m) \\ &= (c(\tilde{x})(t_0\xi_1), m) - (c(\tilde{x})(s_0\xi_1), x^*m) \\ &= (c(\tilde{x})(\widehat{01}), m) - (c(\tilde{x})(\widehat{01}), x^*m) \\ &= (c(d_0x), m) - (c(d_1x), x^*m) \\ &= f_0(d_0x, m) - f_0(d_1x, x^*m) = f_0d(x) . \end{aligned}$$

— $n = 2$. On a :

$$\begin{aligned} df_2(x, m) &= d(c(x), m) = (t_1(c(x)), m) - (s_1(c(x)), m) \\ &= (t_1(c(\tilde{x})(\xi_2)), m) - (s_1(c(\tilde{x})(\xi_2)), m) \\ &= (c(\tilde{x})(t_1\xi_2), m) - (c(\tilde{x})(s_1\xi_2), m) \\ &= (c(\tilde{x})(\widehat{012}) *_0 (\widehat{012}), m) - (c(\tilde{x})(\widehat{012}), m) \\ &= (c(\tilde{x})(\widehat{012}) *_0 c(\tilde{x})(\widehat{012}), m) - (c(\tilde{x})(\widehat{012}), m) \\ &\sim_1 (c(\tilde{x})(\widehat{012}), m) + (c(\tilde{x})(\widehat{012}), c(\tilde{x})(\widehat{012})^*(m)) - (c(\tilde{x})(\widehat{012}), m) \\ &= (c(\tilde{x})(\widehat{012}), m) - (c(\tilde{x})(\widehat{012}), m) + (c(\tilde{x})(\widehat{012}), x_{12}^*(m)) \\ &= (c(d_0x), m) - (c(d_1x), m) + (c(d_2x), x_{12}^*(m)) \\ &= f_1(d_0x, m) - f_1(d_1x, m) + f_1(d_2x, x_{12}^*(m)) = f_1d(x) . \end{aligned}$$

— $n > 2$, n impair. En vertu du lemme 4.2, et dans ses notations, on a :

$$\begin{aligned}
df_n(x, m) &= d(c(x), m) = (t_{n-1}(c(x)), m) - (s_{n-1}(c(x)), m) \\
&= (t_{n-1}(c(\tilde{x})(\xi_n)), m) - (s_{n-1}(c(\tilde{x})(\xi_n)), m) \\
&= (c(\tilde{x})(t_{n-1}\xi_n), m) - (c(\tilde{x})(s_{n-1}\xi_n), m) \\
&= (c(\tilde{x})(A_0 *_{n-2} A_2 *_{n-2} \cdots *_{n-2} A_{n-1}), m) \\
&\quad - (c(\tilde{x})(A_n *_{n-2} \cdots *_{n-2} A_3 *_{n-2} A_1), m) \\
&= (c(\tilde{x})(A_0) *_{n-2} (c(\tilde{x})(A_2) *_{n-2} \cdots *_{n-2} (c(\tilde{x})(A_{n-1}), m) \\
&\quad - (c(\tilde{x})(A_n) *_{n-2} \cdots *_{n-2} (c(\tilde{x})(A_3) *_{n-2} (c(\tilde{x})(A_1), m) \\
&\sim_{n-1} (c(\tilde{x})(A_0), m) + (c(\tilde{x})(A_2), m) + \cdots + (c(\tilde{x})(A_{n-1}), m) \\
&\quad - (c(\tilde{x})(A_n), m) - \cdots - (c(\tilde{x})(A_3), m) - (c(\tilde{x})(A_1), m),
\end{aligned}$$

où

$$A_i = L_{n-2} *_{n-3} \cdots *_{i+1} L_1 *_{i+1} (0 \dots \hat{i} \dots n) *_{i+1} R_1 *_{i+1} \cdots *_{n-3} R_{n-2},$$

avec L_k, R_k k -cellules de \mathcal{O}_n , et L_1 une unité si $i \neq n$ et R_i une unité si $i \neq 0$. En vertu de la remarque 3.4, on a donc, si $0 < i < n$,

$$(c(\tilde{x})(A_i), m) \sim_{n-1} (c(\tilde{x})(0 \dots \hat{i} \dots n), m) = (c(d_i x), m),$$

si $i = 0$,

$$\begin{aligned}
(c(\tilde{x})(A_0), m) &\sim_{n-1} (c(\tilde{x})(\widehat{01} \dots n) *_{i+1} R_1), m) = (c(\tilde{x})(\widehat{01} \dots n) *_{i+1} c(\tilde{x})(R_1), m) \\
&\sim_{n-1} (c(\tilde{x})(\widehat{01} \dots n), m) = (c(d_0 x), m),
\end{aligned}$$

et si $i = n$,

$$\begin{aligned}
(c(\tilde{x})(A_n), m) &\sim_{n-1} (c(\tilde{x})(L_1 *_{i+1} (01 \dots \hat{n})), m) = (c(\tilde{x})(L_1) *_{i+1} c(\tilde{x})(01 \dots \hat{n}), m) \\
&\sim_{n-1} (c(\tilde{x})(01 \dots \hat{n}), c(\tilde{x})(L_1)^*(m)) = (c(d_n x), x_{n-1, n}^*(m))
\end{aligned}$$

(en se souvenant qu'en vertu du lemme 4.2, $L_1 = (n-1, n)$). On en déduit que $df_n(x) \sim_{n-1} f_{n-1}d(x)$, ce qui achève la vérification de la compatibilité de f aux différentielles (le cas n pair étant tout à fait similaire).

Vu que $c(X)$ est un polygraphe de base l'ensemble des $c(x)$, pour x simplexe non dégénéré de X , la proposition résulte alors de la proposition 3.30. \square

Théorème 4.8. — Soient X un ensemble simplicial et M un système local faible sur X . Alors, on a un isomorphisme canonique $H_\bullet(X, M) \simeq H_\bullet^{\text{pol}}(c(X), M)$ dans la catégorie dérivée des groupes abéliens, et en particulier, pour tout $n \geq 0$, un isomorphisme de groupes abéliens $H_n(X, M) \simeq H_n^{\text{pol}}(c(X), M)$.

Démonstration. — Comme la ∞ -catégorie $c(X)$ est un polygraphe, le théorème est conséquence directe de la proposition 4.7. \square

4.9. — On dit qu'un ∞ -foncteur $f : X' \rightarrow X$ est une *équivalence polygraphique* si f induit une équivalence des groupoïdes fondamentaux, et si pour tout système local M sur X et tout $n \geq 0$, le morphisme de groupes abéliens

$$\mathbf{H}_n^{\text{pol}}(f, M) : \mathbf{H}_n^{\text{pol}}(X', f^*(M)) \rightarrow \mathbf{H}_n^{\text{pol}}(X, M)$$

est un isomorphisme (ou de façon équivalente si

$$\mathbf{H}_\bullet^{\text{pol}}(f, M) : \mathbf{H}_\bullet^{\text{pol}}(X', f^*(M)) \rightarrow \mathbf{H}_\bullet^{\text{pol}}(X, M)$$

est un isomorphisme dans la catégorie dérivée des groupes abéliens).

Corollaire 4.10. — *Pour qu'un morphisme d'ensembles simpliciaux soit une équivalence faible simpliciale, il faut et il suffit que son image par le foncteur c , adjoint à gauche du nerf de Street, soit une équivalence polygraphique.*

Démonstration. — Le corollaire est conséquence immédiate des théorèmes 1.6 et 4.8, en se souvenant que pour tout ensemble simplicial X , les groupoïdes fondamentaux de la ∞ -catégorie $c(X)$ et de l'ensemble simplicial X sont canoniquement isomorphes (cf. paragraphe 4.4). \square

Proposition 4.11. — *Si dans un triangle commutatif de ∞ -Cat deux parmi les trois flèches sont des équivalences polygraphiques, il en est de même de la troisième.*

Démonstration. — Soient $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow Z$ deux morphismes composables de ∞ -Cat. La seule chose non triviale à montrer pour établir la proposition est que si g et gf sont des équivalences polygraphiques, alors pour tout système local M sur Y et tout $n \geq 0$, $\mathbf{H}_n^{\text{pol}}(f, M) : \mathbf{H}_n^{\text{pol}}(X, f^*(M)) \rightarrow \mathbf{H}_n^{\text{pol}}(Y, M)$ est un isomorphisme de groupes abéliens. Comme par hypothèse $\Pi_1(g)$ est une équivalence de groupoïdes, on peut en choisir un quasi-inverse $I : \Pi_1(Z) \rightarrow \Pi_1(Y)$. En se souvenant que la donnée d'un système local sur une ∞ -catégorie revient à la donnée d'un foncteur contravariant de son groupoïde fondamental vers la catégorie des groupes abéliens, le composé $M \circ I^\circ$ définit un système local M' sur Z , et l'isomorphisme de foncteurs $I \circ \Pi_1(g) \xrightarrow{\sim} 1_{\Pi_1(Y)}$ un isomorphisme $\varphi : g^*(M') \xrightarrow{\sim} M$ de systèmes locaux sur Y . Or, comme g et gf sont des équivalences polygraphiques, l'égalité $\mathbf{H}_n^{\text{pol}}(gf, M') = \mathbf{H}_n^{\text{pol}}(g, M') \circ \mathbf{H}_n^{\text{pol}}(f, g^*(M'))$ (cf. paragraphe 3.22) implique que $\mathbf{H}_n^{\text{pol}}(f, g^*(M'))$ est un isomorphisme, et le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{H}_n^{\text{pol}}(X, f^*g^*(M')) & \xrightarrow{\mathbf{H}_n^{\text{pol}}(X, f^*(\varphi))} & \mathbf{H}_n^{\text{pol}}(X, f^*(M)) \\ \mathbf{H}_n^{\text{pol}}(f, g^*(M')) \downarrow & & \downarrow \mathbf{H}_n^{\text{pol}}(f, M) \\ \mathbf{H}_n^{\text{pol}}(Y, g^*(M')) & \xrightarrow{\mathbf{H}_n^{\text{pol}}(Y, \varphi)} & \mathbf{H}_n^{\text{pol}}(Y, M) \end{array}$$

(cf. paragraphe 3.25), dont les lignes sont des isomorphismes, qu'il en est de même de $\mathbf{H}_n^{\text{pol}}(f, M)$. \square

Proposition 4.12. — Soit $j : X' \rightarrow X$ un ∞ -foncteur. On suppose que j admet une rétraction r et que jr est une équivalence polygraphique. Alors j est une équivalence polygraphique.

Démonstration. — L'hypothèse que r est une rétraction de j implique que $\Pi_1(r)\Pi_1(j) = 1_{\Pi_1(X')}$, et l'hypothèse que jr est une équivalence polygraphique implique que $\Pi_1(j)\Pi_1(r) = \Pi_1(jr)$ est un isomorphisme. On en déduit que $\Pi_1(j)$ est un isomorphisme. De même, pour tout système local M sur X , le morphisme $H_\bullet(jr, M) = H_\bullet(j, M) \circ H_\bullet(r, j^*(M))$ (cf. paragraphe 3.22) est un isomorphisme de la catégorie dérivée des groupes abéliens et on a l'égalité

$$H_\bullet(r, j^*(M)) \circ H_\bullet(j, r^*j^*(M)) = H_\bullet(rj, j^*(M)) = 1_{H_\bullet(X', j^*(M))}.$$

On en déduit que $H_\bullet(r, j^*(M))$ est un isomorphisme, donc $H_\bullet(j, M)$ aussi, ce qui achève la démonstration. \square

Remarque 4.13. — Dans la terminologie de Grothendieck [27], [39], [20], le contenu des propositions 4.11 et 4.12 est que les équivalences polygraphiques forment une classe faiblement saturée de flèches de ∞ -Cat.

Proposition 4.14. — Soit $j : X' \rightarrow X$ un ∞ -foncteur. On suppose que j admet une rétraction r et qu'il existe une transformation oplax α de jr vers 1_X . Alors j est une équivalence polygraphique.

Démonstration. — L'hypothèse que r est une rétraction de j implique que $\Pi_1(r)\Pi_1(j) = 1_{\Pi_1(X')}$, et la transformation oplax α induit une transformation naturelle $\Pi_1(j)\Pi_1(r) = \Pi_1(jr) \rightarrow 1_{\Pi_1(X)}$, qui est un isomorphisme, puisque $\Pi_1(X)$ est un groupoïde. On en déduit que $\Pi_1(j)\Pi_1(r)$ est un isomorphisme, donc $\Pi_1(j)$ aussi. La proposition résulte alors du corollaire 3.28 et de la remarque 3.29. \square

Corollaire 4.15. — Pour toute ∞ -catégorie X , la projection $D_1 \otimes X \xrightarrow{\tau} D_0 \otimes X \simeq X$ est une équivalence polygraphique.

Démonstration. — Soit $j : X \simeq D_0 \otimes X \rightarrow D_1 \otimes X$ le produit de Gray de l'inclusion $D_0 = \{0\} \hookrightarrow \{0 \rightarrow 1\} = D_1$ par X . Le ∞ -foncteur r est une rétraction de j . La transformation naturelle de l'endofoncteur constant de valeur 0 de D_1 vers 1_{D_1} définit un morphisme $D_1 \otimes D_1 \rightarrow D_1$. On vérifie aussitôt que le produit de Gray de ce morphisme par X définit une transformation oplax de jr vers $1_{D_1 \otimes X}$, ce qui implique en vertu de la proposition 4.14 que j est une équivalence polygraphique, et par suite r aussi (proposition 4.11). \square

5. Rappels sur l'homologie d'un système local 1-catégorique

Soient X une petite catégorie et M un système local faible (autrement dit, un pré-faisceau abélien M sur X). L'homologie $H_\bullet(X, M)$ de X à coefficients dans M (appelée

aussi homologie du foncteur M) généralise l'homologie d'un groupe G à coefficients dans un \mathbb{Z} -module à droite (c'est-à-dire un préfaisceau abélien sur G , vu comme une catégorie à un seul objet). Classiquement, si G est un groupe, ou plus généralement un monoïde, et M un G -module à droite, les groupes d'homologie $H_n(G, M)$ sont définis comme étant les groupes abéliens $\mathrm{Tor}_n^{\mathbb{Z}[G]}(M, \mathbb{Z})$, où $\mathbb{Z}[G]$ désigne l'algèbre du groupe (ou du monoïde) G , M le $\mathbb{Z}[G]$ -module à droite défini par l'action de G , et \mathbb{Z} est vu comme $\mathbb{Z}[G]$ -module à gauche, G agissant trivialement [19]. Or, les foncteurs $M \mapsto \mathrm{Tor}_n^{\mathbb{Z}[G]}(M, \mathbb{Z})$ sont les foncteurs dérivés à gauche du foncteur $M \mapsto M \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathbb{Z}$, et par ailleurs on a un isomorphisme canonique

$$M \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathbb{Z} \simeq \varinjlim_{G^\circ} M$$

du groupe $M \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathbb{Z}$ avec la limite inductive du foncteur $M : G^\circ \rightarrow \mathrm{Ab}$, groupe des *coïnvariants* de M sous l'action de G . Par conséquent, le groupe d'homologie $H_n(G, M)$ s'identifie à l'évaluation en M du n -ème foncteur dérivé à gauche du foncteur limite inductive, autrement dit au n -ème groupe d'homologie de la limite inductive homotopique de M , vue comme objet de la catégorie dérivée des groupes abéliens.

Ainsi, si X est une petite catégorie et M un système local faible sur X , autrement dit un préfaisceau $X^\circ \rightarrow \mathrm{Ab}$, on définit l'*homologie de X à coefficients dans M* par la formule suivante

$$H_\bullet(X, M) := \underline{\mathrm{holim}} M = \underline{\mathrm{holim}}_{x \in X^\circ} M_x,$$

où la limite inductive homotopique est prise dans la catégorie dérivée des groupes abéliens.

Si X est une ∞ -catégorie, on aimerait pouvoir définir son homologie par la même formule. Néanmoins, en l'état actuel des connaissances, on ne sait pas interpréter cette formule dans le cadre ∞ -catégorique. Comme par définition le type d'homotopie d'une ∞ -catégorie est le type d'homotopie de son nerf, on est conduit à poser la définition suivante. Si X est une ∞ -catégorie et M un système local faible sur X , l'*homologie de X à coefficient dans M* est définie par la formule

$$H_\bullet(X, M) := H_\bullet(N(X), M),$$

où N désigne le nerf de Street. Cette formule a un sens car on vérifie facilement que la catégorie fondamentale de l'ensemble simplicial $N(X)$ est canoniquement isomorphe à celle de la ∞ -catégorie X , de sorte que les systèmes locaux faibles sur X s'identifient aux systèmes locaux faibles sur $N(X)$.

La proposition suivante montre que ces deux définitions coïncident quand X est une (1-)catégorie et M un *système local* (et pas seulement un système local faible) sur X .

Proposition 5.1. — Soient X une catégorie et M un système local sur X . On a un isomorphisme canonique

$$\operatorname{holim}_{x \in X^\circ} M_x \simeq \mathbf{H}_\bullet(N(X), M).$$

Même si cette proposition n'est pas vraiment originale, on en esquisse une preuve pour la convenance du lecteur. Pour cela, on aura besoin des lemmes suivants.

Lemme 5.2. — Soient C une catégorie de modèles, X un objet de C , et considérons la catégorie C/X , munie de la structure de catégorie de modèles induite de celle de C . Alors le foncteur d'oubli $C/X \rightarrow C$ respecte et reflète les limites inductives homotopiques.

Démonstration. — Par définition de la structure de catégorie de modèles induite, le foncteur d'oubli $U : C/X \rightarrow C$ respecte les équivalences faibles et les cofibrations, et comme il admet un adjoint à droite, il est, en particulier, un foncteur de Quillen à gauche. Il respecte donc les limites inductives homotopiques. Pour montrer qu'il les reflète également, il suffit alors de remarquer que le foncteur $\operatorname{Ho}(C/X) \rightarrow \operatorname{Ho}(C)$, induit par U , est conservatif. Cette dernière assertion résulte du fait que le foncteur d'oubli respecte et reflète les équivalences faibles, et du fait que toute flèche de la catégorie homotopique d'une catégorie de modèles C peut s'écrire sous la forme $P(h)^{-1}P(g)P(f)^{-1}$, où $P : C \rightarrow \operatorname{Ho}(C)$ désigne le foncteur de localisation et f, h sont des équivalences faibles et g une flèche arbitraire de C . \square

Lemme 5.3. — Soit X une petite catégorie, et considérons la catégorie Cat/X munie de la structure de catégorie de modèles induite de celle de Thomason sur Cat [53]. Alors l'objet $(X, 1_X)$ de Cat/X est la limite inductive homotopique dans Cat/X du foncteur

$$X^\circ \rightarrow \operatorname{Cat}/X, \quad x \mapsto x \setminus X,$$

où chaque $x \setminus X$ est équipé de la projection canonique vers X .

Démonstration. — D'après le lemme 5.2, il suffit de voir que la limite inductive homotopique dans Cat du foncteur $X^\circ \rightarrow \operatorname{Cat}, x \mapsto x \setminus X$ est isomorphe à X , ce qui suit facilement du fait que ce foncteur est faiblement équivalent au foncteur constant de valeur la catégorie ponctuelle, et du calcul de la limite inductive homotopique de ce dernier à l'aide de la construction de Grothendieck (voir [52]). \square

Lemme 5.4. — Soit X une petite catégorie, et considérons les catégories Cat/X et $\widehat{\Delta}/N(X)$ munies des structures de catégorie de modèles induites respectivement de celle de Thomason [53] et de celle de Kan-Quillen [44]. Alors le foncteur

$$N/X : \operatorname{Cat}/X \rightarrow \widehat{\Delta}/N(X), \quad (X', p : X' \rightarrow X) \mapsto (N(X'), N(p) : N(X') \rightarrow N(X)),$$

commute aux limites inductives homotopiques.

Démonstration. — On a un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \text{Cat}/X & \xrightarrow{N/X} & \widehat{\Delta}/N(X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Cat} & \xrightarrow{N} & \widehat{\Delta} \end{array}$$

dont les flèches verticales sont les foncteurs d'oubli. Comme en vertu du lemme 5.2, ces deux foncteurs respectent et reflètent les limites inductives homotopiques, le lemme résulte du fait que le foncteur nerf respecte les équivalences faibles et préserve les limites inductives homotopiques, puisque, selon le goût du lecteur, il induit une équivalence de dérivateurs ou une équivalence de $(\infty, 1)$ -catégories. \square

Démonstration de la proposition 5.1. — L'objet $H_{\bullet}(N(X), M)$ de la catégorie dérivée des groupes abéliens est défini par le complexe image de l'objet $(X, 1_X)$ de Cat/X par le composé des foncteurs

$$\text{Cat}/X \xrightarrow{N/X} \widehat{\Delta}/N(X) \xrightarrow{F} \text{Comp}(\text{Ab}) \quad ,$$

où F désigne le foncteur associant à un objet $(T, p : T \rightarrow N(X))$ de $\widehat{\Delta}/N(X)$ le complexe $C(T, p^*(M))$, introduit au paragraphe 1.3. Or, en vertu du lemme 5.4, le foncteur N/X commute aux limites inductives homotopiques, et il en est de même du foncteur F , puisqu'on a vu dans la preuve du théorème 1.6 qu'il est un foncteur de Quillen à gauche. Il résulte donc du lemme 5.3 qu'on a des isomorphismes canoniques dans la catégorie dérivée des groupes abéliens

$$\begin{aligned} H_{\bullet}(N(X), M) &= F \circ N/X(X, 1_X) \simeq F \circ N/X(\underline{\text{holim}}_{x \in X^{\circ}} x \setminus X) \\ &\simeq \underline{\text{holim}}_{x \in X^{\circ}} F \circ N/X(x \setminus X) = \underline{\text{holim}}_{x \in X^{\circ}} C(N(x \setminus X), M|_{x \setminus X}), \end{aligned}$$

où $M|_{x \setminus X} = p_x^*(M)$ pour $p_x : x \setminus X \rightarrow X$ le foncteur canonique d'oubli.

Pour conclure, on va définir une équivalence faible naturelle du foncteur

$$X^{\circ} \rightarrow \text{Comp}(\text{Ab}), \quad x \mapsto C(N(x \setminus X), M|_{x \setminus X}),$$

vers le foncteur

$$X^{\circ} \rightarrow \text{Comp}(\text{Ab}), \quad x \mapsto M_x,$$

le groupe abélien M_x étant vu comme un complexe concentré en degré 0. On définit un morphisme de groupes abéliens

$$\varphi_x : C_0(N(x \setminus X), M|_{x \setminus X}) = \bigoplus_{(y, p : x \rightarrow y)} M_y \longrightarrow M_x, \quad (y, p, m) \mapsto p^*(m).$$

On rappelle que la différentielle $d : C_1(N(x \setminus X), M|_{x \setminus X}) \rightarrow C_0(N(x \setminus X), M|_{x \setminus X})$ est définie par la formule

$$\bigoplus_{f : (y,p) \rightarrow (y',p')} M_{y'} \longrightarrow \bigoplus_{(y,p : x \rightarrow y)} M_y, \quad (f, m) \mapsto ((y', p', m) - (y, p, f^*(m))).$$

On vérifie alors que pour un élément (f, m) de $C_1(N(x \setminus X), M|_{x \setminus X})$, on a

$$\begin{aligned} \varphi_x(d(f, m)) &= \varphi_x((y', p', m) - (y, p, f^*(m))) \\ &= p'^*(m) - p^*(f^*(m)) = p'^*(m) - (fp)^*(m) = 0. \end{aligned}$$

Cela signifie exactement que φ_x est compatible à la différentielle et on a donc défini un morphisme de complexes

$$\varphi_x : C(N(x \setminus X), M|_{x \setminus X}) \rightarrow M_x,$$

où M_x est concentré en degré 0.

La naturalité de φ_x en x étant évidente, il reste à prouver que pour tout objet x de X le morphisme de complexes φ_x est un quasi-isomorphisme. Pour cela, considérons le morphisme $e \rightarrow x \setminus X$ de la catégorie ponctuelle vers la catégorie $x \setminus X$ défini par l'objet initial de cette dernière. Le morphisme $N(e) \rightarrow N(x \setminus X)$ est alors une équivalence faible simpliciale et le théorème 1.6 implique que la flèche induite

$$M_x \simeq C(N(e), M_x) \longrightarrow C(N(x \setminus X), M|_{x \setminus X})$$

est un quasi-isomorphisme. Comme ce morphisme est une section de φ_x , on conclut par 2 sur 3. \square

6. L'homologie polygraphique d'un système local 1-catégorique

Soient X une ∞ -catégorie et M un système local faible sur X . On définit un morphisme $H_\bullet(X, M) \rightarrow H_\bullet^{\text{pol}}(X, M)$ dans la catégorie dérivée des groupes abéliens, de source l'homologie et but l'homologie polygraphique de X à coefficients dans M comme suit. Le morphisme d'adjonction $cN(X) \rightarrow X$ induit un morphisme $H_\bullet^{\text{pol}}(cN(X), M) \rightarrow H_\bullet^{\text{pol}}(X, M)$ (en se souvenant que les systèmes locaux faibles sur X , $N(X)$ et $cN(X)$ se correspondent bijectivement). Or, en vertu du théorème 4.8, on a un isomorphisme canonique

$$H_\bullet^{\text{pol}}(cN(X), M) \simeq H_\bullet(N(X), M) = H_\bullet(X, M),$$

d'où le morphisme désiré.

Le but de cette section est de montrer que dans le cas particulier où X est une petite catégorie et M un système local sur X (autrement dit, un préfaisceau abélien M sur $\Pi_1(X)$), le morphisme de comparaison ci-dessus est un isomorphisme, autrement dit que l'homologie polygraphique $H_\bullet^{\text{pol}}(X, M)$ coïncide avec l'homologie usuelle

$H_\bullet(X, M)$. Cela résultera du théorème suivant, de la proposition 5.1, et de l'observation (dont la vérification est laissée au lecteur) que les isomorphismes canoniques en question sont compatibles au morphisme de comparaison.

Théorème 6.1. — *Soient X une catégorie et M un système local sur X . On a un isomorphisme canonique dans la catégorie dérivée des groupes abéliens*

$$\operatorname{holim}_{x \in X^\circ} M_x \simeq H_\bullet^{\text{pol}}(X, M).$$

Soit donc X une petite catégorie, M un système local sur X , et choisissons une résolution polygraphique $p : P \rightarrow X$ de X dans $\infty\text{-Cat}$, de sorte qu'on a un isomorphisme canonique $H_\bullet^{\text{pol}}(X, M) \simeq C(P, p^*(M))$ dans la catégorie dérivée des groupes abéliens. On considère le foncteur

$$?\backslash P : X^\circ \rightarrow \infty\text{-Cat}/X, \quad x \mapsto (x \backslash P, p_x : x \backslash P \rightarrow X),$$

où $x \backslash P$ désigne le produit fibré $P \times_X x \backslash X$ et p_x le composé de la projection $x \backslash P \rightarrow P$ avec $p : P \rightarrow X$. Pour démontrer le théorème, on aura besoin des lemmes suivants.

Lemme 6.2. — *Le foncteur $?\backslash P$ ci-dessus est un objet cofibrant de la catégorie $\underline{\text{Hom}}(X^\circ, \infty\text{-Cat}/X)$ munie de la structure projective, $\infty\text{-Cat}/X$ étant équipée de la structure de catégorie de modèles induite de la structure folk sur $\infty\text{-Cat}$. En particulier, pour tout objet x de X , la ∞ -catégorie $x \backslash P$ est un polygraphe.*

Démonstration. — Remarquons qu'on a un isomorphisme canonique

$$\underline{\text{Hom}}(X^\circ, \infty\text{-Cat}/X) \simeq \underline{\text{Hom}}(X^\circ, \infty\text{-Cat})/\text{cst}_X,$$

où cst_X est le foncteur constant de valeur X . Par ailleurs, cet isomorphisme est compatible aux structures de catégories de modèles, dans le sens où la structure sur $\underline{\text{Hom}}(X^\circ, \infty\text{-Cat}/X)$ de l'énoncé est identifiée avec la structure de catégorie de modèles sur $\underline{\text{Hom}}(X^\circ, \infty\text{-Cat})/\text{cst}_X$ induite par la structure projective folk sur $\underline{\text{Hom}}(X^\circ, \infty\text{-Cat})$. En particulier, on en déduit que le foncteur $?\backslash P : X^\circ \rightarrow \infty\text{-Cat}/X$ est un objet cofibrant de $\underline{\text{Hom}}(X^\circ, \infty\text{-Cat}/X)$ si et seulement son composé avec le foncteur d'oubli $?\backslash P : X^\circ \rightarrow \infty\text{-Cat}$ est un objet cofibrant de $\underline{\text{Hom}}(X^\circ, \infty\text{-Cat})$, ce qui est exactement (le dual de) la proposition 7.9 de [28]. \square

Lemme 6.3. — *L'objet $(P, p : P \rightarrow X)$ de $\infty\text{-Cat}/X$ est la limite inductive homotopique dans $\infty\text{-Cat}/X$ (munie de la structure de catégorie de modèles induite de la structure folk sur $\infty\text{-Cat}$) du foncteur $?\backslash P : X^\circ \rightarrow \infty\text{-Cat}/X$.*

Démonstration. — Le lemme résulte aussitôt du lemme 5.2 et de [28, Lemma 7.5 et Theorem 7.10]. \square

Soit x un objet de X . On rappelle que $p_x : x \backslash P \rightarrow X$ désigne le composé du ∞ -foncteur d'oubli $x \backslash P \rightarrow P$ avec $p : P \rightarrow X$. Notons $q_x : x \backslash P \rightarrow e$ l'unique ∞ -foncteur de $x \backslash P$ vers la ∞ -catégorie ponctuelle e , et considérons le système

local M_x sur e défini par le groupe M_x . On définit une transformation naturelle $\varphi_x : p_x^*(M) \rightarrow q_x^*(M_x)$, en posant pour tout objet $(y, u : x \rightarrow p(y))$ de $x \setminus P$

$$\varphi_{x,(y,u)} = M_u : M_{p(y)} = (p_x^*(M))_{(y,u)} \rightarrow (q_x^*(M_x))_{(y,u)} = M_x,$$

d'où un morphisme de systèmes locaux dans $\infty\text{-Cat}$ $(q_x, \varphi_x) : (x \setminus P, p_x^*(M)) \rightarrow (e, M_x)$ (cf. paragraphe 3.8). On en déduit un morphisme de complexes

$$\psi_x := C(q_x, \varphi_x) : C(x \setminus P, p_x^*(M)) \rightarrow C(e, M_x) \simeq M_x$$

(où on note également M_x le complexe concentré en degré 0 correspondant à M_x).

Lemme 6.4. — *Le morphisme de complexes $\psi_x : C(x \setminus P, p_x^*(M)) \rightarrow M_x$ est naturel en x .*

Démonstration. — Il s'agit de montrer que si $v : x \rightarrow x'$ est un morphisme de la catégorie X , alors le carré

$$\begin{array}{ccc} C(x' \setminus P, p_{x'}^*(M)) & \xrightarrow{C(q_{x'}, \varphi_{x'})} & C(e, M_{x'}) \\ \downarrow C(v \setminus P, 1_{p_{x'}^*(M)}) & & \downarrow C(1_e, M_v) \\ C(x \setminus P, p_x^*(M)) & \xrightarrow{C(q_x, \varphi_x)} & C(e, M_x) \end{array}$$

est commutatif. Or, on a des égalités de morphismes de systèmes locaux dans $\infty\text{-Cat}$ (cf. paragraphe 3.8)

$$\begin{aligned} (q_x, \varphi_x) \circ (v \setminus P, 1_{p_{x'}^*(M)}) &= (q_x \circ v \setminus P, (v \setminus P)^*(\varphi_x)) \\ (1_e, M_v) \circ (q_{x'}, \varphi_{x'}) &= (q_{x'}, q_{x'}^*(M_v) \varphi_{x'}) \end{aligned}$$

et on remarque que $q_x \circ v \setminus P = q_{x'}$, et que pour tout objet $(y, u : x' \rightarrow p(y))$ de $x' \setminus P$, $((v \setminus P)^*(\varphi_x))_{(y,u)} = (\varphi_x * v \setminus P)_{(y,u)} = \varphi_{x,(y,uv)} = M_{uv} = M_v M_u = (q_{x'}^*(M_v) \varphi_{x'})_{(y,u)}$, ce qui achève la démonstration. \square

Lemme 6.5. — *Le morphisme de complexes $\psi_x : C(x \setminus P, p_x^*(M)) \rightarrow M_x$ est un quasi-isomorphisme.*

Démonstration. — Par définition, $\psi_x = C(q_x, \varphi_x) = C(q_x, M_x) \circ C(x \setminus P, \varphi_x)$ (cf. paragraphe 3.8), et comme M est un système local (et pas seulement un système local faible), la transformation naturelle φ_x est un isomorphisme, et par suite, $C(x \setminus P, \varphi_x)$ est un isomorphisme de complexes. Il suffit donc de prouver que $C(q_x, M_x)$ est un quasi-isomorphisme, autrement dit (puisque en vertu du lemme 6.2 la ∞ -catégorie $x \setminus P$ est un polygraphe) que $H_\bullet^{\text{pol}}(q_x, M_x)$ est un isomorphisme de la catégorie dérivée des groupes abéliens. Notons $r_x : x \setminus X \rightarrow e$ le morphisme canonique et $j_x : e \rightarrow x \setminus X$ le foncteur défini par l'objet initial $(x, 1_x)$ de la catégorie $x \setminus X$. On a $q_x = r_x \circ x \setminus p$, où $x \setminus p : x \setminus P \rightarrow x \setminus X$ désigne le ∞ -foncteur induit par p , et par suite, $H_\bullet^{\text{pol}}(q_x, M_x) = H_\bullet^{\text{pol}}(r_x, M_x) \circ H_\bullet^{\text{pol}}(x \setminus p, r_x^*(M_x))$ (cf. paragraphe 3.22).

Or, la stabilité des fibrations triviales par images inverses implique que le morphisme $x \setminus p$ est une fibration triviale folk, et en particulier une équivalence folk, ce qui implique, en vertu du théorème 3.24, que $\mathbf{H}_\bullet^{\text{pol}}(x \setminus p, r_x^*(M_x))$ est un isomorphisme. Il reste à montrer que $\mathbf{H}_\bullet^{\text{pol}}(r_x, M_x)$ est un isomorphisme, ce qui résulte aussitôt du corollaire 3.28 et de la remarque 3.29, en observant que r_x est une rétraction de j_x et qu'on a une transformation naturelle canonique de $j_x r_x$ vers $1_{x \setminus X}$. \square

Démonstration du théorème 6.1. — Considérons le foncteur

$$F = F_{X,M} : \infty\text{-Cat}/X \rightarrow \text{Comp}(\text{Ab}), \quad (X', f : X' \rightarrow X) \mapsto \mathbf{C}(X', f^*(M)),$$

qui est un foncteur de Quillen à gauche (théorème 3.16), de sorte qu'on a un carré commutatif à isomorphisme près

$$\begin{array}{ccc} \text{Ho}(\underline{\text{Hom}}(X^\circ, \infty\text{-Cat}/X)) & \xrightarrow{LF_{X,M}^{X^\circ}} & \text{Ho}(\underline{\text{Hom}}(X^\circ, \text{Comp}(\text{Ab}))) \\ \text{holim} \downarrow & & \downarrow \text{holim} \\ \text{Ho}(\infty\text{-Cat}/X) & \xrightarrow{LF_{X,M}} & \text{Ho}(\text{Comp}(\text{Ab})) \end{array},$$

où $LF_{X,M}^{X^\circ}$ désigne le foncteur dérivé à gauche du foncteur

$$\underline{\text{Hom}}(X^\circ, \infty\text{-Cat}/X) \xrightarrow{F_{X,M}^{X^\circ}} \underline{\text{Hom}}(X^\circ, \text{Comp}(\text{Ab}))$$

induit par $F_{X,M}$. Or, le quasi-isomorphisme $\psi_x : \mathbf{C}(x \setminus P, p_x^*(M)) \rightarrow M_x$ du lemme 6.5 étant naturel en x (lemme 6.4) définit une équivalence faible dans la catégorie $\underline{\text{Hom}}(X^\circ, \text{Comp}(\text{Ab}))$ de source $F_{X,M}^{X^\circ}(? \setminus P)$ et de but M . Comme en vertu du lemme 6.2, $? \setminus P$ est un objet cofibrant de $\underline{\text{Hom}}(X^\circ, \infty\text{-Cat}/X)$, on a $LF_{X,M}^{X^\circ}(? \setminus P) = F_{X,M}^{X^\circ}(? \setminus P)$, et on en déduit donc un isomorphisme

$$\underline{\text{holim}} LF_{X,M}^{X^\circ}(? \setminus P) \simeq \underline{\text{holim}} M.$$

D'autre part, en vertu du lemme 6.3, on a un isomorphisme

$$LF_{X,M} \underline{\text{holim}} (? \setminus P) \simeq LF_{X,M}(P, p) = \mathbf{H}_\bullet^{\text{pol}}(X, M),$$

ce qui achève la démonstration. \square

Corollaire 6.6. — *La restriction à Cat de la classe des équivalences faibles polygraphiques de $\infty\text{-Cat}$ (cf. paragraphe 4.9) coïncide avec la classe des équivalences de Thomason de Cat.*

Démonstration. — Le corollaire résulte aussitôt de la proposition 5.1 et du théorème 6.1, qui impliquent que le morphisme de comparaison

$$\mathbf{H}_\bullet(N(X), M) \rightarrow \mathbf{H}_\bullet^{\text{pol}}(X, M),$$

pour une (1-)catégorie X et un système local M sur X , est un isomorphisme (voir le début de la section), de l'isomorphisme canonique $\Pi_1(N(X)) \simeq \Pi_1(X)$, et du théorème 1.6. \square

Scholie 6.7. — On rappelle qu'une équivalence de Thomason de ∞ -Cat est un ∞ -foncteur dont le nerf de Street est une équivalence faible simpliciale. On dispose ainsi de trois classes d'équivalences faibles dans ∞ -Cat : les classes $\mathcal{W}_{\text{folk}}$ des équivalences folk, \mathcal{W}_{pol} des équivalences polygraphiques et $\mathcal{W}_{\text{Thom}}$ des équivalences de Thomason. Le corollaire précédent signifie que $\mathcal{W}_{\text{pol}} \cap \text{Fl}(\text{Cat}) = \mathcal{W}_{\text{Thom}} \cap \text{Fl}(\text{Cat})$, où $\text{Fl}(\text{Cat})$ désigne la classe des flèches de Cat. Par ailleurs, $\mathcal{W}_{\text{folk}} \subset \mathcal{W}_{\text{pol}}$ (en vertu du théorème 3.24) et $\mathcal{W}_{\text{folk}} \subset \mathcal{W}_{\text{Thom}}$ (en vertu de la proposition 3.6.2 de [29]).

En revanche, on n'a aucune inclusion entre les classes \mathcal{W}_{pol} et $\mathcal{W}_{\text{Thom}}$, que ce soit dans un sens ou dans l'autre. En effet, soient B la « bulle », 2-catégorie ayant un seul objet, l'unité de cet objet comme seule 1-flèche et \mathbb{N} comme monoïde d'endomorphismes de cette unité, engendré par une 2-cellule x , et $f : S^2 \rightarrow B$ l'unique 2-foncteur de source la sphère S^2 (cf. paragraphe 2.1) qui envoie les deux 2-cellules non triviales de S^2 sur x . Une vérification immédiate montre que pour tout système local M sur B (qui dans ce cas est simplement un groupe abélien) le morphisme $C(f, M) : C(S^2, f^*(M)) \rightarrow C(B, M)$ est un quasi-isomorphisme, ce qui implique, puisque B et S^2 sont des polygraphes, que f est une équivalence polygraphique. Or, le type d'homotopie (du nerf) de B est un $K(\mathbb{Z}, 2)$ [4, Exemple 4.10], tandis que S^2 a le type d'homotopie d'une sphère de dimension 2 [29, 6.5.4], et par suite, f n'est pas une équivalence de Thomason.

D'autre part, le morphisme d'adjonction $g : c\text{Sd}^2\text{Ex}^2N(B) \rightarrow B$, où Sd désigne le foncteur de subdivision et Ex son adjoint à droite, est une équivalence de Thomason [9, corollaire 6.32], [3, corollaire 3.9]. Or, en vertu du théorème 4.8, l'homologie polygraphique de $c\text{Sd}^2\text{Ex}^2N(B)$ est isomorphe à l'homologie de l'ensemble simplicial $\text{Sd}^2\text{Ex}^2N(B)$, qui est isomorphe à celle de $N(B)$ (puisque Sd et Ex respectent les types d'homotopie), qui est un $K(\mathbb{Z}, 2)$. On en déduit que pour tout entier positif pair n , $H_n^{\text{pol}}(c\text{Sd}^2\text{Ex}^2N(B), \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$. En revanche, comme B est un 2-polygraphe, pour tout $n > 2$, $H_n^{\text{pol}}(B, \mathbb{Z}) = 0$, et par suite, g n'est pas une équivalence polygraphique. (Voir aussi [29, Proposition 4.5.3].)

Les équivalences polygraphiques de ∞ -Cat satisfont à un cas particulier du théorème A de Quillen ∞ -catégorique [11], [12], le même que celui satisfait par les équivalences folk [28, Proposition 9.2]. Pour le montrer, commençons par le lemme suivant :

Lemme 6.8. — Soit

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{f} & X_2 \\ & \searrow p_1 & \swarrow p_2 \\ & X & \end{array}$$

un triangle commutatif dans $\infty\text{-Cat}$. On suppose que X est une (1-)catégorie, et que pour tout objet x de X et tout système local faible (resp. système local) M_x sur $x \setminus X_2$ le morphisme $\mathbf{H}_\bullet(x \setminus f, M_x)$ de la catégorie dérivée des groupes abéliens est un isomorphisme. Alors pour tout système local faible (resp. système local) M sur X_2 le morphisme $\mathbf{H}_\bullet(f, M)$ est un isomorphisme.

Esquisse de preuve. — Soit donc M un système local faible (resp. système local) sur X_2 et considérons le foncteur

$$F = F_{X_2, M} : \infty\text{-Cat}/X_2 \rightarrow \text{Comp}(\text{Ab}), \quad (X', p : X' \rightarrow X_2) \mapsto \mathbf{C}(X', p^*(M)),$$

qui est un foncteur de Quillen à gauche (théorème 3.16), de sorte qu'on a un carré commutatif à isomorphisme près

$$\begin{array}{ccc} \text{Ho}(\underline{\text{Hom}}(X^\circ, \infty\text{-Cat}/X_2)) & \xrightarrow{LF_{X_2, M}^{X^\circ}} & \text{Ho}(\underline{\text{Hom}}(X^\circ, \text{Comp}(\text{Ab}))) \\ \text{holim} \downarrow & & \downarrow \text{holim} \\ \text{Ho}(\infty\text{-Cat}/X_2) & \xrightarrow{LF_{X_2, M}} & \text{Ho}(\text{Comp}(\text{Ab})) \end{array},$$

où $LF_{X_2, M}^{X^\circ}$ désigne le foncteur dérivé à gauche du foncteur

$$\underline{\text{Hom}}(X^\circ, \infty\text{-Cat}/X_2) \xrightarrow{F_{X_2, M}^{X^\circ}} \underline{\text{Hom}}(X^\circ, \text{Comp}(\text{Ab}))$$

induit par $F_{X_2, M}$. L'hypothèse du lemme implique que l'image par $LF_{X_2, M}^{X^\circ}$ du morphisme $? \setminus X_1 \rightarrow ? \setminus X_2$ de $\underline{\text{Hom}}(X^\circ, \infty\text{-Cat}/X_2)$, induit par f , est un isomorphisme de $\text{Ho}(\underline{\text{Hom}}(X^\circ, \text{Comp}(\text{Ab})))$. Or, comme X est une (1-)catégorie, en vertu du dual du théorème 7.10 de [28] et du lemme 5.2, l'image par la flèche verticale de gauche de ce morphisme s'identifie à f , vu comme morphisme au-dessus de X_2 . On en déduit que l'image de ce dernier par $LF_{X_2, M}$ est un isomorphisme, ce qui prouve le lemme (cf. remarque 3.23). \square

Proposition 6.9. — *Soit*

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{f} & X_2 \\ & \searrow p_1 & \swarrow p_2 \\ & X & \end{array}$$

un triangle commutatif dans $\infty\text{-Cat}$. On suppose que X est une (1-)catégorie. Alors si pour tout objet x de X le ∞ -foncteur $x \setminus f : x \setminus X_1 \rightarrow x \setminus X_2$ est une équivalence polygraphique, il en est de même de f .

Démonstration. — En vertu du dual du lemme 7.5 de [28], X étant une (1-)catégorie, pour tout ∞ -foncteur $p : X' \rightarrow X$, on a un isomorphisme $\varinjlim_{x \in X} x \setminus X' \simeq X'$ naturel en X . Comme le foncteur Π_1 commute aux limites inductives, l'hypothèse que pour

tout objet x de X le morphisme $\Pi_1(x \setminus f)$ est un isomorphisme, implique donc qu'il en est de même de $\Pi_1(X)$. La proposition résulte donc du lemme 6.8. \square

Remarque 6.10. — En vertu du théorème 7.7 de [12], la proposition précédente (en tenant compte des propositions 4.11 et 4.14) implique qu'on a une assertion analogue pour un 2-triangle de la forme

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{f} & X_2 \\ & \searrow p_1 & \nearrow p_2 \\ & X & \end{array},$$

où α est une transformation oplax (et X toujours une (1-)catégorie).

Remarque 6.11. — On rappelle qu'un localisateur fondamental de $\infty\text{-Cat}$ [5, paragraphe 6.2.1] est une classe \mathcal{W} de flèches de $\infty\text{-Cat}$ satisfaisant les conditions suivantes :

- (a) \mathcal{W} est faiblement saturée, c'est-à-dire contient les identités, vérifie la propriété du deux sur trois et contient les ∞ -foncteurs j admettant une rétraction r telle que jr soit dans \mathcal{W} ;
- (b) pour toute ∞ -catégorie C , le ∞ -foncteur de « projection » $D_1 \otimes C \rightarrow C$ appartient à \mathcal{W} ;
- (c) pour tout triangle commutatif de ∞ -foncteurs

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{f} & X_2 \\ & \searrow p_1 & \nearrow p_2 \\ & X & \end{array}$$

si pour tout objet x de X le ∞ -foncteur $x \setminus f : x \setminus X_1 \rightarrow x \setminus X_2$, induit par f , est dans \mathcal{W} , il en est de même de f .

La classe $\mathcal{W}_{\text{Thom}}$ des équivalences de Thomason dans $\infty\text{-Cat}$ est un localisateur fondamental de $\infty\text{-Cat}$ [5, proposition 6.2.3], et on conjecture qu'il s'agit du plus petit. En vertu des propositions 4.11 et 4.12, et du corollaire 4.15, la classe \mathcal{W}_{pol} des équivalences polygraphiques satisfait aux conditions (a) et (b) ci-dessus. La proposition 6.9 montre qu'elle satisfait également la condition (c) dans le cas particulier où X est une (1-)catégorie (on dira que \mathcal{W}_{pol} forme un 1-localisateur fondamental de $\infty\text{-Cat}$). En revanche, il ne semble pas que \mathcal{W}_{pol} soit un localisateur fondamental, puisque en vertu du scholie 6.7, cela contredirait la conjecture de minimalité de $\mathcal{W}_{\text{Thom}}$.

Appendice A

Une adjonction

A.1. — Dans ce qui suit, on fixe une ∞ -catégorie X et un système local faible M sur X . On va montrer que le foncteur

$$F = F_{X,M} : \infty\text{-Cat}/X \rightarrow \text{Comp}(\text{Ab})$$

associant à une ∞ -catégorie $(X', p : X' \rightarrow X)$ au-dessus de X le complexe de groupes abéliens $C(X', p^*(M))$ admet un adjoint à droite. Commençons par définir un foncteur dans l'autre sens $G = G_{X,M} : \text{Comp}(\text{Ab}) \rightarrow \infty\text{-Cat}/X$. Soit N un complexe de groupes abéliens

$$\dots \xrightarrow{d_{n+1}} N_n \xrightarrow{d_n} N_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \dots \xrightarrow{d_2} N_1 \xrightarrow{d_1} N_0 \ .$$

On définit une ∞ -catégorie $G(N)$ comme suit :

— Pour $n \geq 0$, une n -cellule de $G(N)$ est un couple (x, U) , $x \in X_n$ et

$$U = \begin{pmatrix} u_0^0 & u_1^0 & \cdots & u_{n-1}^0 & u_n \\ u_0^1 & u_1^1 & \cdots & u_{n-1}^1 & u_n \end{pmatrix},$$

où, en posant $u_n^0 = u_n^1 = u_n$,

$$u_i^0 : M_{t_0(s_i x)} \rightarrow N_i, \quad u_i^1 : M_{t_0(t_i x)} \rightarrow N_i, \quad 0 \leq i \leq n,$$

sont des morphismes de groupes abéliens satisfaisant aux conditions :

$$\begin{aligned} d_i \circ u_i^\varepsilon &= u_{i-1}^1 - u_{i-1}^0, & 1 < i \leq n, \\ d_1 \circ u_1^\varepsilon &= u_0^1 - u_0^0 \circ t_1(x)^*. \end{aligned}$$

Ces formules ont un sens car on observe qu'en vertu des relations globulaires, pour $0 \leq i \leq n$, $\varepsilon = 0, 1$, et $(i, \varepsilon) \neq (0, 0)$, tous les morphismes u_i^ε ont même source $M_{t_0 x}$, la source de u_0^0 étant $M_{s_0 x}$.

— Les sources et buts sont définis par

$$\begin{aligned} s_{n-1}(x, U) &= (s_{n-1}x, s_{n-1}U), & s_{n-1}U &= \begin{pmatrix} u_0^0 & \cdots & u_{n-2}^0 & u_{n-1}^0 \\ u_0^1 & \cdots & u_{n-2}^1 & u_{n-1}^1 \end{pmatrix}, \\ t_{n-1}(x, U) &= (t_{n-1}x, t_{n-1}U), & t_{n-1}U &= \begin{pmatrix} u_0^0 & \cdots & u_{n-2}^0 & u_{n-1}^1 \\ u_0^1 & \cdots & u_{n-2}^1 & u_{n-1}^1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

— Les unités sont définies par

$$1_{(x, U)} = (1_x, 1_U), \quad 1_U = \begin{pmatrix} u_0^0 & \cdots & u_{n-1}^0 & u_n & \\ u_0^1 & \cdots & u_{n-1}^1 & u_n & 0 \end{pmatrix}.$$

— Les compositions entre cellules composables sont définies par

$$(y, V) *_i (x, U) = (y *_i x, V *_i U),$$

où, pour $0 < i < n$,

$$V *_i U = \begin{pmatrix} u_0^0 & \cdots & u_i^0 & v_{i+1}^0 + u_{i+1}^0 & \cdots & v_{n-1}^0 + u_{n-1}^0 & v_n + u_n \\ v_0^1 & \cdots & v_i^1 & v_{i+1}^1 + u_{i+1}^1 & \cdots & v_{n-1}^1 + u_{n-1}^1 & v_n + u_n \end{pmatrix},$$

et, pour $i = 0$,

$$V *_0 U = \begin{pmatrix} u_0^0 & v_1^0 + u_1^0 \circ t_1(y)^* & \cdots & v_{n-1}^0 + u_{n-1}^0 \circ t_1(y)^* & v_n + u_n \circ t_1(y)^* \\ v_0^1 & v_1^1 + u_1^1 \circ t_1(y)^* & \cdots & v_{n-1}^1 + u_{n-1}^1 \circ t_1(y)^* & v_n + u_n \circ t_1(y)^* \end{pmatrix}.$$

Il est immédiat que ces formules définissent bien des cellules de $G(N)$, la seule vérification non tautologique étant que pour ce dernier tableau $V *_0 U$ on a la compatibilité à la différentielle pour les termes de degré 1 :

$$\begin{aligned} d_1(v_1^{\varepsilon} + u_1^{\varepsilon} \circ t_1(y)^*) &= v_0^1 - v_0^0 \circ t_1(y)^* + u_0^1 \circ t_1(y)^* - u_0^0 \circ t_1(y)^* \circ t_1(x)^* \\ &= v_0^1 - u_0^0 \circ t_1(x *_0 y)^* \end{aligned}$$

(la dernière égalité venant du fait que comme (x, U) et (y, V) sont 0-composables, on a $u_0^1 = v_0^0$). La vérification des axiomes des ∞ -catégories est fastidieuse, mais directe. La projection $(x, U) \mapsto x$ définit un ∞ -foncteur $G(N) \rightarrow X$ et on obtient ainsi un foncteur $G : \text{Comp}(\text{Ab}) \rightarrow \infty\text{-Cat}/X$.

On définit un morphisme de foncteurs $\eta : 1_{\infty\text{-Cat}/X} \rightarrow GF$ comme suit. Soient $(X', p : X' \rightarrow X)$ une ∞ -catégorie au-dessus de X et N le complexe $N = F(X', p) = C(X', p^*(M))$. Il s'agit de définir un ∞ -foncteur $\eta_{(X', p)} : X' \rightarrow G(N)$ au-dessus de X , naturel en (X', p) . Soient $n \geq 0$ et x' une n -cellule de X' . On pose

$$\eta_{(X', p)}(x') = (p(x'), U_{x'}),$$

où

$$U_{x'} = \begin{pmatrix} u_{0,x'}^0 & u_{1,x'}^0 & \cdots & u_{n-1,x'}^0 & u_{n,x'} \\ u_{0,x'}^1 & u_{1,x'}^1 & \cdots & u_{n-1,x'}^1 & u_{n,x'} \end{pmatrix},$$

le morphisme $u_{i,x'}^0 : M_{t_0(s_i p(x'))} \rightarrow N_i$ (resp. $u_{i,x'}^1 : M_{t_0(t_i p(x'))} \rightarrow N_i$), pour $0 \leq i \leq n$, étant le composé

$$M_{p(t_0 y')} \hookrightarrow \bigoplus_{y' \in X'_i} M_{p(t_0 y')} \rightarrow C_i(X', p^*(M)) = N_i$$

de l'inclusion canonique correspondant à $y' = s_i(x')$ (resp. à $y' = t_i(x')$), suivie de la surjection canonique (en remarquant que, pour $i = n$, on a $u_{n,x'}^0 = u_{n,x'}^1$ et en posant $u_{n,x'} = u_{n,x'}^0 = u_{n,x'}^1$). On laisse au lecteur le soin de vérifier qu'on obtient bien ainsi un ∞ -foncteur, $\eta_{(X', p)} : X' \rightarrow G(N)$ naturel en (X', p) .

De même, on définit un morphisme de foncteurs $\varepsilon : FG \rightarrow 1_{\text{Comp}(\text{Ab})}$ comme suit. Soient N un complexe de groupes abéliens et $(X', p : X' \rightarrow X) = G(N)$. Il s'agit de définir un morphisme de complexes $\varepsilon_N : C(X', p^*(M)) \rightarrow N$, naturel en N . Soit

$n \geq 0$. On définit un morphisme de groupes abéliens $\varepsilon_{N,n} : C_n(X', p^*(M)) \rightarrow N_n$ en posant, pour (x, U, m) un générateur de $C_n(X', p^*(M))$, autrement dit, $x \in X_n$,

$$U = \begin{pmatrix} u_0^0 & u_1^0 & \cdots & u_{n-1}^0 & \\ u_0^1 & u_1^1 & \cdots & u_{n-1}^1 & u_n \end{pmatrix},$$

$$u_i^0 : M_{t_0(s_i x)} \rightarrow N_i, \quad u_i^1 : M_{t_0(t_i x)} \rightarrow N_i, \quad 0 \leq i \leq n,$$

(toujours avec la convention $u_n^0 = u_n^1 = u_n$), et $m \in M_{t_0 x}$,

$$\varepsilon_{N,n}(x, U, m) = u_n(m).$$

La compatibilité aux relations $(*_i)$, $0 \leq i < n$, et aux différentielles, ainsi que la naturalité en N sont tautologiques.

Théorème A.2. — *Le couple des foncteurs*

$$F : \infty\text{-Cat}/X \rightarrow \text{Comp}(\text{Ab}), \quad G : \text{Comp}(\text{Ab}) \rightarrow \infty\text{-Cat}/X$$

est un couple de foncteurs adjoints.

Démonstration. — Une vérification facile laissée au lecteur montre que les morphismes de foncteurs ε et η satisfont aux égalités triangulaires. \square

Appendice B

Homologie et version abélienne de la construction de Grothendieck ∞ -catégorique

On rappelle que le foncteur d'oubli $\text{Ab} \rightarrow \text{Ens}$ de la catégorie des groupes abéliens vers celle des ensembles admet un adjoint à gauche L , le *foncteur d'abélianisation* associant à un ensemble le groupe abélien libre engendré par cet ensemble. De même, le foncteur d'oubli $\infty\text{-Cat}(\text{Ab}) \rightarrow \infty\text{-Cat}$ des objets ∞ -catégories dans Ab vers celle des ∞ -catégories admet un foncteur adjoint à gauche noté aussi L et appelé *foncteur d'abélianisation*. On rappelle également que la catégorie $\infty\text{-Cat}(\text{Ab})$ est canoniquement équivalente à celle des complexes de chaînes de groupes abéliens $\text{Comp}(\text{Ab})$ [16]. Modulo cette identification le foncteur d'abélianisation n'est autre que le foncteur

$$\infty\text{-Cat} \rightarrow \text{Comp}(\text{Ab}), \quad X \mapsto C(X, \mathbb{Z})$$

(cf. paragraphe 3.2), où \mathbb{Z} désigne le système local constant de valeur \mathbb{Z} [48], [28].

Il n'est pas vrai que, pour un système local faible ou même un système local M arbitraire sur une ∞ -catégorie X , le complexe $C(X, M)$ soit toujours obtenu comme l'abélianisation d'une ∞ -catégorie. En effet, le groupe abélien $C_0(X, M)$ n'est pas en général un \mathbb{Z} -module libre. Néanmoins, cela est vrai dans le cas particulier important où le ∞ -foncteur $M : X^\circ \rightarrow \text{Ab}$ se factorise par le foncteur d'abélianisation $L : \text{Ens} \rightarrow \text{Ab}$.

En effet, soit $E : X^\circ \rightarrow \text{Ens}$ un ∞ -foncteur. Cela revient à se donner pour tout objet x de X , un ensemble E_x et pour toute 1-flèche $x : x_0 \rightarrow x_1$ de X , une application $x^* = E_x : E_{x_1} \rightarrow E_{x_0}$ tels que pour toute 2-flèche $x : x_0 \Rightarrow x_1$ de X , on ait $x_0^* = x_1^*$, pour tout couple de 1-flèches composables x_0, x_1 de X , on ait $(x_1 * x_0)^* = x_0^* x_1^*$, et pour tout objet x de X , on ait $1_x^* = 1_{E_x}$. On définit une ∞ -catégorie $\int E$ comme suit : Pour $n \geq 0$, une n -cellule de $\int E$ est un couple (x, a) , avec $x \in X_n$ et $a \in E_{t_0 x}$. Pour $n > 0$, les buts et sources d'une telle cellule sont définis par les formules :

$$t_{n-1}(x, a) = (t_{n-1}(x), a), \quad s_{n-1}(x, a) = \begin{cases} (s_{n-1}(x), a), & n > 1, \\ (s_0(x), x^*(a)), & n = 1, \end{cases}$$

et pour $n \geq 0$, l'unité est définie par la formule $1_{(x,a)} = (1_x, a)$. Si (x_0, a_0) et (x_1, a_1) sont deux n -cellules i -composables, pour $0 \leq i < n$, leur composé est donné par

$$(x_1, a_1) *_i (x_0, a_0) = (x_1 *_i x_0, a_1),$$

où on remarque que si $i > 0$, alors $a_0 = a_1$, et si $i = 0$, on a $a_0 = t_1(x_1)^*(a_1)$. Si M désigne le système local faible composé

$$X^\circ \xrightarrow{E} \text{Ens} \xrightarrow{L} \text{Ab}$$

du foncteur E suivi du foncteur d'abélianisation, on vérifie aussitôt que le complexe $C(X, M)$ est l'abélianisation de la ∞ -catégorie $\int E$.

La formation de $\int E$ est un cas très dégénéré de la construction de Grothendieck ∞ -catégorique [54], [7], où le ∞ -foncteur $X \rightarrow \infty\text{-Cat}$ est à valeurs des ∞ -catégories discrètes, c'est-à-dire des ensembles. Ainsi, la formation du complexe $C(X, M)$, pour un système local faible M général, peut être vue comme une variante abélienne de cette construction, où les groupes abéliens M_x sont considérés comme objets ∞ -catégoriques *discrètes* de Ab , autrement dit, comme complexes réduits en degré 0.

Appendice C

Homologie polygraphique d'une ∞ -catégorie faible

On ne rappellera pas ici la définition des cohérateurs. On renvoie le lecteur à [40], [41], [2].

Fixons un cohérateur de ∞ -catégories C . On rappelle que les objets de C sont les sommes globulaires de la forme

$$D_{i_1} \amalg_{D_{i'_1}} D_{i_2} \amalg_{D_{i'_2}} \cdots \amalg_{D_{i'_{n-1}}} D_{i_n}$$

et qu'une ∞ - C -catégorie est un préfaisceau sur C transformant les sommes globulaires en produits fibrés. Les préfaisceaux représentables, et en particulier les disques D_n , $n \geq 0$, sont des ∞ - C -catégories. La catégorie ∞ - C - Cat des ∞ - C -catégories est la sous-catégorie pleine de \widehat{C} formée des ∞ - C -catégories. On a donc des inclusions

$$C \hookrightarrow \infty\text{-}C\text{-Cat} \hookrightarrow \widehat{C}.$$

Pour $n > 0$, la sphère S^{n-1} est le sous-préfaisceau de D_n dont les sections se factorisent par la cosource ou le cobut de D_n , et S^{-1} est le préfaisceau vide sur C . Les polygraphes faibles se définissent de façon parfaitement analogue aux polygraphes stricts. Une résolution polygraphique d'une ∞ - C -catégorie X est un morphisme $p : P \rightarrow X$ de ∞ - C -Cat de source un polygraphe faible ayant la propriété de relèvement à droite relativement aux inclusions $S^{n-1} \hookrightarrow D_n$. L'argument du petit objet montre que toute ∞ - C -catégorie admet une résolution polygraphique.

Dimitri Ara a construit dans [2], pour tout cohérateur de ∞ -catégories C , un foncteur canonique $u : C \rightarrow \Theta$ de but la catégorie Θ de Joyal [33], [38], [15], [21] induisant l'identité sur les objets. Ce foncteur permet d'associer à toute ∞ -catégorie stricte X (vue comme un préfaisceau sur Θ transformant les sommes globulaires en produits fibrés) une ∞ - C -catégorie $u^*(X) = X \circ u^\circ$, définissant ainsi un foncteur pleinement fidèle $u^* : \infty\text{-Cat} \rightarrow \infty\text{-}C\text{-Cat}$ pouvant être considéré comme une inclusion. Ce foncteur admet un adjoint à gauche $u_! : \infty\text{-}C\text{-Cat} \rightarrow \infty\text{-Cat}$, le *foncteur de strictification*.

Le groupoïde fondamental d'une ∞ - C -catégorie X peut être défini comme pour les ∞ -catégories strictes, mais une définition équivalente plus rapide consiste à poser $\Pi_1(X) := \Pi_1(u_!(X))$. Un *système local* sur X est un foncteur contravariant $M : \Pi_1(X)^\circ \rightarrow \text{Ab}$, ou de façon équivalente un système local sur la ∞ -catégorie stricte $u_!(X)$. De même, la catégorie fondamentale d'une ∞ - C -catégorie X peut être définie directement, ou plus rapidement comme étant celle de $u_!(X)$, et un *système local faible* sur X comme étant un système local faible sur $u_!(X)$.

Soient X une ∞ - C -catégorie et M un système local faible. On définit l'homologie polygraphique de X à coefficients dans M , en choisissant une résolution polygraphique $p : P \rightarrow X$ de X dans ∞ - C -Cat et en posant dans la catégorie dérivée des groupes abéliens

$$\mathbf{H}_\bullet^{\text{pol}}(X, M) := \mathbf{H}_\bullet^{\text{pol}}(u_!(P), p^*(M)).$$

Autrement dit, l'homologie polygraphique de la ∞ - C -catégorie X à coefficients dans le système local faible M est l'homologie polygraphique de la strictification d'une résolution polygraphique faible de M . Puisque le foncteur $u_!$ commute aux limites inductives, cette strictification est un polygraphe (strict), et son homologie polygraphique est donc définie par le complexe $C(u_!(P), p^*(M))$.

Conjecture C.1. — *L'homologie polygraphique $\mathbf{H}_\bullet^{\text{pol}}(X, M)$ est indépendante, à isomorphisme canonique près, de la résolution choisie.*

Soit maintenant X une ∞ -catégorie stricte et M un système local faible sur X . L'homologie polygraphique de X , vue comme ∞ -catégorie faible, autrement dit celle de $u^*(X)$, est donc définie en choisissant une résolution polygraphique $p : P \rightarrow u^*(X)$ de $u^*(X)$ dans ∞ - C -Cat et en posant $\mathbf{H}_\bullet^{\text{pol}}(u^*(X), M) = \mathbf{H}_\bullet^{\text{pol}}(u_!(P), p^*(M))$. Le

composé

$$u_!(P) \xrightarrow{u_!(p)} u_!u^*(X) \longrightarrow X$$

de $u_!(p)$ suivi du foncteur d'adjonction définit un morphisme canonique dans la catégorie dérivée des groupes abéliens $H_{\bullet}^{\text{pol}}(u^*(X), M) \rightarrow H_{\bullet}^{\text{pol}}(X, M)$.

Conjecture C.2. — *On a un isomorphisme canonique dans la catégorie dérivée des groupes abéliens $H_{\bullet}^{\text{pol}}(u^*(X), M) \simeq H_{\bullet}(X, M)$ identifiant le morphisme canonique ci-dessus au morphisme de comparaison $H_{\bullet}(X, M) \rightarrow H_{\bullet}^{\text{pol}}(X, M)$ de la section 6.*

En d'autres termes, l'homologie polygraphique d'une ∞ -catégorie stricte vue comme ∞ -catégorie faible est isomorphe à sa « vraie » homologie.

On définit la classe des équivalences polygraphiques de ∞ -C-Cat exactement comme celles de ∞ -Cat : un morphisme $f : X' \rightarrow X$ de ∞ -C-Cat est une *équivalence polygraphique* si f induit une équivalence des groupoïdes fondamentaux et si pour tout système local M sur X le morphisme

$$H_{\bullet}^{\text{pol}}(f, M) : H_{\bullet}^{\text{pol}}(X', f^*(M)) \rightarrow H_{\bullet}^{\text{pol}}(X, M)$$

est un isomorphisme dans la catégorie dérivée des groupes abéliens.

On dit qu'un morphisme $f : X' \rightarrow X$ de ∞ -C-Cat est une *équivalence de Thomason* si le foncteur $C/X' \rightarrow C/X$, induit par f , entre les catégories des éléments de X' et X , vues comme préfaisceaux sur C , est une équivalence de Thomason de Cat. Cette définition est raisonnable car conjecturalement tout cohérateur est une catégorie test, de sorte que \widehat{C} modélise les types d'homotopie et l'inclusion ∞ -C-Cat $\hookrightarrow \widehat{C}$ peut être vue comme un foncteur nerf, analogue au nerf cellulaire pour les ∞ -catégories strictes.

Conjecture C.3. — *La classe des équivalences polygraphiques de ∞ -C-Cat coïncide avec la classe des équivalences de Thomason.*

Références

- [1] F. A. AL-AGL & R. STEINER — « Nerves of multiple categories », *Proc. London Math. Soc. (3)* **66** (1993), no. 1, p. 92–128.
- [2] D. ARA — « Sur les ∞ -groupoïdes de Grothendieck et une variante ∞ -catégorique », Thèse, Université Paris Diderot — Paris 7, 2010, accessible à <http://www.normalesup.org/~ara/files/these.pdf>.
- [3] ———, « Structures de catégorie de modèles à la Thomason sur la catégorie des 2-catégories strictes », *Cah. Topol. Géom. Différ. Catég.* **56** (2015), no. 2, p. 83–108.
- [4] ———, « A Quillen theorem B for strict ∞ -categories », *J. Lond. Math. Soc. (2)* **100** (2019), no. 2, p. 470–497.
- [5] ———, « Théorie de l'homotopie des ∞ -catégories strictes », Mémoire d'habilitation, 2023, accessible à <http://www.normalesup.org/~ara/files/hdr.pdf>.
- [6] D. ARA, A. BURRONI, Y. GUIRAUD, P. MALBOS, F. MÉTAYER & S. MIMRAM — « Polygraphs : from Rewriting to Higher Categories », Livre en préparation, arXiv:2312.00429, 2023.

- [7] D. ARA, A. GAGNA & L. GUETTA – « Homotopical properties of the Grothendieck construction for strict ω -categories », En préparation, 2023.
- [8] D. ARA & M. LUCAS – « The folk model category structure on strict ω -categories is monoidal », *Theory Appl. Categ.* **35** (2020), p. 745–808.
- [9] D. ARA & G. MALTSINIOTIS – « Vers une structure de catégorie de modèles à la Thomason sur la catégorie des n -catégories strictes », *Adv. Math.* **259** (2014), p. 557–654.
- [10] ———, « Le type d’homotopie de la ∞ -catégorie associée à un complexe simplicial », Prépublication, arXiv:1503.02720, 2015.
- [11] ———, « Un théorème A de Quillen pour les ∞ -catégories strictes I : la preuve simpliciale », *Adv. Math.* **328** (2018), p. 446–500.
- [12] ———, « Un théorème A de Quillen pour les ∞ -catégories strictes II : la preuve ∞ -catégorique », *High. Struct.* **4** (2020), no. 1, p. 284–388.
- [13] ———, « Joint et tranches pour les ∞ -catégories strictes », *Mém. Soc. Math. Fr. (N.S.)* (2020), no. 165, p. vi + 213.
- [14] ———, « Comparaison des nerfs n -catégoriques », *Algebr. Geom. Topol.* **22** (2022), no. 6, p. 2867–2914.
- [15] C. BERGER – « Iterated wreath product of the simplex category and iterated loop spaces », *Adv. Math.* **213** (2007), p. 230–270.
- [16] D. BOURN – « Another denormalization theorem for abelian chain complexes », *J. Pure Appl. Algebra* **66** (1990), p. 229–249.
- [17] A. BURRONI – « Higher-dimensional word problem », in *Category theory and computer science*, Lecture Notes in Comput. Sci., vol. 530, Springer, 1991, p. 94–105.
- [18] ———, « Higher-dimensional word problems with applications to equational logic », *Theoret. Comput. Sci.* **115** (1993), no. 1, p. 43–62.
- [19] H. CARTAN & S. EILENBERG – *Homological algebra*, Princeton University Press, 1956.
- [20] D.-C. CISINSKI – *Les préfaisceaux comme modèles des types d’homotopie*, Astérisque 308, Société Mathématique de France, 2006.
- [21] D.-C. CISINSKI & G. MALTSINIOTIS – « La catégorie Θ de Joyal est une catégorie test », *J. Pure Appl. Algebra* **215** (2011), no. 5, p. 962–982.
- [22] S. CRANS – « On combinatorial models for higher dimensional homotopies », Thèse, Universiteit Utrecht, 1995.
- [23] J. F. DAVIS & P. KIRK – *Lecture notes in algebraic topology*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 35, American Mathematical Society, 2001.
- [24] P. GABRIEL & M. ZISMAN – *Calculus of fractions and homotopy theory*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 35, Springer-Verlag, 1967.
- [25] A. GAGNA – « Strict n -categories and augmented directed complexes model homotopy types », *Adv. Math.* **331** (2018), p. 542–564.
- [26] A. GROTHENDIECK – « Techniques de construction et théorèmes d’existence en géométrie algébrique. III. Préschémas quotients », Séminaire Bourbaki, 13e année, 1960/61, no 212, Février 1961.
- [27] ———, « *Pursuing Stacks, Volume I* », Documents Mathématiques, vol. 20, Société Mathématique de France, 2022, tapuscrit de 1983, édité par G. Maltsiniotis.
- [28] L. GUETTA – « Homology of categories via polygraphic resolutions », *J. Pure Appl. Algebra* **225** (2021), no. 10.
- [29] ———, « Homology of strict ω -categories », Thèse, Université de Paris, 2021.
- [30] A. HATCHER – *Algebraic topology*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

- [31] P. S. HIRSCHHORN – *Model categories and their localizations*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 99, American Mathematical Society, 2003.
- [32] M. HOVEY – *Model categories*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 63, American Mathematical Society, 1999.
- [33] A. JOYAL – « Disks, duality and Θ -categories », Prépublication, 1997.
- [34] Y. LAFONT & F. MÉTAYER – « Polygraphic resolutions and homology of monoids », *J. Pure Appl. Algebra* **213** (2009), no. 6, p. 947–968.
- [35] Y. LAFONT, F. MÉTAYER & K. WORYTKIEWICZ – « A folk model structure on omega-cat », *Adv. Math.* **224** (2010), no. 3, p. 1183–1231.
- [36] F. LOUBATON – « Conditions de Kan sur les nerfs des ω -catégories », *Bull. Soc. Math. France* **151** (2023), no. 2, p. 331–406.
- [37] M. MAKKAI – « The word problem for computads », Prépublication, 2005.
- [38] M. MAKKAI & M. ZAWADOWSKI – « Duality for simple ω -categories and disks », *Theory Appl. Categ.* **8** (2001), p. 114–243.
- [39] G. MALTSINIOTIS – *La théorie de l’homotopie de Grothendieck*, Astérisque 301, Société Mathématique de France, 2005.
- [40] ———, « Infini catégories non strictes, une nouvelle définition », Prépublication, 2007, <https://webusers.imj-prg.fr/~georges.maltsiniotis>.
- [41] ———, « Grothendieck ∞ -groupoids and still another definition of ∞ -categories », Prépublication, arXiv:1009.2331, 2010.
- [42] F. MÉTAYER – « Resolutions by polygraphs », *Theory Appl. Categ.* **11** (2003), no. 7, p. 148–184.
- [43] ———, « Cofibrant objects among higher-dimensional categories », *Homology Homotopy Appl.* **10** (2008), no. 1, p. 181–203.
- [44] D. QUILLEN – *Homotopical algebra*, Lecture Notes in Math., vol. 43, Springer-Verlag, 1967.
- [45] ———, « Higher algebraic K -theory. I », in *Algebraic K-theory, I : Higher K-theories* (Proc. Conf., Battelle Memorial Inst., Seattle, Wash., 1972), Lecture Notes in Math., vol. 341, 1973, p. 85–147.
- [46] N. E. STEENROD – « Topological methods for the construction of tensor functions », *Ann. of Math. (2)* **43** (1942), p. 116–131.
- [47] ———, « Homology with local coefficients », *Ann. of Math. (2)* **44** (1943), p. 610–627.
- [48] R. STEINER – « Omega-categories and chain complexes », *Homology, Homotopy and Applications* **6** (2004), no. 1, p. 175–200.
- [49] R. STREET – « Limits indexed by category-valued 2-functors », *J. Pure Appl. Algebra* **8** (1976), no. 2, p. 149–181.
- [50] ———, « The algebra of oriented simplexes », *J. Pure Appl. Algebra* **49** (1987), no. 3, p. 283–335.
- [51] ———, « Fillers for nerves », in *Categorical algebra and its applications (Lowain-La-Neuve, 1987)*, Lecture Notes in Math., vol. 1348, Springer, Berlin, 1988, p. 337–341.
- [52] R. THOMASON – « Homotopy colimits in the category of small categories », *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **85** (1979), no. 1, p. 91–109.
- [53] ———, « Cat as a closed model category », *Cahiers Topologie Géom. Différentielle* **21** (1980), no. 3, p. 305–324.
- [54] M. A. WARREN – « Homotopy theoretic aspects of constructive type theory », Thèse, Carnegie Mellon University, 2008.

LÉONARD GUETTA, Universiteit Utrecht, Nederland • *E-mail* : l.s.guetta@uu.nl
Url : <https://leoguetta.github.io/>

GEORGES MALTSINIOTIS, CNRS IMJ-PRG, Université Paris Cité, France
E-mail : georges.maltsiniotis@imj-prg.fr
Url : <https://webusers.imj-prg.fr/~georges.maltsiniotis/>