Traces dans les catégories monoïdales, dualité, et catégories monoïdales fibrées.

G. MALTSINIOTIS

Abstract

The aim of this paper is the study of a class of monoidal or tensor categories in which the notion of trace of an endomorphism is defined. These categories are called sovereign. A sovereign category is a tensor category in which every object has a left and a right dual and in which a natural isomorphism between left and right duals is given. This natural isomorphism, called a sovereign structure, must satisfy some compatibility conditions with respect to the tensor product. The importance of the notion of a trace in a tensor category lies in the fact that such a trace is used in order to define isotopy invariants of links.

§ 0. Introduction.

Depuis la découverte du polynôme de Jones [**Jo**] et le développement de la théorie des groupes quantiques [**Dr, J1, J2, Wo, Ka**], l'intérêt porté aux catégories monoïdales est allé en grandissant. Soient $\mathcal{V}$ une catégorie monoïdale autonome (dont tout objet possède un dual), munie d'un tressage [**JS1**] et d'une torsion ("twist") compatible à la dualité (un "tortil", dans la terminologie de Yetter [**Ye**], ou "ribbon category", dans celle de Turaev [**T3, KT**]) et I l'objet unité de $\mathcal{V}$. A tout objet de $\mathcal{V}$, on associe un invariant d'entrelacs en rubans ("framed links") qui vit dans $\mathsf{End}(I)$ [**Sh, FY1, T1, T2, RT1**]. La catégorie des représentations d'un groupe quantique est un tortil et, dans ce cas, $\mathsf{End}(I)$ est réduit aux scalaires. On associe ainsi, à toute représentation d'un groupe quantique, un invariant scalaire d'entrelacs en rubans, qui est une fonction du paramètre de déformation du groupe quantique. Si l'on applique ce procédé au groupe quantique $SL_q(2)$ et sa représentation fondamentale, on obtient ainsi une fonction qui est un polynôme de Laurent et s'appelle le polynôme de Jones $V(q)$. Quand q est une racine de l'unité, ses invariants permettent par chirurgie de définir des invariants numériques des variétés de dimension 3 [**RT2, T3, T4, T6, BHMV1, BHMV2**]. Cette construction est également purement catégorique et garde un sens pour toute catégorie modulaire (notion introduite par Turaev) [**T3, Lyu**]. Une variante, due à Turaev et Viro [**TV, T5**], permet de construire des invariants liés aux précédents en utilisant des triangulations, plutôt que la chirurgie.

Dans toutes ces constructions, un outil fondamental est la notion de trace d'un endomorphisme, notion définie dans un tortil. Or, il s'avère que la notion de trace garde un sens dans une catégorie autonome, non nécessairement tressée, pourvu que cette dernière soit munie d'une structure souveraine. On appelle ainsi la donnée, pour tout objet de la catégorie, d'un isomorphisme du dual à droite vers le dual à gauche, ces isomorphismes satisfaisant à des axiomes de fonctorialité et de compatibilité au produit tensoriel [**Ye**]. L'ennui est que le dual à gauche (ou à droite) n'est défini qu'à isomorphisme près, et qu'il est plus naturel de définir une catégorie autonome comme étant une catégorie monoïdale dont tout objet *possède* un dual à gauche et un dual à droite, plutôt qu'une catégorie monoïdale *munie* du choix, pour chaque objet, d'un dual à gauche et d'un dual à droite.

L'origine de ce travail a été la volonté de résoudre cette difficulté conceptuelle en utilisant la notion, et le langage, des catégories fibrées, notion introduite par Grothendieck [**SGA1, Gi1**] pour formaliser la notion d'un préfaisceau “flou” de catégories, où la restiction (ou image réciproque) d'un objet n'est définie qu'à isomorphisme près (la notion “naïve” de préfaisceau de catégories étant trop restrictive). L'idée est la suivante. Considérons la catégorie $\mathcal{B}_\pm$, formée de deux objets $+$ et $-$ isomorphes entre eux et qui possèdent l'identité comme seul endomorphisme. A toute catégorie monoïdale $\mathcal{V}$, on associe une catégorie $\mathcal{D}(\mathcal{V})$, au dessus de la catégorie $\mathcal{B}_{\pm}$, dont les fibres au dessus de $+$ et $-$ s'identifient à la catégorie $\mathcal{V}$ et la catégorie opposée à $\mathcal{V}$ respectivement, et telle que la catégorie monoïdale $\mathcal{V}$ soit autonome si et seulement si $\mathcal{D}(\mathcal{V})$ est fibrée sur $\mathcal{B}_{\pm}$. Les foncteurs dual à gauche, ou dual à droite s'interprètent alors comme des foncteurs image réciproque par les isomorphismes entre $+$ et $-$, et le choix, pour chaque objet de $\mathcal{V}$, d'un dual à gauche et d'un dual à droite correspond au choix d'un clivage normalisé de la catégorie fibrée $\mathcal{D}(\mathcal{V})$ sur $\mathcal{B}_{\pm}$. Toutes les propriétés élémentaires de la dualité dans les catégories monoïdales, dont la démonstration est toujours facile, mais parfois fastidieuse, se déduisent de propriétés triviales de $\mathcal{D}(\mathcal{V})$.

La structure monoïdale de $\mathcal{V}$ se traduit par une structure monoïdale relative sur $\mathcal{D}(\mathcal{V})$ au dessus de $\mathcal{B}_{\pm}$. On est ainsi conduit à introduire la notion de catégorie monoïdale fibrée au dessus d'une catégorie, notion correspondant à une formalisation "correcte" de l'intuition naïve de "préfaisceau de catégories monoïdales". Cette notion, ainsi que celle de champ monoïdal sur un site (catégorie monoïdale fibrée dont la catégorie fibrée sous-jacente est un champ au sens de Grothendieck-Giraud [**Gi2**]), correspondant à l'intuition de "faisceau de catégories monoïdales", est destinée à jouer un rôle important dans les théories "tannakiennes" au-dessus d'une base qui n'est pas nécessairement le spectre d'un corps, ainsi qu'en cohomologie non commutative.

La définition de la catégorie $\mathcal{D}(\mathcal{V})$ comporte un choix canonique, mais arbitraire, du même type que le choix habituel d'orientation d'une variété complexe (on aurait pu choisir la convention opposée). Cela consiste, essentiellement, à considérer le foncteur dual à droite comme un foncteur de $\mathcal{V}$ dans la catégorie opposée $\mathcal{V}^\circ$, et le foncteur dual à gauche comme un foncteur de $\mathcal{V}^\circ$ dans $\mathcal{V}$. Si l'on avait adopté la convention opposée, on aurait associé à toute catégorie monoïdale autonome $\mathcal{V}$, une catégorie fibrée $\mathcal{D}'(\mathcal{V})$ sur $\mathcal{B}_{\pm}$, de fibre, comme pour $\mathcal{D}(\mathcal{V})$, $\mathcal{V}$ au dessus de $+$ et $\mathcal{V}^\circ$ au dessus de $-$, le foncteur image réciproque par l'isomorphisme de $-$ sur $+$, de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{V}^\circ$, correspondant, cette fois, au foncteur dual à gauche, et le foncteur image réciproque par l'isomorphisme inverse de $+$ sur $-$, de $\mathcal{V}^\circ$ dans $\mathcal{V}$, correspondant au foncteur dual à droite. Comme pour $\mathcal{D}(\mathcal{V})$, la catégorie $\mathcal{D}'(\mathcal{V})$

hérite d'une structure de catégorie monoïdale relative. Si $\mathcal{V}$ est une catégorie monoïdale autonome arbitraire, les catégories monoïdales fibrées $\mathcal{D}(\mathcal{V})$ et $\mathcal{D}'(\mathcal{V})$ ne sont pas en général équivalentes. Il en est ainsi si $\mathcal{V}$ possède une structure souveraine, et alors les structures souveraines sur $\mathcal{V}$ sont en bijection avec les $\mathcal{B}_{\pm}$-foncteurs monoïdaux stricts de $\mathcal{D}(\mathcal{V})$ dans $\mathcal{D}'(\mathcal{V})$, induisant l'identité sur les fibres au dessus de $\mathcal{B}_{\pm}$ (qui sont alors des équivalences de catégories monoïdales relatives).

On remarque que cette dernière caractérisation des structures souveraines garde un sens, même si les catégories $\mathcal{D}(\mathcal{V})$ et $\mathcal{D}'(\mathcal{V})$ ne sont pas fibrées sur $\mathcal{B}_{\pm}$, autrement dit, pour des catégories monoïdales $\mathcal{V}$ non nécessairement autonomes. On est ainsi conduit à introduire un certain nombre de structures sur une catégorie monoïdale (s-structure, t-structure, (s,t)-structure souveraine, trace à gauche, trace à droite), dont la donnée, dans le cas autonome, équivaut à celle d'une structure souveraine. La structure la plus riche est celle de trace à gauche (ou à droite), cette structure induisant une (s,t)-structure souveraine qui, à son tour, induit à la fois une s-structure et une t-structure souveraine, satisfaisant à une certaine propriété de compatibilité. L'intérêt de ces résultats réside, entre autre, dans le fait que bien que la catégorie des ind-objets d'une catégorie monoïdale autonome souveraine (catégorie d'ind-objets qui intervient dans certaines constructions tannakiennes [**De1**]) ne soit pas en général autonome (et ne possède en général pas de trace), elle est canoniquement munie d'une (s,t)-structure souveraine. De plus, on montre que si $\mathcal{V}$ est une catégorie monoïdale tressée (non nécessairement autonome), toute torsion sur $\mathcal{V}$ définit une (s,t)-structure souveraine. Ceci se rapproche du théorème de Deligne affirmant que, sous l'hypothèse supplémentaire que $\mathcal{V}$ soit autonome, les structures souveraines sur $\mathcal{V}$ sont en bijection avec les torsions de $\mathcal{V}$ [**De2, Ye**].

Dans un prochain article, on introduira une notion de 2-catégorie souveraine, généralisant celle de catégorie monoïdale souveraine (qui est une 2-catégorie souveraine possédant un seul objet, ou 0-cellule). Dans une telle 2-catégorie, on peut définir une notion de trace, qui permet, modulo des hypothèses de semi-simplicité, de finitude, et de non dégénérescence, d'associer, en imitant la construction de Turaev et Viro [**TV, T5**], des invariants numériques des variétés de dimension 3, invariants qui peuvent être considérés comme des invariants cohomologiques (non commutatifs), à coefficients dans la 2-catégorie considérée.

Dans le premier paragraphe, après un bref rappel de la théorie de la dualité dans les catégories monoïdales, on définit la catégorie $\mathcal{D}(\mathcal{V})$ associée à une catégorie monoïdale $\mathcal{V}$, on traduit les notions liées à la dualité dans $\mathcal{V}$ en termes de $\mathcal{D}(\mathcal{V})$, on introduit la notion de catégorie monoïdale relative au dessus d'une catégorie, et on définit une structure de catégorie monoïdale relative sur $\mathcal{D}(\mathcal{V})$ au dessus de $\mathcal{B}_\pm$. On termine par une étude des propriétés de fonctorialité (en $\mathcal{V}$) de $\mathcal{D}(\mathcal{V})$. Ces propriétés ne sont pas utilisées par la suite, et la lecture du numero correspondant (1.6) n'est pas indispensable pour la compréhension du reste de l'article. Dans le paragraphe deux, après quelques rappels sur les catégories monoïdales autonomes et les catégories fibrées, on introduit la notion de catégorie monoïdale fibrée et on montre qu'une catégorie monoïdale $\mathcal{V}$ est autonome si et seulement si $\mathcal{D}(\mathcal{V})$ est une catégorie monoïdale fibrée sur $\mathcal{B}_\pm$. Le troisième paragraphe commence par un rappel de la définition des catégories souveraines. Notre définition, bien que légèrement différente de celle de Yetter, dont les axiomes s'avèrent redondants, est équivalente. Ensuite, on introduit la notion de t-structure souveraine, sur une catégorie monoïdale non nécessairement autonome, et puis celles de s et (s,t)-structures souveraines, ainsi que celle de trace à gauche ou à droite. On montre que, dans le cas autonome, toutes ces structures sont essentiellement équivalentes, et on étudie leurs rapports, dans le cas non autonome. On étudie également la description des structures souveraines en termes de foncteurs monoïdaux de $\mathcal{D}(\mathcal{V})$ dans $\mathcal{D}'(\mathcal{V})$. Dans le dernier paragraphe, on étudie le rapport entre torsions et structures souveraines, dans les catégories monoïdales tressées, et on démontre le théorème de Deligne mentionné ci-dessus.

Dans cet article, la volonté d'origine, visant une meilleure compréhension des structures souveraines, a conduit à la découverte de nouvelles structures et résultats, dépassant largement le but initial.

Je remercie Alain Bruguières pour sa lecture attentive de mon manuscrit.

§ 1. Dualité dans les catégories monoïdales.

1.1. Rappels sur les catégories monoïdales.

1.1.1. On rappelle qu'une *catégorie monoïdale* (stricte) est un triplet $(\mathcal{V}, \otimes, I)$, où $\mathcal{V}$ est une catégorie, $\otimes : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ un foncteur et I un objet de $\mathcal{V}$, satisfaisant aux conditions suivantes :

a) associativité :

$$(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C) \quad , \qquad A,\, B,\, C \in \mathcal{O}b(\mathcal{V}) \quad ,$$

$$(u \otimes v) \otimes w = u \otimes (v \otimes w) \quad , \qquad u,\, v,\, w \in \mathcal{F}\ell(\mathcal{V}) \quad ;$$

b) unité :

$$I \otimes A = A = A \otimes I \quad , \qquad A \in \mathcal{O}b(\mathcal{V}) \quad ,$$

$$1_I \otimes u = u = u \otimes 1_I \quad , \qquad u \in \mathcal{F}\ell(\mathcal{V}) \quad .$$

Si $(\mathcal{V}, \otimes, I)$ est une catégorie monoïdale, il en est de même pour $(\mathcal{V}^\circ, \otimes, I)$, $(\mathcal{V}, \otimes^\circ, I)$ et $(\mathcal{V}^\circ, \otimes^\circ, I)$, où $\mathcal{V}^\circ$ désigne la catégorie opposée à $\mathcal{V}$ et $\otimes^\circ$ le bifoncteur $\otimes^\circ : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ défini par

$$A \otimes^\circ B = B \otimes A \quad , \qquad A,\, B \in \mathcal{O}b(\mathcal{V}) \quad ,$$

$$u \otimes^\circ v = v \otimes u \quad , \qquad u,\, v \in \mathcal{F}\ell(\mathcal{V}) \quad .$$

1.1.2. On appelle *foncteur monoïdal* de $(\mathcal{V}, \otimes, I)$ dans une autre catégorie monoïdale $(\mathcal{V}', \otimes', I')$ un triplet (F, Φ_2, Φ_0), où $F : \mathcal{V} \to \mathcal{V}'$ est un foncteur,

$$\Phi_{2,A,B} : F(A) \otimes' F(B) \longrightarrow F(A \otimes B)$$

un isomorphisme fonctoriel et

$$\Phi_0 : I' \longrightarrow F(I)$$

un isomorphisme, tels que les diagammes suivants soient commutatifs :

(1.1.2.1)

$$\begin{tikzcd}
F(A)\otimes' F(B)\otimes' F(C) \arrow[r, "\Phi_{2,A,B}\otimes' 1_{F(C)}"] \arrow[d, "1_{F(A)}\otimes'\Phi_{2,B,C}"'] & F(A\otimes B)\otimes' F(C) \arrow[d, "\Phi_{2,A\otimes B,C}"] \\
F(A)\otimes' F(B\otimes C) \arrow[r, "\Phi_{2,A,B\otimes C}"'] & F(A\otimes B\otimes C)
\end{tikzcd} \quad ,$$

(1.1.2.2)

$$\begin{tikzcd}
I'\otimes' F(A) \arrow[d, "\Phi_0\otimes' 1_{F(A)}"'] \arrow[dr, "\equiv"] & & F(A)\otimes' I' \arrow[d, "1_{F(A)}\otimes'\Phi_0"] \arrow[dl, "\equiv"'] \\
F(I)\otimes' F(A) \arrow[d, "\Phi_{2,I,A}"'] & F(A) & F(A)\otimes' F(I) \arrow[d, "\Phi_{2,A,I}"] \\
F(I\otimes A) \arrow[ur, "\equiv"'] & & F(A\otimes I) \arrow[ul, "\equiv"]
\end{tikzcd} \quad ,$$

autrement dit tels que :

a) $\Phi_{2,A,B\otimes C}(1_{F(A)}\otimes'\Phi_{2,B,C}) = \Phi_{2,A\otimes B,C}(\Phi_{2,A,B}\otimes' 1_{F(C)})$;

b) $\Phi_{2,I,A}(\Phi_0\otimes' 1_{F(A)}) = 1_{F(A)} = \Phi_{2,A,I}(1_{F(A)}\otimes'\Phi_0)$.

1.1.3. On appelle *morphisme fonctoriel monoïdal* de (F,Φ_2,Φ_0) dans un autre foncteur monoïdal

$$(F',\Phi'_2,\Phi'_0) : (\mathcal{V},\otimes,I) \longrightarrow (\mathcal{V}',\otimes',I') \quad ,$$

un morphisme fonctoriel $\alpha : F \to F'$ tel que les diagrammes suivants soient commutatifs :

(1.1.3.1)

$$\begin{tikzcd}
F(A)\otimes' F(B) \arrow[r, "\Phi_{2,A,B}"] \arrow[d, "\alpha_A\otimes'\alpha_B"'] & F(A\otimes B) \arrow[d, "\alpha_{A\otimes B}"] \\
F'(A)\otimes' F'(B) \arrow[r, "\Phi'_{2,A,B}"'] & F'(A\otimes B)\ ,
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & I' \arrow[dl, "\Phi_0"'] \arrow[dr, "\Phi'_0"] & \\
F(I) \arrow[rr, "\alpha_I"'] & & F'(I)\ ,
\end{tikzcd}$$

autrement dit tel que :

a) $\alpha_{A\otimes B}\Phi_{2,A,B} = \Phi'_{2,A,B}(\alpha_A \otimes' \alpha_B)$;

b) $\Phi'_0 = \alpha_I \Phi_0$.

On démontre facilement que si α est un *isomorphisme* fonctoriel, alors la condition (b) est une conséquence de la condition (a).

1.2. Rappels sur la dualité dans les catégories monoïdales.

1.2.1. Soit $(\mathcal{V}, \otimes, I)$ une catégorie monoïdale. On rappelle qu'une *dualité* dans $\mathcal{V}$ est un quadruplet $\mathbb{D} = (A, B, \varepsilon, \eta)$, où A et B désignent des objets de $\mathcal{V}$ et ε et η des morphismes

$$\varepsilon : A\otimes B \longrightarrow I \quad , \qquad \eta : I \longrightarrow B\otimes A$$

tels que

(1.2.1.1) $\quad (1_B\otimes\varepsilon)(\eta\otimes 1_B) = 1_B \quad$ et $\quad (\varepsilon\otimes 1_A)(1_A\otimes\eta) = 1_A$

et on dit alors que A et B sont *mis en dualité par* $\mathbb{D}$, ou que $\mathbb{D}$ est une *dualité entre A et B* et que (A, ε, η) (resp. (B, ε, η)) (ou, par abus de langage, que A (resp. B)) est *un dual à gauche* de B (resp. *un dual à droite* de A).

Par exemple, si $A = B = I$, $\varepsilon = 1_I : I\otimes I = I \to I$ et $\eta = 1_I : I \to I = I\otimes I$, alors $\mathbb{D}_0 = (I, I, 1_I, 1_I)$ est une dualité.

Si $\mathbb{D} = (A, B, \varepsilon, \eta)$ est une dualité de $(\mathcal{V}, \otimes, I)$, alors $\mathbb{D}^\circ = (B, A, \eta, \varepsilon)$ est une dualité de $(\mathcal{V}^\circ, \otimes, I)$, $\mathbb{D}^\star = (B, A, \varepsilon, \eta)$ est une dualité de $(\mathcal{V}, \otimes^\circ, I)$ et $\mathbb{D}^{\mathsf{op}} = (A, B, \eta, \varepsilon)$ est une dualité de $(\mathcal{V}^\circ, \otimes^\circ, I)$ (cf. 1.1.1).

Lemme 1.2.2. *Soient $\mathbb{D} = (A, B, \varepsilon, \eta)$ et $\mathbb{D}' = (A', B', \varepsilon', \eta')$ deux dualités. Pour tout couple de morphismes $u : A \to A'$ et $v : B' \to B$ les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) $\varepsilon'(u \otimes 1_{B'}) = \varepsilon(1_A \otimes v)$;

b) $(v \otimes 1_{A'})\eta' = (1_B \otimes u)\eta$;

c) $u = (\varepsilon \otimes 1_{A'})(1_A \otimes v \otimes 1_{A'})(1_A \otimes \eta')$;

d) $v = (1_B \otimes \varepsilon')(1_B \otimes u \otimes 1_{B'})(\eta \otimes 1_{B'})$.

De plus, pour tout morphisme $u : A \to A'$, il existe un morphisme unique $v : B' \to B$ satisfaisant aux conditions équivalentes ci-dessus, et réciproquement pour tout morphisme $v : B' \to B$, il existe un morphisme unique $u : A \to A'$ satisfaisant à ces mêmes conditions.

1.2.3. Si les morphismes u et v satisfont aux conditions du lemme (1.2.2), on dit qu'ils sont *mis en dualité par $\mathbb{D}$ et $\mathbb{D}'$*, ou que u est le *dual* ou le *transposé à gauche de v relativement à $\mathbb{D}'$ et $\mathbb{D}$*, ou que v est le *dual* ou *transposé à droite de u relativement à $\mathbb{D}$ et $\mathbb{D}'$*, et alors on pose

$$u = t^{(l)}_{\mathbb{D}',\mathbb{D}}(v) \quad \text{et} \quad v = t^{(r)}_{\mathbb{D},\mathbb{D}'}(u) \quad .$$

On a donc par définition

$$t^{(l)}_{\mathbb{D}',\mathbb{D}}(v) = (\varepsilon \otimes 1_{A'})(1_A \otimes v \otimes 1_{A'})(1_A \otimes \eta') \tag{1.2.3.1}$$

et

$$t^{(r)}_{\mathbb{D},\mathbb{D}'}(u) = (1_B \otimes \varepsilon')(1_B \otimes u \otimes 1_{B'})(\eta \otimes 1_{B'}) \quad . \tag{1.2.3.2}$$

Il résulte aussitôt du lemme que $t^{(l)}_{\mathbb{D}',\mathbb{D}}$ est une bijection de $\mathsf{Hom}_{\mathcal{V}}(B', B)$ sur $\mathsf{Hom}_{\mathcal{V}}(A, A')$ et que $t^{(r)}_{\mathbb{D},\mathbb{D}'}$ en est la bijection inverse. De plus, si $\mathbb{D}'' = (A'', B'', \varepsilon'', \eta'')$ désigne une troisième dualité et $u' : A' \to A''$ et $v' : B'' \to B'$ des morphismes, il résulte du même lemme que

$$\begin{aligned} t^{(l)}_{\mathbb{D}'',\mathbb{D}}(vv') &= t^{(l)}_{\mathbb{D}'',\mathbb{D}'}(v')t^{(l)}_{\mathbb{D}',\mathbb{D}}(v) \quad , \\ t^{(r)}_{\mathbb{D},\mathbb{D}''}(u'u) &= t^{(r)}_{\mathbb{D},\mathbb{D}'}(u)t^{(r)}_{\mathbb{D}',\mathbb{D}''}(u') \end{aligned} \tag{1.2.3.3}$$

et on remarque que

$$(1.2.3.4) \qquad t^{(l)}_{\mathbb{D},\mathbb{D}}(1_B) = 1_A \quad \text{et} \quad t^{(r)}_{\mathbb{D},\mathbb{D}}(1_A) = 1_B \quad .$$

On en déduit, comme d'habitude, l'unicité, à isomorphisme unique près, du dual à gauche, ou à droite, d'un objet de $\mathcal{V}$:

Proposition 1.2.4. *Soient (A, ε, η) et $(A', \varepsilon', \eta')$ deux duaux à gauche d'un même objet B de $\mathcal{V}$. Alors il existe un isomorphisme unique $u : A \to A'$ tel que l'une des deux conditions équivalentes suivantes soit satisfaite :*

a) $\varepsilon = \varepsilon'(u \otimes 1_B)$;

b) $\eta' = (1_B \otimes u)\eta$.

De plus, $u = t^{(l)}_{\mathbb{D}',\mathbb{D}}(1_B)$, où $\mathbb{D} = (A, B, \varepsilon, \eta)$ et $\mathbb{D}' = (A', B, \varepsilon', \eta')$, l'isomorphisme inverse u^{-1} étant donné par la formule

$$u^{-1} = t^{(l)}_{\mathbb{D},\mathbb{D}'}(1_B) \quad .$$

On laisse au lecteur le soin de formuler l'énoncé analogue pour deux duaux à droite d'un même objet.

Proposition 1.2.5. *Soient*

$$\mathbb{D}' = (A', B', \varepsilon', \eta') \quad \textit{et} \quad \mathbb{D}'' = (A'', B'', \varepsilon'', \eta'')$$

deux dualités dans $\mathcal{V}$. Alors

$$\mathbb{D} := \mathbb{D}' \otimes \mathbb{D}'' := \big(A'' \otimes A', B' \otimes B'', \varepsilon''(1_{A''} \otimes \varepsilon' \otimes 1_{B''}), (1_{B'} \otimes \eta'' \otimes 1_{A'})\eta'\big)$$

est une dualité dans $\mathcal{V}$.

Il résulte aussitôt de cette proposition que si deux objets de $\mathcal{V}$ possèdent un dual à gauche ou à droite, il en est de même pour leur produit tensoriel, le dual du produit tensoriel du premier par le second étant le produit tensoriel du dual du second par le dual du premier. De plus, on vérifie facilement que si $\mathbb{D}'_1$, $\mathbb{D}''_1$, $\mathbb{D}'_2$ et $\mathbb{D}''_2$ désignent des dualités entre A'_1 et B'_1, A''_1 et B''_1, A'_2 et B'_2 et A''_2 et B''_2 respectivement, et

$$u' : A'_1 \longrightarrow A'_2 \ , \ \ u'' : A''_1 \longrightarrow A''_2 \ , \ \ v' : B'_2 \longrightarrow B'_1 \ \text{ et } \ v'' : B''_2 \longrightarrow B''_1$$

des morphismes, alors on a

$$t^{(l)}_{\mathbb{D}'_2\otimes\mathbb{D}''_2,\mathbb{D}'_1\otimes\mathbb{D}''_1}(v'\otimes v'') = t^{(l)}_{\mathbb{D}''_2,\mathbb{D}''_1}(v'')\otimes t^{(l)}_{\mathbb{D}'_2,\mathbb{D}'_1}(v') \tag{1.2.5.1}$$

et

$$t^{(r)}_{\mathbb{D}'_1\otimes\mathbb{D}''_1,\mathbb{D}'_2\otimes\mathbb{D}''_2}(u''\otimes u') = t^{(r)}_{\mathbb{D}'_1,\mathbb{D}'_2}(u')\otimes t^{(r)}_{\mathbb{D}''_1,\mathbb{D}''_2}(u'') \quad . \tag{1.2.5.2}$$

1.2.6. Soient $(\mathcal{V},\otimes,I)$ et $(\mathcal{V}',\otimes',I')$ deux catégories monoïdales,

$$(F,\Phi_2,\Phi_0):(\mathcal{V},\otimes,I)\longrightarrow(\mathcal{V}',\otimes',I')$$

un foncteur monoïdal, et $\mathbb{D}=(A,B,\varepsilon,\eta)$ une dualité dans $\mathcal{V}$. Alors

$$\big(F(A)\,,\ F(B)\,,\ \Phi_0^{-1}F(\varepsilon)\Phi_{2,A,B}\,,\ \Phi^{-1}_{2,B,A}F(\eta)\Phi_0\big)$$

est une dualité dans $\mathcal{V}'$ notée (abusivement) $F(\mathbb{D})$.

Proposition 1.2.7. *Soient*

$$(\mathcal{V},\otimes,I)\ \underset{(F',\Phi'_2,\Phi'_0)}{\overset{(F,\Phi_2,\Phi_0)}{\rightrightarrows}}\ (\mathcal{V}',\otimes',I')$$

deux foncteurs monoïdaux,

$$\alpha:(F,\Phi_2,\Phi_0)\longrightarrow(F',\Phi'_2,\Phi'_0)$$

un morphisme fonctoriel monoïdal et $\mathbb{D}=(A,B,\varepsilon,\eta)$ *une dualité dans* $\mathcal{V}$*. Alors si l'on pose* (conformement aux notations ci dessus)

$$F(\mathbb{D}) =: (F(A),F(B),\varepsilon',\eta') \quad et \quad F'(\mathbb{D}) =: (F'(A),F'(B),\varepsilon'',\eta'') \quad ,$$

on a

a) $\varepsilon'=\varepsilon''(\alpha_A\otimes\alpha_B)$;
b) $\eta''=(\alpha_B\otimes\alpha_A)\eta'$;
c) α_A *est un isomorphisme et* $\alpha_A^{-1}=t^{(l)}_{F(\mathbb{D}),F'(\mathbb{D})}(\alpha_B)$;
c) α_B *est un isomorphisme et* $\alpha_B^{-1}=t^{(r)}_{F(\mathbb{D}),F'(\mathbb{D})}(\alpha_A)$.

1.3. La catégorie $\mathcal{D}(\mathcal{V})$ associée à une catégorie monoïdale.

1.3.1. Soit $(\mathcal{V}, \otimes, I)$ une catégorie monoïdale. On lui associe une catégorie $\mathcal{D}(\mathcal{V}, \otimes, I)$, notée plus simplement $\mathcal{D}(\mathcal{V})$, définie comme suit :

$$\mathcal{O}b(\mathcal{D}(\mathcal{V})) := \mathcal{O}b(\mathcal{V})\coprod\mathcal{O}b(\mathcal{V}^\circ) := \mathcal{O}b(\mathcal{V}) \times \{+1, -1\}$$

(où $\mathcal{V}^\circ$ désigne la catégorie opposée à $\mathcal{V}$). Les morphismes de $\mathcal{D}(\mathcal{V})$ sont définis par

$$\begin{aligned}
&\mathsf{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{V})}\big((A,1),(B,1)\big) := \mathsf{Hom}_{\mathcal{V}}(A,B)\\
&\mathsf{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{V})}\big((A,-1),(B,-1)\big) := \mathsf{Hom}_{\mathcal{V}^\circ}(A,B) := \mathsf{Hom}_{\mathcal{V}}(B,A)\\
&\mathsf{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{V})}\big((A,1),(B,-1)\big) := \mathsf{Hom}_{\mathcal{V}}(A\otimes B, I)\\
&\mathsf{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{V})}\big((A,-1),(B,1)\big) := \mathsf{Hom}_{\mathcal{V}}(I, A\otimes B) \quad .
\end{aligned}$$

La composition "$\circ$" dans $\mathcal{D}(\mathcal{V})$ est définie comme suit (en notant vu le composé (dans $\mathcal{V}$) de deux morphismes $u : A \to B$, $v : B \to C$ de $\mathcal{V}$).

a) $(A,1) \xrightarrow{u} (B,1) \xrightarrow{v} (C,1)$, $A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C$,

$$v \circ u := vu \quad ;$$

b) $(A,1) \xrightarrow{u} (B,1) \xrightarrow{v} (C,-1)$, $A \xrightarrow{u} B$, $B\otimes C \xrightarrow{v} I$,

$$v \circ u := v(u\otimes 1_C) \quad ;$$

c) $(A,1) \xrightarrow{u} (B,-1) \xrightarrow{v} (C,1)$, $A\otimes B \xrightarrow{u} I$, $I \xrightarrow{v} B\otimes C$,

$$v \circ u := (u\otimes 1_C)(1_A\otimes v) \quad ;$$

d) $(A,1) \xrightarrow{u} (B,-1) \xrightarrow{v} (C,-1)$, $A\otimes B \xrightarrow{u} I$, $C \xrightarrow{v} B$,

$$v \circ u := u(1_A\otimes v) \quad ;$$

e) $(A,-1) \xrightarrow{u} (B,1) \xrightarrow{v} (C,1)$, $I \xrightarrow{u} A\otimes B$, $B \xrightarrow{v} C$,

$$v \circ u := (1_A\otimes v)u \quad ;$$

f) $(A,-1) \xrightarrow{u} (B,1) \xrightarrow{v} (C,-1)\,,\ I \xrightarrow{u} A \otimes B\,,\ B \otimes C \xrightarrow{v} I\,,$

$$v \circ u := (1_A \otimes v)(u \otimes 1_C) \quad ;$$

g) $(A,-1) \xrightarrow{u} (B,-1) \xrightarrow{v} (C,1)\,,\ B \xrightarrow{u} A\,,\ I \xrightarrow{v} B \otimes C\,,$

$$v \circ u := (u \otimes 1_C)v \quad ;$$

h) $(A,-1) \xrightarrow{u} (B,-1) \xrightarrow{v} (C,-1)\,,\ B \xrightarrow{u} A\,,\ C \xrightarrow{v} B\,,$

$$v \circ u := uv \quad .$$

On laisse le soin au lecteur de vérifier l'associativité de la composition ainsi définie et de constater qu'en posant

$$1_{(A,1)} := 1_A \quad \text{et} \quad 1_{(A,-1)} := 1_A$$

on a bien la propriété des unités. De même, on vérifie facilement que $\mathcal{D}(\mathcal{V}^\circ, \otimes^\circ, I)$ est la catégorie opposée à $\mathcal{D}(\mathcal{V})$ (cf. 1.1.1).

1.3.2. Soient

$$\varepsilon : A \otimes B \longrightarrow I \quad \text{et} \quad \eta : I \longrightarrow B \otimes A$$

deux morphismes de $\mathcal{V}$. On a

$$\varepsilon \in \mathsf{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{V})}\big((A,1),(B,-1)\big) \quad , \qquad \eta \in \mathsf{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{V})}\big((B,-1),(A,1)\big)$$

et

$$\varepsilon \circ \eta = (1_B \otimes \varepsilon)(\eta \otimes 1_B) \quad \text{et} \quad \eta \circ \varepsilon = (\varepsilon \otimes 1_A)(1_A \otimes \eta) \quad .$$

On en déduit que (A,B,ε,η) est une dualité si et seulement si ε et η sont des isomorphismes inverses l'un de l'autre dans $\mathcal{D}(\mathcal{V})$. En particulier, un objet B de $\mathcal{V}$ possède un dual à gauche si et seulement si il existe un objet A de $\mathcal{V}$ tel que $(A,1)$ soit isomorphe à $(B,-1)$ dans $\mathcal{D}(\mathcal{V})$. De même, un objet A de $\mathcal{V}$ possède un dual à droite si et seulement si il existe un objet B de $\mathcal{V}$ tel que $(B,-1)$ soit isomorphe à $(A,1)$ dans $\mathcal{D}(\mathcal{V})$.

1.3.3. En gardant les notations du lemme (1.2.2) et en considérant u (resp. v) comme un morphisme $u : (A, 1) \longrightarrow (A', 1)$ (resp. $v : (B, -1) \longrightarrow (B', -1)$) de $\mathcal{D}(\mathcal{V})$, on remarque que les conditions (a), (b), (c), (d) de ce lemme se traduisent en termes de la composition dans $\mathcal{D}(\mathcal{V})$ par les relations

a$'$) $\varepsilon' \circ u = v \circ \varepsilon$;

b$'$) $\eta' \circ v = u \circ \eta$;

c$'$) $u = \eta' \circ v \circ \varepsilon$;

d$'$) $v = \varepsilon' \circ u \circ \eta$;

ce qui rend ce lemme évident, en tenant compte du fait qu'en vertu de ce qui précède, ε et η ainsi que ε' et η' sont des isomorphismes inverses l'un de l'autre.

De même, toutes les assertions de (1.2.3) deviennent évidentes et les définitions de $t^{(l)}_{\mathbb{D}',\mathbb{D}}$ et $t^{(r)}_{\mathbb{D},\mathbb{D}'}$ se traduisent par les formules

$$(1.3.3.1) \qquad t^{(l)}_{\mathbb{D}',\mathbb{D}}(v) = \eta' \circ v \circ \varepsilon \quad \text{et} \quad t^{(r)}_{\mathbb{D},\mathbb{D}'}(u) = \varepsilon' \circ u \circ \eta \quad .$$

Enfin, l'unicité, à isomorphisme près, d'un dual à gauche ou à droite ne fait que traduire l'assertion que deux objets de $\mathcal{D}(\mathcal{V})$ isomorphes à un troisième sont isomorphes entre eux.

1.4. Catégories monoïdales au dessus d'une catégorie.

1.4.1. On se fixe une catégorie $\mathcal{B}$. On rappelle qu'une *catégorie au dessus de* $\mathcal{B}$ ou $\mathcal{B}$*-catégorie* est un foncteur $G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ d'une catégorie $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{B}$, qu'un *morphisme* ou $\mathcal{B}$*-foncteur* de la $\mathcal{B}$-catégorie $G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ dans une autre $G' : \mathcal{A}' \to \mathcal{B}$ est un foncteur $F : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ tel que $G = G'F$ et qu'un $\mathcal{B}$*-morphisme fonctoriel* du $\mathcal{B}$-foncteur $F : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ dans un autre $F' : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ est un morphisme fonctoriel $\alpha : F \to F'$ tel que pour tout objet $A \in \mathcal{O}b(\mathcal{A})$, $\alpha_A : F(A) \to F'(A)$ soit un morphisme *vertical* de $\mathcal{A}'$. On rappelle que si $G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ désigne une $\mathcal{B}$-catégorie, on dit qu'un morphisme $v : A \to B$ de $\mathcal{A}$ est *vertical* (relativement à G) si $G(v) = 1_{G(A)}$. Si X désigne un objet de $\mathcal{B}$, on appelle *fibre* de G (ou de $\mathcal{A}$) au dessus de X et on note $\mathcal{A}_X$ la sous-catégorie de $\mathcal{A}$ dont les objets sont les objets A de $\mathcal{A}$ tels que

$G(A) = X$ et les morphismes les morphismes verticaux entre tels objets. Un $\mathcal{B}$-foncteur $F : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ induit un foncteur $F_X : \mathcal{A}_X \to \mathcal{A}'_X$ et un $\mathcal{B}$-morphisme fonctoriel $\alpha : F \to F'$ induit un morphisme fonctoriel $\alpha^{(X)} : F_X \to F'_X$.

1.4.2. On appelle $\mathcal{B}$-*catégorie monoïdale*, un triplet $(\mathcal{V} \overset{G}{\to} \mathcal{B}, \otimes, I)$, où $G : \mathcal{V} \to \mathcal{B}$ est une $\mathcal{B}$-catégorie et

$$\otimes : \mathcal{V} \times_{\mathcal{B}} \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$$

$$I : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{V}$$

des $\mathcal{B}$-foncteurs ($\mathcal{B}$ étant considérée comme une $\mathcal{B}$-catégorie par $1_{\mathcal{B}} : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$) satisfaisant aux conditions :

a) associativité : le diagramme suivant est commutatif

(1.4.2.1)
$$\begin{tikzcd} \mathcal{V} \times_{\mathcal{B}} \mathcal{V} \times_{\mathcal{B}} \mathcal{V} \arrow[r, "1_{\mathcal{V}} \times_{\mathcal{B}} \otimes"] \arrow[d, "\otimes \times_{\mathcal{B}} 1_{\mathcal{V}}"'] & \mathcal{V} \times_{\mathcal{B}} \mathcal{V} \arrow[d, "\otimes"] \\ \mathcal{V} \times_{\mathcal{B}} \mathcal{V} \arrow[r, "\otimes"'] & \mathcal{V} \end{tikzcd}$$

b) unité : le diagramme suivant est commutatif

(1.4.2.2)
$$\begin{tikzcd} & \mathcal{V} \times_{\mathcal{B}} \mathcal{V} \arrow[d, "\otimes"] & \\ \mathcal{B} \times_{\mathcal{B}} \mathcal{V} \arrow[ur, "I \times_{\mathcal{B}} 1_{\mathcal{V}}"] \arrow[r, "="'] & \mathcal{V} & \mathcal{V} \times_{\mathcal{B}} \mathcal{B} \arrow[ul, "1_{\mathcal{V}} \times_{\mathcal{B}} I"'] \arrow[l, "="] \end{tikzcd}$$

On se gardera de croire qu'une $\mathcal{B}$-catégorie monoïdale soit, en général, une catégorie monoïdale. En revanche, pour tout objet X de $\mathcal{B}$, la structure de $\mathcal{B}$-catégorie monoïdale de $\mathcal{V}$ induit une structure de catégorie monoïdale ordinaire $(\mathcal{V}_X, \otimes_X, I(X))$ sur la fibre $\mathcal{V}_X$ au dessus de X , une catégorie monoïdale étant une $\mathcal{B}_0$-catégorie monoïdale pour $\mathcal{B}_0$ la catégorie "ponctuelle".

1.4.3. Un *$\mathcal{B}$-foncteur monoïdal* de $(\mathcal{V} \overset{G}{\to} \mathcal{B}, \otimes, I)$ dans une autre $\mathcal{B}$-catégorie monoïdale $(\mathcal{V}' \overset{G'}{\to} \mathcal{B}, \otimes', I')$ est un triplet (F, Φ_2, Φ_0), où $F : \mathcal{V} \to \mathcal{V}'$ est un $\mathcal{B}$-foncteur,

$$\Phi_2 : \otimes'(F \times_{\mathcal{B}} F) \to F\otimes \qquad \text{et} \qquad \Phi_0 : I' \to FI$$

des $\mathcal{B}$-isomorphismes fonctoriels, tels que pour tous A, B, $C \in \mathcal{O}b(\mathcal{V})$ tels que $G(A) = G(B) = G(C)$, le diagramme (1.1.2.1) soit commutatif, et pour tout $A \in \mathcal{O}b(\mathcal{V})$ le diagramme

$$(1.4.3.1) \quad \begin{tikzcd}
I'G(A) \otimes' F(A) \arrow[d, "\Phi_{0,G(A)} \otimes' 1_{F(A)}"'] \arrow[dr, "\equiv"] & & F(A) \otimes' I'G(A) \arrow[dl, "\equiv"'] \arrow[d, "1_{F(A)} \otimes' \Phi_{0,G(A)}"] \\
FIG(A) \otimes' F(A) \arrow[d, "\Phi_{2,IG(A),A}"'] & F(A) & F(A) \otimes' FIG(A) \arrow[d, "\Phi_{2,A,IG(A)}"] \\
F(IG(A) \otimes A) \arrow[ur, "\equiv"'] & & F(A \otimes IG(A)) \arrow[ul, "\equiv"]
\end{tikzcd}$$

soit commutatif.

Affirmer la commutativité de ces diagrammes équivaut à affirmer que pour tout objet X de $\mathcal{B}$ le triplet $(F_X, \Phi_2^{(X)}, \Phi_{0,X})$ est un foncteur monoïdal de la catégorie monoïdale $(\mathcal{V}_X, \otimes_X, I(X))$ dans la catégorie monoïdale $(\mathcal{V}'_X, \otimes'_X, I'(X))$.

On dit que le $\mathcal{B}$-foncteur monoïdal (F, Φ_2, Φ_0) est strict si

$$\otimes'(F \times_{\mathcal{B}} F) = F\otimes \quad , \qquad I' = FI$$

et les isomorphismes fonctoriels Φ_2 et Φ_0 sont les isomorphismes fonctoriels identiques. Alors le $\mathcal{B}$-foncteur monoïdal (F, Φ_2, Φ_0) est déterminé par la seule donnée du foncteur F, et on dit, par abus de langage, que F est un $\mathcal{B}$-foncteur monoïdal strict.

1.4.4. Un *$\mathcal{B}$-morphisme fonctoriel monoïdal* du $\mathcal{B}$-foncteur monoïdal (F, Φ_2, Φ_0) dans un autre

$$(F', \Phi'_2, \Phi'_0) : (\mathcal{V} \overset{G}{\to} \mathcal{B}, \otimes, I) \longrightarrow (\mathcal{V}' \overset{G'}{\to} \mathcal{B}, \otimes', I')$$

est un $\mathcal{B}$-morphisme fonctoriel $\alpha : F \to F'$ tel que pour tous A et B, $A,\, B \in \mathcal{O}b(\mathcal{V})$ vérifiant $G(A) = G(B)$, le premier des diagrammes (1.1.3.1) soit commutatif, ainsi que pour tout $X \in \mathcal{O}b(\mathcal{B})$, le diagramme

(1.4.4.1)
$$
\begin{tikzcd}
 & I'(X) \arrow[dl, "\Phi_{0,X}"'] \arrow[dr, "\Phi'_{0,X}"] & \\
FI(X) \arrow[rr, "\alpha_{I(X)}"'] & & F'I(X)
\end{tikzcd}
\quad .
$$

Affirmer la commutativité de ces diagrammes revient à affirmer que pour tout objet X de $\mathcal{B}$ le morphisme fonctoriel $\alpha^{(X)} : F_X \to F'_X$ est un morphisme fonctoriel monoïdal de $(F_X, \Phi_2^{(X)}, \Phi_{0,X})$ dans $(F'_X, {\Phi'}_2^{(X)}, {\Phi'}_{0,X})$.

1.4.5. Soient $(\mathcal{V} \overset{G}{\to} \mathcal{B}, \otimes, I)$ une $\mathcal{B}$-catégorie monoïdale et $H : \mathcal{B}' \to \mathcal{B}$ un foncteur. Soient $\mathcal{V}'$ la catégorie produit fibré $\mathcal{V}' = \mathcal{V} \times_{\mathcal{B}} \mathcal{B}'$ et $G' : \mathcal{V}' \to \mathcal{B}'$ la deuxième projection. On vérifie aussitôt qu'on définit une $\mathcal{B}'$-catégorie monoïdale $(\mathcal{V}' \overset{G'}{\to} \mathcal{B}', \otimes', I')$, en posant

$$\otimes' = \otimes \times_{\mathcal{B}} \mathcal{B}' \quad , \quad I' = I \times_{\mathcal{B}} \mathcal{B}'$$

et en identifiant $\mathcal{V} \times_{\mathcal{B}} \mathcal{V} \times_{\mathcal{B}} \mathcal{B}'$ à $\mathcal{V}' \times_{\mathcal{B}'} \mathcal{V}'$ et $\mathcal{B} \times_{\mathcal{B}} \mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}'$. On dit que la $\mathcal{B}'$-catégorie monoïdale $(\mathcal{V}' \overset{G'}{\to} \mathcal{B}', \otimes', I')$ est *l'image réciproque* de la $\mathcal{B}$-catégorie monoïdale $(\mathcal{V} \overset{G}{\to} \mathcal{B}, \otimes, I)$ par le foncteur H, et on écrit

$$(\mathcal{V}' \overset{G'}{\to} \mathcal{B}', \otimes', I') = H^*(\mathcal{V} \overset{G}{\to} \mathcal{B}, \otimes, I) \quad .$$

En particulier, si X désigne un objet de $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ la sous-catégorie de $\mathcal{B}$ dont le seul objet est X et le seul morphisme 1_X, et H le foncteur d'inclusion, alors $H^*(\mathcal{V} \overset{G}{\to} \mathcal{B}, \otimes, I)$ s'identifie à la catégorie monoïdale fibre $(\mathcal{V}_X, \otimes_X, I(X))$ au dessus de X.

1.4.6. Soient $(\mathcal{V} \overset{G}{\to} \mathcal{B}, \otimes, I)$ (resp. $(\mathcal{V}' \overset{G'}{\to} \mathcal{B}', \otimes', I')$) une $\mathcal{B}$-catégorie (resp. $\mathcal{B}'$-catégorie) monoïdale, et $H : \mathcal{B}' \to \mathcal{B}$ un foncteur. On appelle *H-foncteur monoïdal* de $(\mathcal{V}' \overset{G'}{\to} \mathcal{B}', \otimes', I')$ dans $(\mathcal{V} \overset{G}{\to} \mathcal{B}, \otimes, I)$ un $\mathcal{B}'$-foncteur monoïdal de $(\mathcal{V}' \overset{G'}{\to} \mathcal{B}', \otimes', I')$ dans $H^*(\mathcal{V} \overset{G}{\to} \mathcal{B}, \otimes, I)$.

1.4.7. Soit $(\mathcal{V} \overset{G}{\to} \mathcal{B}, \otimes, I)$ une $\mathcal{B}$-catégorie monoïdale. En composant $\otimes$ avec le $\mathcal{B}$-foncteur

$$\tau : \mathcal{V} \times_{\mathcal{B}} \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V} \times_{\mathcal{B}} \mathcal{V} \quad ,$$

défini par $\tau(A,B) = (B,A)$, $(A,B) \in \mathcal{O}b(\mathcal{V} \times_{\mathcal{B}} \mathcal{V})$ et $\tau(u,v) = (v,u)$, $(u,v) \in \mathcal{F}\ell(\mathcal{V} \times_{\mathcal{B}} \mathcal{V})$, on définit un $\mathcal{B}$-foncteur

$$\otimes^\circ = \otimes\tau : \mathcal{V} \times_{\mathcal{B}} \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$$

et on vérifie aussitôt que $(\mathcal{V} \overset{G}{\to} \mathcal{B}, \otimes^\circ, I)$ est une $\mathcal{B}$-catégorie monoïdale.

Supposons maintenant que la catégorie $\mathcal{B}$ soit un groupoïde, et désignons par ι le foncteur contravariant, involutif, défini par

$$\iota(X) = X \ , \quad X \in \mathcal{O}b(\mathcal{B}) \quad \text{et} \quad \iota(f) = f^{-1} \ , \quad f \in \mathcal{F}\ell(\mathcal{B}) \quad .$$

Alors, si l'on pose

$$G^\circ = \iota G : \mathcal{V}^\circ \longrightarrow \mathcal{B} \quad \text{et} \quad I^\circ = I\iota : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{V}^\circ \quad ,$$

où $\mathcal{V}^\circ$ désigne la catégorie opposée à $\mathcal{V}$, on vérifie facilement que $(\mathcal{V}^\circ \overset{G^\circ}{\to} \mathcal{B}, \otimes, I^\circ)$ est une $\mathcal{B}$-catégorie monoïdale. Enfin, en combinant les deux procédés ci-dessus on déduit une nouvelle $\mathcal{B}$-catégorie monoïdale $(\mathcal{V}^\circ \overset{G^\circ}{\to} \mathcal{B}, \otimes^\circ, I^\circ)$.

1.5. Structure de catégorie monoïdale relative sur $\mathcal{D}(\mathcal{V})$.

1.5.1. Soit $\mathcal{B}_\pm$ la catégorie dont l'ensemble des objets est $\{+,-\}$ et dont les seules flèches sont 1_+, 1_-, $f : + \to -$ et $g : - \to +$ assujetties aux relations $gf = 1_+$ et $fg = 1_-$.

$$\mathcal{B}_\pm = + \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} -$$

La catégorie $\mathcal{B}_\pm$ est un groupoïde.

1.5.2. Si $(\mathcal{V}, \otimes, I)$ désigne une catégorie monoïdale, il existe un foncteur unique

$$G : \mathcal{D}(\mathcal{V}) \longrightarrow \mathcal{B}_{\pm}$$

tel que pour tout objet A de $\mathcal{V}$

$$G\big((A,1)\big) = + \qquad \text{et} \qquad G\big((A,-1)\big) = - \quad .$$

Le foncteur G nous permet de considérer $\mathcal{D}(\mathcal{V})$ comme une $\mathcal{B}_{\pm}$-catégorie. On va définir une structure de $\mathcal{B}_{\pm}$-catégorie monoïdale sur $\mathcal{D}(\mathcal{V})$. Pour cela, on va définir des $\mathcal{B}_{\pm}$-foncteurs

$$\boxtimes : \mathcal{D}(\mathcal{V}) \times_{\mathcal{B}_{\pm}} \mathcal{D}(\mathcal{V}) \longrightarrow \mathcal{D}(\mathcal{V})$$

et

$$\mathcal{I} : \mathcal{B}_{\pm} \longrightarrow \mathcal{D}(\mathcal{V}) \quad .$$

Le foncteur $\boxtimes$ est défini comme suit. Au niveau des objets, on doit définir $(A,s) \boxtimes (B,s)$, pour A, $B \in \mathcal{O}b(\mathcal{V})$ et $s \in \{+1,-1\}$. On pose

$$(A,1) \boxtimes (B,1) = (A \otimes B, 1)$$

$$(A,-1) \boxtimes (B,-1) = (B \otimes A, -1) \quad .$$

Au niveau des flèches on doit définir $u \boxtimes v$ pour $u : (A,s) \longrightarrow (B,t)$, $v : (C,s) \longrightarrow (D,t)$, u, $v \in \mathcal{F}\ell(\mathcal{D}(\mathcal{V}))$, A, B, C, $D \in \mathcal{O}b(\mathcal{V})$, s, $t \in \{+1,-1\}$.

a) $s = t = 1$, $u : A \to B$, $v : C \to D$

$$\begin{array}{ccc} u \boxtimes v : (A,1) \boxtimes (C,1) & \longrightarrow & (B,1) \boxtimes (D,1) \\ \| & & \| \\ (A \otimes C, 1) & & (B \otimes D, 1) \end{array}$$

$$u \boxtimes v : A \otimes C \longrightarrow B \otimes D$$

$$u \boxtimes v := u \otimes v$$

b) $s = 1\,,\ t = -1\,,\ u : A \otimes B \to I\,,\ v : C \otimes D \to I$

$$\begin{array}{ccccc} u \boxtimes v : & (A,1) \boxtimes (C,1) & \longrightarrow & (B,-1) \boxtimes (D,-1) \\ & \| & & \| \\ & (A \otimes C, 1) & & (D \otimes B, -1) \end{array}$$

$$u \boxtimes v : A \otimes C \otimes D \otimes B \longrightarrow I$$

$$u \boxtimes v := u(1_A \otimes v \otimes 1_B)$$

c) $s = -1\,,\ t = 1\,,\ u : I \to A \otimes B\,,\ v : I \to C \otimes D$

$$\begin{array}{ccccc} u \boxtimes v : & (A,-1) \boxtimes (C,-1) & \longrightarrow & (B,1) \boxtimes (D,1) \\ & \| & & \| \\ & (C \otimes A, -1) & & (B \otimes D, 1) \end{array}$$

$$u \boxtimes v : I \longrightarrow C \otimes A \otimes B \otimes D$$

$$u \boxtimes v := (1_C \otimes u \otimes 1_D)v$$

d) $s = -1\,,\ t = -1\,,\ u : B \to A\,,\ v : D \to C$

$$\begin{array}{ccccc} u \boxtimes v : & (A,-1) \boxtimes (C,-1) & \longrightarrow & (B,-1) \boxtimes (D,-1) \\ & \| & & \| \\ & (C \otimes A, -1) & & (D \otimes B, -1) \end{array}$$

$$u \boxtimes v : D \otimes B \longrightarrow C \otimes A$$

$$u \boxtimes v := v \otimes u$$

Enfin, le foncteur $\mathcal{I}$ est défini sur les objets par

$$\mathcal{I}(+) = (I,1) \quad , \qquad \mathcal{I}(-) = (I,-1)$$

et sur les flèches par

a)

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{I}(f) : \mathcal{I}(+) & \longrightarrow & \mathcal{I}(-) \\ \parallel & & \parallel \\ (I,1) & & (I,-1) \end{array}$$

$$\mathcal{I}(f) : I \otimes I = I \longrightarrow I$$

$$\mathcal{I}(f) := 1_I$$

b)

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{I}(g) : \mathcal{I}(-) & \longrightarrow & \mathcal{I}(+) \\ \parallel & & \parallel \\ (I,-1) & & (I,1) \end{array}$$

$$\mathcal{I}(g) : I \longrightarrow I = I \otimes I$$

$$\mathcal{I}(g) := 1_I$$

Une simple vérification, laissée au lecteur, montre qu'on a le théorème suivant.

Théorème 1.5.3. *Le triplet* $(\mathcal{D}(\mathcal{V}) \overset{G}{\to} \mathcal{B}_{\pm}, \boxtimes, \mathcal{I})$ *est une* $\mathcal{B}_{\pm}$*-catégorie monoïdale, la fibre au dessus de* $+$ (resp. *au dessus de* $-$) *s'identifiant canoniquement à la catégorie monoïdale* $(\mathcal{V}, \otimes, I)$ (resp. $(\mathcal{V}^{\circ}, \otimes^{\circ}, I)$ (cf. 1.1.1)).

1.5.4. On remarque que la proposition (1.2.5) signifie simplement que le produit tensoriel de deux isomorphismes dans $\mathcal{D}(\mathcal{V})$ est encore un isomorphisme et que l'inverse de l'isomorphisme produit tensoriel est le produit tensoriel des inverses des isomorphismes donnés. En effet, en gardant les notations de cette proposition, on a

$$\mathbb{D}' \otimes \mathbb{D}'' = (A'' \otimes A', B' \otimes B'', \varepsilon'' \boxtimes \varepsilon', \eta'' \boxtimes \eta') \quad . \tag{1.5.4.1}$$

Les formules 1.2.5.1 et 1.2.5.2 résultent également aussitôt de 1.5.4.1 et de 1.3.3.1.

1.5.5. Si l'on applique le théorème 1.5.3 à la catégorie monoïdale $(\mathcal{V}^{\circ}, \otimes^{\circ}, I)$ (cf. 1.1.1), on obtient une nouvelle $\mathcal{B}_{\pm}$-catégorie monoïdale. On montre facilement que cette $\mathcal{B}_{\pm}$-catégorie monoïdale n'est autre que la $\mathcal{B}_\pm$-catégorie monoïdale $(\mathcal{D}(\mathcal{V})^\circ \stackrel{G^\circ}{\to} \mathcal{B}_\pm, \boxtimes^\circ, \mathcal{I}^\circ)$ (cf. 1.4.7 et 1.3.1).

1.6. Propriétés de fonctorialité de $\mathcal{D}(\mathcal{V})$.

1.6.1. Soient $(\mathcal{V}, \otimes, I)$ et $(\mathcal{V}', \otimes', I')$ deux catégories monoïdales et

$$(F, \Phi_2, \Phi_0) : (\mathcal{V}, \otimes, I) \longrightarrow (\mathcal{V}', \otimes', I')$$

un foncteur monoïdal. On va définir un foncteur

$$\mathcal{D}F : \mathcal{D}(\mathcal{V}) \longrightarrow \mathcal{D}(\mathcal{V}') \quad .$$

Pour tout objet A de $\mathcal{V}$ et tout $s \in \{+1, -1\}$, on pose

$$\mathcal{D}F\big((A, s)\big) = \big(F(A), s\big) \quad .$$

Si u désigne une flèche de $\mathcal{D}(\mathcal{V})$, on définit $\mathcal{D}F(u)$ comme suit

a) $(A,1) \xrightarrow{u} (B,1) \quad , \quad A \xrightarrow{u} B$

$$\mathcal{D}F(u) := F(u) \quad ;$$

b) $(A,-1) \xrightarrow{u} (B,-1) \quad , \quad B \xrightarrow{u} A$

$$\mathcal{D}F(u) := F(u) \quad ;$$

c) $(A,1) \xrightarrow{u} (B,-1) \quad , \quad A \otimes B \xrightarrow{u} I$

$$\mathcal{D}F(u) := \Phi_0^{-1} F(u) \Phi_{2,A,B} \quad ;$$

d) $(A,-1) \xrightarrow{u} (B,1) \quad , \quad I \xrightarrow{u} A \otimes B$

$$\mathcal{D}F(u) := \Phi_{2,A,B}^{-1} F(u) \Phi_0 \quad ;$$

On laisse au lecteur le soin de vérifier qu'on a bien défini ainsi un foncteur.

1.6.2. Si l'on considère $\mathcal{D}(\mathcal{V})$ et $\mathcal{D}(\mathcal{V}')$ munies de leurs structures de $\mathcal{B}_{\pm}$-catégories monoïdales (cf. (1.5.2))

$$(\mathcal{D}(\mathcal{V}) \xrightarrow{G} \mathcal{B}_{\pm}, \boxtimes, \mathcal{I}) \quad , \qquad (\mathcal{D}(\mathcal{V}') \xrightarrow{G'} \mathcal{B}_{\pm}, \boxtimes', \mathcal{I}') \quad ,$$

le foncteur $\mathcal{D}F$ se prolonge en un $\mathcal{B}_{\pm}$-foncteur monoïdal

$$(\mathcal{D}F, \mathcal{D}\Phi_2, \mathcal{D}\Phi_0) : (\mathcal{D}(\mathcal{V}) \xrightarrow{G} \mathcal{B}_{\pm}, \boxtimes, \mathcal{I}) \longrightarrow (\mathcal{D}(\mathcal{V}') \xrightarrow{G'} \mathcal{B}_{\pm}, \boxtimes', \mathcal{I}') \quad .$$

Pour tout A, $B \in \mathcal{O}b(\mathcal{V})$ et $s \in \{+1, -1\}$ on définit

$$\mathcal{D}\Phi_{2,(A,s),(B,s)} : \mathcal{D}F(A,s) \boxtimes' \mathcal{D}F(B,s) \longrightarrow \mathcal{D}F\big((A,s) \boxtimes (B,s)\big)$$

comme suit.

a) $s = 1$. On a

$$\begin{aligned} \mathcal{D}F(A,1) \boxtimes' \mathcal{D}F(B,1) &= \big(F(A),1\big) \boxtimes' \big(F(B),1\big) \\ &= \big(F(A) \otimes' F(B), 1\big) \end{aligned}$$

et

$$\mathcal{D}F\big((A,1) \boxtimes (B,1)\big) = \mathcal{D}F(A \otimes B, 1) = \big(F(A \otimes B), 1\big) \quad .$$

On doit donc définir

$$\mathcal{D}\Phi_{2,(A,1),(B,1)} : F(A) \otimes' F(B) \longrightarrow F(A \otimes B) \quad .$$

On pose

$$\mathcal{D}\Phi_{2,(A,1),(B,1)} := \Phi_{2,A,B} \quad .$$

b) $s = -1$. On a

$$\begin{aligned} \mathcal{D}F(A,-1) \boxtimes' \mathcal{D}F(B,-1) &= \big(F(A),-1\big) \boxtimes' \big(F(B),-1\big) \\ &= \big(F(B) \otimes' F(A), -1\big) \end{aligned}$$

et

$$\mathcal{D}F\big((A,-1)\boxtimes(B,-1)\big)=\mathcal{D}F(B\otimes A,-1)=\big(F(B\otimes A),-1\big)\quad .$$

On doit donc définir

$$\mathcal{D}\Phi_{2,(A,-1),(B,-1)}:F(B\otimes A)\longrightarrow F(B)\otimes' F(A)\quad .$$

On pose

$$\mathcal{D}\Phi_{2,(A,-1),(B,-1)}:=\Phi^{-1}_{2,B,A}\quad .$$

De même on définit le morphisme fonctoriel

$$\mathcal{D}\Phi_0:\mathcal{I}'\longrightarrow\mathcal{D}F\cdot\mathcal{I}$$

comme suit.

a)

$$\begin{array}{ccccc} (\mathcal{D}\Phi_0)_+ : & \mathcal{I}'(+) & \longrightarrow & \mathcal{D}F\big(\mathcal{I}(+)\big) & \\ & \| & & \| & \\ & (I',1) & & \mathcal{D}F(I,1) & =\big(F(I),1\big) \end{array}$$

$$(\mathcal{D}\Phi_0)_+:=\Phi_0\quad ;$$

b)

$$\begin{array}{ccccc} (\mathcal{D}\Phi_0)_- : & \mathcal{I}'(-) & \longrightarrow & \mathcal{D}F\big(\mathcal{I}(-)\big) & \\ & \| & & \| & \\ & (I',-1) & & \mathcal{D}F(I,-1) & =\big(F(I),-1\big) \end{array}$$

$$(\mathcal{D}\Phi_0)_-:=\Phi_0^{-1}\quad .$$

Une longue et pénible suite de vérifications montre, sans surprise, qu'on a ainsi bien défini un $\mathcal{B}_\pm$-foncteur monoïdal. La surprise ne vient que si l'on essaie de continuer le procédé pour un morphisme fonctoriel. On constate alors qu'on doit élargir cette notion.

1.6.3. Soient F et F' deux foncteurs d'une catégorie $\mathcal{A}$ dans une catégorie $\mathcal{A}'$ et $\mathcal{A}_+$ et $\mathcal{A}_-$ deux sous-catégories pleines de $\mathcal{A}$ telles que

$$\mathcal{O}b(\mathcal{A}) = \mathcal{O}b(\mathcal{A}_+)\coprod\mathcal{O}b(\mathcal{A}_-) \quad . \tag{1.6.3.1}$$

(La donnée de $\mathcal{A}_+$ et $\mathcal{A}_-$ équivaut à la donnée d'un foncteur $G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}_\pm$, autrement dit à la donnée d'une structure de $\mathcal{B}_\pm$-catégorie sur $\mathcal{A}$, de sorte que $\mathcal{A}_+$ (resp. $\mathcal{A}_-$) soit la fibre de G au dessus de $+$ (resp. au dessus de $-$)). On appelle *pseudo-morphisme fonctoriel de F dans F' relativement à* $(\mathcal{A}_+, \mathcal{A}_-)$ la donnée pour tout objet A de $\mathcal{A}$ d'un morphisme α_A de $\mathcal{A}'$ de source $F(A)$ (resp. $F'(A)$) et de but $F'(A)$ (resp. $F(A)$) si $A \in \mathcal{O}b(\mathcal{A}_+)$ (resp. si $A \in \mathcal{O}b(\mathcal{A}_-)$) satisfaisant à la propriété suivante. Pour tout morphisme $u : A \to B$ de $\mathcal{A}$ on a :

a) si A, $B \in \mathcal{O}b(\mathcal{A}_+)$, alors le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "\alpha_A"] \arrow[d, "F(u)"'] & F'(A) \arrow[d, "F'(u)"] \\ F(B) \arrow[r, "\alpha_B"'] & F'(B) \end{tikzcd} \quad , \tag{1.6.3.2}$$

autrement dit, la restriction de α à $\mathcal{A}_+$ est un morphisme fonctoriel de la restriction de F à $\mathcal{A}_+$ dans la restriction de F' à $\mathcal{A}_+$;

b) si A, $B \in \mathcal{O}b(\mathcal{A}_-)$, alors le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[d, "F(u)"'] & F'(A) \arrow[l, "\alpha_A"'] \arrow[d, "F'(u)"] \\ F(B) & F'(B) \arrow[l, "\alpha_B"] \end{tikzcd} \quad , \tag{1.6.3.3}$$

autrement dit, la restriction de α à $\mathcal{A}_-$ est un morphisme fonctoriel de la restriction de F' à $\mathcal{A}_-$ dans la restriction de F à $\mathcal{A}_-$;

c) si $A \in \mathcal{O}b(\mathcal{A}_+)$, $B \in \mathcal{O}b(\mathcal{A}_-)$, alors le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "\alpha_A"] \arrow[d, "F(u)"'] & F'(A) \arrow[d, "F'(u)"] \\ F(B) & F'(B) \arrow[l, "\alpha_B"] \end{tikzcd} \quad , \tag{1.6.3.4}$$

autrement dit,

$$F(u) = \alpha_B F'(u) \alpha_A \quad ; \tag{1.6.3.5}$$

d) si $A \in \mathcal{O}b(\mathcal{A}_-)$, $B \in \mathcal{O}b(\mathcal{A}_+)$, alors le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[d, "F(u)"'] & F'(A) \arrow[l, "\alpha_A"'] \arrow[d, "F'(u)"] \\ F(B) \arrow[r, "\alpha_B"'] & F'(B) \end{tikzcd} \quad , \tag{1.6.3.6}$$

autrement dit,

$$F'(u) = \alpha_B F(u) \alpha_A \quad . \tag{1.6.3.7}$$

On remarque que si pour tout $A \in \mathcal{O}b(\mathcal{A}_-)$ α_A est inversible, dire que α est un pseudo-foncteur de F dans F' relativement à $(\mathcal{A}_+, \mathcal{A}_-)$ équivaut à dire que $(\alpha \mid \mathcal{A}_+) \coprod (\alpha \mid \mathcal{A}_-)^{-1}$ est un morphisme fonctoriel de F dans F'.

Proposition 1.6.4. *Soient $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$, F, F', $\mathcal{A}_+$, $\mathcal{A}_-$ comme ci-dessus, $\alpha : F \to F'$ un pseudo-morphisme fonctoriel de F dans F' relativement à $(\mathcal{A}_+, \mathcal{A}_-)$, A un objet de $\mathcal{A}_+$ et B un objet de $\mathcal{A}_-$. Alors si A et B sont isomorphes dans $\mathcal{A}$, les morphismes α_A et α_B sont des isomorphismes et si $u : A \to B$ désigne un isomorphisme et u^{-1} l'isomorphisme inverse, on a*

$$\alpha_A^{-1} = F(u^{-1}) \alpha_B F'(u) \qquad \textit{et} \qquad \alpha_B^{-1} = F'(u) \alpha_A F(u^{-1}) \quad .$$

Démonstration. En vertu de (1.6.3.5) et (1.6.3.7), on a

$$F(u) = \alpha_B F'(u) \alpha_A \quad \text{et} \quad F'(u^{-1}) = \alpha_A F(u^{-1}) \alpha_B \quad ,$$

d'où

$$F(u^{-1}) \alpha_B F'(u) \alpha_A = 1_{F(A)} \quad \textit{et} \quad \alpha_A F(u^{-1}) \alpha_B F'(u) = 1_{F'(A)} \quad ,$$

ce qui démontre la proposition.

1.6.5. Soient $\mathcal{B}$ une catégorie, $(\mathcal{V} \stackrel{G}{\to} \mathcal{B}, \otimes, I)$ et $(\mathcal{V}' \stackrel{G'}{\to} \mathcal{B}, \otimes', I')$ deux $\mathcal{B}$-catégories monoïdales, (F, Φ_2, Φ_0) et (F', Φ'_2, Φ'_0) deux $\mathcal{B}$-foncteurs monoïdaux de la première dans la seconde et $\mathcal{V}_+$ et $\mathcal{V}_-$ deux sous-catégories pleines de $\mathcal{V}$ telles que

$$\mathcal{O}b(\mathcal{V}) = \mathcal{O}b(\mathcal{V}_+) \coprod \mathcal{O}b(\mathcal{V}_-)$$

et telles que pour tout $A \in \mathcal{O}b(\mathcal{V}_+)$ (resp. $A \in \mathcal{O}b(\mathcal{V}_-)$) et tout $B \in \mathcal{O}b(\mathcal{V})$ tel que $G(B) = G(A)$ on ait $B \in \mathcal{O}b(\mathcal{V}_+)$ (resp. $B \in \mathcal{O}b(\mathcal{V}_-)$) (cela équivaut à dire que le foncteur $H : \mathcal{V} \to \mathcal{B}_\pm$ correspondant à $(\mathcal{V}_+, \mathcal{V}_-)$ (1.6.3) se factorise par $\mathcal{B}$). Soient $\mathcal{B}_+$ (resp. $\mathcal{B}_-$) la sous-catégorie pleine de $\mathcal{B}$ telle que

$$\mathcal{O}b(\mathcal{B}_+) = \{X \in \mathcal{O}b(\mathcal{B}) \mid \exists A \in \mathcal{O}b(\mathcal{V}_+),\, X = G(A)\}$$

$$\text{(resp.} \qquad \mathcal{O}b(\mathcal{B}_-) = \{X \in \mathcal{O}b(\mathcal{B}) \mid \exists A \in \mathcal{O}b(\mathcal{V}_-),\, X = G(A)\} \quad)$$

et $\mathcal{V}'_+$ (resp. $\mathcal{V}'_-$) la sous-catégorie pleine de $\mathcal{V}'$ telle que

$$\mathcal{O}b(\mathcal{V}'_+) = \{A' \in \mathcal{O}b(\mathcal{V}') \mid G'(A') \in \mathcal{O}b(\mathcal{B}_+)\}$$

$$\text{(resp.} \qquad \mathcal{O}b(\mathcal{V}'_-) = \{A' \in \mathcal{O}b(\mathcal{V}') \mid G'(A') \in \mathcal{O}b(\mathcal{B}_-)\} \quad).$$

Par restriction de G à $\mathcal{V}_+$ (resp. à $\mathcal{V}_-$), de $\otimes$ à $\mathcal{V}_+ \times_{\mathcal{B}_+} \mathcal{V}_+$ (resp. à $\mathcal{V}_- \times_{\mathcal{B}_-} \mathcal{V}_-$) et de I à $\mathcal{B}_+$ (resp. à $\mathcal{B}_-$), on en déduit une $\mathcal{B}_+$-catégorie (resp. une $\mathcal{B}_-$-catégorie) monoïdale

$$(\mathcal{V}_+ \xrightarrow{G_+} \mathcal{B}_+, \otimes_+, I_+) \qquad \text{(resp.} \quad (\mathcal{V}_- \xrightarrow{G_-} \mathcal{B}_-, \otimes_-, I_-) \quad)$$

et de même, par restriction de G', $\otimes'$, I', une $\mathcal{B}_+$-catégorie (resp. une $\mathcal{B}_-$-catégorie) monoïdale

$$(\mathcal{V}'_+ \xrightarrow{G'_+} \mathcal{B}_+, \otimes'_+, I'_+) \qquad \text{(resp.} \quad (\mathcal{V}'_- \xrightarrow{G'_-} \mathcal{B}_-, \otimes'_-, I'_-) \quad).$$

Enfin, par restriction de F à $\mathcal{V}_+$ (resp. à $\mathcal{V}_-$), de Φ_2 à $\mathcal{V}_+ \times_{\mathcal{B}_+} \mathcal{V}_+$ (resp. à $\mathcal{V}_- \times_{\mathcal{B}_-} \mathcal{V}_-$) et de Φ_0 à $\mathcal{B}_+$ (resp. à $\mathcal{B}_-$), on en déduit un $\mathcal{B}_+$-foncteur (resp. un $\mathcal{B}_-$-foncteur) monoïdal

$$(F^+, \Phi_2^+, \Phi_0^+) : (\mathcal{V}_+ \xrightarrow{G_+} \mathcal{B}_+, \otimes_+, I_+) \to (\mathcal{V}'_+ \xrightarrow{G'_+} \mathcal{B}_+, \otimes'_+, I'_+)$$

$$\text{(resp. } (F^-, \Phi_2^-, \Phi_0^-) : (\mathcal{V}_- \xrightarrow{G_-} \mathcal{B}_-, \otimes_-, I_-) \to (\mathcal{V}'_- \xrightarrow{G'_-} \mathcal{B}_-, \otimes'_-, I'_-)\,)$$

et de même, par restriction de F' , Φ'_2 , Φ'_0 , un $\mathcal{B}_+$-foncteur (resp. un $\mathcal{B}_-$-foncteur) monoïdal

$$({F'}^+, {\Phi'_2}^+, {\Phi'_0}^+) : (\mathcal{V}_+ \xrightarrow{G_+} \mathcal{B}_+, \otimes_+, I_+) \longrightarrow (\mathcal{V}'_+ \xrightarrow{G'_+} \mathcal{B}_+, \otimes'_+, I'_+)$$

(resp.

$$({F'}^-, {\Phi'_2}^-, {\Phi'_0}^-) : (\mathcal{V}_- \xrightarrow{G_-} \mathcal{B}_-, \otimes_-, I_-) \longrightarrow (\mathcal{V}'_- \xrightarrow{G'_-} \mathcal{B}_-, \otimes'_-, I'_-) \;).$$

On dit qu'un pseudo-morphisme fonctoriel $\alpha : F \to F'$ relativement à $(\mathcal{V}_+, \mathcal{V}_-)$ est un *$\mathcal{B}$-pseudo-morphisme fonctoriel monoïdal de* (F, Φ_2, Φ_0) *dans* (F', Φ'_2, Φ'_0) *relativement au couple* $(\mathcal{V}_+, \mathcal{V}_-)$ si la restriction de α à $\mathcal{V}_+$ est un $\mathcal{B}_+$-morphisme fonctoriel monoïdal de $(F^+, \Phi_2^+, \Phi_0^+)$ dans $({F'}^+, {\Phi'_2}^+, {\Phi'_0}^+)$ et la restriction de α à $\mathcal{V}_-$ un $\mathcal{B}_-$-morphisme fonctoriel monoïdal de $({F'}^-, {\Phi'_2}^-, {\Phi'_0}^-)$ dans $(F^-, \Phi_2^-, \Phi_0^-)$.

1.6.6. Soient

$$(\mathcal{V}, \otimes, I) \underset{(F', \Phi'_2, \Phi'_0)}{\overset{(F, \Phi_2, \Phi_0)}{\rightrightarrows}} (\mathcal{V}', \otimes', I')$$

deux foncteurs monoïdaux, $\alpha : (F, \Phi_2, \Phi_0) \to (F', \Phi'_2, \Phi'_0)$ un morphisme fonctoriel monoïdal et

$$(\mathcal{D}(\mathcal{V}) \to \mathcal{B}_\pm, \boxtimes, \mathcal{I}) \underset{(\mathcal{D}F', \mathcal{D}\Phi'_2, \mathcal{D}\Phi'_0)}{\overset{(\mathcal{D}F, \mathcal{D}\Phi_2, \mathcal{D}\Phi_0)}{\rightrightarrows}} (\mathcal{D}(\mathcal{V}') \to \mathcal{B}_\pm, \boxtimes', \mathcal{I}')$$

les $\mathcal{B}_\pm$-foncteurs monoïdaux associées (1.6.2). On désigne par $\mathcal{D}_+(\mathcal{V})$ (resp. $\mathcal{D}_-(\mathcal{V})$) la fibre de $\mathcal{D}(\mathcal{V})$ au dessus de $+$ (resp. au dessus de $-$). Au morphisme fonctoriel α correspond un $\mathcal{B}_\pm$-pseudo-morphisme fonctoriel monoïdal $\widetilde{\mathcal{D}}\alpha$ de $(\mathcal{D}F, \mathcal{D}\Phi_2, \mathcal{D}\Phi_0)$ dans $(\mathcal{D}F', \mathcal{D}\Phi'_2, \mathcal{D}\Phi'_0)$ relativement à $(\mathcal{D}_+(\mathcal{V}), \mathcal{D}_-(\mathcal{V}))$ défini par $\widetilde{\mathcal{D}}\alpha_{(A,s)} = \alpha_A$, pour $A \in \mathcal{O}b(\mathcal{V})$ et $s \in \{+1, -1\}$. Pour démontrer que $\widetilde{\mathcal{D}}\alpha$ est un pseudo-morphisme fonctoriel, on remarque que les conditions (a) et (b) de (1.6.3) sont évidentes. Vérifions la condition (c). On doit montrer que pour tout morphisme

$$(A, 1) \xrightarrow{u} (B, -1) \quad , \qquad A \otimes B \xrightarrow{u} I$$

on a

$$\mathcal{D}F(u) = \widetilde{\mathcal{D}}\alpha_{(B,-1)} \circ \mathcal{D}F'(u) \circ \widetilde{\mathcal{D}}\alpha_{(A,1)} \quad .$$

En effet on a

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\mathcal{D}}\alpha_{(B,-1)} \circ \mathcal{D}F'(u) \circ \widetilde{\mathcal{D}}\alpha_{(A,1)} \\
&= \widetilde{\mathcal{D}}\alpha_{(B,-1)} \circ \big(\mathcal{D}F'(u)(\widetilde{\mathcal{D}}\alpha_{(A,1)} \otimes' 1_{F'(B)})\big) \\
&= \mathcal{D}F'(u)(\widetilde{\mathcal{D}}\alpha_{(A,1)} \otimes' 1_{F'(B)})(1_{F(A)} \otimes' \widetilde{\mathcal{D}}\alpha_{(B,-1)}) \\
&= \Phi_0'^{-1} F'(u)\Phi'_{2,A,B}(\alpha_A \otimes' 1_{F'(B)})(1_{F(A)} \otimes' \alpha_B) \\
&= \Phi_0'^{-1} F'(u)\Phi'_{2,A,B}(\alpha_A \otimes' \alpha_B) \\
&= \Phi_0'^{-1} F'(u)\alpha_{A\otimes B}\Phi_{2,A,B} \\
&= \Phi_0'^{-1} \alpha_I F(u)\Phi_{2,A,B} \\
&= \Phi_0^{-1} F(u)\Phi_{2,A,B} = \mathcal{D}F(u) \quad .
\end{aligned}$$

La condition (d) se démontre de façon analogue et on vérifie immédiatement que le pseudo-morphisme fonctoriel α est un $\mathcal{B}_\pm$-pseudo-morphisme fonctoriel monoïdal.

On remarque que la proposition (1.2.7) est conséquence de ce qui précède, de la proposition (1.6.4) et du lemme (1.2.2).

1.6.7. En gardant les notations ci-dessus, si α est un *isomorphisme* fonctoriel monoïdal, on pose

$$\mathcal{D}\alpha = \big(\widetilde{\mathcal{D}}\alpha \mid \mathcal{D}_+(\mathcal{V})\big) \coprod \big(\widetilde{\mathcal{D}}\alpha \mid \mathcal{D}_-(\mathcal{V})\big)^{-1}$$

et alors $\mathcal{D}\alpha$ est un $\mathcal{B}_\pm$-morphisme fonctoriel monoïdal (et même un isomorphisme). On a ainsi défini un 2-foncteur $\mathcal{D}$ de la 2-catégorie dont les objets sont les catégories monoïdales, les 1-flèches les foncteurs monoïdaux et les 2-flèches les *isomorphismes* fonctoriels monoïdaux, dans la 2-catégorie dont les objets sont les $\mathcal{B}_\pm$-catégories monoïdales, les 1-flèches les $\mathcal{B}_\pm$-foncteurs monoïdaux et les 2-flèches les $\mathcal{B}_\pm$-morphismes fonctoriels monoïdaux.

§ 2. Catégories monoïdales autonomes.

2.1. Rappels sur les catégories monoïdales autonomes.

2.1.1. On dit qu'une catégorie monoïdale est *autonome à gauche* (resp. *autonome à droite*) si tout objet possède un dual à gauche (resp. à droite). On dit qu'elle *autonome*, si elle est à la fois autonome à gauche et à droite.

Il résulte de la proposition 1.2.7 qu'un morphisme fonctoriel monoïdal entre foncteurs monoïdaux, d'une catégorie monoïdale autonome à gauche, ou à droite, à valeurs dans une catégorie monoïdale, est un *isomorphisme* fonctoriel.

2.1.2. On appelle *structure autonome à gauche* (resp. *structure autonome à droite*) sur une catégorie monoïdale autonome à gauche (resp. à droite) la donnée pour tout objet A d'un dual à gauche $({}^{\vee}\!A, \varepsilon_A, \eta_A)$ (resp. d'un dual à droite $(A^{\vee}, e_A, h_A)$), autrement dit, le choix pour tout objet A d'un objet ${}^{\vee}\!A$ (resp. d'un objet $A^{\vee}$) et des morphismes

$$\varepsilon_A : {}^{\vee}\!A \otimes A \longrightarrow I \quad , \quad \eta_A : I \longrightarrow A \otimes {}^{\vee}\!A$$

$$(\text{resp.} \qquad e_A : A \otimes A^{\vee} \longrightarrow I \quad , \quad h_A : I \longrightarrow A^{\vee} \otimes A \qquad)$$

satisfaisant aux relations :

$$(1_A \otimes \varepsilon_A)(\eta_A \otimes 1_A) = 1_A \ , \ \ (\varepsilon_A \otimes 1_{{}^{\vee}\!A})(1_{{}^{\vee}\!A} \otimes \eta_A) = 1_{{}^{\vee}\!A}$$

$$(\text{resp.} \quad (e_A \otimes 1_A)(1_A \otimes h_A) = 1_A \ , \ \ (1_{A^{\vee}} \otimes e_A)(h_A \otimes 1_{A^{\vee}}) = 1_{A^{\vee}} \ ) .$$

On dit qu'une telle structure autonome à gauche (resp. à droite) est *normalisée* si ${}^{\vee}I = I$ et $\varepsilon_I = \eta_I = 1_I$ (resp. $I^{\vee} = I$ et $e_I = h_I = 1_I$) (ce qu'on peut toujours supposer (cf. 1.2.1), sans perte de généralité).

On appelle *structure autonome* sur une catégorie monoïdale autonome la donnée à la fois d'une structure autonome à gauche et à droite.

2.1.3. Il résulte de (1.2.2) et (1.2.3) que la donnée d'une structure autonome à gauche (resp. à droite) sur une catégorie monoïdale $(\mathcal{V}, \otimes, I)$ définit un foncteur contravariant de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{V}$ en associant à un objet A de $\mathcal{V}$ l'objet ${}^\vee\! A$ (resp. l'objet $A^\vee$) et à un morphisme $u : A \to B$ de $\mathcal{V}$ le morphisme ${}^\vee u : {}^\vee B \to {}^\vee\! A$ (resp. le morphisme $u^\vee : B^\vee \to A^\vee$) défini par

$$ {}^\vee u = t^{(l)}_{\mathbb{D}_A,\mathbb{D}_B}(u) = (\varepsilon_B \otimes 1_{{}^\vee\! A})(1_{{}^\vee\! B} \otimes u \otimes 1_{{}^\vee\! A})(1_{{}^\vee\! B} \otimes \eta_A) $$

$$ (\text{resp.} \quad u^\vee = t^{(r)}_{\mathbb{D}'_A,\mathbb{D}'_B}(u) = (1_{A^\vee} \otimes e_B)(1_{A^\vee} \otimes u \otimes 1_{B^\vee})(h_A \otimes 1_{B^\vee}) \;), $$

où pour tout objet C de $\mathcal{V}$ on pose $\mathbb{D}_C = ({}^\vee C, C, \varepsilon_C, \eta_C)$ (resp. $\mathbb{D}'_C = (C, C^\vee, e_C, h_C)$). On vérifie aussitôt, en utilisant les propositions (1.2.4) et (1.2.5), que ce foncteur s'étend en un foncteur monoïdal

$$ t^{(l)} = ({}^\vee ., \Phi^{(l)}_2, \Phi^{(l)}_0) : (\mathcal{V}^\circ, \otimes^\circ, I) \longrightarrow (\mathcal{V}, \otimes, I) $$

$$ (\text{resp.} \qquad t^{(r)} = (.^\vee, \Phi^{(r)}_2, \Phi^{(r)}_0) : (\mathcal{V}^\circ, \otimes^\circ, I) \longrightarrow (\mathcal{V}, \otimes, I) \qquad), $$

où, en utilisant les notations de (1.2.3) et (1.2.5),

$$ \Phi^{(l)}_{2,A,B} = t^{(l)}_{\mathbb{D}_{B\otimes A},\mathbb{D}_B\otimes\mathbb{D}_A}(1_{B\otimes A}) $$

$$ = (\varepsilon_A \otimes 1_{{}^\vee(B\otimes A)})(1_{{}^\vee\! A} \otimes \varepsilon_B \otimes 1_A \otimes 1_{{}^\vee(B\otimes A)})(1_{{}^\vee\! A} \otimes 1_{{}^\vee\! B} \otimes \eta_{B\otimes A}) $$

$$ (\text{resp.} \qquad \Phi^{(r)}_{2,A,B} = t^{(r)}_{\mathbb{D}'_{B\otimes A},\mathbb{D}'_A\otimes\mathbb{D}'_B}(1_{B\otimes A}) $$

$$ = (1_{(B\otimes A)^\vee} \otimes e_B)(1_{(B\otimes A)^\vee} \otimes 1_B \otimes e_A \otimes 1_{B^\vee})(h_{B\otimes A} \otimes 1_{A^\vee} \otimes 1_{B^\vee})\,) $$

et

$$ \Phi^{(l)}_0 = \eta_I \qquad (\text{resp.} \qquad \Phi^{(r)}_0 = h_I \quad) $$

(si les structures autonomes sont normalisées, on a donc $\Phi^{(l)}_0 = 1_I$ (resp. $\Phi^{(r)}_0 = 1_I$)).

2.1.4. Si la catégorie monoïdale $(\mathcal{V}, \otimes, I)$ est munie d'une structure autonome

$$ ({}^\vee ., \varepsilon, \eta, .^\vee, e, h) \quad , $$

pour tout objet A de $\mathcal{V}$, on définit des morphismes

$$ k_A : A \longrightarrow {}^\vee(A^\vee) \qquad \text{et} \qquad \kappa_A : A \longrightarrow ({}^\vee\! A)^\vee $$

par

$$k_A = t^{(l)}_{\mathbb{D}_{A^\vee},\mathbb{D}'_A}(1_{A^\vee}) = (e_A \otimes 1_{^\vee(A^\vee)})(1_A \otimes \eta_{A^\vee}) \quad ,$$

$$\kappa_A = t^{(r)}_{\mathbb{D}'_{^\vee A},\mathbb{D}_A}(1_{^\vee A}) = (1_{(^\vee A)^\vee} \otimes \varepsilon_A)(h_{^\vee A} \otimes 1_A) \quad .$$

Il résulte aussitôt de 1.2.2 et 1.2.3 que k_A et κ_A sont des isomorphismes fonctoriels en A, les isomorphismes inverses étant définis par

$$k_A^{-1} = t^{(l)}_{\mathbb{D}'_A,\mathbb{D}_{A^\vee}}(1_{A^\vee}) = (\varepsilon_{A^\vee} \otimes 1_A)(1_{^\vee(A^\vee)} \otimes h_A) \quad ,$$

$$\kappa_A^{-1} = t^{(r)}_{\mathbb{D}_A,\mathbb{D}'_{^\vee A}}(1_{^\vee A}) = (1_A \otimes e_{^\vee A})(\eta_A \otimes 1_{(^\vee A)^\vee}) \quad .$$

2.2. Rappels sur les catégories fibrées.

2.2.1. Soit $G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ une $\mathcal{B}$-catégorie. On rappelle qu'un *morphisme cartésien* de $\mathcal{A}$ (relativement à G) est un morphisme $k : A \to B$ de $\mathcal{A}$ tel que pour tout morphisme $u : A_1 \to B$ tel que $G(u) = G(k)$ il existe un morphisme vertical (cf. 1.4.1) unique $v : A_1 \to A$ tel que $u = kv$.

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[d, dashed, "v"'] \arrow[dr, "u"] & \\
A \arrow[r, "k"] & B
\end{tikzcd}$$

Tout isomorphisme est un morphisme cartésien. Un morphisme à la fois cartésien et vertical est un isomorphisme. On dit que G est une *préfibration* si pour tout objet A de $\mathcal{A}$ et toute flèche f de but $G(A)$ de $\mathcal{B}$ il existe un morphisme cartésien k de but A tel que $G(k) = f$. On dit que G est une *fibration* (ou que $\mathcal{A}$ est une *catégorie fibrée* sur $\mathcal{B}$) si G est une préfibration et si le composé de deux morphismes (composables) cartésiens est un morphisme cartésien. Si G est une fibration et k un morphisme cartésien tel que $G(k)$ soit un isomorphisme de $\mathcal{B}$ alors k est un isomorphisme de $\mathcal{A}$. En particulier, si G est une fibration et $\mathcal{B}$ un groupoïde, alors l'ensemble des morphismes cartésiens de $\mathcal{A}$ n'est autre que l'ensemble des isomorphismes de $\mathcal{A}$. Si G est une préfibration (et en particulier si c'est une fibration) la donnée d'un *clivage normalisé* de G équivaut à la donnée d'une classe $\mathcal{K}$ de flèches cartésiennes de $\mathcal{A}$ contenant les identités de $\mathcal{A}$ et telle que pour tout objet A de $\mathcal{A}$ et toute flèche f de but $G(A)$ de $\mathcal{B}$ il existe un morphisme unique $k \in \mathcal{K}$ de but A tel que $G(k) = f$.

2.2.2. Si $G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, $G' : \mathcal{A}' \to \mathcal{B}$ désignent deux $\mathcal{B}$-catégorie, on dit qu'un $\mathcal{B}$-foncteur $F : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ est *cartésien*, si l'image par F de tout morphisme cartésien de $\mathcal{A}$ est un morphisme cartésien de $\mathcal{A}'$.

2.2.3. On dit qu'une $\mathcal{B}$-catégorie fibrée $G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ est *pointée* si elle est munie d'un $\mathcal{B}$-foncteur cartésien $S : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$, autrement dit d'un foncteur S qui est une section de G et transforme tout morphisme de $\mathcal{B}$ en un morphisme cartésien de $\mathcal{A}$. On appelle *clivage normalisé de la catégorie fibrée $G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ pointée par S* un clivage normalisé de la catégorie fibrée sous-jacente, donné par une classe de morphismes cartésiens $\mathcal{K}$ telle que, pour toute flèche f de $\mathcal{B}$, $s(f)$ appartient à $\mathcal{K}$.

2.3. Catégories monoïdales fibrées et dualité.

2.3.1. On appelle *$\mathcal{B}$-catégorie monoïdale fibrée* une $\mathcal{B}$-catégorie monoïdale $(\mathcal{V} \overset{G}{\to} \mathcal{B}, \otimes, I)$ telle que $G : \mathcal{V} \to \mathcal{B}$ soit une fibration et $\otimes$ et I des foncteurs cartésiens. En particulier, $(\mathcal{V} \overset{G}{\to} \mathcal{B}, I)$ est une catégorie fibrée pointée. On appelle *clivage normalisé de la catégorie monoïdale fibrée* $(\mathcal{V} \overset{G}{\to} \mathcal{B}, \otimes, I)$ un clivage normalisé de la catégorie fibrée pointée sous-jacente $(\mathcal{V} \overset{G}{\to} \mathcal{B}, I)$.

Soit $G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}_{\pm}$ une $\mathcal{B}_{\pm}$-catégorie, où $\mathcal{B}_{\pm}$ désigne la catégorie définie dans 1.5.1, et notons $\mathcal{A}_+$ et $\mathcal{A}_-$ les fibres de G au dessus de $+$ et de $-$ respectivement. Comme la catégorie $\mathcal{B}_{\pm}$ est un groupoïde, la proposition suivante résulte aussitôt de 2.2.1.

Proposition 2.3.2. *Le foncteur G est une fibration si et seulement si pour tout objet A de $\mathcal{A}_-$ il existe un objet de $\mathcal{A}_+$ isomorphe à A* (dans $\mathcal{A}$) *et pour tout objet B de $\mathcal{A}_+$ il existe un objet de $\mathcal{A}_-$ isomorphe à B* (dans $\mathcal{A}$).

Théorème 2.3.3. *Soient $(\mathcal{V}, \otimes, I)$ une catégorie monoïdale et $G : \mathcal{D}(\mathcal{V}) \to \mathcal{B}_{\pm}$ le foncteur défini au numéro* 1.5.2. *Alors G est une fibration si et seulement si $\mathcal{V}$ est autonome. De plus, s'il en est ainsi* *la $\mathcal{B}_\pm$-catégorie monoïdale $(\mathcal{D}(\mathcal{V}) \overset{G}{\to} \mathcal{B}_\pm, \boxtimes, \mathcal{I})$ est une $\mathcal{B}_\pm$-catégorie monoïdale fibrée, dont les clivages normalisés sont en bijection avec les structures autonomes normalisées de $(\mathcal{V}, \otimes, I)$.*

Le théorème résulte aussitôt de la proposition précédente et de 1.3.2 et de 1.5.3.

2.3.4. En vertu du théorème précédent et de la proposition 1.2.7, le 2-foncteur $\mathcal{D}$, défini dans 1.6.7, induit un 2-foncteur de la 2-catégorie dont les objets sont les catégories monoïdales autonomes, les 1-flèches les foncteurs monoïdaux et les 2-flèches les morphismes fonctoriels monoïdaux (qui sont automatiquement des isomorphismes), dans la 2-catégorie dont les objets sont les $\mathcal{B}_\pm$-catégories monoïdales fibrées, les 1-flèches les $\mathcal{B}_\pm$-foncteurs monoïdaux (qui sont forcement cartésiens) et les 2-flèches les $\mathcal{B}_\pm$-morphismes fonctoriels monoïdaux.

§ 3. Catégories monoïdales souveraines.

3.1. Définition des catégories monoïdales souveraines.

3.1.1. Dans une catégorie monoïdale autonome $(\mathcal{V}, \otimes, I)$, un dual à gauche d'un objet n'est pas nécessairement isomorphe à un dual à droite de ce même objet. On appelle *catégorie monoïdale souveraine* une catégorie monoïdale autonome qui satisfait à cette propriété et est munie d'un choix cohérent d'isomorphismes entre duaux à gauche et duaux à droite. Plus précisément, on est conduit à poser la définition suivante.

Définition 3.1.2. Soit $(\mathcal{V}, \otimes, I)$ une catégorie monoïdale autonome. On appelle *structure souveraine* sur $(\mathcal{V}, \otimes, I)$ la donnée pour tout objet B de $\mathcal{V}$ et tout couple de dualités de la forme $\mathbb{D} = (A, B, \varepsilon, \eta)$ et $\mathbb{D}' = (B, C, e, h)$ d'un isomorphisme $\varphi_{\mathbb{D},\mathbb{D}'} : C \to A$, la famille φ de ces isomorphismes satisfaisant aux propriétés suivantes :

a) *fonctorialité* : pour toute flèche $v : B_1 \to B_2$ de $\mathcal{V}$ et toutes dualités

$$\mathbb{D}_1 = (A_1, B_1, \varepsilon_1, \eta_1) \quad , \qquad \mathbb{D}'_1 = (B_1, C_1, e_1, h_1) \quad ,$$

$$\mathbb{D}_2 = (A_2, B_2, \varepsilon_2, \eta_2) \quad , \qquad \mathbb{D}'_2 = (B_2, C_2, e_2, h_2) \quad ,$$

si $u : A_2 \to A_1$ (resp. $w : C_2 \to C_1$) désigne le transposé à gauche (resp. à droite) de v relativement à $\mathbb{D}_1$ et $\mathbb{D}_2$ (resp. relativement à $\mathbb{D}'_1$ et $\mathbb{D}'_2$) (cf. 1.2.3)

$$u = t^{(l)}_{\mathbb{D}_1,\mathbb{D}_2}(v) \quad , \qquad w = t^{(r)}_{\mathbb{D}'_1,\mathbb{D}'_2}(v)$$

alors le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} C_2 & \xrightarrow{\varphi_{\mathbb{D}_2,\mathbb{D}'_2}} & A_2 \\ {\scriptstyle w}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u} \\ C_1 & \xrightarrow{\varphi_{\mathbb{D}_1,\mathbb{D}'_1}} & A_1 \end{array} \quad ,$$

autrement dit,

$$t^{(l)}_{\mathbb{D}_1,\mathbb{D}_2}(v)\varphi_{\mathbb{D}_2,\mathbb{D}'_2} = \varphi_{\mathbb{D}_1,\mathbb{D}'_1} t^{(r)}_{\mathbb{D}'_1,\mathbb{D}'_2}(v) \quad ; \tag{3.1.2.1}$$

b) *compatibilité au produit tensoriel* : pour tout couple d'objets B_1 , B_2 de $\mathcal{V}$ et toutes dualités

$$\mathbb{D}_1 = (A_1, B_1, \varepsilon_1, \eta_1) \quad , \qquad \mathbb{D}'_1 = (B_1, C_1, e_1, h_1) \quad ,$$

$$\mathbb{D}_2 = (A_2, B_2, \varepsilon_2, \eta_2) \quad , \qquad \mathbb{D}'_2 = (B_2, C_2, e_2, h_2) \quad ,$$

en utilisant les notations de 1.2.5, on a

$$\varphi_{\mathbb{D}_1\otimes\mathbb{D}_2,\mathbb{D}'_2\otimes\mathbb{D}'_1} = \varphi_{\mathbb{D}_2,\mathbb{D}'_2} \otimes \varphi_{\mathbb{D}_1,\mathbb{D}'_1} \quad . \tag{3.1.2.2}$$

On appelle *catégorie monoïdale souveraine*, ou plus simplement *catégorie souveraine*, une catégorie monoïdale autonome *munie* d'une structure souveraine.

Définition 3.1.3. Soient $(\mathcal{V}, \otimes, I, \varphi)$ et $(\mathcal{V}', \otimes', I', \varphi')$ deux catégories souveraines. On dit qu'un foncteur monoïdal

$$(F, \Phi_2, \Phi_0) : (\mathcal{V}, \otimes, I) \longrightarrow (\mathcal{V}', \otimes', I')$$

est *souverain* si pour tout objet B de $\mathcal{V}$ et toutes dualités

$$\mathbb{D} = (A, B, \varepsilon, \eta) \quad , \qquad \mathbb{D}' = (B, C, e, h) \quad ,$$

en utilisant les notations de 1.2.6, on a

$$\varphi'_{F(\mathbb{D}),F(\mathbb{D}')} = F(\varphi_{\mathbb{D},\mathbb{D}'}) \quad . \tag{3.1.3.1}$$

Remarque 3.1.4. Contrairement aux catégories autonomes qui ne sont pas munies d'une structure autonome particulière (pour qu'une catégorie monoïdale soit autonome, il suffit qu'une telle structure existe) une catégorie souveraine est par définition munie d'une structure souveraine. En effet, si, grâce à l'unicité à isomorphisme près d'un dual, deux structures autonomes sont toujours "isomorphes", il n'en est pas en général de même pour deux structures souveraines.

Proposition 3.1.5. *Soit* $(\mathcal{V}, \otimes, I, \varphi)$ *une catégorie souveraine.*

a) *Si* $\mathbb{D}_0$ *désigne la dualité* $(I, I, 1_I, 1_I)$ (cf. 1.2.1), *alors*

$$\varphi_{\mathbb{D}_0,\mathbb{D}_0} = 1_I \quad . \tag{3.1.5.1}$$

b) *Soient*

$$\mathbb{D} = (A, B, \varepsilon, \eta) \ , \quad \mathbb{D}' = (B, C, \varepsilon', \eta') \quad et \quad \mathbb{D}'' = (C, D, \varepsilon'', \eta'')$$

des dualités. Alors on a

$$\varphi^{-1}_{\mathbb{D},\mathbb{D}'} = t^{(l)}_{\mathbb{D}'',\mathbb{D}}(\varphi_{\mathbb{D}',\mathbb{D}''}) \qquad et \qquad \varphi^{-1}_{\mathbb{D}',\mathbb{D}''} = t^{(r)}_{\mathbb{D}'',\mathbb{D}}(\varphi_{\mathbb{D},\mathbb{D}'}) \quad . \tag{3.1.5.2}$$

Démonstration. On remarque que $\mathbb{D}_0 \otimes \mathbb{D}_0 = \mathbb{D}_0$ et 3.1.2.2 implique que

$$\varphi_{\mathbb{D}_0,\mathbb{D}_0} = \varphi_{\mathbb{D}_0,\mathbb{D}_0} \otimes \varphi_{\mathbb{D}_0,\mathbb{D}_0} = (\varphi_{\mathbb{D}_0,\mathbb{D}_0} \otimes 1_I)(1_I \otimes \varphi_{\mathbb{D}_0,\mathbb{D}_0}) = \varphi^2_{\mathbb{D}_0,\mathbb{D}_0} \quad .$$

Comme $\varphi_{\mathbb{D}_0,\mathbb{D}_0}$ est inversible, on en déduit que $\varphi_{\mathbb{D}_0,\mathbb{D}_0} = 1_I$.

Pour démontrer l'assertion (b), on remarque d'abord qu'en vertu de 1.2.2 et 1.2.3, les deux égalités de 3.1.5.2 sont équivalentes. Il suffit donc de prouver la première. Or, on a

$$t^{(l)}_{\mathbb{D}'',\mathbb{D}}(\varphi_{\mathbb{D}',\mathbb{D}''})\varphi_{\mathbb{D},\mathbb{D}'} = (\varepsilon\otimes 1_C)(1_A\otimes\varphi_{\mathbb{D}',\mathbb{D}''}\otimes 1_C)(1_A\otimes\eta'')\varphi_{\mathbb{D},\mathbb{D}'}$$

$$= (\varepsilon\otimes 1_C)(\varphi_{\mathbb{D},\mathbb{D}'}\otimes\varphi_{\mathbb{D}',\mathbb{D}''}\otimes 1_C)(1_C\otimes\eta'')$$

$$= (\varepsilon\otimes 1_C)(\varphi_{\mathbb{D}'\otimes\mathbb{D},\mathbb{D}'\otimes\mathbb{D}''}\otimes 1_C)(1_C\otimes\eta'')$$

$$= \big(t^{(l)}_{\mathbb{D}_0,\mathbb{D}'\otimes\mathbb{D}}(\eta')\otimes 1_C\big)(\varphi_{\mathbb{D}'\otimes\mathbb{D},\mathbb{D}'\otimes\mathbb{D}''}\otimes 1_C)(1_C\otimes\eta'')$$

$$= (\varphi_{\mathbb{D}_0,\mathbb{D}_0}\otimes 1_C)\big(t^{(r)}_{\mathbb{D}_0,\mathbb{D}'\otimes\mathbb{D}''}(\eta')\otimes 1_C\big)(1_C\otimes\eta'')$$

$$= \big(t^{(r)}_{\mathbb{D}_0,\mathbb{D}'\otimes\mathbb{D}''}(\eta')\otimes 1_C\big)(1_C\otimes\eta'') = (\varepsilon''\otimes 1_C)(1_C\otimes\eta'') = 1_C$$

(la première égalité résultant de 1.2.3.1, la troisième de 3.1.2.2, la quatrième de 1.2.3.1, 1.2.5 et 1.2.1.1, la cinquième de 3.1.2.1, la sixième de 3.1.5.1 et la septième de 1.2.3.2, 1.2.5 et 1.2.1.1), ce qui prouve la proposition.

Remarque 3.1.6. Un calcul tout à fait analogue à celui de la démonstration ci-dessus conduit à l'égalité

$$\varphi_{\mathbb{D},\mathbb{D}'}t^{(l)}_{\mathbb{D}'',\mathbb{D}}(\varphi_{\mathbb{D}',\mathbb{D}''}) = 1_A \quad .$$

Ces calculs montrent qu'on aurait pu remplacer l'hypothèse d'inversibilité de $\varphi_{\mathbb{D},\mathbb{D}'}$, dans la définition d'une structure souveraine, par la condition 3.1.5.1, ou même (conformement à la démonstration de cette condition) par la simple inversibilité de $\varphi_{\mathbb{D}_0,\mathbb{D}_0}$.

3.1.7. Soit $(\mathcal{V},\otimes,I)$ une catégorie monoïdale autonome. Pour toute structure souveraine φ sur $(\mathcal{V},\otimes,I)$ on définit une structure souveraine φ° sur $(\mathcal{V}^\circ,\otimes,I)$ (resp. $\varphi^\star$ sur $(\mathcal{V},\otimes^\circ,I)$, resp. φ^{op} sur $(\mathcal{V}^\circ,\otimes^\circ,I)$) en posant pour tout couple de dualités

$$\mathbb{D}=(A,B,\varepsilon,\eta) \quad , \quad \mathbb{D}'=(B,C,e,h)$$

de $(\mathcal{V},\otimes,I)$,

$$\varphi^\circ_{\mathbb{D}'^\circ,\mathbb{D}^\circ}=\varphi_{\mathbb{D},\mathbb{D}'} \;\; (\text{resp. } \varphi^\star_{\mathbb{D}'^\star,\mathbb{D}^\star}=\varphi^{-1}_{\mathbb{D},\mathbb{D}'}\,, \text{ resp. } \varphi^{\mathsf{op}}_{\mathbb{D}^{\mathsf{op}},\mathbb{D}'^{\mathsf{op}}}=\varphi^{-1}_{\mathbb{D},\mathbb{D}'}\,)$$

(cf. 1.2.1).

Remarque 3.1.8. Soient $(\mathcal{V}, \otimes, I, \varphi)$ une catégorie monoïdale autonome souveraine et des dualités

$$\mathbb{D}_1 = (A, B, \varepsilon, \eta) \quad , \quad \mathbb{D}_2 = (B, C, e, h) \quad .$$

En vertu de 3.1.2.1, pour toute dualité $\mathbb{D}'_2 = (B, C', e', h')$ on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} C' \arrow[r, "\varphi_{\mathbb{D}_1,\mathbb{D}'_2}"] \arrow[d, "t^{(r)}_{\mathbb{D}_2,\mathbb{D}'_2}(1_B)"'] & A \arrow[d, "t^{(l)}_{\mathbb{D}_1,\mathbb{D}_1}(1_B) = 1_A"] \\ C \arrow[r, "\varphi_{\mathbb{D}_1,\mathbb{D}_2}"] & A \end{tikzcd} \quad ,$$

autrement dit,

$$\varphi_{\mathbb{D}_1,\mathbb{D}'_2} = \varphi_{\mathbb{D}_1,\mathbb{D}_2} t^{(r)}_{\mathbb{D}_2,\mathbb{D}'_2}(1_B) \quad . \tag{3.1.8.1}$$

Or, si l'on pose $e' = e(1_B \otimes \varphi^{-1}_{\mathbb{D}_1,\mathbb{D}_2})$ et $h' = (\varphi_{\mathbb{D}_1,\mathbb{D}_2} \otimes 1_B)h$ alors $\mathbb{D}'_2 = (B, A, e', h')$ est une dualité et

$$\begin{aligned} t^{(r)}_{\mathbb{D}_2,\mathbb{D}'_2}(1_B) &= (1_C \otimes e')(h \otimes 1_A) \\ &= (1_C \otimes e)(1_C \otimes 1_B \otimes \varphi^{-1}_{\mathbb{D}_1,\mathbb{D}_2})(h \otimes 1_A) \\ &= (1_C \otimes e)(h \otimes 1_C)\varphi^{-1}_{\mathbb{D}_1,\mathbb{D}_2} = \varphi^{-1}_{\mathbb{D}_1,\mathbb{D}_2} \quad . \end{aligned}$$

En vertu de 3.1.8.1, on en déduit que $\varphi_{\mathbb{D}_1,\mathbb{D}'_2} = 1_A$.

On a donc montré que pour tout objet B de $\mathcal{V}$ on peut trouver un objet A qui soit à la fois dual à gauche et à droite de B, et des dualités

$$\mathbb{D}_1 = (A, B, \varepsilon, \eta) \quad , \quad \mathbb{D}_2 = (B, A, e, h)$$

telles que $\varphi_{\mathbb{D}_1,\mathbb{D}_2} = 1_A$.

3.2. Structures souveraines et structures autonomes.

3.2.1. Soient $(\mathcal{V}, \otimes, I)$ une catégorie monoïdale autonome et

$$({}^{\vee}. \, , \, \varepsilon \, , \, \eta \, , \, .^{\vee} \, , \, e \, , \, h)$$

une structure autonome sur $\mathcal{V}$; autrement dit, pour tout objet A de $\mathcal{V}$, $({}^{\vee}A, \varepsilon_A, \eta_A)$ (resp. $(A^{\vee}, e_A, h_A)$) est un dual à gauche (resp. à droite) de A.

Théorème 3.2.2. *En gardant les notations de* 2.1.3, *pour toute structure souveraine φ sur $(\mathcal{V}, \otimes, I)$, si l'on pose, pour tout objet A de $\mathcal{V}$,*

$$\alpha_A = \varphi_{\mathbb{D}_A, \mathbb{D}'_A} : A^{\vee} \longrightarrow {}^{\vee}A \quad ,$$

alors α est un isomorphisme fonctoriel monoïdal de $t^{(r)}$ dans $t^{(l)}$. Réciproquement, pour tout isomorphisme fonctoriel monoïdal α du foncteur monoïdal $t^{(r)}$ dans $t^{(l)}$, il existe une unique structure souveraine φ sur $(\mathcal{V}, \otimes, I)$ telle que pour tout objet A de $\mathcal{V}$, on ait $\alpha_A = \varphi_{\mathbb{D}_A, \mathbb{D}'_A}$.

Démonstration. La fonctorialité de α est un cas particulier de 3.1.2.1. Démontrons que

$$\alpha_{B \otimes A} \Phi^{(r)}_{2,A,B} = \Phi^{(l)}_{2,A,B}(\alpha_A \otimes \alpha_B) \tag{3.2.2.1}$$

Par définition, on a

$$\alpha_{B \otimes A} \Phi^{(r)}_{2,A,B} = \varphi_{\mathbb{D}_{B \otimes A}, \mathbb{D}'_{B \otimes A}} t^{(r)}_{\mathbb{D}'_{B \otimes A}, \mathbb{D}'_A \otimes \mathbb{D}'_B}(1_{B \otimes A})$$

et par défininition et 3.1.2.2

$$\begin{aligned} \Phi^{(l)}_{2,A,B}(\alpha_A \otimes \alpha_B) &= t^{(l)}_{\mathbb{D}_{B \otimes A}, \mathbb{D}_B \otimes \mathbb{D}_A}(1_{B \otimes A})(\varphi_{\mathbb{D}_A, \mathbb{D}'_A} \otimes \varphi_{\mathbb{D}_B, \mathbb{D}'_B}) \\ &= t^{(l)}_{\mathbb{D}_{B \otimes A}, \mathbb{D}_B \otimes \mathbb{D}_A}(1_{B \otimes A}) \varphi_{\mathbb{D}_B \otimes \mathbb{D}_A, \mathbb{D}'_A \otimes \mathbb{D}'_B} \end{aligned}$$

et 3.2.2.1 résulte de 3.1.2.1. Puisque α est un *isomorphisme* fonctoriel, la condition $\Phi^{(l)}_0 = \alpha_I \Phi^{(r)}_0$ est une conséquence de 3.2.2.1 (cf. 1.1.3).

Démontrons la réciproque. Supposons donc que α soit un isomorphisme fonctoriel monoïdal de $t^{(r)}$ dans $t^{(l)}$ et démontrons d'abord qu'il existe au plus une structure souveraine φ sur $(\mathcal{V}, \otimes, I)$ telle que

$$\text{(3.2.2.2)} \qquad \forall A \in \mathcal{O}b(\mathcal{V}) \qquad \alpha_A = \varphi_{\mathbb{D}_A, \mathbb{D}'_A} \quad .$$

En effet, soient A, B, C trois objets de $\mathcal{V}$ et $\mathbb{D}$ (resp. $\mathbb{D}'$) une dualité entre A et B (resp. entre B et C). Pour toute structure souveraine φ, on a, en vertu de 1.2.3.3, 1.2.3.4 et 3.1.2.1,

$$\varphi_{\mathbb{D},\mathbb{D}'} = \varphi_{\mathbb{D},\mathbb{D}'} t^{(r)}_{\mathbb{D}',\mathbb{D}'_B}(1_B) t^{(r)}_{\mathbb{D}'_B,\mathbb{D}'}(1_B) = t^{(l)}_{\mathbb{D},\mathbb{D}_B}(1_B) \varphi_{\mathbb{D}_B,\mathbb{D}'_B} t^{(r)}_{\mathbb{D}'_B,\mathbb{D}'}(1_B) \ .$$

On en déduit que si la structure souveraine φ satisfait à 3.2.2.2, on a

$$\text{(3.2.2.3)} \qquad \varphi_{\mathbb{D},\mathbb{D}'} = t^{(l)}_{\mathbb{D},\mathbb{D}_B}(1_B) \alpha_B t^{(r)}_{\mathbb{D}'_B,D'}(1_B) \quad ,$$

ce qui prouve l'unicité de φ.

Pour prouver l'existence, définissons φ, pour tout couple de dualités $\mathbb{D}$ et $\mathbb{D}'$ comme ci-dessus, par la formule 3.2.2.3 et montrons qu'alors φ est une structure souveraine satisfaisant à 3.2.2.2, cette dernière assertion étant d'ailleurs évidente par 1.2.3.4. Soient donc A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2 des objets de $\mathcal{V}$ et $\mathbb{D}_1$, $\mathbb{D}'_1$, $\mathbb{D}_2$, $\mathbb{D}'_2$ des dualités entre A_1 et B_1, B_1 et C_1, A_2 et B_2 et B_2 et C_2 respectivement.

Pour tout morphisme $v : B_1 \to B_2$, on a

$$\begin{aligned}
& t^{(l)}_{\mathbb{D}_{B_1},\mathbb{D}_1}(1_{B_1}) t^{(l)}_{\mathbb{D}_1,\mathbb{D}_2}(v) \varphi_{\mathbb{D}_2,\mathbb{D}'_2} t^{(r)}_{\mathbb{D}'_2,\mathbb{D}'_{B_2}}(1_{B_2}) \\
&= t^{(l)}_{\mathbb{D}_{B_1},\mathbb{D}_1}(1_{B_1}) t^{(l)}_{\mathbb{D}_1,\mathbb{D}_2}(v) t^{(l)}_{\mathbb{D}_2,\mathbb{D}_{B_2}}(1_{B_2}) \alpha_{B_2} t^{(r)}_{\mathbb{D}'_{B_2},\mathbb{D}'_2}(1_{B_2}) t^{(r)}_{\mathbb{D}'_2,\mathbb{D}'_{B_2}}(1_{B_2}) \\
&= t^{(l)}_{\mathbb{D}_{B_1},\mathbb{D}_{B_2}}(v) \alpha_{B_2} = \alpha_{B_1} t^{(r)}_{\mathbb{D}'_{B_1},\mathbb{D}'_{B_2}}(v) \\
&= t^{(l)}_{\mathbb{D}_{B_1},\mathbb{D}_1}(1_{B_1}) t^{(l)}_{\mathbb{D}_1,\mathbb{D}_{B_1}}(1_{B_1}) \alpha_{B_1} t^{(r)}_{\mathbb{D}'_{B_1},\mathbb{D}'_1}(1_{B_1}) t^{(r)}_{\mathbb{D}'_1,\mathbb{D}'_2}(v) t^{(r)}_{\mathbb{D}'_2,\mathbb{D}'_{B_2}}(1_{B_2}) \\
&= t^{(l)}_{\mathbb{D}_{B_1},\mathbb{D}_1}(1_{B_1}) \varphi_{\mathbb{D}_1,\mathbb{D}'_1} t^{(r)}_{\mathbb{D}'_1,\mathbb{D}'_2}(v) t^{(r)}_{\mathbb{D}'_2,\mathbb{D}'_{B_2}}(1_{B_2})
\end{aligned}$$

(la première et la dernière égalité résultant de 3.2.2.3, la deuxième et la quatrième de 1.2.3.3 et 1.2.3.4, et la troisième de la fonctorialité de α). Comme en vertu de 1.2.3.3 et 1.2.3.4, les morphismes $t^{(l)}_{\mathbb{D}_{B_1},\mathbb{D}_1}(1_{B_1})$ et $t^{(r)}_{\mathbb{D}'_2,\mathbb{D}'_{B_2}}(1_{B_2})$ sont des isomorphismes, on en déduit 3.1.2.1.

D'autre part, on a

$$t^{(l)}_{\mathbb{D}_{B_1\otimes B_2},\mathbb{D}_1\otimes\mathbb{D}_2}(1_{B_1\otimes B_2})\varphi_{\mathbb{D}_1\otimes\mathbb{D}_2,\mathbb{D}'_2\otimes\mathbb{D}'_1}t^{(r)}_{\mathbb{D}'_2\otimes\mathbb{D}'_1,\mathbb{D}'_{B_2}\otimes\mathbb{D}'_{B_1}}(1_{B_1\otimes B_2})$$

$$\begin{aligned}
&= t^{(l)}_{\mathbb{D}_{B_1\otimes B_2},\mathbb{D}_1\otimes\mathbb{D}_2}(1_{B_1\otimes B_2})t^{(l)}_{\mathbb{D}_1\otimes\mathbb{D}_2,\mathbb{D}_{B_1\otimes B_2}}(1_{B_1\otimes B_2})\alpha_{B_1\otimes B_2}\\
&\qquad\qquad t^{(r)}_{\mathbb{D}'_{B_1\otimes B_2},\mathbb{D}'_2\otimes\mathbb{D}'_1}(1_{B_1\otimes B_2})t^{(r)}_{\mathbb{D}'_2\otimes\mathbb{D}'_1,\mathbb{D}'_{B_2}\otimes\mathbb{D}'_{B_1}}(1_{B_1\otimes B_2})\\
&= \alpha_{B_1\otimes B_2}t^{(r)}_{\mathbb{D}'_{B_1\otimes B_2},\mathbb{D}'_{B_2}\otimes\mathbb{D}'_{B_1}}(1_{B_1\otimes B_2})\\
&= \alpha_{B_1\otimes B_2}\Phi^{(r)}_{2,B_2,B_1} = \Phi^{(l)}_{2,B_2,B_1}(\alpha_{B_2}\otimes\alpha_{B_1})\\
&= t^{(l)}_{\mathbb{D}_{B_1\otimes B_2},\mathbb{D}_{B_1}\otimes\mathbb{D}_{B_2}}(1_{B_1\otimes B_2})(\alpha_{B_2}\otimes\alpha_{B_1})\\
&= t^{(l)}_{\mathbb{D}_{B_1\otimes B_2},\mathbb{D}_1\otimes\mathbb{D}_2}(1_{B_1\otimes B_2})t^{(l)}_{\mathbb{D}_1\otimes\mathbb{D}_2,\mathbb{D}_{B_1}\otimes\mathbb{D}_{B_2}}(1_{B_1}\otimes 1_{B_2})(\alpha_{B_2}\otimes\alpha_{B_1})\\
&\qquad\qquad t^{(r)}_{\mathbb{D}'_{B_2}\otimes\mathbb{D}'_{B_1},\mathbb{D}'_2\otimes\mathbb{D}'_1}(1_{B_1}\otimes 1_{B_2})t^{(r)}_{\mathbb{D}'_2\otimes\mathbb{D}'_1,\mathbb{D}'_{B_2}\otimes\mathbb{D}'_{B_1}}(1_{B_1\otimes B_2})\\
&= t^{(l)}_{\mathbb{D}_{B_1\otimes B_2},\mathbb{D}_1\otimes\mathbb{D}_2}(1_{B_1\otimes B_2})(t^{(l)}_{\mathbb{D}_2,\mathbb{D}_{B_2}}(1_{B_2})\otimes t^{(l)}_{\mathbb{D}_1,\mathbb{D}_{B_1}}(1_{B_1}))(\alpha_{B_2}\otimes\alpha_{B_1})\\
&\qquad\qquad (t^{(r)}_{\mathbb{D}'_{B_2},\mathbb{D}'_2}(1_{B_2})\otimes t^{(r)}_{\mathbb{D}'_{B_1},\mathbb{D}'_1}(1_{B_1}))t^{(r)}_{\mathbb{D}'_2\otimes\mathbb{D}'_1,\mathbb{D}'_{B_2}\otimes\mathbb{D}'_{B_1}}(1_{B_1\otimes B_2})\\
&= t^{(l)}_{\mathbb{D}_{B_1\otimes B_2},\mathbb{D}_1\otimes\mathbb{D}_2}(1_{B_1\otimes B_2})(\varphi_{\mathbb{D}_2,\mathbb{D}'_2}\otimes\varphi_{\mathbb{D}_1,\mathbb{D}'_1})t^{(r)}_{\mathbb{D}'_2\otimes\mathbb{D}'_1,\mathbb{D}'_{B_2}\otimes\mathbb{D}'_{B_1}}(1_{B_1\otimes B_2})
\end{aligned}$$

(la première et la dernière égalité résultant de 3.2.2.3, la deuxième et la sixième de 1.2.3.3 et 1.2.3.4, la troisième et la cinquième de la définition de $\Phi^{(l)}_2$ et $\Phi^{(r)}_2$ (2.1.3), la quatrième de la compatibilité de α avec $\Phi^{(l)}_2$ et $\Phi^{(r)}_2$, et la septième de 1.2.5.1 et 1.2.5.2). Comme en vertu de 1.2.3.3 et 1.2.3.4 les morphismes $t^{(l)}_{\mathbb{D}_{B_1\otimes B_2},\mathbb{D}_1\otimes\mathbb{D}_2}(1_{B_1\otimes B_2})$

et $t^{(r)}_{\mathbb{D}'_2\otimes\mathbb{D}'_1,\mathbb{D}'_{B_2}\otimes\mathbb{D}'_{B_1}}(1_{B_1\otimes B_2})$ sont des isomorphismes, on en déduit 3.1.2.2, ce qui démontre le théorème.

Proposition 3.2.3. *En gardant les notations de* 2.1.3 *et* 2.1.4, *pour toute structure souveraine φ sur $(\mathcal{V},\otimes,I)$ et tout objet A de $\mathcal{V}$, on a deux diagrammes commutatifs*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "k_A"] \arrow[d, "\kappa_A"'] & {}^\vee(A^\vee) \arrow[d, "{}^\vee(\alpha_A^{-1})"] \\ ({}^\vee A)^\vee \arrow[r, "\alpha_{{}^\vee A}"] & {}^\vee({}^\vee A) \end{tikzcd} \qquad \textit{et} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "k_A"] \arrow[d, "\kappa_A"'] & {}^\vee(A^\vee) \arrow[d, "\alpha^{-1}_{A^\vee}"] \\ ({}^\vee A)^\vee \arrow[r, "(\alpha_A)^\vee"] & (A^\vee)^\vee \end{tikzcd} \quad ,$$

où α désigne l'isomorphisme fonctoriel du théorème 3.2.2, $\alpha_A = \varphi_{\mathbb{D}_A,\mathbb{D}'_A}$.

Démonstration. Démontrons par exemple la commutativité du deuxième diagramme. On a

$$k_A^{-1}\alpha_{A^\vee}(\alpha_A)^\vee\kappa_A$$

$$= t^{(l)}_{\mathbb{D}'_A,\mathbb{D}_{A^\vee}}(1_{A^\vee})\varphi_{\mathbb{D}_{A^\vee},\mathbb{D}'_{A^\vee}}t^{(r)}_{\mathbb{D}'_{A^\vee},\mathbb{D}'_{{}^\vee A}}(\varphi_{\mathbb{D}_A,\mathbb{D}'_A})t^{(r)}_{\mathbb{D}'_{{}^\vee A},\mathbb{D}_A}(1_{{}^\vee A})$$

$$= t^{(l)}_{\mathbb{D}'_A,\mathbb{D}_{A^\vee}}(1_{A^\vee})\varphi_{\mathbb{D}_{A^\vee},\mathbb{D}'_{A^\vee}}t^{(r)}_{\mathbb{D}'_{A^\vee},\mathbb{D}_A}(\varphi_{\mathbb{D}_A,\mathbb{D}'_A})$$

$$= \varphi_{\mathbb{D}'_A,\mathbb{D}'_{A^\vee}}t^{(r)}_{\mathbb{D}'_{A^\vee},\mathbb{D}'_{A^\vee}}(1_{A^\vee})t^{(r)}_{\mathbb{D}'_{A^\vee},\mathbb{D}_A}(\varphi_{\mathbb{D}_A,\mathbb{D}'_A})$$

$$= \varphi_{\mathbb{D}'_A,\mathbb{D}'_{A^\vee}}t^{(r)}_{\mathbb{D}'_{A^\vee},\mathbb{D}_A}(\varphi_{\mathbb{D}_A,\mathbb{D}'_A}) = 1_A$$

(la première égalité résultant de 2.1.3 et 2.1.4, la deuxième de 1.2.3.3, la troisième de 3.1.2.1, la quatrième de 1.2.3.4 et la cinquième de 3.1.5.2). On démontre de façon analogue la commutativité du premier diagramme.

Exercice 3.2.4. a) En gardant les notations de 1.2.1 et 1.2.6, montrer que pour toute dualité $\mathbb{D} = (A,B,\theta,\xi)$ de $(\mathcal{V},\otimes,I)$, on a

$$t^{(l)}(\mathbb{D}^{\mathsf{op}}) = \left({}^\vee A, {}^\vee B, t^{(l)}_{\mathbb{D}_0,\mathbb{D}_B\otimes\mathbb{D}_A}(\xi), t^{(l)}_{\mathbb{D}_A\otimes\mathbb{D}_B,\mathbb{D}_0}(\theta)\right)$$

et

$$t^{(r)}(\mathbb{D}^{\mathsf{op}}) = \big(A^\vee, B^\vee, t^{(r)}_{\mathbb{D}_0, \mathbb{D}'_A \otimes \mathbb{D}'_B}(\xi), t^{(r)}_{\mathbb{D}'_B \otimes \mathbb{D}'_A, \mathbb{D}_0}(\theta)\big) \quad .$$

b) Soit $\alpha : t^{(r)} \to t^{(l)}$ un morphisme fonctoriel monoïdal. Montrer, sans utiliser le théorème 3.2.2 et la proposition 3.1.5, mais en appliquant la proposition 1.2.7 au morphisme fonctoriel α et la dualité $\mathbb{D} = \mathbb{D}_A^{\mathsf{op}}$ (resp. $\mathbb{D} = {\mathbb{D}'_A}^{\mathsf{op}}$) et en utilisant les formules ci-dessus, la commutativité du premier (resp. du deuxième) diagramme de la proposition 3.2.3.

c) En déduire une nouvelle démonstration de la proposition 3.1.5 en utilisant le théorème 3.2.2 et la formule 3.2.2.3.

Remarque 3.2.5. Soit $(\mathcal{V}, \otimes, I, \varphi)$ une catégorie monoïdale autonome souveraine. Il résulte de la remarque 3.1.8 qu'il existe une structure autonome sur $(\mathcal{V}, \otimes, I)$ telle que l'isomorphisme fonctoriel monoïdal α de $t^{(l)}$ dans $t^{(r)}$ associé à φ (conformement au théorème 3.2.2) soit l'identité, ce qui implique en particulier que les deux foncteurs monoïdaux $t^{(l)}$ et $t^{(r)}$ soient identiques.

3.3. La notion de t-structure souveraine.

3.3.1. Dans ce paragraphe, on donne une decription équivalente des catégories souveraines ne faisant pas intervenir explicitement la dualité, de sorte que cette description garde un sens pour les catégories monoïdales non nécessairement autonomes.

On se fixe une catégorie monoïdale, autonome, souveraine

$$(\mathcal{V}, \otimes, I, \varphi) \quad .$$

Soit $u : A \otimes B \to I$ un morphisme de $\mathcal{V}$. Pour tout couple de dualités

$$\mathbb{D}_1 = (A_1, A, \varepsilon, \eta) \quad , \quad \mathbb{D}_2 = (A, A_2, e, h) \quad ,$$

on définit un morphisme $T_{\mathbb{D}_1, \mathbb{D}_2}(u) : B \otimes A \to I$ en posant

$$T_{\mathbb{D}_1, \mathbb{D}_2}(u) = \varepsilon(\varphi_{\mathbb{D}_1, \mathbb{D}_2} \otimes u \otimes 1_A)(h \otimes 1_B \otimes 1_A) \quad .$$

De même, pour tout couple de dualités

$$\mathbb{D}'_1 = (B_1, B, \varepsilon', \eta') \quad , \quad \mathbb{D}'_2 = (B, B_2, e', h') \quad ,$$

on définit un morphisme $T'_{\mathbb{D}'_1,\mathbb{D}'_2}(u) : B \otimes A \to I$ en posant

$$T'_{\mathbb{D}'_1,\mathbb{D}'_2}(u) = e'(1_B \otimes u \otimes \varphi^{-1}_{\mathbb{D}'_1,\mathbb{D}'_2})(1_B \otimes 1_A \otimes \eta') \quad .$$

Lemme 3.3.2. *En gardant les notations ci-dessus pour tous* u , $\mathbb{D}_1$, $\mathbb{D}_2$, $\mathbb{D}'_1$, $\mathbb{D}'_2$ *on a*

$$T_{\mathbb{D}_1,\mathbb{D}_2}(u) = T'_{\mathbb{D}'_1,\mathbb{D}'_2}(u) \quad .$$

Démonstration. En vertu de 3.1.2.2, on a

$$\varphi_{\mathbb{D}'_1,\mathbb{D}'_2} \otimes \varphi_{\mathbb{D}_1,\mathbb{D}_2} = \varphi_{\mathbb{D}_1 \otimes \mathbb{D}'_1, \mathbb{D}'_2 \otimes \mathbb{D}_2} \quad ,$$

en vertu de 3.1.2.1, le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{\varphi_{\mathbb{D}_0,\mathbb{D}_0}} & I \\ {\scriptstyle t^{(r)}_{\mathbb{D}'_2\otimes\mathbb{D}_2,\mathbb{D}_0}(u)}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle t^{(l)}_{\mathbb{D}_1\otimes\mathbb{D}'_1,\mathbb{D}_0}(u)} \\ B_2 \otimes A_2 & \xrightarrow[\varphi_{\mathbb{D}_1\otimes\mathbb{D}'_1,\mathbb{D}'_2\otimes\mathbb{D}_2}]{} & B_1 \otimes A_1 \end{array} \quad ,$$

où $\mathbb{D}_0$ désigne la dualité $\mathbb{D}_0 = (I, I, 1_I, 1_I)$, et en vertu de 3.1.5.1 $\varphi_{\mathbb{D}_0,\mathbb{D}_0} = 1_I$.

En utilisant 1.2.3.1, 1.2.3.2 et 1.2.5, on en déduit que

$$(u \otimes 1_{B_1} \otimes 1_{A_1})(1_A \otimes \eta' \otimes 1_{A_1})\eta$$
$$= (\varphi_{\mathbb{D}'_1,\mathbb{D}'_2} \otimes \varphi_{\mathbb{D}_1,\mathbb{D}_2})(1_{B_2} \otimes 1_{A_2} \otimes u)(1_{B_2} \otimes h \otimes 1_B)h' \ ,$$

ce qui implique que

$$(u \otimes \varphi^{-1}_{\mathbb{D}'_1,\mathbb{D}'_2} \otimes 1_{A_1})(1_A \otimes \eta' \otimes 1_{A_1})\eta = (1_{B_2} \otimes \varphi_{\mathbb{D}_1,\mathbb{D}_2} \otimes u)(1_{B_2} \otimes h \otimes 1_B)h' \ ,$$

et

$$
\begin{aligned}
&(e'\otimes\varepsilon)(1_B\otimes u\otimes\varphi^{-1}_{\mathbb{D}'_1,\mathbb{D}'_2}\otimes 1_{A_1}\otimes 1_A)\\
&\qquad\qquad(1_B\otimes 1_A\otimes\eta'\otimes 1_{A_1}\otimes 1_A)(1_B\otimes\eta\otimes 1_A)\\
=\ &(e'\otimes\varepsilon)(1_B\otimes 1_{B_2}\otimes\varphi_{\mathbb{D}_1,\mathbb{D}_2}\otimes u\otimes 1_A)\\
&\qquad\qquad(1_B\otimes 1_{B_2}\otimes h\otimes 1_B\otimes 1_A)(1_B\otimes h'\otimes 1_A)\quad ,
\end{aligned}
$$

d'où, par 1.2.1.1,

$$
e'(1_B\otimes u\otimes\varphi^{-1}_{\mathbb{D}'_1,\mathbb{D}'_2})(1_B\otimes 1_A\otimes\eta')=\varepsilon(\varphi_{\mathbb{D}_1,\mathbb{D}_2}\otimes u\otimes 1_A)(h\otimes 1_B\otimes 1_A)\quad ,
$$

ce qui prouve le lemme.

3.3.3. Le lemme 3.3.2 implique en particulier que le morphisme $T_{\mathbb{D}_1,\mathbb{D}_2}(u)$ (resp. $T'_{\mathbb{D}'_1,\mathbb{D}'_2}(u)$) est indépendant du choix des dualités $\mathbb{D}_1$ et $\mathbb{D}_2$ (resp. $\mathbb{D}'_1$ et $\mathbb{D}'_2$) et dépend uniquement du morphisme u et de la décomposition de la source de u en produit tensoriel de deux objets A et B. On posera donc

$$
T_{A,B}(u):=T_{\mathbb{D}_1,\mathbb{D}_2}(u)=T'_{\mathbb{D}'_1,\mathbb{D}'_2}(u):B\otimes A\longrightarrow I\quad .
$$

Proposition 3.3.4. *Soient $u:A\otimes B\to I$, $v:A'\to A$ et $w:B'\to B$ des morphismes de $\mathcal{V}$. Alors*

$$
T_{A',B'}\big(u(v\otimes w)\big)=\big(T_{A,B}(u)\big)(w\otimes v)\quad .
$$

Démonstration. Choisissons des dualités

$$
\mathbb{D}_1=(A_1,A,\varepsilon,\eta)\quad ,\quad \mathbb{D}_2=(A,A_2,e,h)\quad ,
$$

$$
\mathbb{D}'_1=(B'_1,B',\varepsilon',\eta')\quad ,\quad \mathbb{D}'_2=(B',B'_2,e',h')\quad .
$$

On a

$$T_{A',B'}\big(u(v\otimes w)\big)=T'_{\mathbb{D}'_1,\mathbb{D}'_2}\big(u(v\otimes w)\big)$$

$$=e'\big(1_{B'}\otimes[u(v\otimes w)]\otimes\varphi^{-1}_{\mathbb{D}'_1,\mathbb{D}'_2}\big)(1_{B'}\otimes 1_{A'}\otimes\eta')$$

$$=e'\big(1_{B'}\otimes[u(1_A\otimes w)]\otimes\varphi^{-1}_{\mathbb{D}'_1,\mathbb{D}'_2}\big)(1_{B'}\otimes 1_A\otimes\eta')(1_{B'}\otimes v)$$

$$=\Big(T'_{\mathbb{D}'_1,\mathbb{D}'_2}\big(u(1_A\otimes w)\big)\Big)(1_{B'}\otimes v)=\Big(T_{\mathbb{D}_1,\mathbb{D}_2}\big(u(1_A\otimes w)\big)\Big)(1_{B'}\otimes v)$$

$$=\varepsilon\big(\varphi_{\mathbb{D}_1,\mathbb{D}_2}\otimes[u(1_A\otimes w)]\otimes 1_A\big)(h\otimes 1_{B'}\otimes 1_A)(1_{B'}\otimes v)$$

$$=\varepsilon(\varphi_{\mathbb{D}_1,\mathbb{D}_2}\otimes u\otimes 1_A)(h\otimes 1_B\otimes 1_A)(w\otimes v)$$

$$=\big(T_{\mathbb{D}_1,\mathbb{D}_2}(u)\big)(w\otimes v)=\big(T_{A,B}(u)\big)(w\otimes v)\quad ,$$

ce qui prouve la proposition.

Proposition 3.3.5. *Soient A, B, C trois objets de $\mathcal{V}$ et*

$$u:A\otimes B\otimes C\longrightarrow I$$

un morphisme. Alors on a

$$T_{A\otimes B,C}(u)=T_{B,C\otimes A}\big(T_{A,B\otimes C}(u)\big)\quad .$$

Démonstration. Choisissons des dualités

$$\mathbb{D}_1=(A_1,A,\varepsilon,\eta)\quad,\quad\mathbb{D}_2=(A,A_2,e,h)\quad,$$

$$\mathbb{D}'_1=(B_1,B,\varepsilon',\eta')\quad,\quad\mathbb{D}'_2=(B,B_2,e',h')\quad.$$

On en déduit des dualités (1.2.5)

$$\mathbb{D}_1\otimes\mathbb{D}'_1=\big(B_1\otimes A_1,\ A\otimes B,\ \varepsilon'(1_{B_1}\otimes\varepsilon\otimes 1_B),\ (1_A\otimes\eta'\otimes 1_{A_1})\eta\big)\quad ,$$

$$\mathbb{D}'_2\otimes\mathbb{D}_2=\big(A\otimes B,\ B_2\otimes A_2,\ e(1_A\otimes e'\otimes 1_{A_2}),\ (1_{B_2}\otimes h\otimes 1_B)h'\big)$$

et on a

$$T_{B,C\otimes A}\big(T_{A,B\otimes C}(u)\big) = T_{\mathbb{D}'_1,\mathbb{D}'_2}\big(T_{\mathbb{D}_1,\mathbb{D}_2}(u)\big)$$

$$= \varepsilon'\big(\varphi_{\mathbb{D}'_1,\mathbb{D}'_2} \otimes [\varepsilon(\varphi_{\mathbb{D}_1,\mathbb{D}_2} \otimes u \otimes 1_A)(h \otimes 1_B \otimes 1_C \otimes 1_A)] \otimes 1_B\big)$$
$$(h' \otimes 1_C \otimes 1_A \otimes 1_B)$$

$$= \varepsilon'(1_{B_1} \otimes \varepsilon \otimes 1_B)(\varphi_{\mathbb{D}'_1,\mathbb{D}'_2} \otimes \varphi_{\mathbb{D}_1,\mathbb{D}_2} \otimes u \otimes 1_A \otimes 1_B)$$
$$\big([(1_{B_2} \otimes h \otimes 1_B)h'] \otimes 1_C \otimes 1_A \otimes 1_B\big)$$

$$= T_{\mathbb{D}_1\otimes\mathbb{D}'_1,\mathbb{D}'_2\otimes\mathbb{D}_2}(u) = T_{A\otimes B,C}(u) \quad ,$$

car, en vertu de 3.1.2.2, on a $\varphi_{\mathbb{D}'_1,\mathbb{D}'_2} \otimes \varphi_{\mathbb{D}_1,\mathbb{D}_2} = \varphi_{\mathbb{D}_1\otimes\mathbb{D}'_1,\mathbb{D}'_2\otimes\mathbb{D}_2}$.

Proposition 3.3.6. *On a* $T_{I,I}(1_I) = 1_I$.

DÉMONSTRATION. Considérons la dualité $\mathbb{D}_0 = (I, I, 1_I, 1_I)$. On a

$$T_{I,I}(1_I) = T_{\mathbb{D}_0,\mathbb{D}_0}(1_I) = 1_I(\varphi_{\mathbb{D}_0,\mathbb{D}_0} \otimes 1_I \otimes 1_I)(1_I \otimes 1_I \otimes 1_I) = \varphi_{\mathbb{D}_0,\mathbb{D}_0}$$

et en vertu de 3.1.5.1, $\varphi_{\mathbb{D}_0,\mathbb{D}_0} = 1_I$, ce qui prouve la proposition.

On est ainsi conduit à poser la définition suivante.

Définition 3.3.7. Soit $(\mathcal{V}, \otimes, I)$ une catégorie monoïdale (non nécessairement autonome). On appelle *t-structure souveraine* sur $(\mathcal{V}, \otimes, I)$ la donnée, pour tout couple d'objets A et B de $\mathcal{V}$ d'une application

$$T_{A,B} : \mathsf{Hom}_{\mathcal{V}}(A \otimes B, I) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{V}}(B \otimes A, I)$$

satisfaisant aux propriétés suivantes :

a) fonctorialité : pour tout morphisme $u : A \otimes B \to I$ et tous morphismes $v : A' \to A$, $w : B' \to B$ de $\mathcal{V}$, on a

$$T_{A',B'}\big(u(v \otimes w)\big) = \big(T_{A,B}(u)\big)(w \otimes v) \quad ; \tag{3.3.7.1}$$

b) équation du triangle : pour tout morphisme $u : A \otimes B \otimes C \to I$ de $\mathcal{V}$, on a

$$T_{A\otimes B,C}(u) = T_{B,C\otimes A}\big(T_{A,B\otimes C}(u)\big) \quad ; \tag{3.3.7.2}$$

c) non dégénérescence :

$$T_{I,I}(1_I) = 1_I \quad . \tag{3.3.7.3}$$

Proposition 3.3.8. *Soient $(\mathcal{V}, \otimes, I)$ une catégorie monoïdale et T une t-structure souveraine sur $(\mathcal{V}, \otimes, I)$. Alors*

a) *pour tout morphisme $u : A \to I$ de $\mathcal{V}$, on a*

$$T_{I,A}(u) = u = T_{A,I}(u) \quad ; \tag{3.3.8.1}$$

b) *T est involutif : pour tout morphisme $u : A \otimes B \to I$ de $\mathcal{V}$, on a*

$$T_{B,A}\big(T_{A,B}(u)\big) = u \tag{3.3.8.2}$$

et en particulier l'application $T_{A,B}$ est bijective;

c) *pour tout morphisme $u : A \otimes B \otimes C \to I$ de $\mathcal{V}$, on a*

$$T_{A,B\otimes C}(u) = T_{C\otimes A,B}\big(T_{A\otimes B,C}(u)\big) \quad ; \tag{3.3.8.3}$$

d) *pour tout couple de morphismes $u : A\otimes B \to I$ et $v : C\otimes D \to I$ de $\mathcal{V}$, on a*

(3.3.8.4)
$$T_{A\otimes C,D\otimes B}\big(u(1_A \otimes v \otimes 1_B)\big) = \big(T_{C,D}(v)\big)\big(1_D \otimes T_{A,B}(u) \otimes 1_C\big) \quad ;$$

e) *si pour tout morphisme $u : B \otimes A \to I$ de $\mathcal{V}$ on pose $T^{\circ}_{A,B}(u) = T_{B,A}(u)$, alors T° est une t-structure sur $(\mathcal{V}, \otimes^{\circ}, I)$* (cf. 1.1.1).

Démonstration. En vertu de 3.3.7.1 et 3.3.7.3, pour tout morphisme $u : A \to I$, on a

$$T_{I,A}(u) = T_{I,A}\big(1_I(1_I \otimes u)\big) = \big(T_{I,I}(1_I)\big)(u \otimes 1_I) = u \otimes 1_I = u$$

et

$$T_{A,I}(u) = T_{A,I}\big(1_I(u \otimes 1_I)\big) = \big(T_{I,I}(1_I)\big)(1_I \otimes u) = 1_I \otimes u = u \quad ,$$

ce qui prouve l' assertion (a). L' assertion (b) résulte alors de 3.3.7.2 appliqué à $C = I$, la assertion (c) de l'involutivité de T et de 3.3.7.2, et l'assertion (e) de (c) et de la symétrie des conditions 3.3.7.1 et 3.3.7.3.

Pour démontrer la condition (d), on remarque qu'en appliquant successivement 3.3.7.2 et deux fois 3.3.7.1, on obtient

$$\begin{aligned} & T_{A\otimes C,D\otimes B}\big(u(1_A \otimes v \otimes 1_B)\big) \\ &= T_{C,D\otimes B\otimes A}\Big(T_{A,C\otimes D\otimes B}\big(u(1_A \otimes (v \otimes 1_B))\big)\Big) \\ &= T_{C,D\otimes B\otimes A}\Big(\big(T_{A,B}(u)\big)(v \otimes 1_B \otimes 1_A)\Big) \\ &= T_{C,D\otimes B\otimes A}\Big(v\big(1_C \otimes [1_D \otimes T_{A,B}(u)]\big)\Big) \\ &= \big(T_{C,D}(v)\big)\big(1_D \otimes T_{A,B}(u) \otimes 1_C\big) \quad , \end{aligned}$$

ce qui démontre la proposition.

Lemme 3.3.9. *Soient $(\mathcal{V}, \otimes, I)$ une catégorie monoïdale et pour tout couple A et B d'objets de $\mathcal{V}$, une application*

$$T_{A,B} : \mathsf{Hom}_{\mathcal{V}}(A \otimes B, I) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{V}}(B \otimes A, I)$$

satisfaisant à la condition de fonctorialité 3.3.7.1. *Alors, pour tout morphisme de $\mathcal{V}$, de la forme $u : A \otimes B \to I$, et toute dualité $\mathbb{D} = (A, A', e, h)$* (resp. $\mathbb{D}' = (B', B, \varepsilon, \eta)$), *on a*

$$T_{A,B}(u) = \big(T_{A,A'}(e)\big)(1_{A'} \otimes u \otimes 1_A)(h \otimes 1_B \otimes 1_A) \tag{3.3.9.1}$$

(resp.

$$T_{A,B}(u) = \big(T_{B',B}(\varepsilon)\big)(1_B \otimes u \otimes 1_{B'})(1_B \otimes 1_A \otimes \eta) \quad). \tag{3.3.9.2}$$

Démonstration. En vertu de 1.2.1.1, on a

$$u = u(e \otimes 1_A \otimes 1_B)(1_A \otimes h \otimes 1_B) = e\big(1_A \otimes [(1_{A'} \otimes u)(h \otimes 1_B)]\big)$$

et en vertu de 3.3.7.1,

$$\begin{aligned} T_{A,B}(u) &= \big(T_{A,A'}(e)\big)\big([(1_{A'} \otimes u)(h \otimes 1_B)] \otimes 1_A\big) \\ &= \big(T_{A,A'}(e)\big)(1_{A'} \otimes u \otimes 1_A)(h \otimes 1_B \otimes 1_A) \quad , \end{aligned}$$

ce qui démontre la formule 3.3.9.1. La formule 3.3.9.2 se démontre de façon analogue, ou se déduit de 3.3.9.1 appliquée à la catégorie monoïdale $(\mathcal{V}, \otimes^\circ, I)$ (cf. 1.2.1 et 3.3.8 (e)).

Théorème 3.3.10. *Soit $(\mathcal{V}, \otimes, I)$ une catégorie monoïdale autonome. Pour toute structure souveraine φ sur $(\mathcal{V}, \otimes, I)$, il existe une unique t-structure souveraine $T^{(\varphi)}$ sur $(\mathcal{V}, \otimes, I)$ telle que pour tout morphisme $u : A \otimes B \to I$ de $\mathcal{V}$, si*

$$\mathbb{D}_1 = (A_1, A, \varepsilon, \eta) \quad , \quad \mathbb{D}_2 = (A, A_2, e, h)$$

$$(\text{resp.} \quad \mathbb{D}'_1 = (B_1, B, \varepsilon', \eta') \quad , \quad \mathbb{D}'_2 = (B, B_2, e', h') \quad)$$

désignent des dualités, on ait

$$T^{(\varphi)}_{A,B}(u) = \varepsilon(\varphi_{\mathbb{D}_1,\mathbb{D}_2} \otimes u \otimes 1_A)(h \otimes 1_B \otimes 1_A) \tag{3.3.10.1}$$

(resp.

$$T^{(\varphi)}_{A,B}(u) = e'(1_B \otimes u \otimes \varphi^{-1}_{\mathbb{D}'_1,\mathbb{D}'_2})(1_B \otimes 1_A \otimes \eta') \quad). \tag{3.3.10.2}$$

Réciproquement, pour toute t-structure souveraine T sur $(\mathcal{V}, \otimes, I)$, si pour tout couple de dualités

$$\mathbb{D} = (A, B, \varepsilon, \eta) \quad , \quad \mathbb{D}' = (B, C, e, h) \quad ,$$

on pose

$$\varphi^T_{\mathbb{D},\mathbb{D}'} = \big(T_{B,C}(e) \otimes 1_A\big)(1_C \otimes \eta) \quad , \tag{3.3.10.3}$$

alors φ^T est une structure souveraine sur $(\mathcal{V}, \otimes, I)$, l'isomorphisme inverse de $\varphi^T_{\mathbb{D},\mathbb{D}'}$ étant défini par

$$(\varphi^T_{\mathbb{D},\mathbb{D}'})^{-1} = \big(1_C \otimes T_{A,B}(\varepsilon)\big)(h \otimes 1_A) \quad . \tag{3.3.10.4}$$

On définit ainsi deux bijections, inverses l'une de l'autre, entre l'ensemble des structures souveraines sur $(\mathcal{V}, \otimes, I)$ *et l'ensemble des* t*-structures souveraines sur* $(\mathcal{V}, \otimes, I)$ *.*

DÉMONSTRATION. La première assertion résulte du lemme 3.3.2 et des propositions 3.3.4, 3.3.5 et 3.3.6. Soit donc T une t-structure souveraine sur $(\mathcal{V}, \otimes, I)$ et montrons que φ^T est une structure souveraine sur $(\mathcal{V}, \otimes, I)$. Soient

$$\mathbb{D}_1 = (A_1, B_1, \varepsilon_1, \eta_1) \quad , \quad \mathbb{D}'_1 = (B_1, C_1, e_1, h_1) \quad ,$$

$$\mathbb{D}_2 = (A_2, B_2, \varepsilon_2, \eta_2) \quad , \quad \mathbb{D}'_2 = (B_2, C_2, e_2, h_2)$$

des dualités. Pour tout morphisme $v : B_1 \to B_2$ de $\mathcal{V}$, on a

$$t^{(l)}_{\mathbb{D}_1,\mathbb{D}_2}(v)\varphi^T_{\mathbb{D}_2,\mathbb{D}'_2} = t^{(l)}_{\mathbb{D}_1,\mathbb{D}_2}(v)\big(T_{B_2,C_2}(e_2) \otimes 1_{A_2}\big)(1_{C_2} \otimes \eta_2)$$

$$= \big(T_{B_2,C_2}(e_2) \otimes 1_{A_1}\big)\big(1_{C_2} \otimes 1_{B_2} \otimes t^{(l)}_{\mathbb{D}_1,\mathbb{D}_2}(v)\big)(1_{C_2} \otimes \eta_2)$$

$$= \big(T_{B_2,C_2}(e_2) \otimes 1_{A_1}\big)(1_{C_2} \otimes v \otimes 1_{A_1})(1_{C_2} \otimes \eta_1)$$

$$= \big(T_{B_1,C_2}(e_2(v \otimes 1_{C_2})) \otimes 1_{A_1}\big)(1_{C_2} \otimes \eta_1)$$

$$= \Big(T_{B_1,C_2}\big(e_1(1_{B_1} \otimes t^{(r)}_{\mathbb{D}'_1,\mathbb{D}'_2}(v))\big) \otimes 1_{A_1}\Big)(1_{C_2} \otimes \eta_1)$$

$$= \Big(\big[\big(T_{B_1,C_1}(e_1)\big)\big(t^{(r)}_{\mathbb{D}'_1,\mathbb{D}'_2}(v) \otimes 1_{B_1}\big)\big] \otimes 1_{A_1}\Big)(1_{C_2} \otimes \eta_1)$$

$$= \big(T_{B_1,C_1}(e_1) \otimes 1_{A_1}\big)(1_{C_1} \otimes \eta_1)t^{(r)}_{\mathbb{D}'_1,\mathbb{D}'_2}(v) = \varphi^T_{\mathbb{D}_1,\mathbb{D}'_1}t^{(r)}_{\mathbb{D}'_1,\mathbb{D}'_2}(v)$$

(la première et la dernière égalité résultant de 3.3.10.3, la troisième et la cinquième de 1.2.2 et 1.2.3 et la quatrième et la sixième de 3.3.7.1), ce qui prouve la condition 3.1.2.1.

Montrons la condition 3.1.2.2 :

$$\varphi^T_{\mathbb{D}_1 \otimes \mathbb{D}_2, \mathbb{D}'_2 \otimes \mathbb{D}'_1} = \varphi^T_{\mathbb{D}_2,\mathbb{D}'_2} \otimes \varphi^T_{\mathbb{D}_1,\mathbb{D}'_1} \quad .$$

On a

$$\mathbb{D}_1 \otimes \mathbb{D}_2 = \big(A_2 \otimes A_1, B_1 \otimes B_2, \varepsilon_2(1_{A_2} \otimes \varepsilon_1 \otimes 1_{B_2}), (1_{B_1} \otimes \eta_2 \otimes 1_{A_1})\eta_1\big)$$

$$\mathbb{D}'_2 \otimes \mathbb{D}'_1 = \big(B_1 \otimes B_2, C_2 \otimes C_1, e_1(1_{B_1} \otimes e_2 \otimes 1_{C_1}), (1_{C_2} \otimes h_1 \otimes 1_{B_2})h_2\big)\,.$$

Il s'agit donc de démontrer l'égalité

$$\begin{aligned}&\Big(\big[T_{B_1\otimes B_2, C_2\otimes C_1}\big(e_1(1_{B_1} \otimes e_2 \otimes 1_{C_1})\big)\big] \otimes 1_{A_2} \otimes 1_{A_1}\Big)\\ &\qquad\qquad\qquad\big(1_{C_2} \otimes 1_{C_1} \otimes [(1_{B_1} \otimes \eta_2 \otimes 1_{A_1})\eta_1]\big)\\ &= \big[\big(T_{B_2,C_2}(e_2) \otimes 1_{A_2}\big)(1_{C_2} \otimes \eta_2)\big] \otimes \big[\big(T_{B_1,C_1}(e_1) \otimes 1_{A_1}\big)(1_{C_1} \otimes \eta_1)\big]\,.\end{aligned}$$

Or, en vertu de 3.3.8.4, le premier membre de l'égalité à démontrer est égal à

$$\begin{aligned}&\Big(\big[\big(T_{B_2,C_2}(e_2)\big)\big(1_{C_2} \otimes T_{B_1,C_1}(e_1) \otimes 1_{B_2}\big)\big] \otimes 1_{A_2} \otimes 1_{A_1}\Big)\\ &\qquad\qquad\qquad\big(1_{C_2} \otimes 1_{C_1} \otimes [(1_{B_1} \otimes \eta_2 \otimes 1_{A_1})\eta_1]\big)\\ &= \big(T_{B_2,C_2}(e_2) \otimes 1_{A_2} \otimes 1_{A_1}\big)\big(1_{C_2} \otimes T_{B_1,C_1}(e_1) \otimes 1_{B_2} \otimes 1_{A_2} \otimes 1_{A_1}\big)\\ &\qquad\qquad(1_{C_2} \otimes 1_{C_1} \otimes 1_{B_1} \otimes \eta_2 \otimes 1_{A_1})(1_{C_2} \otimes 1_{C_1} \otimes \eta_1)\\ &= \big(T_{B_2,C_2}(e_2) \otimes 1_{A_2} \otimes 1_{A_1}\big)(1_{C_2} \otimes \eta_2 \otimes 1_{A_1})\\ &\qquad\qquad\big(1_{C_2} \otimes T_{B_1,C_1}(e_1) \otimes 1_{A_1}\big)(1_{C_2} \otimes 1_{C_1} \otimes \eta_1)\\ &= \big[\big(T_{B_2,C_2}(e_2) \otimes 1_{A_2}\big)(1_{C_2} \otimes \eta_2)\big] \otimes \big[\big(T_{B_1,C_1}(e_1) \otimes 1_{A_1}\big)(1_{C_1} \otimes \eta_1)\big]\,,\end{aligned}$$

ce qui prouve la condition 3.1.2.2.

En vertu de la remarque 3.1.6, pour démontrer que φ^T est une structure souveraine, il reste à prouver que $\varphi^T_{\mathbb{D}_0,\mathbb{D}_0} = 1_I$, où $\mathbb{D}_0$ désigne la dualité $\mathbb{D}_0 = (I, I, 1_I, 1_I)$. Or,

$$\varphi^T_{\mathbb{D}_0,\mathbb{D}_0} = (T_{I,I}(1_I) \otimes 1_I)(1_I \otimes 1_I) = T_{I,I}(1_I)$$

et en vertu de 3.3.7.3, $T_{I,I}(1_I) = 1_I$.

Montrons maintenant que la t-structure souveraine associée à la structure souveraine φ^T n'est autre que T. En effet, soient $u : A \otimes B \to I$ un morphisme de $\mathcal{V}$ et

$$\mathbb{D}_1 = (A_1, A, \varepsilon, \eta) \quad , \quad \mathbb{D}_2 = (A, A_2, e, h)$$

des dualités. Il s'agit de montrer que

$$T_{A,B}(u) = \varepsilon(\varphi^T_{\mathbb{D}_1,\mathbb{D}_2} \otimes u \otimes 1_A)(h \otimes 1_B \otimes 1_A) \quad .$$

En effet, on a

$$\begin{aligned}
&\varepsilon(\varphi^T_{\mathbb{D}_1,\mathbb{D}_2} \otimes u \otimes 1_A)(h \otimes 1_B \otimes 1_A) \\
&= \varepsilon\Big(\big[\big(T_{A,A_2}(e) \otimes 1_{A_1}\big)(1_{A_2} \otimes \eta)\big] \otimes u \otimes 1_A\Big)(h \otimes 1_B \otimes 1_A) \\
&= \big(T_{A,A_2}(e)\big)(1_{A_2} \otimes 1_A \otimes \varepsilon)(1_{A_2} \otimes \eta \otimes 1_A) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad (1_{A_2} \otimes u \otimes 1_A)(h \otimes 1_B \otimes 1_A) \\
&= \big(T_{A,A_2}(e)\big)(1_{A_2} \otimes u \otimes 1_A)(h \otimes 1_B \otimes 1_A) = T_{A,B}(u) \quad ,
\end{aligned}$$

cette dernière égalité résultant de 3.3.9.1.

Réciproquement, montrons que pour toute structure souveraine φ, si l'on désigne par T la t-structure souveraine associée, on a $\varphi^T = \varphi$. En effet, soient

$$\mathbb{D} = (A, B, \varepsilon, \eta) \quad , \quad \mathbb{D}' = (B, C, e, h)$$

des dualités. On a

$$\begin{aligned}
\varphi^T_{\mathbb{D},\mathbb{D}'} &= \big(T_{B,C}(e) \otimes 1_A\big)(1_C \otimes \eta) \\
&= \big([\varepsilon(\varphi_{\mathbb{D},\mathbb{D}'} \otimes e \otimes 1_B)(h \otimes 1_C \otimes 1_B)] \otimes 1_A\big)(1_C \otimes \eta) \\
&= \big([\varepsilon(\varphi_{\mathbb{D},\mathbb{D}'} \otimes 1_B)(1_C \otimes e \otimes 1_B)(h \otimes 1_C \otimes 1_B)] \otimes 1_A\big)(1_C \otimes \eta) \\
&= (\varepsilon \otimes 1_A)(\varphi_{\mathbb{D},\mathbb{D}'} \otimes 1_B \otimes 1_A)(1_C \otimes \eta) \\
&= (\varepsilon \otimes 1_A)(1_A \otimes \eta)\varphi_{\mathbb{D},\mathbb{D}'} = \varphi_{\mathbb{D},\mathbb{D}'} \quad ,
\end{aligned}$$

ce qui prouve l'assertion.

Il reste à établir la relation 3.3.10.4. En vertu de ce qui précède, en appliquant la formule 3.3.10.2 à $u = \varepsilon$, $\mathbb{D}'_1 = \mathbb{D}$ et $\mathbb{D}'_2 = \mathbb{D}'$, on a

$$T_{A,B}(\varepsilon) = e\big(1_B \otimes \varepsilon \otimes (\varphi^T_{\mathbb{D},\mathbb{D}'})^{-1}\big)(1_B \otimes 1_A \otimes \eta) \quad ,$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned}
&\big(1_C \otimes T_{A,B}(\varepsilon)\big)(h \otimes 1_A) \\
&= \Big(1_C \otimes \big[e\big(1_B \otimes \varepsilon \otimes (\varphi^T_{\mathbb{D},\mathbb{D}'})^{-1}\big)(1_B \otimes 1_A \otimes \eta)\big]\Big)(h \otimes 1_A) \\
&= \Big(1_C \otimes \big[e\big(1_B \otimes (\varphi^T_{\mathbb{D},\mathbb{D}'})^{-1}\big)(1_B \otimes \varepsilon \otimes 1_A)(1_B \otimes 1_A \otimes \eta)\big]\Big)(h \otimes 1_A) \\
&= (1_C \otimes e)\big(1_C \otimes 1_B \otimes (\varphi^T_{\mathbb{D},\mathbb{D}'})^{-1}\big)(h \otimes 1_A) \\
&= (1_C \otimes e)(h \otimes 1_C)(\varphi^T_{\mathbb{D},\mathbb{D}'})^{-1} = (\varphi^T_{\mathbb{D},\mathbb{D}'})^{-1}
\end{aligned}$$

et démontre le théorème.

Remarque 3.3.11. On observe que, dans la démonstration du théorème 3.3.10, on n'a utilisé à aucun moment la relation 3.3.7.2, mais uniquement la relation 3.3.8.4 qui en est conséquence. On en déduit que si la catégorie monoïdale $(\mathcal{V}, \otimes, I)$ est autonome, on peut remplacer, dans la définition d'une t-structure souveraine, la condition 3.3.7.2 par la condition 3.3.8.4. Voici une démonstration directe de ce fait. Soit $u : A \otimes B \otimes C \to I$ un morphisme de $\mathcal{V}$, et choisissons des dualités

$$\mathbb{D} = (A, A', e, h) \quad , \quad \mathbb{D}' = (B, B', e', h') \quad .$$

On en déduit une dualité (1.2.5)

$$\mathbb{D}' \otimes \mathbb{D} = \big(A \otimes B \, , \, B' \otimes A' \, , \, e(1_A \otimes e' \otimes 1_{A'}) \, , \, (1_{B'} \otimes h \otimes 1_B)h'\big) \quad .$$

En vertu de 3.3.9.1 et 3.3.8.4, on a

$$
\begin{aligned}
&T_{A\otimes B,C}(u)\\
&= \Big(T_{A\otimes B,B'\otimes A'}\big(e(1_A\otimes e'\otimes 1_{A'})\big)\Big)\big(1_{B'}\otimes 1_{A'}\otimes u\otimes 1_A\otimes 1_B\big)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\big([(1_{B'}\otimes h\otimes 1_B)h']\otimes 1_C\otimes 1_A\otimes 1_B\big)\\
&= \big(T_{B,B'}(e')\big)\big(1_{B'}\otimes T_{A,A'}(e)\otimes 1_B\big)\big(1_{B'}\otimes 1_{A'}\otimes u\otimes 1_A\otimes 1_B\big)\\
&\qquad\qquad(1_{B'}\otimes h\otimes 1_B\otimes 1_C\otimes 1_A\otimes 1_B)(h'\otimes 1_C\otimes 1_A\otimes 1_B)
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
&T_{B,C\otimes A}\big(T_{A,B\otimes C}(u)\big)\\
&= \big(T_{B,B'}(e')\big)\Big(1_{B'}\otimes\big[\big(T_{A,A'}(e)\big)(1_{A'}\otimes u\otimes 1_A)(h\otimes 1_B\otimes 1_C\otimes 1_A)\big]\otimes 1_B\Big)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad(h'\otimes 1_C\otimes 1_A\otimes 1_B)\\
&= \big(T_{B,B'}(e')\big)\big(1_{B'}\otimes T_{A,A'}(e)\otimes 1_B\big)\big(1_{B'}\otimes 1_{A'}\otimes u\otimes 1_A\otimes 1_B\big)\\
&\qquad\qquad(1_{B'}\otimes h\otimes 1_B\otimes 1_C\otimes 1_A\otimes 1_B)(h'\otimes 1_C\otimes 1_A\otimes 1_B)\,,
\end{aligned}
$$

ce qui prouve l'assertion.

3.3.12. On définit de façon duale la notion de s-structure souveraine. Une *s-structure souveraine* sur une catégorie monoïdale $(\mathcal{V},\otimes,I)$ (non nécessairement autonome) est une t-structure souveraine sur la catégorie monoïdale $(\mathcal{V}^\circ,\otimes,I)$ (cf. 1.1.1). Autrement dit, une s-structure souveraine sur $(\mathcal{V},\otimes,I)$ consiste en la donnée, pour tout couple d'objets A et B de $\mathcal{V}$, d'une application

$$S_{A,B} : \mathsf{Hom}_{\mathcal{V}}(I, A\otimes B) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{V}}(I, B\otimes A)$$

satisfaisant aux propriétés suivantes :

a) fonctorialité : pour tout morphisme $u : I\to A\otimes B$ et morphismes $v : A\to A'$, $w : B\to B'$ de $\mathcal{V}$, on a

$$S_{A',B'}\big((v\otimes w)u\big) = (w\otimes v)\big(S_{A,B}(u)\big)\quad ; \tag{3.3.12.1}$$

b) équation du triangle : pour tout morphisme $u : I \to A \otimes B \otimes C$ de $\mathcal{V}$, on a

$$(3.3.12.2) \qquad S_{A\otimes B,C}(u) = S_{B,C\otimes A}\big(S_{A,B\otimes C}(u)\big) \quad ;$$

c) non dégénérescence :

$$(3.3.12.3) \qquad S_{I,I}(1_I) = 1_I \quad .$$

Il résulte aussitôt de la proposition 3.3.8 appliquée à la t-structure sur $(\mathcal{V}^\circ, \otimes, I)$, correspondant à la s-structure S, que S satisfait aussi aux propriétés suivantes :

d) propriété de l'unité : pour tout morphisme $u : I \to A$ de $\mathcal{V}$, on a

$$(3.3.12.4) \qquad S_{I,A}(u) = u = S_{A,I}(u) \quad ;$$

e) involutivité : pour tout morphisme $u : I \to A \otimes B$ de $\mathcal{V}$, on a

$$(3.3.12.5) \qquad S_{B,A}\big(S_{A,B}(u)\big) = u$$

et en particulier l'application $S_{A,B}$ est bijective;

f) deuxième équation du triangle : pour tout morphisme de la forme $u : I \to A \otimes B \otimes C$ de $\mathcal{V}$, on a

$$(3.3.12.6) \qquad S_{A,B\otimes C}(u) = S_{C\otimes A,B}\big(S_{A\otimes B,C}(u)\big) \quad ;$$

g) pour tout couple de morphismes $u : I \to A\otimes B$ et $v : I \to C\otimes D$ de $\mathcal{V}$, on a

(3.3.12.7)

$$S_{A\otimes C,D\otimes B}\big((1_A \otimes v \otimes 1_B)u\big) = \big(1_D \otimes S_{A,B}(u) \otimes 1_C\big)\big(S_{C,D}(v)\big) \quad ;$$

et il résulte de la remarque 3.3.11 que si la catégorie monoïdale $(\mathcal{V}, \otimes, I)$ est autonome, on peut remplacer, dans la définition d'une s-structure souveraine, la condition (b) par la condition (g). Enfin, si pour tout morphisme $u : I \to B \otimes A$ de $\mathcal{V}$ on pose $S^\circ_{A,B}(u) = S_{B,A}(u)$, alors S° est une s-structure sur $(\mathcal{V}, \otimes^\circ, I)$ (cf. 1.1.1 et 3.3.8 (e)).

De même, en tenant compte de 3.1.7, on déduit du théorème 3.3.10 le théorème suivant.

Théorème 3.3.13. *Soit $(\mathcal{V}, \otimes, I)$ une catégorie monoïdale autonome. Pour toute structure souveraine φ sur $(\mathcal{V}, \otimes, I)$, il existe une unique s-structure souveraine $S^{(\varphi)}$ sur $(\mathcal{V}, \otimes, I)$ telle que pour tout morphisme $u : I \to A \otimes B$ de $\mathcal{V}$, si*

$$\mathbb{D}_1 = (A_1, A, \varepsilon, \eta) \quad , \quad \mathbb{D}_2 = (A, A_2, e, h)$$

$$(\text{resp.} \quad \mathbb{D}'_1 = (B_1, B, \varepsilon', \eta') \quad , \quad \mathbb{D}'_2 = (B, B_2, e', h') \quad)$$

désignent des dualités, on ait

$$S^{(\varphi)}_{A,B}(u) = (\varepsilon \otimes 1_B \otimes 1_A)(\varphi_{\mathbb{D}_1,\mathbb{D}_2} \otimes u \otimes 1_A)h \tag{3.3.13.1}$$

(resp.

$$S^{(\varphi)}_{A,B}(u) = (1_B \otimes 1_A \otimes e')(1_B \otimes u \otimes \varphi^{-1}_{\mathbb{D}'_1,\mathbb{D}'_2})\eta' \quad). \tag{3.3.13.2}$$

Réciproquement, pour toute s-structure souveraine S sur $(\mathcal{V}, \otimes, I)$, si pour tout couple de dualités

$$\mathbb{D} = (A, B, \varepsilon, \eta) \quad , \quad \mathbb{D}' = (B, C, e, h) \quad ,$$

on pose

$$\varphi^S_{\mathbb{D},\mathbb{D}'} = (1_A \otimes e)\big(S_{B,A}(\eta) \otimes 1_C\big) \quad , \tag{3.3.13.3}$$

alors φ^S est une structure souveraine sur $(\mathcal{V}, \otimes, I)$, l'isomorphisme inverse de $\varphi^S_{\mathbb{D},\mathbb{D}'}$ étant défini par

$$(\varphi^S_{\mathbb{D},\mathbb{D}'})^{-1} = (\varepsilon \otimes 1_C)\big(1_A \otimes S_{C,B}(h)\big) \quad . \tag{3.3.13.4}$$

On définit ainsi deux bijections, inverses l'une de l'autre, entre l'ensemble des structures souveraines sur $(\mathcal{V}, \otimes, I)$ et l'ensemble des s-structures souveraines sur $(\mathcal{V}, \otimes, I)$.

3.3.14. Soit $(\mathcal{V},\otimes,I)$ une catégorie monoïdale autonome. En vertu des théorèmes 3.3.10 et 3.3.13, à toute structure souveraine φ sur $(\mathcal{V},\otimes,I)$ correspond une t-structure souveraine $T = T^{(\varphi)}$ et une s-structure souveraine $S = S^{(\varphi)}$ sur $(\mathcal{V},\otimes,I)$, satisfaisant aux conditions 3.3.10.1, 3.3.10.2, 3.3.13.1 et 3.3.13.2.

Proposition 3.3.15. *En gardant les notations ci-dessus, pour tout couple de morphismes $u : A\otimes B \to I$ et $v : I \to B\otimes C$ de $\mathcal{V}$, on a*

$$(3.3.15.1)\qquad \big(1_C\otimes T_{A,B}(u)\big)\big(S_{B,C}(v)\otimes 1_A\big) = (u\otimes 1_C)(1_A\otimes v)$$

et pour tout couple de morphismes $u : I \to A\otimes B$ et $v : B\otimes C \to I$ de $\mathcal{V}$, on a

$$(3.3.15.2)\qquad \big(T_{B,C}(v)\otimes 1_A\big)\big(1_C\otimes S_{A,B}(u)\big) = (1_A\otimes v)(u\otimes 1_C)\quad .$$

Démonstration. Choisissons des dualités

$$\mathbb{D}_1 = (B_1, B, \varepsilon, \eta)\quad ,\quad \mathbb{D}_2 = (B, B_2, e, h)\quad .$$

En vertu de 3.3.10.2 et 3.3.13.1, on a

$$\begin{aligned}
&\big(1_C\otimes T_{A,B}(u)\big)\big(S_{B,C}(v)\otimes 1_A\big)\\
&= (1_C\otimes e)(1_C\otimes 1_B\otimes u\otimes \varphi^{-1}_{\mathbb{D}_1,\mathbb{D}_2})(1_C\otimes 1_B\otimes 1_A\otimes \eta)\\
&\qquad\qquad (\varepsilon\otimes 1_C\otimes 1_B\otimes 1_A)(\varphi_{\mathbb{D}_1,\mathbb{D}_2}\otimes v\otimes 1_B\otimes 1_A)(h\otimes 1_A)\\
&= (\varepsilon\otimes 1_C)(1_{B_1}\otimes 1_B\otimes 1_C\otimes e)(1_{B_1}\otimes 1_B\otimes 1_C\otimes 1_B\otimes u\otimes \varphi^{-1}_{\mathbb{D}_1,\mathbb{D}_2})\\
&\qquad (\varphi_{\mathbb{D}_1,\mathbb{D}_2}\otimes v\otimes 1_B\otimes 1_A\otimes 1_B\otimes 1_{B_1})(h\otimes 1_A\otimes 1_B\otimes 1_{B_1})(1_A\otimes\eta)\\
&= (\varepsilon\otimes 1_C)(1_{B_1}\otimes v)(1_{B_1}\otimes e)(1_{B_1}\otimes 1_B\otimes \varphi^{-1}_{\mathbb{D}_1,\mathbb{D}_2})\\
&\qquad\qquad (\varphi_{\mathbb{D}_1,\mathbb{D}_2}\otimes 1_B\otimes 1_{B_1})(h\otimes 1_{B_1})(u\otimes 1_{B_1})(1_A\otimes\eta)\\
&= (\varepsilon\otimes 1_C)(1_{B_1}\otimes v)\varphi_{\mathbb{D}_1,\mathbb{D}_2}(1_{B_2}\otimes e)(h\otimes 1_{B_2})\varphi^{-1}_{\mathbb{D}_1,\mathbb{D}_2}(u\otimes 1_{B_1})(1_A\otimes\eta)\\
&= (\varepsilon\otimes 1_C)(1_{B_1}\otimes v)(u\otimes 1_{B_1})(1_A\otimes\eta)\\
&= (u\otimes 1_C)(1_A\otimes 1_B\otimes\varepsilon\otimes 1_C)(1_A\otimes\eta\otimes 1_B\otimes 1_C)(1_A\otimes v)\\
&= (u\otimes 1_C)(1_A\otimes v)\quad ,
\end{aligned}$$

ce qui prouve l'égalité 3.3.15.1. L'égalité 3.3.15.2 s'obtient de façon analogue, ou en appliquant 3.3.15.1 à la catégorie monoïdale $(\mathcal{V}^\circ, \otimes, I)$, ou encore en remarquant qu'en vertu de 3.3.8.2, elle résulte de l'égalité 3.3.15.1.

On est ainsi conduit à poser la définition suivante.

Définition 3.3.16. Soient $(\mathcal{V}, \otimes, I)$ une catégorie monoïdale (non nécessairement autonome), S une s-structure souveraine sur $(\mathcal{V}, \otimes, I)$ et T une t-structure souveraine sur $(\mathcal{V}, \otimes, I)$. On dit que S et T sont *compatibles* si elles satisfont à la relation 3.3.15.1 (ou de façon équivalente (cf. 3.3.8.2) à la relation 3.3.15.2) de la proposition 3.3.15. On appelle *(s,t)-structure souveraine*, sur une catégorie monoïdale, un couple (S, T) formé d'une s-structure souveraine S et d'une t-structure souveraine T, sur cette catégorie, compatibles entre elles.

Théorème 3.3.17. *Soit $(\mathcal{V}, \otimes, I)$ une catégorie monoïdale autonome. L'application qui associe à une structure souveraine φ sur $(\mathcal{V}, \otimes, I)$ le couple $(S^{(\varphi)}, T^{(\varphi)})$ formé de la s-structure souveraine et de la t-structure souveraine sur $(\mathcal{V}, \otimes, I)$ associées à φ* (conformement aux théorèmes 3.3.10 et 3.3.13) *établit une bijection entre l'ensemble des structures souveraines sur $(\mathcal{V}, \otimes, I)$ et l'ensemble des (s,t)-structures souveraines sur $(\mathcal{V}, \otimes, I)$.*

Démonstration. En vertu de la proposition 3.3.15 et des théorèmes 3.3.10 et 3.3.13, il reste à montrer que si (S, T) est une (s,t)-structure souveraine sur $(\mathcal{V}, \otimes, I)$, alors, pour tout couple de dualités

$$\mathbb{D} = (A, B, \varepsilon, \eta) \quad , \quad \mathbb{D}' = (B, C, e, h) \quad ,$$

on a

$$\varphi^T_{\mathbb{D},\mathbb{D}'} = \varphi^S_{\mathbb{D},\mathbb{D}'} \quad ,$$

où φ^T (resp. φ^S) désigne la structure souveraine, sur $(\mathcal{V}, \otimes, I)$, associée à la t-structure souveraine T (resp. la s-structure souveraine S), conformement au théorème 3.3.10 (resp. 3.3.13). Or, en vertu de 3.3.13.4, 3.3.10.3 et 3.3.15.2, on a

$$\begin{aligned}
\left(\varphi^{S}_{\mathbb{D},\mathbb{D}'}\right)^{-1}\varphi^{T}_{\mathbb{D},\mathbb{D}'} &= (\varepsilon\otimes 1_C)\big(1_A\otimes S_{C,B}(h)\big)\big(T_{B,C}(e)\otimes 1_A\big)(1_C\otimes\eta)\\
&= \big(T_{B,C}(e)\otimes 1_C\big)(1_C\otimes 1_B\otimes\varepsilon\otimes 1_C)\\
&\qquad\qquad (1_C\otimes\eta\otimes 1_B\otimes 1_C)\big(1_C\otimes S_{C,B}(h)\big)\\
&= \big(T_{B,C}(e)\otimes 1_C\big)\big(1_C\otimes S_{C,B}(h)\big)\\
&= (1_C\otimes e)(h\otimes 1_C) = 1_C \quad ,
\end{aligned}$$

ce qui prouve le théorème.

3.4. Description des structures souveraines en termes de $\mathcal{D}(\mathcal{V})$.

3.4.1. Soit $(\mathcal{V},\otimes,I)$ une catégorie monoïdale, et considérons les $\mathcal{B}_\pm$-catégories monoïdales $(\mathcal{D}(\mathcal{V})\overset{G}{\to}\mathcal{B}_\pm,\boxtimes,\mathcal{I})$ et $(\mathcal{D}(\mathcal{V})^\circ\overset{G^\circ}{\to}\mathcal{B}_\pm,\boxtimes^\circ,\mathcal{I}^\circ)$ définies dans 1.5.2 et 1.5.5. Par abus, nous noterons $\mathcal{D}(\mathcal{V})$ la première et $\mathcal{D}^\circ(\mathcal{V})$ la deuxième. On rappelle qu'en vertu de 1.5.3 et 1.5.5, la fibre de $\mathcal{D}(\mathcal{V})$ au dessus de $+$, ainsi que celle de $\mathcal{D}^\circ(\mathcal{V})$ au dessus de $-$, s'identifie à la catégorie monoïdale $(\mathcal{V},\otimes,I)$. De même, la fibre de $\mathcal{D}(\mathcal{V})$ au dessus de $-$, ainsi que celle de $\mathcal{D}^\circ(\mathcal{V})$ au dessus de $+$, s'identifie à la catégorie monoïdale $(\mathcal{V}^\circ,\otimes^\circ,I)$. D'autre part, la catégorie $\mathcal{B}_\pm$ possède une involution (covariante) J définie (en utilisant les notations de 1.5.1) par

$$J(+) = - \ , \quad J(-) = + \ , \quad J(f) = f^{-1} = g \ , \quad J(g) = g^{-1} = f \ .$$

Pourvu que la catégorie monoïdale $(\mathcal{V},\otimes,I)$ soit autonome, on établira une bijection entre les structures souveraines sur $(\mathcal{V},\otimes,I)$ et les J-foncteurs monoïdaux de la $\mathcal{B}_\pm$-catégorie monoïdale $\mathcal{D}(\mathcal{V})$ dans la $\mathcal{B}_\pm$-catégorie monoïdale $\mathcal{D}^\circ(\mathcal{V})$ (autrement dit les $\mathcal{B}_\pm$-foncteurs monoïdaux de $\mathcal{D}(\mathcal{V})$ dans $J^*(\mathcal{D}^\circ(\mathcal{V}))$ (cf. 1.4.6)), induisant l'identité dans les fibres (en utilisant les identifications ci-dessus). Pour cela, on utilisera la description explicite suivante de la $\mathcal{B}_\pm$-catégorie monoïdale $J^*(\mathcal{D}^\circ(\mathcal{V}))$.

Proposition 3.4.2. *La $\mathcal{B}_\pm$ catégorie monoïdale $J^*(\mathcal{D}^\circ(\mathcal{V}))$ est canoniquement isomorphe à la $\mathcal{B}_\pm$ catégorie monoïdale*

$$(D'(\mathcal{V}) \xrightarrow{G'} \mathcal{B}_\pm, \boxtimes', \mathcal{I}')$$

définie comme suit.

$$\mathcal{O}b(\mathcal{D}'(\mathcal{V})) := \mathcal{O}b(\mathcal{V}) \coprod \mathcal{O}b(\mathcal{V}^\circ) := \mathcal{O}b(\mathcal{V}) \times \{+1, -1\} \quad .$$

Pour tout objet A et B de $\mathcal{V}$ et tout s, $t \in \{1, -1\}$,

$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{D}'(\mathcal{V})}\big((A,s),(B,t)\big) = \begin{cases} \mathsf{Hom}_{\mathcal{V}}(A,B) & (s,t) = (1,1) \\ \mathsf{Hom}_{\mathcal{V}}(B \otimes A, I) & (s,t) = (1,-1) \\ \mathsf{Hom}_{\mathcal{V}}(I, B \otimes A) & (s,t) = (-1,1) \\ \mathsf{Hom}_{\mathcal{V}}(B,A) & (s,t) = (-1,-1) \; , \end{cases}$$

pour tout $u \in \mathsf{Hom}_{\mathcal{D}'(\mathcal{V})}\big((A,r),(B,s)\big)$ et $v \in \mathsf{Hom}_{\mathcal{D}'(\mathcal{V})}\big((B,s),(C,t)\big)$, où A, B, $C \in \mathcal{O}b(\mathcal{V})$ et r, s, $t \in \{1, -1\}$,

$$v \circ' u = \begin{cases} vu & (r,s,t) = (1,1,1) \\ v(1_C \otimes u) & (r,s,t) = (1,1,-1) \\ (1_C \otimes u)(v \otimes 1_A) & (r,s,t) = (1,-1,1) \\ u(v \otimes 1_A) & (r,s,t) = (1,-1,-1) \\ (v \otimes 1_A)u & (r,s,t) = (-1,1,1) \\ (v \otimes 1_A)(1_C \otimes u) & (r,s,t) = (-1,1,-1) \\ (1_C \otimes u)v & (r,s,t) = (-1,-1,1) \\ uv & (r,s,t) = (-1,-1,-1) \; , \end{cases}$$

où $\circ'$ désigne la composition dans $\mathcal{D}'(\mathcal{V})$, G' est l'unique foncteur $G' : \mathcal{D}'(\mathcal{V}) \to \mathcal{B}_\pm$ tel que pour tout $A \in \mathcal{O}b(\mathcal{V})$,

$$G'(A,1) = + \quad , \qquad G'(A,-1) = - \quad ,$$

pour tout A, $B \in \mathcal{O}b(\mathcal{V})$ et $s \in \{1, -1\}$,

$$(A,s) \boxtimes' (B,s) = \begin{cases} (A \otimes B, 1) & s = 1 \\ (B \otimes A, -1) & s = -1 \quad , \end{cases}$$

pour tout $u \in \mathsf{Hom}_{\mathcal{D}'(\mathcal{V})}\big((A,s),(B,t)\big)$ *et* $v \in \mathsf{Hom}_{\mathcal{D}'(\mathcal{V})}\big((C,s),(D,t)\big)$, *où* A, B, C, $D \in \mathcal{O}b(\mathcal{V})$ *et* s, $t \in \{1,-1\}$,

$$u \boxtimes' v = \begin{cases} u \otimes v & (s,t) = (1,1) \\ v(1_D \otimes u \otimes 1_C) & (s,t) = (1,-1) \\ (1_B \otimes v \otimes 1_A)u & (s,t) = (-1,1) \\ v \otimes u & (s,t) = (-1,-1) \end{cases}$$

et

$$\mathcal{I}'(+) = (I,1) \quad , \quad \mathcal{I}'(-) = (I,-1) \quad , \qquad \mathcal{I}'(f) = \mathcal{I}'(g) = 1_I \quad .$$

DÉMONSTRATION. Il s'agit d'une simple traduction des définitions, l'objet $(A,1)$ (resp. $(A,-1)$) de $\mathcal{D}'(\mathcal{V})$ correspondant à l'objet $((A,-1),+)$ (resp. $((A,1),-)$) de $J^*(\mathcal{D}^\circ(\mathcal{V}))$.

Théorème 3.4.3. *Soient* $(\mathcal{V},\otimes,I)$ *une catégorie monoïdale, et pour tout couple d'objets* A *et* B *de* $\mathcal{V}$,

$$S_{A,B} : \mathsf{Hom}_{\mathcal{V}}(I, A\otimes B) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{V}}(I, B\otimes A) \quad ,$$

$$T_{A,B} : \mathsf{Hom}_{\mathcal{V}}(A\otimes B, I) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{V}}(B\otimes A, I)$$

des applications. Considérons les conditions suivantes :

a) (S,T) *est une* (s,t)*-structure souveraine sur* $(\mathcal{V},\otimes,I)$;

b) *si pour tout objet* (A,s) *de* $\mathcal{D}(\mathcal{V})$, $A \in \mathcal{O}b(\mathcal{V})$, $s \in \{1,-1\}$, *on désigne par* $F(A,s)$ *le même couple* (A,s) *considéré comme objet de* $\mathcal{D}'(\mathcal{V})$, *et si pour tout morphisme* u *de* $\mathcal{D}(\mathcal{V})$,

$$u \in \mathsf{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{V})}\big((A,s),(B,t)\big)\ , \quad A\,,\ B \in \mathcal{O}b(\mathcal{V})\ , \quad s,\ t \in \{1,-1\}\ ,$$

on désigne par $F(u)$ *le morphisme de* $\mathcal{D}'(\mathcal{V})$, *appartenant à*

$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{D}'(\mathcal{V})}\big(F(A,s), F(B,t)\big) \ ,$$

défini par

$$F(u) = \begin{cases} u & \text{si} \quad s = t \\ T_{A,B}(u) & \text{si} \quad (s,t) = (1,-1) \\ S_{A,B}(u) & \text{si} \quad (s,t) = (-1,1) \end{cases} ,$$

alors F est un $\mathcal{B}_\pm$-foncteur monoïdal strict.

La condition (a) *implique la condition* (b)*, et si la catégorie monoïdale $(\mathcal{V}, \otimes, I)$ est autonome, ces deux conditions sont équivalentes. On établit ainsi, dans ce cas, une bijection entre l'ensemble des structures souveraines sur $(\mathcal{V}, \otimes, I)$ et l'ensemble des $\mathcal{B}_\pm$-foncteurs monoïdaux stricts de $\mathcal{D}(\mathcal{V})$ dans $\mathcal{D}'(\mathcal{V})$, induisant l'identité sur les fibres au dessus de $\mathcal{B}_\pm$.*

Démonstration. Cherchons des conditions nécessaires et suffisantes sur S et T pour que le morphisme de graphes F défini dans (b) soit un $\mathcal{B}_\pm$-foncteur monoïdal strict. Exprimons d'abord la fonctorialité de F. Soient

$$u \in \mathsf{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{V})}\big((A,r),(B,s)\big) \qquad \text{et} \qquad v \in \mathsf{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{V})}\big((B,s),(C,t)\big) \quad ,$$

où A, B, $C \in \mathcal{O}b(\mathcal{V})$ et r, s, $t \in \{1,-1\}$. On a les tableaux suivants :

$F(v \circ u)$	(r,s,t)
$F(vu) = vu$	$(1,1,1)$
$F\big(v(u \otimes 1_C)\big) = T_{A,C}\big(v(u \otimes 1_C)\big)$	$(1,1,-1)$
$F\big((u \otimes 1_C)(1_A \otimes v)\big) = (u \otimes 1_C)(1_A \otimes v)$	$(1,-1,1)$
$F\big(u(1_A \otimes v)\big) = T_{A,C}\big(u(1_A \otimes v)\big)$	$(1,-1,-1)$
$F\big((1_A \otimes v)u\big) = S_{A,C}\big((1_A \otimes v)u\big)$	$(-1,1,1)$
$F\big((1_A \otimes v)(u \otimes 1_C)\big) = (1_A \otimes v)(u \otimes 1_C)$	$(-1,1,-1)$
$F\big((u \otimes 1_C)v\big) = S_{A,C}\big((u \otimes 1_C)v\big)$	$(-1,-1,1)$
$F(uv) = uv$	$(-1,-1,-1)$

et

$F(v) \circ' F(u)$	(r,s,t)
$v \circ' u = vu$	$(1,1,1)$
$T_{B,C}(v) \circ' u = \big(T_{B,C}(v)\big)(1_C \otimes u)$	$(1,1,-1)$
$S_{B,C}(v) \circ' T_{A,B}(u) = \big(1_C \otimes T_{A,B}(u)\big)\big(S_{B,C}(v) \otimes 1_A\big)$	$(1,-1,1)$
$v \circ' T_{A,B}(u) = \big(T_{A,B}(u)\big)(v \otimes 1_A)$	$(1,-1,-1)$
$v \circ' S_{A,B}(u) = (v \otimes 1_A)\big(S_{A,B}(u)\big)$	$(-1,1,1)$
$T_{B,C}(v) \circ' S_{A,B}(u) = \big(T_{B,C}(v) \otimes 1_A\big)\big(1_C \otimes S_{A,B}(u)\big)$	$(-1,1,-1)$
$S_{B,C}(v) \circ' u = (1_C \otimes u)\big(S_{B,C}(v)\big)$	$(-1,-1,1)$
$v \circ' u = uv$	$(-1,-1,-1)$

Comme, par définition, F est compatible aux unités, la fonctorialité de F est donc équivalente aux relations 3.3.7.1, 3.3.12.1, 3.3.15.1 et 3.3.15.2.

Exprimons maintenant la compatibilité de F aux "produits tensoriels" $\boxtimes$ et $\boxtimes'$. Si A et B sont des objets de $\mathcal{V}$ et $s \in \{1,-1\}$ on a, par définition,

$$F\big((A,s) \boxtimes (B,s)\big) = (A,s) \boxtimes' (B,s) \quad .$$

Soient

$$u \in \mathsf{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{V})}\big((A,s),(B,t)\big) \quad \text{et} \quad v \in \mathsf{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{V})}\big((C,s),(D,t)\big) \quad ,$$

où A, B, C, $D \in \mathcal{O}b(\mathcal{V})$ et s, $t \in \{1,-1\}$. On a les tableaux suivants :

$F(u \boxtimes v)$	(s,t)
$F(u \otimes v) = u \otimes v$	$(1,1)$
$F\big(u(1_A \otimes v \otimes 1_B)\big) = T_{A\otimes C, D\otimes B}\big(u(1_A \otimes v \otimes 1_B)\big)$	$(1,-1)$
$F\big((1_C \otimes u \otimes 1_D)v\big) = S_{C\otimes A, B\otimes D}\big((1_C \otimes u \otimes 1_D)v\big)$	$(-1,1)$
$F(v \otimes u) = v \otimes u$	$(-1,-1)$

et

$F(u) \boxtimes' F(v)$	(s,t)
$u \boxtimes' v = u \otimes v$	$(1,1)$
$T_{A,B}(u) \boxtimes' T_{C,D}(v) = \big(T_{C,D}(v)\big)\big(1_D \otimes T_{A,B}(u) \otimes 1_C\big)$	$(1,-1)$
$S_{A,B}(u) \boxtimes' S_{C,D}(v) = \big(1_B \otimes S_{C,D}(v) \otimes 1_A\big)\big(S_{A,B}(u)\big)$	$(-1,1)$
$u \boxtimes' v = v \otimes u$	$(-1,-1)$

La compatibilité de F aux "produits tensoriels" est donc équivalente aux égalités 3.3.8.4 et 3.3.12.7.

Enfin, la condition $G'F = G$ est automatique, et la condition $F\mathcal{I} = \mathcal{I}'$ est équivalente aux relations 3.3.7.3 et 3.3.12.3 car

$$F\mathcal{I}(+) = F(I,1) = (I,1) = \mathcal{I}'(+) \quad ,$$

$$F\mathcal{I}(-) = F(I,-1) = (I,-1) = \mathcal{I}'(-) \quad ,$$

$$F\mathcal{I}(f) = T_{I,I}(1_I) \qquad \text{et} \qquad \mathcal{I}'(f) = 1_I \quad ,$$

$$F\mathcal{I}(g) = S_{I,I}(1_I) \qquad \text{et} \qquad \mathcal{I}'(g) = 1_I \quad .$$

L'implication (a) $\Longrightarrow$ (b) résulte donc de 3.3.8 et 3.3.12 et l'implication (b) $\Longrightarrow$ (a) (dans le cas autonome) de 3.3.11 et 3.3.12. La dernière assertion résulte alors du théorème 3.3.17.

EXERCICE 3.4.4. Donner un sens précis à l'assertion suivante et la démontrer. *Le $\mathcal{B}_\pm$-foncteur $F : \mathcal{D}(\mathcal{V}) \to J^*(\mathcal{D}^\circ(\mathcal{V}))$ associé, en vertu du théorème précédent, à une (s,t)-structure souveraine sur une catégorie monoïdale est involutif.*

3.5. La trace.

3.5.1. On se fixe une catégorie monoïdale autonome souveraine $(\mathcal{V}, \otimes, I, \varphi)$. Soient A, B, C des objets de $\mathcal{V}$, $u : A \otimes B \to A \otimes C$ un morphisme et

$$\mathbb{D}_1 = (A_1, A, \varepsilon, \eta) \quad , \quad \mathbb{D}_2 = (A, A_2, e, h)$$

des dualités. On pose

$$\mathsf{tr}_{\mathbb{D}_1,\mathbb{D}_2}(u) = (\varepsilon \otimes 1_C)(\varphi_{\mathbb{D}_1,\mathbb{D}_2} \otimes u)(h \otimes 1_B) \quad .$$

Lemme 3.5.2. *Soient A, A', B, C des objets de $\mathcal{V}$,*

$$u : A' \otimes B \to A \otimes C \quad , \quad v : A \to A'$$

des morphismes et

$$\mathbb{D}_1 = (A_1, A, \varepsilon, \eta) \quad , \quad \mathbb{D}_2 = (A, A_2, e, h)$$

$$\mathbb{D}'_1 = (A'_1, A', \varepsilon', \eta') \quad , \quad \mathbb{D}'_2 = (A', A'_2, e', h')$$

des dualités. Alors on a

$$\mathsf{tr}_{\mathbb{D}'_1,\mathbb{D}'_2}\big((v \otimes 1_C)u\big) = \mathsf{tr}_{\mathbb{D}_1,\mathbb{D}_2}\big(u(v \otimes 1_B)\big) \quad .$$

Démonstration. En vertu de 3.1.2.1, on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
A'_2 \arrow[r, "\varphi_{\mathbb{D}'_1,\mathbb{D}'_2}"] \arrow[d, "t^{(r)}_{\mathbb{D}_2,\mathbb{D}'_2}(v)"'] & A'_1 \arrow[d, "t^{(l)}_{\mathbb{D}_1,\mathbb{D}'_1}(v)"] \\
A_2 \arrow[r, "\varphi_{\mathbb{D}_1,\mathbb{D}_2}"] & A_1
\end{tikzcd} \quad ,$$

ce qui, en vertu de 1.2.3.1 et 1.2.3.2, se traduit par

$$\varphi_{\mathbb{D}_1,\mathbb{D}_2}(1_{A_2} \otimes e')(1_{A_2} \otimes v \otimes 1_{A'_2})(h \otimes 1_{A'_2})$$
$$= (\varepsilon' \otimes 1_{A_1})(1_{A'_1} \otimes v \otimes 1_{A_1})(1_{A'_1} \otimes \eta)\varphi_{\mathbb{D}'_1,\mathbb{D}'_2} \; .$$

On a donc

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{tr}_{\mathbb{D}'_1,\mathbb{D}'_2}\big((v\otimes 1_C)u\big)\\
&= (\varepsilon'\otimes 1_C)\big(\varphi_{\mathbb{D}'_1,\mathbb{D}'_2}\otimes [(v\otimes 1_C)u](h'\otimes 1_B)\\
&= (\varepsilon'\otimes 1_C)(1_{A'_1}\otimes v\otimes 1_C)(1_{A'_1}\otimes 1_A\otimes\varepsilon\otimes 1_C)(1_{A'_1}\otimes\eta\otimes 1_A\otimes 1_C)\\
&\qquad\qquad (\varphi_{\mathbb{D}'_1,\mathbb{D}'_2}\otimes 1_A\otimes 1_C)(1_{A'_2}\otimes u)(h'\otimes 1_B)\\
&= (\varepsilon\otimes 1_C)(\varepsilon'\otimes 1_{A_1}\otimes 1_A\otimes 1_C)(1_{A'_1}\otimes v\otimes 1_{A_1}\otimes 1_A\otimes 1_C)\\
&\qquad\qquad (1_{A'_1}\otimes\eta\otimes 1_A\otimes 1_C)(\varphi_{\mathbb{D}'_1,\mathbb{D}'_2}\otimes 1_A\otimes 1_C)(1_{A'_2}\otimes u)(h'\otimes 1_B)\\
&= (\varepsilon\otimes 1_C)\big([(\varepsilon'\otimes 1_{A_1})(1_{A'_1}\otimes v\otimes 1_{A_1})(1_{A'_1}\otimes\eta)\varphi_{\mathbb{D}'_1,\mathbb{D}'_2}]\otimes 1_A\otimes 1_C\big)\\
&\qquad\qquad (1_{A'_2}\otimes u)(h'\otimes 1_B)\\
&= (\varepsilon\otimes 1_C)\big([\varphi_{\mathbb{D}_1,\mathbb{D}_2}(1_{A_2}\otimes e')(1_{A_2}\otimes v\otimes 1_{A'_2})(h\otimes 1_{A'_2})]\otimes 1_A\otimes 1_C\big)\\
&\qquad\qquad (1_{A'_2}\otimes u)(h'\otimes 1_B)\\
&= (\varepsilon\otimes 1_C)(\varphi_{\mathbb{D}_1,\mathbb{D}_2}\otimes u)(1_{A_2}\otimes e'\otimes 1_{A'}\otimes 1_B)(1_{A_2}\otimes v\otimes 1_{A'_2}\otimes 1_{A'}\otimes 1_B)\\
&\qquad\qquad (h\otimes 1_{A'_2}\otimes 1_{A'}\otimes 1_B)(h'\otimes 1_B)\\
&= (\varepsilon\otimes 1_C)(\varphi_{\mathbb{D}_1,\mathbb{D}_2}\otimes u)(1_{A_2}\otimes e'\otimes 1_{A'}\otimes 1_B)(1_{A_2}\otimes 1_{A'}\otimes h'\otimes 1_B)\\
&\qquad\qquad (1_{A_2}\otimes v\otimes 1_B)(h\otimes 1_B)\\
&= (\varepsilon\otimes 1_C)(\varphi_{\mathbb{D}_1,\mathbb{D}_2}\otimes u)(1_{A_2}\otimes v\otimes 1_B)(h\otimes 1_B)\\
&= (\varepsilon\otimes 1_C)\big(\varphi_{\mathbb{D}_1,\mathbb{D}_2}\otimes [u(v\otimes 1_B)]\big)(h\otimes 1_B) = \mathsf{tr}_{\mathbb{D}_1,\mathbb{D}_2}\big(u(v\otimes 1_B)\big) \quad ,
\end{aligned}
$$

ce qui prouve le lemme.

3.5.3. Le lemme 3.5.2, appliqué à $A' = A$ et $v = 1_A$, prouve, en particulier, que pour tout morphisme $u : A\otimes B \to A\otimes C$, le morphisme $\mathsf{tr}_{\mathbb{D}_1,\mathbb{D}_2}(u) : B \to C$ est indépendant du choix des dualités $\mathbb{D}_1$ et $\mathbb{D}_2$, et dépend uniquement de u et de la décomposition de la source (resp. du but) de u en produit tensoriel de deux objets A et B (resp. A et C).

On posera donc

$$\mathsf{tr}_{A;B,C}(u) := \mathsf{tr}_{\mathbb{D}_1,\mathbb{D}_2}(u) := (\varepsilon\otimes 1_C)(\varphi_{\mathbb{D}_1,\mathbb{D}_2}\otimes u)(h\otimes 1_B) \quad , \tag{3.5.3.1}$$

et le lemme 3.5.2 se traduit par la proposition suivante.

Proposition 3.5.4. *Soient A, A', B, C des objets de $\mathcal{V}$ et $u : A'\otimes B \to A\otimes C$, $v : A \to A'$ des morphismes. Alors on a*

$$\mathsf{tr}_{A';B,C}\big((v\otimes 1_C)u\big) = \mathsf{tr}_{A;B,C}\big(u(v\otimes 1_B)\big) \quad . \tag{3.5.4.1}$$

Proposition 3.5.5. *Soient A, B, B', C, C' des objets de $\mathcal{V}$ et $u : A\otimes B \to A\otimes C$, $v : B' \to B$, $w : C \to C'$ des morphismes. Alors on a*

$$\mathsf{tr}_{A;B,C'}\big((1_A\otimes w)u\big) = w\,\mathsf{tr}_{A;B,C}(u) \tag{3.5.5.1}$$

et

$$\mathsf{tr}_{A;B',C}\big(u(1_A\otimes v)\big) = \mathsf{tr}_{A;B,C}(u)v \quad . \tag{3.5.5.2}$$

Démonstration. Choisissons des dualités

$$\mathbb{D}_1 = (A_1, A, \varepsilon, \eta) \qquad \text{et} \qquad \mathbb{D}_2 = (A, A_2, e, h) \quad .$$

On a

$$\begin{aligned} &\mathsf{tr}_{A;B',C'}\big((1_A\otimes w)u(1_A\otimes v)\big) \\ &= (\varepsilon\otimes 1_{C'})\big(\varphi_{\mathbb{D}_1,\mathbb{D}_2}\otimes[(1_A\otimes w)u(1_A\otimes v)]\big)(h\otimes 1_{B'}) \\ &= w(\varepsilon\otimes 1_C)(\varphi_{\mathbb{D}_1,\mathbb{D}_2}\otimes u)(h\otimes 1_B)v = w\,\mathsf{tr}_{A;B,C}(u)v \quad . \end{aligned}$$

Proposition 3.5.6. *Soient A, B, C, D des objets de $\mathcal{V}$ et $u : A\otimes B\otimes C \to A\otimes B\otimes D$ un morphisme. Alors on a*

$$\mathsf{tr}_{A\otimes B;C,D}(u) = \mathsf{tr}_{B;C,D}\big(\mathsf{tr}_{A;B\otimes C,B\otimes D}(u)\big) \quad . \tag{3.5.6.1}$$

Démonstration. Choisissons des dualités

$$\mathbb{D}_1 = (A_1, A, \varepsilon, \eta) \qquad , \qquad \mathbb{D}_2 = (A, A_2, e, h) \quad ,$$

$$\mathbb{D}'_1 = (B_1, B, \varepsilon', \eta') \qquad , \qquad \mathbb{D}'_2 = (B, B_2, e', h') \quad .$$

On en déduit des dualités (1.2.5)

$$\mathbb{D}_1 \otimes \mathbb{D}'_1 = \big(B_1 \otimes A_1,\ A \otimes B,\ \varepsilon'(1_{B_1} \otimes \varepsilon \otimes 1_B),\ (1_A \otimes \eta' \otimes 1_{A_1})\eta\big) \quad ,$$

$$\mathbb{D}'_2 \otimes \mathbb{D}_2 = \big(A \otimes B,\ B_2 \otimes A_2,\ e(1_A \otimes e' \otimes 1_{A_2}),\ (1_{B_2} \otimes h \otimes 1_B)h'\big) \quad .$$

En vertu de 3.5.3.1 et 3.1.2.2, on a

$$\begin{aligned}
&\mathsf{tr}_{A\otimes B;C,D}(u) \\
&= \big([\varepsilon'(1_{B_1} \otimes \varepsilon \otimes 1_B)] \otimes 1_D\big)(\varphi_{\mathbb{D}_1\otimes\mathbb{D}'_1,\mathbb{D}'_2\otimes\mathbb{D}_2} \otimes u) \\
&\qquad\qquad\qquad \big([(1_{B_2} \otimes h \otimes 1_B)h'] \otimes 1_C\big) \\
&= (\varepsilon' \otimes 1_D)(1_{B_1} \otimes \varepsilon \otimes 1_B \otimes 1_D)(\varphi_{\mathbb{D}'_1,\mathbb{D}'_2} \otimes \varphi_{\mathbb{D}_1,\mathbb{D}_2} \otimes u) \\
&\qquad\qquad\qquad (1_{B_2} \otimes h \otimes 1_B \otimes 1_C)(h' \otimes 1_C) \\
&= (\varepsilon' \otimes 1_D)\big(\varphi_{\mathbb{D}'_1,\mathbb{D}'_2} \otimes [(\varepsilon \otimes 1_B \otimes 1_D)(\varphi_{\mathbb{D}_1,\mathbb{D}_2} \otimes u) \\
&\qquad\qquad\qquad (h \otimes 1_B \otimes 1_C)]\big)(h' \otimes 1_C) \\
&= \mathsf{tr}_{B;C,D}\big(\mathsf{tr}_{A;B\otimes C,B\otimes D}(u)\big) \quad ,
\end{aligned}$$

ce qui démontre la proposition.

Proposition 3.5.7. *Soient A, B, C, D, E des objets de $\mathcal{V}$ et $u : A \otimes B \to A \otimes C$, $v : D \to E$ des morphismes. Alors on a*

$$\mathsf{tr}_{A;B\otimes D,C\otimes E}(u \otimes v) = \mathsf{tr}_{A;B,C}(u) \otimes v \quad . \tag{3.5.7.1}$$

Démonstration. Choisissons des dualités

$$\mathbb{D}_1 = (A_1, A, \varepsilon, \eta) \qquad \text{et} \qquad \mathbb{D}_2 = (A, A_2, e, h) \quad .$$

On a

$$\begin{aligned}\mathsf{tr}_{A;B\otimes D,C\otimes E}(u\otimes v) &= (\varepsilon\otimes 1_C\otimes 1_E)(\varphi_{\mathbb{D}_1,\mathbb{D}_2}\otimes u\otimes v)(h\otimes 1_B\otimes 1_D)\\ &= [(\varepsilon\otimes 1_C)(\varphi_{\mathbb{D}_1,\mathbb{D}_2}\otimes u)(h\otimes 1_B)]\otimes v\\ &= \mathsf{tr}_{A;B,C}(u)\otimes v \quad ,\end{aligned}$$

ce qui démontre la proposition.

Proposition 3.5.8. *On a*

$$\mathsf{tr}_{I;I,I}(1_I) = 1_I \quad . \tag{3.5.8.1}$$

DÉMONSTRATION. En effet, en vertu de 3.1.5.1, si $\mathbb{D}_0$ désigne la dualité $\mathbb{D}_0 = (I, I, 1_I, 1_I)$, on a

$$\mathsf{tr}_{I;I,I}(1_I) = (1_I\otimes 1_I)(\varphi_{\mathbb{D}_0,\mathbb{D}_0}\otimes 1_I)(1_I\otimes 1_I) = \varphi_{\mathbb{D}_0,\mathbb{D}_0} = 1_I \quad ,$$

ce qui démontre la proposition.

On est ainsi conduit à poser la définition suivante.

Définition 3.5.9. Soit $(\mathcal{V},\otimes,I)$ une catégorie monoïdale (non nécessairement autonome). On appelle *trace à gauche* sur $(\mathcal{V},\otimes,I)$ la donnée pour tout triplet d'objets A, B et C de $\mathcal{V}$ d'une application

$$\mathsf{tr}_{A;B,C} : \mathsf{Hom}_{\mathcal{V}}(A\otimes B, A\otimes C) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{V}}(B,C)$$

satisfaisant aux propriétés 3.5.4.1, 3.5.5.1, 3.5.5.2, 3.5.6.1, 3.5.7.1 et 3.5.8.1.

On remarque que les conditions 3.5.7.1 et 3.5.8.1 impliquent que pour tout morphisme $u : B\to C$ de $\mathcal{V}$, on a

$$\mathsf{tr}_{I;B,C}(u) = u \quad . \tag{3.5.9.1}$$

On vérifie facilement que si tr désigne une trace à gauche sur $(\mathcal{V},\otimes,I)$, et si pour tout triplet d'objets A, B et C de la catégorie opposée $\mathcal{V}^\circ$ et tout morphisme

$$u\in \mathsf{Hom}_{\mathcal{V}^\circ}(A\otimes B, A\otimes C) = \mathsf{Hom}_{\mathcal{V}}(A\otimes C, A\otimes B) \quad ,$$

on pose

$$\mathsf{tr}^\circ_{A;B,C}(u) = \mathsf{tr}_{A;C,B}(u) \in \mathsf{Hom}_{\mathcal{V}}(C,B) = \mathsf{Hom}_{\mathcal{V}^\circ}(B,C) \quad ,$$

alors tr° est une trace à gauche sur $(\mathcal{V}^\circ,\otimes,I)$.

Lemme 3.5.10. *Soient* $(\mathcal{V},\otimes,I)$ *une catégorie monoïdale et pour tout triplet* A , B *et* C *d'objets de* $\mathcal{V}$*, une application*

$$\mathsf{tr}_{A;B,C} : \mathsf{Hom}_{\mathcal{V}}(A\otimes B, A\otimes C) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{V}}(B,C)$$

satisfaisant à la condition de fonctorialité 3.5.5.1 (resp. 3.5.5.2), *ainsi qu'à la condition* 3.5.7.1. *Alors, pour tout morphisme de* $\mathcal{V}$*, de la forme* $u : A\otimes B \to A\otimes C$ *, et toute dualité* $\mathbb{D}_1 = (A_1, A, \varepsilon, \eta)$ (resp. $\mathbb{D}_2 = (A, A_2, e, h)$), *on a*

$$(3.5.10.1)\quad \mathsf{tr}_{A;B,C}(u) = (\varepsilon\otimes 1_C)(1_{A_1}\otimes u)\big(\mathsf{tr}_{A;I,A_1\otimes A}(\eta\otimes 1_A)\otimes 1_B\big)$$

(resp.

$$(3.5.10.2)\quad \mathsf{tr}_{A;B,C}(u) = \big(\mathsf{tr}_{A;A_2\otimes A,I}(e\otimes 1_A)\otimes 1_C\big)(1_{A_2}\otimes u)(h\otimes 1_B)\ ).$$

Démonstration. En vertu de 1.2.1.1, on a

$$\begin{aligned} u &= u(e\otimes 1_A\otimes 1_B)(1_A\otimes h\otimes 1_B) \\ &= (e\otimes 1_A\otimes 1_C)\big(1_A\otimes[(1_{A_2}\otimes u)(h\otimes 1_B)]\big) \end{aligned}$$

et en vertu de 3.5.5.2 et 3.5.7.1, on a

$$\begin{aligned} \mathsf{tr}_{A;B,C}(u) &= \big(\mathsf{tr}_{A;A_2\otimes A\otimes C,C}(e\otimes 1_A\otimes 1_C)\big)(1_{A_2}\otimes u)(h\otimes 1_B) \\ &= \big(\mathsf{tr}_{A;A_2\otimes A,I}(e\otimes 1_A)\otimes 1_C\big)(1_{A_2}\otimes u)(h\otimes 1_B) \quad , \end{aligned}$$

ce qui démontre la partie "resp." La partie "non resp." se démontre de façon analogue, ou se déduit de la partie "resp." appliquée à la catégorie monoïdale $(\mathcal{V}^\circ,\otimes,I)$ (cf. 1.1.1, 1.2.1 et 3.5.9).

Théorème 3.5.11. *Soit* $(\mathcal{V},\otimes,I)$ *une catégorie monoïdale. Soit* tr *une trace à gauche sur* $(\mathcal{V},\otimes,I)$ *; si pour tout couple d'objets* A *et* B *de* $\mathcal{V}$ *et tout morphisme* $u : A\otimes B \to I$ *, on pose*

$$(3.5.11.1)\qquad T_{A,B}(u) = \mathsf{tr}_{A;B\otimes A,I}(u\otimes 1_A) \quad ,$$

alors T est une t-structure souveraine sur $(\mathcal{V},\otimes,I)$. Réciproquement, si la catégorie monoïdale $(\mathcal{V},\otimes,I)$ est autonome, si T est une t-structure souveraine sur $(\mathcal{V},\otimes,I)$, il existe une trace à gauche unique tr *sur $(\mathcal{V},\otimes,I)$ telle que pour tout morphisme $u: A\otimes B\to A\otimes C$ de $\mathcal{V}$ et toute dualité $\mathbb{D}=(A,A',e,h)$, on ait*

$$\mathsf{tr}_{A;B,C}(u)=\big(T_{A,A'}(e)\otimes 1_C\big)(1_{A'}\otimes u)(h\otimes 1_B)\quad, \tag{3.5.11.2}$$

et si φ désigne la structure souveraine sur $(\mathcal{V},\otimes,I)$ associée à la t-structure souveraine T (cf. théorème 3.3.10) *définie par la formule* 3.3.10.3, *alors* tr *est définie par la relation* 3.5.3.1. *On définit ainsi, dans le cas où la catégorie monoïdale $(\mathcal{V},\otimes,I)$ est autonome, deux bijections, inverses l'une de l'autre, entre l'ensemble des traces à gauche sur $(\mathcal{V},\otimes,I)$ et l'ensemble des t-structures souveraines sur $(\mathcal{V},\otimes,I)$.*

Démonstration. Démontrons la première assertion. Soient

$$u: A\otimes B\longrightarrow I\qquad\text{et}\qquad v: B'\longrightarrow B$$

des morphismes de $\mathcal{V}$. En vertu de 3.5.11.1 et 3.5.5.2, on a

$$\begin{aligned}T_{A,B'}\big(u(1_A\otimes v)\big)&=\mathsf{tr}_{A;B'\otimes A,I}\big([u(1_A\otimes v)]\otimes 1_A\big)\\&=\mathsf{tr}_{A;B'\otimes A,I}\big((u\otimes 1_A)(1_A\otimes[v\otimes 1_A])\big)\\&=\big(\mathsf{tr}_{A;B\otimes A,I}(u\otimes 1_A)\big)(v\otimes 1_A)\\&=\big(T_{A,B}(u)\big)(v\otimes 1_A)\quad.\end{aligned}$$

De même, pour tout morphisme $u: A\otimes B\to I$ et $v: A'\to A$, en vertu de 3.5.11.1, 3.5.4.1 et 3.5.5.2, on a

$$\begin{aligned}T_{A',B}\big(u(v\otimes 1_B)\big)&=\mathsf{tr}_{A';B\otimes A',I}\big([u(v\otimes 1_B)]\otimes 1_{A'}\big)\\&=\mathsf{tr}_{A';B\otimes A',I}\big((u\otimes 1_{A'})(v\otimes 1_B\otimes 1_{A'})\big)\\&=\mathsf{tr}_{A;B\otimes A',I}\big((v\otimes 1_I)(u\otimes 1_{A'})\big)\\&=\mathsf{tr}_{A;B\otimes A',I}\big((u\otimes 1_A)(1_A\otimes 1_B\otimes v)\big)\\&=\big(\mathsf{tr}_{A;B\otimes A,I}(u\otimes 1_A)\big)(1_B\otimes v)\\&=\big(T_{A,B}(u)\big)(1_B\otimes v)\quad.\end{aligned}$$

On en déduit la condition 3.3.7.1.

Soit $u : A \otimes B \otimes C \to I$ un morphisme de $\mathcal{V}$. En vertu de 3.5.11.1, 3.5.6.1 et 3.5.7.1, on a

$$\begin{aligned}
T_{A\otimes B,C}(u) &= \mathsf{tr}_{A\otimes B;C\otimes A\otimes B,I}(u \otimes 1_A \otimes 1_B) \\
&= \mathsf{tr}_{B;C\otimes A\otimes B,I}\big(\mathsf{tr}_{A;B\otimes C\otimes A\otimes B,B}(u \otimes 1_A \otimes 1_B)\big) \\
&= \mathsf{tr}_{B;C\otimes A\otimes B,I}\big(\mathsf{tr}_{A;B\otimes C\otimes A,I}(u \otimes 1_A) \otimes 1_B\big) \\
&= T_{B,C\otimes A}\big(T_{A,B\otimes C}(u)\big) \quad ,
\end{aligned}$$

ce qui prouve la condition 3.3.7.2.

Enfin, en vertu de 3.5.11.1 et 3.5.8.1, on a

$$T_{I,I}(1_I) = \mathsf{tr}_{I;I\otimes I,I}(1_I \otimes 1_I) = \mathsf{tr}_{I;I,I}(1_I) = 1_I \quad ,$$

ce qui prouve 3.3.7.3 et démontre la première assertion.

Démontrons la deuxième assertion. En vertu du théorème 3.3.10, il existe une structure souveraine φ^T sur $(\mathcal{V}, \otimes, I)$ telle que pour toute dualité

$$\mathbb{D}_1 = (A_1, A, \varepsilon, \eta) \qquad \text{et} \qquad \mathbb{D}_2 = (A, A_2, e, h) \quad ,$$

on ait

$$\varphi^T_{\mathbb{D}_1\mathbb{D}_2} = \big(T_{A,A_2}(e) \otimes 1_{A_1}\big)(1_{A_2} \otimes \eta)$$

et en vertu du lemme 3.5.2 et des propositions 3.5.4, 3.5.5, 3.5.6, 3.5.7 et 3.5.8, il existe une unique trace à gauche tr sur $(\mathcal{V}, \otimes, I)$ telle que pour tout morphisme $u : A \otimes B \to A \otimes C$ de $\mathcal{V}$ on ait

$$\begin{aligned}
\mathsf{tr}_{A;B,C}(u) &= (\varepsilon \otimes 1_C)(\varphi^T_{\mathbb{D}_1,\mathbb{D}_2} \otimes u)(h \otimes 1_B) \\
&= (\varepsilon \otimes 1_C)\Big(\big(T_{A,A_2}(e) \otimes 1_{A_1}\big)(1_{A_2} \otimes \eta) \otimes u\Big)(h \otimes 1_B) \\
&= \big(T_{A,A_2}(e) \otimes 1_C\big)(1_{A_2} \otimes 1_A \otimes \varepsilon \otimes 1_C) \\
&\qquad\qquad (1_{A_2} \otimes \eta \otimes 1_A \otimes 1_C)(1_{A_2} \otimes u)(h \otimes 1_B) \\
&= \big(T_{A,A_2}(e) \otimes 1_C\big)(1_{A_2} \otimes u)(h \otimes 1_B) \quad ,
\end{aligned}$$

ce qui démontre la deuxième assertion.

Démontrons la dernière assertion. Supposons donc que $(\mathcal{V}, \otimes, I)$ soit autonome et soient T une t-structure souveraine sur $(\mathcal{V}, \otimes, I)$ et tr la trace à gauche correspondante, définie par la formule 3.5.11.2. Pour tout morphisme $u : A \otimes B \to I$ de $\mathcal{V}$ et toute dualité $\mathbb{D} = (A, A', e, h)$, en vertu de 3.3.9.1 et 3.5.11.2, on a

$$T_{A,B}(u) = \big(T_{A,A'}(e)\big)(1_{A'} \otimes u \otimes 1_A)(h \otimes 1_B \otimes 1_A) = \mathsf{tr}_{A;B\otimes A,I}(u \otimes 1_A) \quad .$$

Réciproquement, soient tr une trace à gauche sur $(\mathcal{V}, \otimes, I)$ et T la t-structure souveraine correspondante, définie par la formule 3.5.11.1. Pour tout morphisme $u : A \otimes B \to A \otimes C$ et toute dualité $\mathbb{D} = (A, A', e, h)$, en vertu de 3.5.10.2 et 3.5.11.1, on a

$$\begin{aligned} \mathsf{tr}_{A;B,C}(u) &= \big(\mathsf{tr}_{A;A'\otimes A,I}(e \otimes 1_A) \otimes 1_C\big)(1_{A'} \otimes u)(h \otimes 1_B) \\ &= \big(T_{A,A'}(e) \otimes 1_C\big)(1_{A'} \otimes u)(h \otimes 1_B) \quad , \end{aligned}$$

ce qui prouve le théorème.

Remarque 3.5.12. On observe que, dans la démonstration du théorème 3.5.11, on n'a utilisé à aucun moment la relation 3.5.5.1. On en déduit que si la catégorie monoïdale $(\mathcal{V}, \otimes, I)$ est autonome, on peut omettre cette condition, dans la définition d'une trace à gauche sur $(\mathcal{V}, \otimes, I)$. Voici une démonstration directe de ce fait. Soient $u : A \otimes B \to A \otimes C$ et $w : C \to C'$ des morphismes de $\mathcal{V}$ et choisissons une dualité $\mathbb{D} = (A, A', e, h)$. En vertu de 3.5.10.2, on a

$$\begin{aligned} &\mathsf{tr}_{A;B,C'}\big((1_A \otimes w)u\big) \\ &= \big(\mathsf{tr}_{A;A'\otimes A,I}(e \otimes 1_A) \otimes 1_{C'}\big)\big(1_{A'} \otimes [(1_A \otimes w)u]\big)(h \otimes 1_B) \\ &= w\big(\mathsf{tr}_{A;A'\otimes A,I}(e \otimes 1_A) \otimes 1_C\big)(1_{A'} \otimes u)(h \otimes 1_B) \\ &= w\,\mathsf{tr}_{A;B,C}(u) \quad , \end{aligned}$$

ce qui prouve l'assertion.

De façon analogue, ou en appliquant le résultat ci dessus à la catégorie monoïdale $(\mathcal{V}^\circ, \otimes, I)$, on montre qu'on peut omettre, dans la définition d'une trace à gauche sur une catégorie monoïdale autonome, la condition 3.5.5.2.

De même, en appliquant le théorème 3.5.11 à la catégorie monoïdale $(\mathcal{V}^\circ, \otimes, I)$, on en déduit (cf. 3.3.12 et 3.5.9) le théorème suivant.

Théorème 3.5.13. *Soit $(\mathcal{V}, \otimes, I)$ une catégorie monoïdale. Soit* tr *une trace à gauche sur $(\mathcal{V}, \otimes, I)$; si pour tout couple d'objets A et B de $\mathcal{V}$ et tout morphisme $u : I \to A \otimes B$, on pose*

$$S_{A,B}(u) = \mathsf{tr}_{A;I,B\otimes A}(u \otimes 1_A) \quad , \tag{3.5.13.1}$$

alors S est une s-structure souveraine sur $(\mathcal{V}, \otimes, I)$. Réciproquement, si la catégorie monoïdale $(\mathcal{V}, \otimes, I)$ est autonome, si S est une s-structure souveraine sur $(\mathcal{V}, \otimes, I)$, il existe une trace à gauche unique tr *sur $(\mathcal{V}, \otimes, I)$ telle que pour tout morphisme $u : A \otimes B \to A \otimes C$ de $\mathcal{V}$ et toute dualité $\mathbb{D} = (A', A, \varepsilon, \eta)$, on ait*

$$\mathsf{tr}_{A;B,C}(u) = (\varepsilon \otimes 1_C)(1_{A'} \otimes u)\big(S_{A,A'}(\eta) \otimes 1_B\big) \quad . \tag{3.5.13.2}$$

et si φ désigne la structure souveraine sur $(\mathcal{V}, \otimes, I)$, associée à la s-structure souveraine S (cf. théorème 3.3.13), *définie par la formule* 3.3.13.3, *alors* tr *est définie par la relation* 3.5.3.1. *On définit ainsi, dans le cas où la catégorie monoïdale $(\mathcal{V}, \otimes, I)$ est autonome, deux bijections, inverses l'une de l'autre, entre l'ensemble des traces à gauche sur $(\mathcal{V}, \otimes, I)$ et l'ensemble des s-structures souveraines sur $(\mathcal{V}, \otimes, I)$.*

Proposition 3.5.14. *Soient $(\mathcal{V}, \otimes, I)$ une catégorie monoïdale,* tr *une trace à gauche sur $(\mathcal{V}, \otimes, I)$ et T* (resp. S) *la t-structure* (resp. *la s-structure*) *souveraine, associée à* tr, *en vertu du théorème* 3.5.11 (resp. 3.5.13), *définie par la formule* 3.5.11.1 (resp. 3.5.13.1). *Alors le couple (S, T) forme une (s,t)-structure souveraine sur $(\mathcal{V}, \otimes, I)$* (cf. définition 3.3.16).

Démonstration. Soient A, B, C, des objets de $\mathcal{V}$ et $u : A \otimes B \to I$

et $v : I \to B \otimes C$ des morphismes. On a

$$\begin{aligned}
&\big(1_C \otimes T_{A,B}(u)\big)\big(S_{B,C}(v) \otimes 1_A\big) \\
&= \big(1_C \otimes T_{A,B}(u)\big)\big(\mathsf{tr}_{B;I,C\otimes B}(v \otimes 1_B) \otimes 1_A\big) \\
&= \big(1_C \otimes T_{A,B}(u)\big)\, \mathsf{tr}_{B;A,C\otimes B\otimes A}(v \otimes 1_B \otimes 1_A) \\
&= \mathsf{tr}_{B;A,C}\big((1_B \otimes 1_C \otimes T_{A,B}(u))(v \otimes 1_B \otimes 1_A)\big) \\
&= \mathsf{tr}_{B;A,C}\big(v \otimes T_{A,B}(u)\big) = \mathsf{tr}_{B;A,C}\big(T_{A,B}(u) \otimes v\big) \\
&= \mathsf{tr}_{B;A,C}\big(\mathsf{tr}_{A;B\otimes A,I}(u \otimes 1_A) \otimes v\big) = \mathsf{tr}_{B;A,C}\big(\mathsf{tr}_{A;B\otimes A,B\otimes C}(u \otimes 1_A \otimes v)\big) \\
&= \mathsf{tr}_{A\otimes B;A,C}(u \otimes 1_A \otimes v) = \mathsf{tr}_{A\otimes B;A,C}\big((1_A \otimes v)(u \otimes 1_A)\big) \\
&= \mathsf{tr}_{I;A,C}\big((u \otimes 1_C)(1_A \otimes v)\big) = \mathsf{tr}_{I;A,C}\big(1_I \otimes [(u \otimes 1_C)(1_A \otimes v)]\big) \\
&= \big(\mathsf{tr}_{I;I,I}(1_I)\big)(u \otimes 1_C)(1_A \otimes v) = (u \otimes 1_C)(1_A \otimes v)
\end{aligned}$$

(la première égalité résultant de 3.5.13.1, la deuxième, la septième et la douzième de 3.5.7.1, la troisième de 3.5.5.1, la sixième de 3.5.11.1, la huitième de 3.5.6.1, la dixième de 3.5.4.1 et la dernière de 3.5.8.1), ce qui prouve la relation 3.3.15.1 et démontre la proposition.

3.5.15. On définit de façon symétrique la notion de trace à droite. Une *trace à droite* sur une catégorie monoïdale $(\mathcal{V}, \otimes, I)$ (non nécessairement autonome) est une trace à gauche sur la catégorie monoïdale $(\mathcal{V}, \otimes^\circ, I)$ (cf. 1.1.1). Autrement dit, une trace à droite tr' sur $(\mathcal{V}, \otimes, I)$ est la donnée pour tout triplet d'objets A, B et C de $\mathcal{V}$ d'une application

$$\mathsf{tr}'_{A;B,C} : \mathsf{Hom}_{\mathcal{V}}(B \otimes A, C \otimes A) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{V}}(B, C)$$

satisfaisant aux propriétés suivantes :

a) fonctorialité : si A, B, B', C, et C' désignent des objets de $\mathcal{V}$ et $u : B \otimes A \to C \otimes A$, $v : B' \to B$ et $w : C \to C'$ des morphismes, on a

$$\mathsf{tr}'_{A;B,C'}\big((w \otimes 1_A)u\big) = w\, \mathsf{tr}'_{A;B,C}(u) \tag{3.5.15.1}$$

et

$$\mathsf{tr}'_{A;B',C}\big(u(v\otimes 1_A)\big)=\mathsf{tr}'_{A;B,C}(u)v \quad ; \tag{3.5.15.2}$$

b) commutativité : si A, A', B et C désignent des objets de $\mathcal{V}$ et $u : B\otimes A'\to C\otimes A$ et $v : A\to A'$ des morphismes, on a

$$\mathsf{tr}'_{A';B,C}\big((1_C\otimes v)u\big)=\mathsf{tr}'_{A;B,C}\big(u(1_B\otimes v)\big) \quad ; \tag{3.5.15.3}$$

c) transitivité : si A, B, C, D désignent des objets de $\mathcal{V}$ et $u : C\otimes B\otimes A\to D\otimes B\otimes A$ un morphisme, on a

$$\mathsf{tr}'_{B\otimes A;C,D}(u)=\mathsf{tr}'_{B;C,D}\big(\mathsf{tr}'_{A;C\otimes B,D\otimes B}(u)\big) \quad ; \tag{3.5.15.4}$$

d) compatibilité au produit tensoriel : si A, B, C, D, E désignent des objets de $\mathcal{V}$ et $u : B\otimes A\to C\otimes A$ et $v : D\to E$ des morphismes, on a

$$\mathsf{tr}'_{A;D\otimes B,E\otimes C}(v\otimes u)=v\otimes\mathsf{tr}'_{A;B,C}(u) \quad ; \tag{3.5.15.5}$$

e) non dégénérescence :

$$\mathsf{tr}'_{I;I,I}(1_I)=1_I \quad . \tag{3.5.15.6}$$

En appliquant les théorèmes 3.5.11 et 3.5.13 et la proposition 3.5.14 à la catégorie monoïdale $(\mathcal{V},\otimes^\circ,I)$, on en déduit le théorème suivant

Théorème 3.5.16. *Soit $(\mathcal{V},\otimes,I)$ une catégorie monoïdale. Soit tr' une trace à droite sur $(\mathcal{V},\otimes,I)$; si pour tout couple d'objets A et B de $\mathcal{V}$ et tout morphisme $u : A\otimes B\to I$* (resp. $u : I\to A\otimes B$), *on pose*

$$T_{A,B}(u)=\mathsf{tr}'_{B;B\otimes A,I}(1_B\otimes u) \tag{3.5.16.1}$$

(resp.

$$S_{A,B}(u)=\mathsf{tr}'_{B;I,B\otimes A}(1_B\otimes u) \quad), \tag{3.5.16.2}$$

alors T (resp. S) *est une* t*-structure* (resp. s*-structure*) *souveraine sur* $(\mathcal{V},\otimes,I)$ *et le couple* (S,T) *est une* (s,t)*-structure souveraine sur* $(\mathcal{V},\otimes,I)$. *Réciproquement, si la catégorie monoïdale* $(\mathcal{V},\otimes,I)$ *est autonome, si* T (resp. S) *est une* t*-structure* (resp. s*-structure*) *souveraine sur* $(\mathcal{V},\otimes,I)$, *il existe une trace à droite unique* tr' *sur* $(\mathcal{V},\otimes,I)$ *telle que pour tout morphisme* $u : B\otimes A \to C\otimes A$ *de* $\mathcal{V}$ *et toute dualité* $\mathbb{D}_1 = (A_1, A, \varepsilon, \eta)$ (resp. $\mathbb{D}_2 = (A, A_2, e, h)$), *on ait*

$$\mathsf{tr}'_{A;B,C}(u) = \big(1_C \otimes T_{A_1,A}(\varepsilon)\big)(u\otimes 1_{A_1})(1_B\otimes \eta) \tag{3.5.16.3}$$

(resp.

$$\mathsf{tr}'_{A;B,C}(u) = (1_C\otimes e)(u\otimes 1_{A_2})\big(1_B\otimes S_{A_2,A}(h)\big) \quad), \tag{3.5.16.4}$$

et si φ *désigne la structure souveraine sur* $(\mathcal{V},\otimes,I)$, *associée à la* t*-structure* (resp. *à la* s*-structure*) *souveraine* T (resp. S) (cf. théorème 3.3.10 (resp. 3.3.13)), *définie par la formule* 3.3.10.3 (resp. 3.3.13.3), *alors* tr' *est définie par la relation*

$$\mathsf{tr}'_{A;B,C}(u) = (1_C\otimes e)(u\otimes \varphi^{-1}_{\mathbb{D}_1,\mathbb{D}_2})(1_B\otimes\eta) \quad . \tag{3.5.16.5}$$

On définit ainsi, dans le cas où la catégorie monoïdale $(\mathcal{V},\otimes,I)$ *est autonome, deux bijections, inverses l'une de l'autre, entre l'ensemble des traces à droite sur* $(\mathcal{V},\otimes,I)$ *et l'ensemble des* t*-structures* (resp. s*-structures*) *souveraines sur* $(\mathcal{V},\otimes,I)$.

Proposition 3.5.17. *Soient* $(\mathcal{V},\otimes,I)$ *une catégorie monoïdale autonome,* tr *une trace à gauche et* tr' *une trace à droite sur* $(\mathcal{V},\otimes,I)$. *Alors pour tout morphisme*

$$u : A\otimes B\otimes A' \longrightarrow A\otimes C\otimes A'$$

de $\mathcal{V}$, *on a*

$$\mathsf{tr}'_{A';B,C}\big(\mathsf{tr}_{A;B\otimes A',C\otimes A'}(u)\big) = \mathsf{tr}_{A;B,C}\big(\mathsf{tr}'_{A';A\otimes B,A\otimes C}(u)\big) \ . \tag{3.5.17.1}$$

Démonstration. En vertu des théorèmes 3.5.11 et 3.5.16, il existe une structure souveraine φ (resp. φ') sur $(\mathcal{V},\otimes,I)$ telle que pour tout morphisme $v : A \otimes B \to A \otimes C$ (resp. $v' : B \otimes A' \to C \otimes A'$) de $\mathcal{V}$ et toutes dualités

$$\mathbb{D}_1 = (A_1, A, \varepsilon, \eta) \quad , \quad \mathbb{D}_2 = (A, A_2, e, h)$$

$$(\text{resp.} \qquad \mathbb{D}'_1 = (A'_1, A', \varepsilon', \eta') \quad , \quad \mathbb{D}'_2 = (A', A'_2, e', h') \quad),$$

on ait

$$\mathsf{tr}_{A;B,C}(v) = (\varepsilon \otimes 1_C)(\varphi_{\mathbb{D}_1,\mathbb{D}_2} \otimes v)(h \otimes 1_B)$$

$$(\text{resp.} \qquad \mathsf{tr}'_{A';B,C}(v') = (1_C \otimes e')(v' \otimes {\varphi'}^{-1}_{\mathbb{D}'_1,\mathbb{D}'_2})(1_B \otimes \eta') \quad).$$

On en déduit que pour tout morphisme $u : A \otimes B \otimes A' \to A \otimes C \otimes A'$ de $\mathcal{V}$, on a

$$\begin{aligned}
&\mathsf{tr}'_{A';B,C}\big(\mathsf{tr}_{A;B\otimes A',C\otimes A'}(u)\big) \\
&= (1_C \otimes e')\big([(\varepsilon \otimes 1_C \otimes 1_{A'})(\varphi_{\mathbb{D}_1,\mathbb{D}_2} \otimes u)(h \otimes 1_B \otimes 1_{A'})] \otimes {\varphi'}^{-1}_{\mathbb{D}'_1,\mathbb{D}'_2}\big) \\
&\qquad (1_B \otimes \eta') \\
&= (\varepsilon \otimes 1_C \otimes e')\big(\varphi_{\mathbb{D}_1,\mathbb{D}_2} \otimes u \otimes {\varphi'}^{-1}_{\mathbb{D}'_1,\mathbb{D}'_2}\big)(h \otimes 1_B \otimes \eta') \\
&= (\varepsilon \otimes 1_C)\big(\varphi_{\mathbb{D}_1,\mathbb{D}_2} \otimes [(1_A \otimes 1_C \otimes e')(u \otimes {\varphi'}^{-1}_{\mathbb{D}'_1,\mathbb{D}'_2})(1_A \otimes 1_B \otimes \eta')]\big) \\
&\qquad (h \otimes 1_B) \\
&= \mathsf{tr}_{A;B,C}\big(\mathsf{tr}'_{A';A\otimes B,A\otimes C}(u)\big) \quad ,
\end{aligned}$$

ce qui prouve la proposition.

3.5.18. En gardant les hypothèses de la proposition 3.5.17, il résulte des théorèmes 3.5.11, 3.5.13 et 3.5.16 que les structures souveraines φ et φ' correspondant à tr et tr' sont identiques si et seulement si pour tout morphisme $u : A \otimes B \to I$ de $\mathcal{V}$, on a

$$\mathsf{tr}_{A;B\otimes A,I}(u \otimes 1_A) = \mathsf{tr}'_{B;B\otimes A,I}(1_B \otimes u) \quad , \tag{3.5.18.1}$$

ou encore, si et seulement si pour tout morphisme $u : I \to A \otimes B$ de $\mathcal{V}$, on a

$$\mathsf{tr}_{A;I,B\otimes A}(u \otimes 1_A) = \mathsf{tr}'_{B;I,B\otimes A}(1_B \otimes u) \quad . \tag{3.5.18.2}$$

En particulier, les conditions 3.5.18.1 et 3.5.18.2 sont équivalentes dans le cas autonome. Il n'en est probablement rien dans le cas non autonome. Dans ce cas, la condition 3.5.17.1 n'est, sans doute, non plus vraie en général. On est ainsi conduit à poser la définition suivante.

Définition 3.5.19. Soient $(\mathcal{V}, \otimes, I)$ une catégorie monoïdale (non nécessairement autonome), tr une trace à gauche et tr' une trace à droite sur $(\mathcal{V}, \otimes, I)$. On dit que tr et tr' sont *compatibles* si elles satisfont aux conditions 3.5.17.1, 3.5.18.1 et 3.5.18.2.

Exercice 3.5.20. Soient tr une trace à gauche et tr' une trace à droite sur une catégorie monoïdale $(\mathcal{V}, \otimes, I)$. On suppose que tr et tr' sont compatibles. Pour tout morphisme $u : A \otimes B \otimes A' \to A \otimes C \otimes A'$ de $\mathcal{V}$, on pose

$$\mathsf{Tr}_{A;B,C;A'}(u) = \mathsf{tr}'_{A';B,C}\big(\mathsf{tr}_{A;B\otimes A',C\otimes A'}(u)\big) \quad .$$

Étudier les propriétés de Tr. Introduire une notion de trace bilatère satisfaisant à ces propriétés. Montrer que dans le cas autonome les traces bilatères sont en bijection avec les structures souveraines.

Proposition 3.5.21. *Soient $(\mathcal{V}, \otimes, I, \varphi)$ une catégorie monoïdale autonome souveraine,* tr (resp. tr') *la trace à gauche* (resp. *à droite*) *associée à φ. Pour tout morphisme $u : A \otimes B \to A \otimes C$* (resp. $u' : B \otimes A \to C \otimes A$) *et toutes dualités*

$$\mathbb{D}_1 = (A_1, A, \varepsilon, \eta) \quad , \quad \mathbb{D}_2 = (A, A_2, e, h) \quad ,$$

$$\mathbb{D}'_1 = (B_1, B, \varepsilon', \eta') \quad , \quad \mathbb{D}'_2 = (B, B_2, e', h') \quad ,$$

$$\mathbb{D}''_1 = (C_1, C, \varepsilon'', \eta'') \quad , \quad \mathbb{D}''_2 = (C, C_2, e'', h'') \quad ,$$

on a

$$(3.5.21.1)\quad \mathsf{tr}'_{A_1;C_1,B_1}\big(t^{(l)}_{\mathbb{D}_1\otimes\mathbb{D}'_1,\mathbb{D}_1\otimes\mathbb{D}''_1}(u)\big)=t^{(l)}_{\mathbb{D}'_1,\mathbb{D}''_1}\big(\mathsf{tr}_{A;B,C}(u)\big)\quad ,$$

$$(3.5.21.2)\quad \mathsf{tr}'_{A_2;C_2,B_2}\big(t^{(r)}_{\mathbb{D}'_2\otimes\mathbb{D}_2,\mathbb{D}''_2\otimes\mathbb{D}_2}(u)\big)=t^{(r)}_{\mathbb{D}'_2,\mathbb{D}''_2}\big(\mathsf{tr}_{A;B,C}(u)\big)\quad ,$$

$$(3.5.21.3)\quad \mathsf{tr}_{A_2;C_2,B_2}\big(t^{(r)}_{\mathbb{D}_2\otimes\mathbb{D}'_2,\mathbb{D}_2\otimes\mathbb{D}''_2}(u')\big)=t^{(r)}_{\mathbb{D}'_2,\mathbb{D}''_2}\big(\mathsf{tr}'_{A;B,C}(u')\big)\quad ,$$

$$(3.5.21.4)\quad \mathsf{tr}_{A_1;C_1,B_1}\big(t^{(l)}_{\mathbb{D}'_1\otimes\mathbb{D}_1,\mathbb{D}''_1\otimes\mathbb{D}_1}(u')\big)=t^{(l)}_{\mathbb{D}'_1,\mathbb{D}''_1}\big(\mathsf{tr}'_{A;B,C}(u')\big)\quad .$$

DÉMONSTRATION. Choisissons une dualité $\mathbb{D}=(A'_1,A_1,\varepsilon_1,\eta_1)$ et soit $\mathbb{D}_0=(I,I,1_I,1_I)$. On a

$$t^{(l)}_{\mathbb{D}'_1,\mathbb{D}''_1}\big(\mathsf{tr}_{A;B,C}(u)\big)=t^{(l)}_{\mathbb{D}'_1,\mathbb{D}''_1}\big((\varepsilon\otimes 1_C)(\varphi_{\mathbb{D}_1,\mathbb{D}_2}\otimes u)(h\otimes 1_B)\big)$$

$$=t^{(l)}_{\mathbb{D}_0\otimes\mathbb{D}'_1,\mathbb{D}_2\otimes\mathbb{D}_1\otimes\mathbb{D}'_1}(h\otimes 1_B)t^{(l)}_{\mathbb{D}_2\otimes\mathbb{D}_1\otimes\mathbb{D}'_1,\mathbb{D}\otimes\mathbb{D}_1\otimes\mathbb{D}''_1}(\varphi_{\mathbb{D}_1,\mathbb{D}_2}\otimes u)$$
$$t^{(l)}_{\mathbb{D}\otimes\mathbb{D}_1\otimes\mathbb{D}''_1,\mathbb{D}_0\otimes\mathbb{D}''_1}(\varepsilon\otimes 1_C)$$

$$=\big(t^{(l)}_{\mathbb{D}'_1,\mathbb{D}'_1}(1_B)\otimes t^{(l)}_{\mathbb{D}_0,\mathbb{D}_2\otimes\mathbb{D}_1}(h)\big)\big(t^{(l)}_{\mathbb{D}_1\otimes\mathbb{D}'_1,\mathbb{D}_1\otimes\mathbb{D}''_1}(u)\otimes t^{(l)}_{\mathbb{D}_2,\mathbb{D}}(\varphi_{\mathbb{D}_1,\mathbb{D}_2})\big)$$
$$\big(t^{(l)}_{\mathbb{D}''_1,\mathbb{D}''_1}(1_C)\otimes t^{(l)}_{\mathbb{D}\otimes\mathbb{D}_1,\mathbb{D}_0}(\varepsilon)\big)$$

$$=(1_{B_1}\otimes\varepsilon)\big(t^{(l)}_{\mathbb{D}_1\otimes\mathbb{D}'_1,\mathbb{D}_1\otimes\mathbb{D}''_1}(u)\otimes\varphi^{-1}_{\mathbb{D},\mathbb{D}_1}\big)(1_{C_1}\otimes\eta_1)$$

$$=\ \mathsf{tr}'_{A_1;C_1,B_1}\big(t^{(l)}_{\mathbb{D}_1\otimes\mathbb{D}'_1,\mathbb{D}_1\otimes\mathbb{D}''_1}(u)\big)$$

(la première égalité résultant de 3.5.3.1, la deuxième de 1.2.3.3, la troisième de 1.2.5.1, la quatrième de 3.1.5.2 et la dernière de 3.5.16.5), ce qui prouve la relation 3.5.21.1. La relation 3.5.21.2 (resp. 3.5.21.3, resp. 3.5.21.4) s'obtient en appliquant la relation 3.5.21.1 à la catégorie monoïdale $(\mathcal{V}^\circ,\otimes,I)$ (resp. $(\mathcal{V},\otimes^\circ,I)$, resp. $(\mathcal{V}^\circ,\otimes^\circ,I)$), ce qui démontre la proposition.

3.5.22. On rappelle que si $(\mathcal{V},\otimes,I)$ désigne une catégorie monoïdale et u et v des endomorphismes de I, on a

$$(3.5.22.1)\qquad u\otimes v=v\otimes u=uv=vu\quad .$$

Autrement dit, la composition ou le produit tensoriel munit $\mathsf{End}(I)$ d'une structure de monoïde commutatif et ces deux structures coïncident. De plus, pour tout couple d'objets A et B de $\mathcal{V}$, on a deux actions de ce monoïde sur l'ensemble $\mathsf{Hom}_{\mathcal{V}}(A,B)$ définies par

$$(u,w) \longmapsto u\otimes w \text{ et } (u,w) \longmapsto w\otimes u\,,\ u\in \mathsf{End}(I)\,,\ w\in \mathsf{Hom}_{\mathcal{V}}(A,B)\ .$$

On dit que $\mathsf{End}(I)$ est *central* dans $\mathcal{V}$, ou que la catégorie monoïdale $(\mathcal{V},\otimes,I)$ est de *Penrose* (cf. [**Br**]), si ces deux actions coïncident, autrement dit, si pour tout endomorphisme u de I et toute flèche w de $\mathcal{V}$ on a $u\otimes w = w\otimes v$.

Définition 3.5.23. Soient $(\mathcal{V},\otimes,I,\varphi)$ une catégorie monoïdale autonome souveraine, tr (resp. tr') la trace à gauche (resp. à droite) associée à φ. Pour tout endomorphisme $u : A\to A$ d'un objet A de $\mathcal{V}$, on appelle *trace à gauche* (resp. *trace à droite*) de u l'endomorphisme $\mathsf{tr}(u)$ (resp. $\mathsf{tr}'(u)$) de I, défini par
(3.5.23.1)
$$\mathsf{tr}(u) = \mathsf{tr}_{A;I,I}(u) \qquad \text{(resp.} \qquad \mathsf{tr}'(u) = \mathsf{tr}'_{A;I,I}(u) \quad \text{).}$$

Pour tout objet A de $\mathcal{V}$, on appelle *dimension à gauche* (resp. *dimension à droite*) de A et on note $\mathsf{dim}(A)$ (resp. $\mathsf{dim}'(A)$) la trace à gauche (resp. à droite) de l'endomorphisme identique de A.

Proposition 3.5.24. *La trace à gauche ou à droite d'un endomorphisme satisfait aux propriétés suivantes :*

a) *pour tout endomorphisme u de I, on a*

(3.5.24.1)
$$\mathsf{tr}(u) = u = \mathsf{tr}'(u) \quad ;$$

b) *pour tout couple de morphismes $u : A'\to A$ et $v : A\to A'$, on a*

(3.5.24.2)
$$\mathsf{tr}(uv) = \mathsf{tr}(vu) \qquad \text{et} \qquad \mathsf{tr}'(uv) = \mathsf{tr}'(vu) \quad ;$$

c) *pour tout endomorphisme u d'un objet A de $\mathcal{V}$ et toutes dualités*

$$\mathbb{D}_1 = (A_1, A, \varepsilon, \eta) \quad , \quad \mathbb{D}_2 = (A, A_2, e, h) \quad ,$$

on a

$$\text{(3.5.24.3)}\qquad \begin{aligned} \mathsf{tr}\big(t^{(l)}_{\mathbb{D}_1,\mathbb{D}_1}(u)\big) = \mathsf{tr}'(u) = \mathsf{tr}\big(t^{(r)}_{\mathbb{D}_2,\mathbb{D}_2}(u)\big) \quad , \\ \mathsf{tr}'\big(t^{(l)}_{\mathbb{D}_1,\mathbb{D}_1}(u)\big) = \mathsf{tr}(u) = \mathsf{tr}'\big(t^{(r)}_{\mathbb{D}_2,\mathbb{D}_2}(u)\big) \quad ; \end{aligned}$$

d) *si* $\mathsf{End}(I)$ *est central dans* $\mathcal{V}$ *alors pour tout couple d'endomorphismes* $u : A \to A$ *et* $v : B \to B$ *, on a*

$$\text{(3.5.24.4)}\qquad \begin{aligned} \mathsf{tr}(u \otimes v) = \mathsf{tr}(u)\,\mathsf{tr}(v) \quad , \\ \mathsf{tr}'(u \otimes v) = \mathsf{tr}'(u)\,\mathsf{tr}'(v) \quad . \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION. L'assertion (a) résulte de 3.5.9.1, l'assertion (b) de 3.5.4.1 et 3.5.15.3 appliqués à $B = C = I$ et l'assertion (c) de la proposition 3.5.21. Démontrons l'assertion (d). On a

$$\begin{aligned} \mathsf{tr}(u \otimes v) &= \mathsf{tr}_{A\otimes B;I,I}(u \otimes v) = \mathsf{tr}_{B;I,I}\big(\mathsf{tr}_{A;B,B}(u \otimes v)\big) \\ &= \mathsf{tr}_{B;I,I}\big(\mathsf{tr}_{A;I,I}(u) \otimes v\big) = \mathsf{tr}_{B;I,I}\big(v \otimes \mathsf{tr}_{A;I,I}(u)\big) \\ &= \mathsf{tr}_{B;I,I}(v) \otimes \mathsf{tr}_{A;I,I}(u) = \mathsf{tr}(v) \otimes \mathsf{tr}(u) = \mathsf{tr}(u)\,\mathsf{tr}(v) \end{aligned}$$

(la deuxième égalité résultant de 3.5.6.1, la troisième et la cinquième de 3.5.7.1, la quatrième de l'hypothèse de centralité et la dernière de 3.5.22.1), ce qui prouve la première de deux égalités. La deuxième se montre de façon analogue, ou se déduit de la première appliquée à la catégorie monoïdale $(\mathcal{V}, \otimes^{\circ}, I)$.

Corollaire 3.5.25. *La dimension à gauche ou à droite d'un objet de* $\mathcal{V}$ *satisfait aux propriétés suivantes :*

a) $\mathsf{dim}(I) = 1_I = \mathsf{dim}'(I)$;

b) *pour tout objet* A *de* $\mathcal{V}$*, si* A_1 (resp. A_2) *est un dual à gauche* (resp. *à droite*) *de* A *, on a*

$$\mathsf{dim}(A_1) = \mathsf{dim}'(A) = \mathsf{dim}(A_2) \quad \text{et} \quad \mathsf{dim}'(A_1) = \mathsf{dim}(A) = \mathsf{dim}'(A_2) \ ;$$

c) *si* $\mathsf{End}(I)$ *est central dans* $\mathcal{V}$, *pour tout couple d'objets* A *et* B *de* $\mathcal{V}$, *on a*

$$\mathsf{dim}(A\otimes B) = \mathsf{dim}(A)\,\mathsf{dim}(B) \quad \text{et} \quad \mathsf{dim}'(A\otimes B) = \mathsf{dim}'(A)\,\mathsf{dim}'(B) \quad .$$

Remarque 3.5.26. Il n'est pas vrai en général, dans une catégorie monoïdale autonome souveraine, que la dimension à gauche d'un objet coïncide avec sa dimension à droite, même si cette catégorie est de Penrose (et même si elle est tressée), comme le montre l'exemple de la catégorie des enchevêtrements orientés ("tangles") à isotopie régulière près (cf. [**Ye**]).

3.6. Récapitulatif.

3.6.1. En combinant les théorèmes 3.3.10, 3.3.13, 3.3.17, 3.5.11, 3.5.13 et 3.5.16, on obtient le théorème récapitulatif suivant.

Théorème 3.6.2. *Soit* $(\mathcal{V}, \otimes, I)$ *une catégorie monoïdale autonome. Les ensembles suivants sont en bijection canonique :*

a) *ensemble des traces à gauche* tr *sur* $(\mathcal{V}, \otimes, I)$;

b) *ensemble des traces à droite* tr' *sur* $(\mathcal{V}, \otimes, I)$;

c) *ensemble des* t*-structures souveraines* T *sur* $(\mathcal{V}, \otimes, I)$;

d) *ensemble des* s*-structures souveraines* S *sur* $(\mathcal{V}, \otimes, I)$;

e) *ensemble des* (s,t)*-structures souveraines* (S, T) *sur* $(\mathcal{V}, \otimes, I)$;

f) *ensemble des structures souveraines* φ *sur* $(\mathcal{V}, \otimes, I)$;

les bijections entre ces ensembles étant déterminées par les relations suivantes. Pour tout triplet d'objets A , B , C *de* $\mathcal{V}$, *tous morphismes*

$$v : A\otimes B \to I\ , \quad v' : B\otimes A \to I\ , \quad w : I \to A\otimes B\ , \quad w' : I \to B\otimes A\ ,$$

$$u : A \otimes B \longrightarrow A \otimes C \qquad \text{et} \qquad u' : B \otimes A \longrightarrow C \otimes A$$

et toutes dualités

$$\mathbb{D}_1 = (A_1, A, \varepsilon, \eta) \qquad \text{et} \qquad \mathbb{D}_2 = (A, A_2, e, h) \quad ,$$

on a :

$$T_{A,B}(v) = \mathsf{tr}_{A;B\otimes A,I}(v \otimes 1_A) \tag{3.6.2.1}$$

$$S_{A,B}(w) = \mathsf{tr}_{A;I,B\otimes A}(w \otimes 1_A) \tag{3.6.2.2}$$

$$T_{B,A}(v') = \mathsf{tr}'_{A;A\otimes B,I}(1_A \otimes v') \tag{3.6.2.3}$$

$$S_{B,A}(w') = \mathsf{tr}'_{A;I,A\otimes B}(1_A \otimes w') \tag{3.6.2.4}$$

$$\mathsf{tr}_{A;B,C}(u) = \big(T_{A,A_2}(e) \otimes 1_C\big)(1_{A_2} \otimes u)(h \otimes 1_B) \tag{3.6.2.5}$$

$$\mathsf{tr}_{A;B,C}(u) = (\varepsilon \otimes 1_C)(1_{A_1} \otimes u)\big(S_{A,A_1}(\eta) \otimes 1_B\big) \tag{3.6.2.6}$$

$$\mathsf{tr}_{A;B,C}(u) = (\varepsilon \otimes 1_C)(\varphi_{\mathbb{D}_1,\mathbb{D}_2} \otimes u)(h \otimes 1_B) \tag{3.6.2.7}$$

$$\mathsf{tr}'_{A;B,C}(u') = \big(1_C \otimes T_{A_1,A}(\varepsilon)\big)(u' \otimes 1_{A_1})(1_B \otimes \eta) \tag{3.6.2.8}$$

$$\mathsf{tr}'_{A;B,C}(u') = (1_C \otimes e)(u' \otimes 1_{A_2})\big(1_B \otimes S_{A_2,A}(h)\big) \tag{3.6.2.9}$$

$$\mathsf{tr}'_{A;B,C}(u') = (1_C \otimes e)(u' \otimes \varphi^{-1}_{\mathbb{D}_1,\mathbb{D}_2})(1_B \otimes \eta) \tag{3.6.2.10}$$

$$T_{A,B}(v) = \varepsilon(\varphi_{\mathbb{D}_1,\mathbb{D}_2} \otimes v \otimes 1_A)(h \otimes 1_B \otimes 1_A) \tag{3.6.2.11}$$

$$T_{B,A}(v') = e(1_A \otimes v' \otimes \varphi^{-1}_{\mathbb{D}_1,\mathbb{D}_2})(1_A \otimes 1_B \otimes \eta) \tag{3.6.2.12}$$

$$S_{A,B}(w) = (\varepsilon \otimes 1_B \otimes 1_A)(\varphi_{\mathbb{D}_1,\mathbb{D}_2} \otimes w \otimes 1_A)h \tag{3.6.2.13}$$

$$S_{B,A}(w') = (1_A \otimes 1_B \otimes e)(1_A \otimes w' \otimes \varphi^{-1}_{\mathbb{D}_1,\mathbb{D}_2})\eta \tag{3.6.2.14}$$

$$\varphi_{\mathbb{D}_1,\mathbb{D}_2} = \big(T_{A,A_2}(e) \otimes 1_{A_1}\big)(1_{A_2} \otimes \eta) \tag{3.6.2.15}$$

$$\varphi^{-1}_{\mathbb{D}_1,\mathbb{D}_2} = \big(1_{A_2} \otimes T_{A_1,A}(\varepsilon)\big)(h \otimes 1_{A_1}) \tag{3.6.2.16}$$

$$\varphi_{\mathbb{D}_1,\mathbb{D}_2} = (1_{A_1} \otimes e)\big(S_{A,A_1}(\eta) \otimes 1_{A_2}\big) \tag{3.6.2.17}$$

$$\varphi^{-1}_{\mathbb{D}_1,\mathbb{D}_2} = (\varepsilon \otimes 1_{A_2})\big(1_{A_1} \otimes S_{A_2,A}(h)\big) \tag{3.6.2.18}$$

$$\varphi_{\mathbb{D}_1,\mathbb{D}_2} = \mathsf{tr}_{A;A_2,A_1}(\eta e) \tag{3.6.2.19}$$

$$\varphi^{-1}_{\mathbb{D}_1,\mathbb{D}_2} = \mathsf{tr}'_{A;A_1,A_2}(h\varepsilon) \quad . \tag{3.6.2.20}$$

Démonstration. Les seules relations nouvelles sont les relations 3.6.2.19 et 3.6.2.20. Démontrons par exemple 3.6.2.19. En vertu de 3.6.2.7, on a

$$\begin{aligned}\mathsf{tr}_{A;A_2,A_1}(\eta e) &= (\varepsilon\otimes 1_{A_1})(\varphi_{\mathbb{D}_1,\mathbb{D}_2}\otimes\eta e)(h\otimes 1_{A_2})\\ &= (\varepsilon\otimes 1_{A_1})(1_{A_1}\otimes\eta)\varphi_{\mathbb{D}_1,\mathbb{D}_2}(1_{A_2}\otimes e)(h\otimes 1_{A_2})\\ &= \varphi_{\mathbb{D}_1,\mathbb{D}_2} \quad .\end{aligned}$$

La relation 3.6.2.20 se démontre de façon analogue, ou se déduit de la précédente, appliquée à la catégorie monoïdale $(\mathcal{V},\otimes^\circ,I)$.

§ 4. Catégories monoïdales tressées en rubans.

4.1. Définition des catégories monoïdales tressées.

4.1.1. Soit $(\mathcal{V},\otimes,I)$ une catégorie monoïdale. Un *tressage* de $(\mathcal{V},\otimes,I)$ est un isomorphisme fonctoriel

$$R_{A,B} : A\otimes B \longrightarrow B\otimes A \quad , \qquad A,\, B\in \mathcal{O}b(\mathcal{V}) \quad ,$$

tel que pour tout triplet d'objets A, B, C de $\mathcal{V}$ on ait

$$R_{A\otimes B,C} = (R_{A,C}\otimes 1_B)(1_A\otimes R_{B,C}) \tag{4.1.1.1}$$

et

$$R_{A,B\otimes C} = (1_B\otimes R_{A,C})(R_{A,B}\otimes 1_C) \quad . \tag{4.1.1.2}$$

En utilisant la fonctorialité de R, on en déduit facilement la relation

$$\begin{aligned}&(R_{B,C}\otimes 1_A)(1_B\otimes R_{A,C})(R_{A,B}\otimes 1_C)\\ &\qquad = (1_C\otimes R_{A,B})(R_{A,C}\otimes 1_B)(1_A\otimes R_{B,C})\end{aligned} \tag{4.1.1.3}$$

et on vérifie aussitôt que pour tout objet A de $\mathcal{V}$, on a

$$R_{A,I} = 1_A = R_{I,A} \quad . \tag{4.1.1.4}$$

Il en résulte que $(1_{\mathcal{V}}, R, 1_I) : (\mathcal{V},\otimes^\circ,I) \longrightarrow (\mathcal{V},\otimes,I)$ est un foncteur monoïdal (cf. 1.1.1 et 1.1.2).

On appelle *catégorie monoïdale tressée* une catégorie monoïdale munie d'un tressage.

On remarque que si $(\mathcal{V},\otimes,I,R)$ désigne une catégorie monoïdale tressée, R^{-1} l'isomorphisme fonctoriel inverse de R et R° l'isomorphisme fonctoriel $R^\circ_{A,B}: B\otimes A\to A\otimes B$ défini par $R^\circ_{A,B}=R_{B,A}$, alors $(\mathcal{V},\otimes^\circ,I,R^\circ)$, $(\mathcal{V},\otimes^\circ,I,R^{-1})$, $(\mathcal{V}^\circ,\otimes,I,R^\circ)$ et $(\mathcal{V}^\circ,\otimes,I,R^{-1})$ sont également des catégories monoïdales tressées, et en particulier $R^{\circ\,-1}$ est un deuxième tressage de $(\mathcal{V},\otimes,I)$.

4.2. Définition des catégories monoïdales tressées en rubans.

4.2.1. Soit $(\mathcal{V},\otimes,I,R)$ une catégorie monoïdale tressée. En vertu de 4.1.1, on dispose de deux foncteurs monoïdaux

$$(\mathcal{V},\otimes^\circ,I)\ \underset{(1_\mathcal{V},R^{\circ\,-1},1_I)}{\overset{(1_\mathcal{V},R,1_I)}{\rightrightarrows}}\ (\mathcal{V},\otimes,I)\quad .$$

Une *torsion* de $(\mathcal{V},\otimes,I,R)$ est un isomorphisme fonctoriel monoïdal

$$\theta:(1_\mathcal{V},R^{\circ\,-1},1_I)\longrightarrow(1_\mathcal{V},R,1_I)\quad ,$$

autrement dit, un automorphisme fonctoriel θ du foncteur identique de la catégorie $\mathcal{V}$ tel que pour tout couple d'objets A, B de $\mathcal{V}$

$$\theta_{A\otimes B}=(\theta_A\otimes\theta_B)R_{B,A}R_{A,B} \tag{4.2.1.1}$$

(la condition $\theta_I=1_I$ en est une conséquence (cf. 1.1.3)).

On appelle *catégorie monoïdale tressée en rubans* (ou *balancée*) une catégorie monoïdale tressée munie d'une torsion.

4.3. Torsions et structures souveraines.

Théorème 4.3.1. *Soit $(\mathcal{V},\otimes,I,R)$ une catégorie monoïdale tressée. Si θ est une torsion de $(\mathcal{V},\otimes,I,R)$, et si pour tout couple d'objets A et B de $\mathcal{V}$ et tout morphisme $u:A\otimes B\to I$, on pose*

$$T_{A,B}(u)=u(\theta_A\otimes 1_B)R_{B,A}\quad , \tag{4.3.1.1}$$

alors T est une t-structure souveraine sur $(\mathcal{V},\otimes,I)$. Réciproquement, si la catégorie monoïdale $(\mathcal{V},\otimes,I)$ est autonome, si T est une *t-structure souveraine sur* $(\mathcal{V},\otimes,I)$*, il existe une torsion unique* θ *de* $(\mathcal{V},\otimes,I,R)$ *telle que pour tout objet* A *de* $\mathcal{V}$ *et toute dualité* $\mathbb{D} = (A,A',e,h)$*, on ait*

$$\theta_A = \big(T_{A,A'}(e)\otimes 1_A\big)\big(R^{-1}_{A',A}\otimes 1_A\big)(1_A\otimes h) \quad . \tag{4.3.1.2}$$

On définit ainsi, dans le cas où la catégorie monoïdale $(\mathcal{V},\otimes,I)$ *est autonome, deux bijections, inverses l'une de l'autre, entre l'ensemble des torsions de* $(\mathcal{V},\otimes,I,R)$ *et l'ensemble des t-structures souveraines sur* $(\mathcal{V},\otimes,I)$*.*

Démonstration. Soient $u : A\otimes B\to I$, $v : A'\to A$, $w : B'\to B$ des morphismes de $\mathcal{V}$. On a

$$\begin{aligned} T_{A',B'}\big(u(v\otimes w)\big) &= u(v\otimes w)(\theta_{A'}\otimes 1_{B'})R_{B',A'} \\ &= u(\theta_A\otimes 1_B)(v\otimes w)R_{B',A'} \\ &= u(\theta_A\otimes 1_B)R_{B,A}(w\otimes v) = \big(T_{A,B}(u)\big)(w\otimes v) \end{aligned}$$

(la deuxième égalité résultant de la fonctorialité de θ, et la troisième de celle de R), ce qui prouve la condition 3.3.7.1.

De même, pour tout morphisme $u : A\otimes B\otimes C\to I$ de $\mathcal{V}$ on a

$$T_{B,C\otimes A}\big(T_{A,B\otimes C}(u)\big) = \big(T_{A,B\otimes C}(u)\big)(\theta_B\otimes 1_C\otimes 1_A)R_{C\otimes A,B}$$

$$= u(\theta_A\otimes 1_B\otimes 1_C)R_{B\otimes C,A}(\theta_B\otimes 1_C\otimes 1_A)R_{C\otimes A,B}$$

$$= u(\theta_A\otimes 1_B\otimes 1_C)(R_{B,A}\otimes 1_C)(1_B\otimes R_{C,A})(\theta_B\otimes 1_C\otimes 1_A)(R_{C,B}\otimes 1_A)(1_C\otimes R_{A,B})$$

$$= u(\theta_A\otimes\theta_B\otimes 1_C)(R_{B,A}\otimes 1_C)(1_B\otimes R_{C,A})(R_{C,B}\otimes 1_A)(1_C\otimes R_{A,B})$$

$$= u(\theta_A\otimes\theta_B\otimes 1_C)(R_{B,A}\otimes 1_C)(R_{A,B}\otimes 1_C)(1_A\otimes R_{C,B})(R_{C,A}\otimes 1_B)$$

$$= u(\theta_{A\otimes B}\otimes 1_C)(1_A\otimes R_{C,B})(R_{C,A}\otimes 1_B)$$

$$= u(\theta_{A\otimes B}\otimes 1_C)R_{C,A\otimes B} = T_{A\otimes B,C}(u)$$

(la troisième égalité résultant de 4.1.1.1, la quatrième de la fonctorialité de R, la cinquième de 4.1.1.3, la sixième de 4.2.1.1, et la septième de 4.1.1.2), ce qui prouve la condition 3.3.7.2.

Enfin, en vertu de 4.1.1.4 et 4.2.1, on a

$$T_{I,I}(1_I) = 1_I(\theta_I \otimes 1_I)R_{I,I} = 1_I(1_I \otimes 1_I)1_I = 1_I \quad ,$$

ce qui prouve la condition 3.3.7.3, et démontre la première assertion.

Réciproquement, supposons que la catégorie monoïdale $\mathcal{V}$ soit autonome, et soit T une t-structure souveraine sur $(\mathcal{V}, \otimes, I)$. Soient A et B deux objets de $\mathcal{V}$, choisissons des dualités

$$\mathbb{D} = (A, A', e, h) \quad \text{et} \quad \mathbb{D}' = (B, B', e', h')$$

et posons

$$\theta_A = \big(T_{A,A'}(e) \otimes 1_A\big)\big(R^{-1}_{A',A} \otimes 1_A\big)(1_A \otimes h) \quad ,$$

$$\theta_B = \big(T_{B,B'}(e') \otimes 1_B\big)\big(R^{-1}_{B',B} \otimes 1_B\big)(1_B \otimes h') \quad .$$

Pour tout morphisme $u : A \to B$ de $\mathcal{V}$, si l'on pose $v = t^{(r)}_{\mathbb{D},\mathbb{D}'}(u)$, on a

$$\begin{aligned}
\theta_B u &= \big(T_{B,B'}(e') \otimes 1_B\big)\big(R^{-1}_{B',B} \otimes 1_B\big)(1_B \otimes h')u \\
&= \big(T_{B,B'}(e') \otimes 1_B\big)(1_{B'} \otimes u \otimes 1_B)(R^{-1}_{B',A} \otimes 1_B)(1_A \otimes h') \\
&= \big(T_{A,B'}(e'(u \otimes 1_{B'})) \otimes 1_B\big)(R^{-1}_{B',A} \otimes 1_B)(1_A \otimes h') \\
&= \big(T_{A,B'}(e(1_A \otimes v)) \otimes 1_B\big)(R^{-1}_{B',A} \otimes 1_B)(1_A \otimes h') \\
&= \big(T_{A,A'}(e) \otimes 1_B\big)(v \otimes 1_A \otimes 1_B)(R^{-1}_{B',A} \otimes 1_B)(1_A \otimes h') \\
&= \big(T_{A,A'}(e) \otimes 1_B\big)(R^{-1}_{A',A} \otimes 1_B)(1_A \otimes v \otimes 1_B)(1_A \otimes h') \\
&= \big(T_{A,A'}(e) \otimes 1_B\big)(R^{-1}_{A',A} \otimes 1_B)(1_A \otimes 1_{A'} \otimes u)(1_A \otimes h) \\
&= u\big(T_{A,A'}(e) \otimes 1_A\big)(R^{-1}_{A',A} \otimes 1_A)(1_A \otimes h) = u\theta_A
\end{aligned}$$

(la deuxième et la sixième égalité résultant de la fonctorialité de R, la troisième et la cinquième de 3.3.7.1, et la quatrième et la septième de 1.2.2 et 1.2.3), ce qui prouve que $\theta_B u = u\theta_A$. En particulier, ce résultat, appliqué à $B = A$ et $u = 1_A$, montre que la définition de θ_A est indépendante du choix de la dualité $\mathbb{D}$. On définit ainsi un endomorphisme fonctoriel θ du foncteur identité de $\mathcal{V}$.

Montrons que θ satisfait à la condition 4.2.1.1. Soient A et B deux objets de $\mathcal{V}$, choisissons des dualités

$$\mathbb{D} = (A, A', e, h) \quad \text{et} \quad \mathbb{D}' = (B, B', e', h')$$

et considérons (cf. 1.2.5) la dualité

$$\mathbb{D}' \otimes \mathbb{D} = \big(A \otimes B,\, B' \otimes A',\, e(1_A \otimes e' \otimes 1_{A'}),\, (1_{B'} \otimes h \otimes 1_B)h'\big) \quad .$$

En vertu de 3.3.8.4, on a

$$\begin{aligned}\theta_{A\otimes B} &= \big(T_{A\otimes B, B'\otimes A'}(e(1_A \otimes e' \otimes 1_{A'})) \otimes 1_A \otimes 1_B\big) \\ &\qquad \big(R^{-1}_{B'\otimes A', A\otimes B} \otimes 1_A \otimes 1_B\big)\big(1_A \otimes 1_B \otimes [(1_{B'} \otimes h \otimes 1_B)h']\big) \\ &= \Big(\big[(T_{B,B'}(e'))\big(1_{B'} \otimes T_{A,A'}(e) \otimes 1_B\big) R^{-1}_{B'\otimes A', A\otimes B}\big] \otimes 1_A \otimes 1_B\Big) \\ &\qquad \big(1_A \otimes 1_B \otimes [(1_{B'} \otimes h \otimes 1_B)h']\big)\end{aligned}$$

et en vertu de 4.1.1.1, 4.1.1.2 et 4.1.1.3, on a

$$\begin{aligned}R^{-1}_{B'\otimes A', A\otimes B} &= (1_{B'} \otimes R^{-1}_{A',A} \otimes 1_B)(1_{B'} \otimes 1_A \otimes R^{-1}_{A',B}) \\ &\qquad (R^{-1}_{B',A} \otimes 1_B \otimes 1_{A'})(1_A \otimes R^{-1}_{B',B} \otimes 1_{A'}) \\ &= (1_{B'} \otimes R^{-1}_{A',A} \otimes 1_B)(1_{B'} \otimes 1_A \otimes R^{-1}_{A',B})(1_{B'} \otimes R^{-1}_{A,B} \otimes 1_{A'}) \\ &\qquad (R^{-1}_{B',B} \otimes 1_A \otimes 1_{A'})(1_B \otimes R^{-1}_{B',A} \otimes 1_{A'})(R_{A,B} \otimes 1_{B'} \otimes 1_{A'}) \\ &= (1_{B'} \otimes R^{-1}_{A',A} \otimes 1_B)(1_{B'} \otimes R^{-1}_{A\otimes A',B})(R^{-1}_{B',B} \otimes 1_A \otimes 1_{A'}) \\ &\qquad (1_B \otimes R^{-1}_{B',A} \otimes 1_{A'})(R_{A,B} \otimes 1_{B'} \otimes 1_{A'}) \ .\end{aligned}$$

On en déduit que $\quad \theta_{A\otimes B} =$

$$\begin{aligned}&= \Big(\big[(T_{B,B'}(e'))\big(1_{B'} \otimes [T_{A,A'}(e)R^{-1}_{A',A}] \otimes 1_B\big)\big(1_{B'} \otimes R^{-1}_{A\otimes A',B}\big)\big] \otimes 1_A \otimes 1_B\Big) \\ &\qquad \Big(\big[(R^{-1}_{B',B} \otimes 1_A)(1_B \otimes R^{-1}_{B',A})(R_{A,B} \otimes 1_{B'})\big] \otimes 1_{A'} \otimes 1_A \otimes 1_B\Big) \\ &\qquad \big(1_A \otimes 1_B \otimes [(1_{B'} \otimes h \otimes 1_B)h']\big)\end{aligned}$$

$$= \Big(\big[(T_{B,B'}(e')\big)\big(1_{B'} \otimes R^{-1}_{I,B}\big)\big(1_{B'} \otimes 1_B \otimes [T_{A,A'}(e) R^{-1}_{A',A}]\big)\big] \otimes 1_A \otimes 1_B \Big)$$
$$(1_{B'} \otimes 1_B \otimes 1_A \otimes h \otimes 1_B) \Big(\big[(R^{-1}_{B',B} \otimes 1_A)(1_B \otimes R^{-1}_{B',A})(R_{A,B} \otimes 1_{B'}) \big] \otimes 1_B \Big)$$
$$(1_A \otimes 1_B \otimes h')$$

$$= \big(T_{B,B'}(e') \otimes 1_A \otimes 1_B\big)\big(1_{B'} \otimes 1_B \otimes \theta_A \otimes 1_B\big)\big(R^{-1}_{B',B} \otimes 1_A \otimes 1_B\big)$$
$$\big(1_B \otimes R^{-1}_{B',A} \otimes 1_B\big)\big(R_{A,B} \otimes 1_{B'} \otimes 1_B\big)(1_A \otimes 1_B \otimes h')$$

$$= \big([T_{B,B'}(e') R^{-1}_{B',B}] \otimes \theta_A \otimes 1_B\big)\big(1_B \otimes 1_{B'} \otimes R_{B,A}\big)\big(1_B \otimes 1_{B'} \otimes R^{-1}_{B,A}\big)$$
$$\big(1_B \otimes R^{-1}_{B',A} \otimes 1_B\big)(1_B \otimes 1_A \otimes h') R_{A,B}$$

$$= \big([T_{B,B'}(e') R^{-1}_{B',B}] \otimes \theta_A \otimes 1_B\big)\big(1_B \otimes 1_{B'} \otimes R_{B,A}\big)\big(1_B \otimes R^{-1}_{B' \otimes B,A}\big)$$
$$(1_B \otimes 1_A \otimes h') R_{A,B}$$

$$= (\theta_A \otimes 1_B) R_{B,A}\big([T_{B,B'}(e') R^{-1}_{B',B}] \otimes 1_B \otimes 1_A\big)(1_B \otimes h' \otimes 1_A)$$
$$\big(1_B \otimes R^{-1}_{I,A}\big) R_{A,B}$$

$$= (\theta_A \otimes 1_B) R_{B,A} (\theta_B \otimes 1_A) R_{A,B} = (\theta_A \otimes \theta_B) R_{B,A} R_{A,B}$$

(la deuxième, la sixième et la huitième égalité résultant de la fonctorialité de R, la troisième et la septième de 4.1.1.4 et de la définition de θ, et la cinquième de 4.1.1.1), ce qui prouve la condition 4.2.1.1.

Enfin, en considérant la dualité $\mathbb{D}_0 = (I, I, 1_I, 1_I)$ on constate que

$$\theta_I = \big(T_{I,I}(1_I) \otimes 1_I\big)\big(R^{-1}_{I,I} \otimes 1_I\big)(1_I \otimes 1_I) = 1_I$$

(la deuxième égalité étant conséquence de 4.1.1.4 et 3.3.7.3), ce qui prouve que θ est un morphisme fonctoriel monoïdal de $(1_{\mathcal{V}}, R^{\circ -1}, 1_I)$ dans $(1_{\mathcal{V}}, R, 1_I)$, donc un isomorphisme, car la catégorie $(\mathcal{V}, \otimes, I)$ est autonome (cf. 1.2.7). On en déduit que θ est une torsion, ce qui démontre la deuxième assertion.

Montrons la troisième assertion. Supposons donc que la catégorie $(\mathcal{V}, \otimes, I)$ soit autonome, et soient θ une torsion de $(\mathcal{V}, \otimes, I, R)$, T la t-structure souveraine associée à θ et θ' la torsion associée à T. Pour tout objet A de $\mathcal{V}$, si $\mathbb{D} = (A, A', e, h)$ désigne une dualité, on a

$$\begin{aligned}
\theta'_A &= \big(T_{A,A'}(e) \otimes 1_A\big)\big(R^{-1}_{A',A} \otimes 1_A\big)(1_A \otimes h) \\
&= \big([e(\theta_A \otimes 1_{A'})R_{A',A}] \otimes 1_A\big)\big(R^{-1}_{A',A} \otimes 1_A\big)(1_A \otimes h) \\
&= (e \otimes 1_A)(\theta_A \otimes 1_{A'} \otimes 1_A)(1_A \otimes h) \\
&= (e \otimes 1_A)(1_A \otimes h)\theta_A = \theta_A \quad .
\end{aligned}$$

De même, soient T une t-structure souveraine sur $(\mathcal{V}, \otimes, I)$, θ la torsion de $(\mathcal{V}, \otimes, I, R)$ associée à T, et T' la t-structure souveraine associée à θ. Pour tout couple d'objets A et B de $\mathcal{V}$ et tout morphisme $u : A \otimes B \to I$, si $\mathbb{D} = (A, A', e, h)$ désigne une dualité, on a

$$\begin{aligned}
T'_{A,B}(u) &= u(\theta_A \otimes 1_B)R_{B,A} \\
&= u\Big(\big[\big(T_{A,A'}(e) \otimes 1_A\big)\big(R^{-1}_{A',A} \otimes 1_A\big)(1_A \otimes h)\big] \otimes 1_B\Big)R_{B,A} \\
&= \big(T_{A,A'}(e)\big)\big(1_{A'} \otimes R^{-1}_{I,A}\big)(1_{A'} \otimes 1_A \otimes u)(R^{-1}_{A',A} \otimes 1_A \otimes 1_B) \\
&\qquad (1_A \otimes h \otimes 1_B)R_{B,A} \\
&= \big(T_{A,A'}(e)\big)(1_{A'} \otimes u \otimes 1_A)(1_{A'} \otimes R^{-1}_{A\otimes B,A})(R^{-1}_{A',A} \otimes 1_A \otimes 1_B) \\
&\qquad (1_A \otimes h \otimes 1_B)R_{B,A} \\
&= \big(T_{A,A'}(e)\big)(1_{A'} \otimes u \otimes 1_A)(1_{A'} \otimes 1_A \otimes R^{-1}_{B,A})(1_{A'} \otimes R^{-1}_{A,A} \otimes 1_B) \\
&\qquad (R^{-1}_{A',A} \otimes 1_A \otimes 1_B)(1_A \otimes h \otimes 1_B)R_{B,A} \\
&= \big(T_{A,A'}(e)\big)(1_{A'} \otimes u \otimes 1_A)(1_{A'} \otimes 1_A \otimes R^{-1}_{B,A})(R^{-1}_{A'\otimes A,A} \otimes 1_B) \\
&\qquad (1_A \otimes h \otimes 1_B)R_{B,A} \\
&= \big(T_{A,A'}(e)\big)(1_{A'} \otimes u \otimes 1_A)(1_{A'} \otimes 1_A \otimes R^{-1}_{B,A})(h \otimes 1_A \otimes 1_B) \\
&\qquad (R^{-1}_{I,A} \otimes 1_B)R_{B,A} \\
&= \big(T_{A,A'}(e)\big)(1_{A'} \otimes u \otimes 1_A)(h \otimes 1_B \otimes 1_A)R^{-1}_{B,A}R_{B,A} = T_{A,B}(u)
\end{aligned}$$

(la troisième et la huitième égalité résultant de 4.1.1.4, la quatrième et la septième de la fonctorialité de R, la cinquième et la sixième de 4.1.1.1, et la neuvième de 3.3.9.1), ce qui prouve la troisième assertion, et démontre le théorème.

Remarque 4.3.2. De façon analogue, on montre que si pour tout couple d'objets A et B de $\mathcal{V}$ et tout morphisme $v : I \to A \otimes B$, on pose $S_{A,B}(v) = R_{A,B}(\theta_A \otimes 1_B)v$, alors S est une s-structure souveraine, et on démontre facilement que cette s-structure est compatible avec la t-structure définie par 4.3.1.1.

Remarque 4.3.3. En combinant le théorème 4.3.1 et le théorème 3.3.10, on retrouve le théorème de Deligne affirmant que dans une catégorie monoïdale tressée, autonome, les structures souveraines sont en bijection canonique avec les torsions [**De2**], [**Ye**].

Bibliographie

[**BHMV1**] C. Blanchet, N. Habegger, G. Masbaum, P. Vogel, *Three-manifold invariants derived from the Kauffman bracket,* Topology **31** (1992), 685-699.

[**BHMV2**] C. Blanchet, N. Habegger, G. Masbaum, P. Vogel, *Topological quantum field theories derived from the Kauffman bracket,* Preprint, Université de Nantes 93/02 (1993).

[**Br**] A. Bruguières, *Théorie tannakienne non commutative,* Comm. in Alg. **22 (14)** (1994), 5817-5860.

[**De1**] P. Deligne, *Catégories tannakiennes,* in "The Grothendieck Festschrift", Vol. II. In honor of the 60th birthday of Alexander Grothendieck, Progress in Mathematics 87, Birkhäuser, 1990, pp. 111-195.

[**De2**] P. Deligne, lettre à D. N. Yetter, (1990).

[**Dr**] V. G. Drinfel'd, *Quantum groups,* in "Proceedings of the International Congress of Mathematicians", 1986, Berkeley, American Mathematical Society, 1987, pp. 798-820.

[**FY1**] P. J. Freyd, D. N. Yetter, *Braided compact closed categories with applications to low dimensional topology,* Adv. Math. **77** (1989), 156-182.

[**FY2**] P. Freyd, D. N. Yetter, *Coherence theorems via knot theory,* J. of Pure and Appl. Alg. **78** (1992), 49-76.

[**Gi1**] J. Giraud, *Méthode de la descente,* Bull. Soc. Math. France, Memoire **2** (1964).

[**Gi2**] J. Giraud, "Cohomologie non abélienne", Springer-Verlag, 1971.

[**SGA1**] A. Grothendieck, "Revêtements étales et groupe fondamental", Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie 1960/61, Lecture Notes in Mathematics 224, Springer-Verlag, 1971.

[**Ji1**] M. Jimbo, *A q-difference analogue of $U(g)$ and the Yang-Baxter equation,* Lett. Math. Phys. **10** (1985), 63-69.

[**Ji2**] M. Jimbo, *A q-analogue of $U(gl(N+1))$, Hecke algebras and the Yang-Baxter equation,* Lett. Math. Phys. **11** (1986), 247-252.

[**Jo**] V. F. R. Jones, *A polynomial invariant for knots via von Neumann algebras,* Bull. Amer. Math. Soc. **12, 1** (1985), 103-111.

[**JS1**] A. Joyal, R. Street, *Braided tensor categories,* Adv. Math. **102** (1993), 20-78.

[**JS2**] A. Joyal, R. Street, *The geometry of tensor calculus,* I, Adv. Math. **88** (1991), 55-112.

[**Ka**] C. Kassel, "Quantum Groups", Graduate Texts in Mathematics, vol. 155, Springer-Verlag, 1995.

[**KT**] C. Kassel, V. Turaev, *Double construction for monoidal categories,* Preprint, Publ. IRMA Strasbourg 507/P-294 (1992).

[**Lyu**] V. Lyubashenko, *Ribbon categories as modular categories,* Preprint (1993).

[**RT1**] N. Yu. Reshetikhin, V. G. Turaev, *Ribbon graphs and their invariants derived from quantum groups,* Commun. Math. Phys. **127** (1990), 1-26.

[**RT2**] N. Yu. Reshetikhin, V. G. Turaev, *Invariants of 3-manifolds via link polynomials and quantum groups,* Invent. Math. **103** (1991), 547-597.

[**Sh**] M. C. Shum, *Tortile tensor categories,* J. of Pure and Appl. Alg. **93, 1** (1994), 57-110.

[**T1**] V. G. Turaev, *The Yang-Baxter equation and invariants of links,* Invent. Math. **92** (1988), 527-553.

[**T2**] V. G. Turaev, *Operator invariants of tangles, and R-matrices,* Math. USSR Izvestiya **35, 2** (1990), 411-444.

[**T3**] V. Turaev, *Quantum invariants of 3-manifolds,* Preprint, Publ. IRMA Strasbourg 509/P-295 (1992).

[**T4**] V. Turaev, *Quantum invariants of 3-manifolds II,* Preprint, Publ. IRMA Strasbourg 015 (1993).

[**T5**] V. Turaev, *Quantum invariants of links and 3-valent graphs in 3-manifolds,* Publ. Math. IHES **77** (1993), 121-171.

[**T6**] V. G. Turaev, "Quantum Invariants of Knots and 3-Manifolds", de Gruyter Studies in Mathematics 18, Walter de Gruyter, 1994.

[**TV**] V. G. Turaev, O. Y. Viro, *State sum invariants of 3-manifolds and quantum 6j-symbols,* Topology **31** (1992), 865-902.

[**Wo**] S. L. Woronowicz, *Compact matrix pseudogroups,* Commun. Math. Phys. **111** (1987), 613-665.

[**Ye**] D. N. Yetter, *Framed tangles and a theorem of Deligne on braided deformations of Tannakian categories,* in "Deformation theory and quantum groups with applications to mathematical physics", Contemporary Mathematics 134, American Mathematical Society, 1992, pp. 325-345.

Université Paris-VII, UFR de Mathématiques,
2, place Jussieu, 75251 Paris Cedex 05, France