# CALCUL DIFFÉRENTIEL SUR LE GROUPE LINÉAIRE QUANTIQUE.

**G. Maltsiniotis**

(Exposé au Séminaire de Géométrie des Systèmes Différentiels
et Dynamiques, le 22 Mai 1990)

Le but de cet exposé est de définir un calcul différentiel non-commutatif sur une déformation quantique, à plusieurs paramètres, du groupe linéaire $GL(n)$, introduite par M. Artin, W. Schelter et J. Tate [**Ar1**] et [**Ar2**], A. Sudbery [**Su**] et N. Yu. Reshetikhin [**Re**]. En plus, on propose une autre façon d'introduire ces déformations en utilisant un calcul différentiel non-commutatif sur une déformation quantique à plusieurs paramètres de l'espace affine de dimension $n$ et en appliquant les méthodes de [**Mal**].

**(1.1)** On va s'intéresser aux objets suivants. On se fixe un corps commutatif $k$, un ensemble fini $I$ à $n$ éléments et une famille $(a_i^j)_{i,j\in I}$ d'indéterminées. On considère l'algèbre

$$M = k\langle (a_i^j)_{i,j\in I}\rangle$$

des polynômes non commutatifs, graduée par le degré total. Les applications $k$-linéaires

$$\Delta : M \to M\otimes M \qquad\qquad \Delta(a_i^j) = \sum_k a_i^k \otimes a_k^j$$

et

$$\varepsilon : M \to k \qquad\qquad \varepsilon(a_i^j) = \delta_i^j$$

(où $\delta$ désigne le symbole de Kronecker) définissent une structure de bigèbre sur $M$. On s'intéresse aux bigèbres quotients de $M$, autrement dit, aux bigèbres $N$ de la forme $M/R$, où $R$ désigne un idéal bilatère gradué de $M$ tel que

$$\Delta(R) \subset R\otimes M + M\otimes R \qquad \text{et} \qquad R\subset \mathrm{Ker}(\varepsilon) \quad .$$

**Exemple (1.2).** L'algèbre des polynômes commutatifs, $N = k[(a_i^j)_{i,j\in I}]$, l'idéal $R$ étant l'idéal bilatère engendré par

$$a_i^j a_k^l - a_k^l a_i^j \ , \qquad\qquad i,\, j,\, k,\, l \in I \quad .$$

On s'intéresse plus particuliérement aux bigèbres quotients qui sont des "déformations" du cas commutatif. On demandera en particulier que la dimension des composantes homogènes de la bigèbre quotient $N$ soit donnée par la formule

$$\dim_k(N_m) = \mathrm{C}_{n^2+m-1}^{n^2-1} \quad ,$$

autrement dit, que cette dimension soit égale à la dimension de l'espace vectoriel des polynômes (commutatifs) homogènes de degré $m$ à $n$ indéterminées. On dira alors que $N$ a la *bonne fonction de Hilbert.*

Les méthodes de construction de telles bigèbres quotient sont en général des variantes de la méthode de Manin [**Ma2**]. L'objet de départ est un "espace quantique", autrement dit, une algèbre graduée de type fini, et on construit en quelque sorte un objet universel d'automorphismes. Je ne rappellerais pas les détails de la construction de Manin, mais on vera son application à un exemple qui sera l'objet principal de mon exposé.

**(1.3)** On va généraliser le $q$-plan quantique en dimension $n$. Je rappelle que le $q$-plan quantique est le quotient de l'algèbre des polynômes non commutatifs $k\langle x, y\rangle$ par la relation

$$yx = qxy \quad .$$

On généralise en dimension $n$ en considérant des indéterminées $(x_i)_{i\in I}$, une famille $q = (q_{ij})_{i,j\in I}$ d'éléments de $k$ et en posant

$$A_q = k\langle (x_i)_{i\in I}\rangle / J \quad ,$$

où $J$ est l'idéal bilatère engendré par les relations

$$x_j x_i = q_{ji} x_i x_j \ , \qquad\qquad i, j \in I \ .$$

On suppose que $q_{ii} = 1$, $i \in I$, et que $q_{ij}q_{ji} = 1$, $i,j \in I$. Ces relations assurent que pour toute relation d'ordre total $\leq$ sur $I$ les monômes

$$(x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_m})_{i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_m}$$

forment une base du $k$-espace vectoriel $A_q$. En particulier, cette algèbre est une déformation de l'algèbre des polynômes commutatifs $k[(x_i)_{i \in I}]$.

**(1.4)** Appliquer la méthode de Manin dans ce cas, consiste à considérer l'algèbre

$$k\langle (a_i^j)_{i,j \in I} \rangle \otimes_k k\langle (x_i)_{i \in I} \rangle$$

et écrire que les éléments

$$x'_i = \sum_k a_i^k \otimes x_k$$

satisfont aux mêmes relations que les $x_i$ :

$$\Big(\sum_k a_j^k \otimes x_k\Big)\Big(\sum_l a_i^l \otimes x_l\Big) = q_{ji}\Big(\sum_k a_i^k \otimes x_k\Big)\Big(\sum_l a_j^l \otimes x_l\Big) .$$

Si l'on choisit une relation d'ordre $\leq$ sur $I$ on a :

$$\sum_{k \leq l} a_j^k a_i^l \otimes x_k x_l + \sum_{k > l} a_j^k a_i^l \otimes q_{kl} x_l x_k = q_{ji} \sum_{k \leq l} a_i^k a_j^l \otimes x_k x_l + q_{ji} \sum_{k > l} a_i^k a_j^l \otimes q_{kl} x_l x_k$$

et comme la famille $(x_k x_l)_{k \leq l}$ forme un système libre on a :

$$a_j^k a_i^k = q_{ji} a_i^k a_j^k \ , \qquad k = l$$

$$a_j^k a_i^l + q_{lk} a_j^l a_i^k = q_{ji} a_i^k a_j^l + q_{ji} q_{lk} a_i^l a_j^k \ , \qquad k < l$$

cette deuxième relation étant en fait vraie pour tout $k$ et $l$, puisque le raisonnement ci-dessus est vrai pour n'importe quelle relation d'ordre. N'empeche qu'on vérifie facilement qu'il n'y a que

$$\frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2(n^2-1)}{4}$$

relations indépendantes. La moitié du nombre des relations attendues pour esperer avoir la bonne fonction de Hilbert.

On peut completer ces relations en utilisant la méthode de Manin [**Ma2**], mais on sait maintenant que ce n'est pas la bonne méthode. (Déjà pour le “plan quantique de Jordan” ce qu'on obtient n'a pas la bonne fonction de Hilbert). On peut utiliser deux variantes. Ou bien, définir une structure différentielle sur $A_q$ et appliquer la méthode de [**Mal**] que je développerais à la deuxième partie de l'exposé. Ou bien, utiliser la méthode suivante proposée par plusieurs auteurs. Elle consiste à remarquer que les relations ci-dessus sont exactement les relations qu'il faut imposer pour qu'il existe une structure de $M/R$-comodule à gauche sur $A_q$. On peut alors considérer un deuxième “espace quantique” et imposer en plus des relations précédentes, celles qui assurent l'existence d'une structure de $M/R$-comodule à droite sur cet “espace”, et constater que pour un choix judicieux de cet “espace” on obtient une bigèbre quotient ayant la bonne fonction de Hilbert.

Pour cela, on considère des indéterminées $(y^i)_{i\in I}$, une famille $p=(p^{ij})_{i,j\in I}$ d'éléments de $k$ et on pose

$$B_p = k\langle (y^i)_{i\in I}\rangle / J'$$

où $J'$ désigne l'idéal bilatère engendré par les relations

$$y^j y^i = p^{ji} y^i y^j \ .$$

On suppose que $p^{ii}=1\,,\ i\in I$, et $p^{ij}p^{ji}=1\,,\ i,j\in I$. (Les indices en haut ne sont pas fortuites : Si l'on voulait effectuer les constructions de façon intrinseque il faudrait partir d'un $k$-espace vectoriel de dimension finie $E$, définir $M$ comme étant l'algèbre tensorielle $M=\mathrm{T}(E\otimes E^*)$, et considérer $A_q$ comme étant un quotient de $\mathrm{T}(E)$ et $B_p$ un quotient de $\mathrm{T}(E^*)$. Bien entendu, si pour tout $i$ et $j$ appartenant à $I$ on a $q_{ij}=p^{ij}$ alors $B_p$ est isomorphe à $A_q$ .) Cette fois ci, on considère l'algèbre

$$k\langle (y^i)_{i\in I}\rangle \otimes_k k\langle (a^j_i)_{i,j\in I}\rangle$$

et on écrit que les éléments

$$y'^i = \sum_k y^k \otimes a^i_k$$

satisfont aux mêmes relations que les $y^i$. On obtient ainsi $n^2(n^2-1)/4$ autres relations qu'on adjoint aux précédentes. Soit $M_{q,p}$ la bigèbre quotient ainsi obtenue.

**Théorème (1.5).** (Artin, Schelter, Tate) -*Les conditions suivantes sont équivalentes :*

*i)* $M_{q,p}$ *a la bonne fonction de Hilbert ;*

*ii) il existe une relation d'ordre total sur* $I$ *et une constante* $\lambda$, $\lambda \in k$, $\lambda \neq -1$, *telles que pour tout* $i$ *et* $j$ *dans* $I$, $i < j$, *on ait* $q_{ji} p^{ji} = \lambda$ ;
*et alors* $M_{q,p}$ *est le quotient de* $M$ *par l'idéal bilatère engendré par les éléments*

$$
\begin{array}{lll}
(1) & a_j^k a_i^k - q_{ji} a_i^k a_j^k \ , & i,j,k \in I \ , \quad i < j \\
(2) & a_i^l a_i^k - p^{lk} a_i^k a_i^l \ , & i,k,l \in I \ , \quad k < l \\
(3) & a_j^k a_i^l - (p^{ji})^{-1} q_{lk} a_i^l a_j^k \ , & i,j,k,l \in I \ , \quad i < j \ , \ k < l \\
(4) & a_j^l a_i^k - (p^{ji})^{-1} p^{lk} a_i^k a_j^l - (p^{ji})^{-1}(\lambda - 1) a_i^l a_j^k \ , & i,j,k,l \in I \ , \quad i < j \ , \quad k < l \quad .
\end{array}
$$

Les remarques suivantes s'imposent. Si l'on utilisait la méthode de Manin pour "compléter les relations manquantes", on aurait pour pout tout $i$ et $j$, $p^{ji} = q_{ji}$ et la condition (ii) ne serait satisfaite que si tous les $q_{ji}$, $i < j$, étaient égaux ou opposés à une même constante $q$, $q \in k$, telle que $\lambda = q^2$. Si tout les $q_{ji}$, $i < j$, sont égaux on retrouve la $q$-déformation classique du groupe linéaire. C'est bien entendu, un cas intéressant mais pas le seul. Le quotient $M'_{q,p}$ de $M$ par l'idéal bilatère engendré par les éléments (1), (2), (3), (4) ci-dessus a la bonne fonction de Hilbert même si $\lambda = -1$ mais alors $M'_{q,p} \neq M_{q,p}$.

**(2.1)** On va maintenant définir un calcul différentiel non-commutatif sur $A_q$ qui permettra de retrouver ces mêmes bigèbres en appliquant les méthodes de [**Mal**]. En plus, ces bigèbres seront ainsi naturellement munies d'un calcul différentiel.

Considérons l'algèbre différentielle libre

$$\mathbb{A} = k\langle (x_i)_{i \in I}, (\xi_i)_{i \in I} \rangle \ ,$$

où $(\xi_i)_{i \in I}$ désigne une deuxième famille d'indéterminées et la différentielle $d$ est définie par les conditions suivantes

i) $dx_i = \xi_i$, pour $i \in I$ ;

ii) $d$ est une antidérivation (pour la graduation définie par le degré total en les $\xi_i$ ) ;

iii) $d^2 = 0$.

Par exemple,

$$d\,(x_i\xi_j x_k\xi_l\xi_l x_j) = \xi_i\xi_j x_k\xi_l\xi_l x_j - x_i\xi_j\xi_k\xi_l\xi_l x_j - x_i\xi_j x_k\xi_l\xi_l\xi_j$$

ou

$$d\,(x_i\xi_i x_i\xi_i x_i) = \xi_i\xi_i x_i\xi_i x_i - x_i\xi_i\xi_i\xi_i x_i + x_i\xi_i x_i\xi_i\xi_i\ .$$

L' algèbre $\mathbb{A}$ est bigraduée par le degré total en les $x_i$ et les $\xi_i$. On désigne par $\mathbb{A}^{m,m'}$ la composante de bidegré $(m,m')$ ($m$ étant le degré total en les $x_i$ et $m'$ celui en les $\xi_i$). La différentielle $d$ est bihomogène de bidegré (-1,1).

On se donne des familles $p = (p^{ij})_{i,j\in I}$, $q = (q_{ij})_{i,j\in I}$, $r = (r_{ij})_{i,j\in I}$ et $r' = (r'_{ij})_{i,j\in I}$ d'éléments de $k$ satisfaisant aux conditions:

i) pour tout $i$ et $j$ dans $I$, $i \neq j$, on a

$$q_{ij}q_{ji} = p^{ij}p^{ji} = 1 \qquad \text{et} \qquad r'_{ij} \neq 0 \quad \text{ou} \quad r'_{ji} \neq 0 \quad ;$$

ii) pour tout $i$, $i \in I$, on a

$$q_{ii} = 1\ , \qquad p^{ii} = 0 \qquad \text{et} \qquad r'_{ii} = 0 \quad .$$

On désigne par $J$ l'idéal différentiel (stable par $d$) bilatère engendré par les relations

$$\begin{aligned} x_j x_i &= q_{ji} x_i x_j \\ \xi_i x_j &= r_{ij} x_j \xi_i + r'_{ij} x_i \xi_j \\ \xi_i \xi_j &= -p^{ji} \xi_j \xi_i \end{aligned}$$

et par $\Omega$ l'algèbre différentielle bigraduée quotient de $\mathbb{A}$ par l'idéal $J$.

**Théorème (2.2).** *-Les conditions suivantes sont équivalentes :*

*i) l'algèbre bigraduée $\Omega$ a la bonne fonction de Hilbert ( $\dim_k(\Omega^{m,m'}) = \mathrm{C}^{n-1}_{n+m-1} \cdot \mathrm{C}^{m'}_{n}$ );*

*ii) pour toute relation d'ordre total $\leq$ sur $I$ les monômes*

$$(x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_m}\xi_{j_1}\xi_{j_2}\dots\xi_{j_{m'}})_{i_1\leq i_2\leq\cdots\leq i_m\ ,\ j_1<j_2<\cdots<j_{m'}}$$

*forment une base du $k$-espace vectoriel $\Omega$ ;*

*iii) il existe une relation d'ordre total $\leq$ sur $I$ telle que pour tout $i,j \in I$, $i<j$, on ait*

$$\begin{aligned} &r_{jj} = q_{ji}p^{ji} \;, && \\ &r_{ij} = p^{ji} \;, && r'_{ij} = 0 \;, \\ &r_{ji} = q_{ji} \;, && r'_{ji} = q_{ji}p^{ji} - 1 \;; \end{aligned}$$

*et alors $J$ est l'idéal bilatère engendré par*

$$\begin{array}{lll} (1) & x_j x_i - q_{ji} x_i x_j \;, & i,j \in I, \quad i<j \;, \\ & & \\ (2) & \xi_i x_i - \lambda_i x_i \xi_i \;, & i \in I \;, \\ (3) & \xi_i x_j - p^{ji} x_j \xi_i \;, & i,j \in I, \quad i<j \;, \\ (4) & \xi_j x_i - q_{ji} x_i \xi_j - (\lambda_j - 1) x_j \xi_i \;, & i,j \in I, \quad i<j \;, \\ & & \\ (5) & \xi_i^2 \;, & i \in I \;, \\ (6) & \xi_i \xi_j + p^{ji} \xi_j \xi_i \;, & i,j \in I, \quad i<j \;, \end{array}$$

*où $\lambda_j = r_{jj}$, pour $j \in I$, et $\lambda_j = q_{ji}p^{ji}$, pour $i,j \in I$, $i<j$.*

Plan de la démonstration: L' implication (ii) $\Rightarrow$ (i) est triviale. L'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) résulte du fait qu'en vertu de la définition de l'idéal $J$ les monômes

$$(x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_m} \xi_{j_1} \xi_{j_2} \ldots \xi_{j_{m'}})_{i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_m \,,\, j_1 < j_2 < \cdots < j_{m'}}$$

forment un système de générateurs du $k$-espace vectoriel $\Omega$. L'équivalence de (ii) et de (iii) est une conséquence du "Diamond lemma" de Bergman [**Be**].

On suppose désormais que $I = \{1,2,\ldots,n\}$ et que les conditions équivalentes du théorème sont satisfaites, ce qui implique que $r$ et $r'$ sont déterminés par $q$ et $p$ sauf $r_{11}$. On pose $\lambda = \lambda_1 = r_{11}$ et $\lambda_j = r_{jj} = q_{ji}p^{ji}$, $1 \leq i < j \leq n$, et on désigne par $\mathbb{A}_{q,p,\lambda}$ l'algèbre différentielle quotient de $\mathbb{A}$ par l'idéal $J$ engendré par les générateurs (1) - (6) ci-dessus. Si pour tout $i$ et $j$, $1 \leq i,j \leq n$, $\lambda_i = \lambda_j$, cette algèbre sera notée plus simplement $\mathbb{A}_{q,p}$.

**(2.3)** On appelle *bigèbre différentielle graduée* un quadruplet $(\mathbb{H}, d, \Delta, \varepsilon)$ tel que

i) $(\mathbb{H}, d)$ soit une algèbre différentielle graduée :

$$\mathbb{H} = \bigoplus_{m\in\mathbb{N}} \mathbb{H}^m \quad , \quad d = \bigoplus_{m\in\mathbb{N}} d_m \quad , \quad d_m : \mathbb{H}^m \to \mathbb{H}^{m+1} \ ,$$

où $d^2 = 0$ et $d(a \cdot b) = da \cdot b + (-1)^m a \cdot db$ , $a \in \mathbb{H}^m$ , $b \in \mathbb{H}$;

ii) $\Delta$ et $\varepsilon$ soient des morphismes d'algèbres différentielles graduées :

$$\Delta : \mathbb{H} \to \mathbb{H} \otimes \mathbb{H} \ , \qquad \varepsilon : \mathbb{H} \to k$$

(la stucture d'algèbre graduée sur $\mathbb{H} \otimes \mathbb{H}$ étant celle du produit tensoriel gauche ([**Bo**], III, p. 49) :

$$(a \otimes b)(a' \otimes b') = (-1)^{mm'}(aa' \otimes bb') \quad , \quad a' \in \mathbb{H}^{m'} , \quad b \in \mathbb{H}^m , \quad a , \ b' \in \mathbb{H}$$

la différentielle étant définie par

$$d(a \otimes b) = da \otimes b + (-1)^m a \otimes db \quad a \in \mathbb{H}^m \ , \ b \in \mathbb{H}$$

et k étant considéré comme algèbre différentielle graduée pour la graduation triviale et la différentielle nulle) ;

iii) $(\mathbb{H}, \Delta, \varepsilon)$ soit une cogèbre coassociative coünifère :

$$(\Delta \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{H}}) \circ \Delta = (\mathrm{id}_{\mathbb{H}} \otimes \Delta) \circ \Delta \quad \text{et} \quad (\varepsilon \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{H}}) \circ \Delta = (\mathrm{id}_{\mathbb{H}} \otimes \varepsilon) \circ \Delta = \mathrm{id}_{\mathbb{H}}$$

(en identifiant $k \otimes \mathbb{H}$ et $\mathbb{H} \otimes k$ à $\mathbb{H}$ ).

**Exemple (2.4).** On note

$$\mathbb{M} = k\langle (a_i^j)_{1\le i,j\le n}, (\alpha_i^j)_{1\le i,j\le n} \rangle \ , \qquad da_i^j = \alpha_i^j$$

l'algèbre différentielle libre, où $(a_i^j)_{1\le i,j\le n}$ et $(\alpha_i^j)_{1\le i,j\le n}$ désignent des indéterminées et on définit des morphismes d'algèbres

$$\Delta : \mathbb{M} \to \mathbb{M} \otimes \mathbb{M} \qquad \text{et} \qquad \varepsilon : \mathbb{M} \to k$$

par

$$\Delta(a_i^j) = \sum_{k=1}^{n} a_i^k \otimes a_k^j \quad , \quad \Delta(\alpha_i^j) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_i^k \otimes a_k^j + \sum_{k=1}^{n} a_i^k \otimes \alpha_k^j$$

et

$$\varepsilon(a_i^j) = \delta_i^j \qquad , \qquad \varepsilon(\alpha_i^j) = 0$$

Alors $(\mathbb{M}, d, \Delta, \varepsilon)$ est une bigèbre différentielle graduée.

**Remarque (2.5).** L'algèbre $\mathbb{M}$ est bigraduée par le degré total en les $a_i^j$ et les $\alpha_i^j$, mais $\Delta$ et $\varepsilon$ ne respectent que la deuxième graduation.

On s'intéresse aux bigèbres différentielles graduées quotient de $\mathbb{M}$, autrement dit, aux bigèbres $\mathbb{W} = \mathbb{M}/R$, où $R$ désigne un idéal bilatère différentiel bigradué tel que

$$\Delta(R) \subset R \otimes \mathbb{M} + \mathbb{M} \otimes R \qquad \text{et} \qquad R \subset \mathrm{Ker}(\varepsilon) \quad .$$

et plus particuliérement à celles qui sont des "déformations" du cas "commutatif" (c'est à dire, de l'algèbre produit tensoriel de l'algèbre des polynômes (commutatifs) $k[(a_i^j)_{1\leq i,j\leq n}]$ par l'algèbre extérieure de l'espace vectoriel engendré par les $a_i^j$ ) ou celles qui ont la *bonne fonction de Hilbert*:

$$\dim_k(\mathbb{W}^{m,m'}) = \mathrm{C}_{n^2+m-1}^{n^2-1} \cdot \mathrm{C}_{n^2}^{m'} \quad .$$

**(2.6)** On définit une coaction à gauche de $\mathbb{M}$ sur $\mathbb{A}$, autrement dit, un morphisme d'algèbres différentielles graduées

$$\delta : \mathbb{A} \to \mathbb{M} \otimes \mathbb{A} \quad ,$$

satisfaisant à

$$(\Delta \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{A}}) \circ \delta = (\mathrm{id}_{\mathbb{M}} \otimes \delta) \circ \delta \quad ,$$

en posant

$$\delta(x_i) = \sum_{k=1}^{n} a_i^k \otimes x_k \quad , \quad \delta(\xi_i) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_i^k \otimes x_k + \sum_{k=1}^{n} a_i^k \otimes \xi_k \quad .$$

On dit qu'une *bigèbre différentielle quotient* $\mathbb{W}$ *de* $\mathbb{M}$ *agit sur* $\mathbb{A}_{q,p,\lambda}$, si la coaction $\delta$ passe au quotient et définit une coaction

$$\bar{\delta} : \mathbb{A}_{q,p,\lambda} \to \mathbb{W} \otimes \mathbb{A}_{q,p,\lambda} \quad .$$

**Théorème (2.7).** *Pour qu'il existe une bigèbre différentielle quotient de* $\mathbb{M}$ *agissant sur* $\mathbb{A}_{q,p,\lambda}$ *et ayant la bonne fonction de Hilbert, il faut et il suffit que pour tout* $i$ *et* $j$ *,* $1 \leq i < j \leq n$ *, on ait* $\lambda = q_{ji}p^{ji}$ *et alors cette bigèbre est unique et notée* $\mathbb{M}_{q,p}$ *. L'algèbre sous-jacente à* $\mathbb{M}_{q,p}$ *est le quotient de* $\mathbb{M}$ *par l'idéal bilatère engendré par*

(1) $a_j^k a_i^k - q_{ji} a_i^k a_j^k$ , $\quad 1 \leq i < j \leq n , \quad 1 \leq k \leq n$

(2) $a_i^l a_i^k - p^{lk} a_i^k a_i^l$ , $\quad 1 \leq i \leq n , \quad 1 \leq k < l \leq n$

(3) $a_j^k a_i^l - (p^{ji})^{-1} q_{lk} a_i^l a_j^k$ , $\quad 1 \leq i < j \leq n , \ 1 \leq k < l \leq n$

(4) $a_j^l a_i^k - (p^{ji})^{-1} p^{lk} a_i^k a_j^l - (p^{ji})^{-1}(\lambda - 1) a_i^l a_j^k$ , $\quad 1 \leq i < j \leq n , \ 1 \leq k < l \leq n$

(5) $\alpha_i^k a_i^k - \lambda a_i^k \alpha_i^k$ , $\quad 1 \leq i \leq n , \quad 1 \leq k \leq n$

(6) $\alpha_i^k a_j^k - p^{ji} a_j^k \alpha_i^k$ , $\quad 1 \leq i < j \leq n , \quad 1 \leq k \leq n$

(7) $\alpha_j^k a_i^k - q_{ji} a_i^k \alpha_j^k - (\lambda - 1) a_j^k \alpha_i^k$ , $\quad 1 \leq i < j \leq n , \quad 1 \leq k \leq n$

(8) $\alpha_i^k a_i^l - q_{lk} a_i^l \alpha_i^k$ , $\quad 1 \leq i \leq n , \quad 1 \leq k < l \leq n$

(9) $\alpha_i^l a_i^k - p^{lk} a_i^k \alpha_i^l - (\lambda - 1) a_i^l \alpha_i^k$ , $\quad 1 \leq i \leq n , \quad 1 \leq k < l \leq n$

(10) $\alpha_i^k a_j^l - p^{ji}(p^{lk})^{-1} a_j^l \alpha_i^k$ , $\quad 1 \leq i < j \leq n , \ 1 \leq k < l \leq n$

(11) $\alpha_i^l a_j^k - (q_{ji})^{-1} p^{lk} a_j^k \alpha_i^l - (q_{ji})^{-1}(\lambda - 1) a_j^l \alpha_i^k$ , $\quad 1 \leq i < j \leq n , \ 1 \leq k < l \leq n$

(12) $\alpha_j^k a_i^l - q_{ji}(p^{lk})^{-1} a_i^l \alpha_j^k - (p^{lk})^{-1}(\lambda - 1) a_j^l \alpha_i^k$ , $\quad 1 \leq i < j \leq n , \ 1 \leq k < l \leq n$

(13) $\alpha_j^l a_i^k - q_{ji}(q_{lk})^{-1} a_i^k \alpha_j^l - (p^{ji})^{-1}(\lambda - 1) a_i^l \alpha_j^k - (q_{lk})^{-1}(\lambda - 1) a_j^k \alpha_i^l$
$\qquad -(\lambda - 2 + \lambda^{-1}) a_j^l \alpha_i^k$ , $\quad 1 \leq i < j \leq n , \quad 1 \leq k < l \leq n$

(14) $(\alpha_i^k)^2$ , $\quad 1 \leq i \leq n , \quad 1 \leq k \leq n$

(15) $\alpha_i^k \alpha_j^k + p^{ji} \alpha_j^k \alpha_i^k$ , $\quad 1 \leq i < j \leq n , \quad 1 \leq k \leq n$

(16) $\alpha_i^k \alpha_i^l + q_{lk} \alpha_i^l \alpha_i^k$ , $\quad 1 \leq i \leq n , \quad 1 \leq k < l \leq n$

(17) $\alpha_i^k \alpha_j^l + p^{ji}(p^{lk})^{-1} \alpha_j^l \alpha_i^k$ , $\quad 1 \leq i < j \leq n , \ 1 \leq k < l \leq n$

(18) $\alpha_i^l \alpha_j^k + (q_{ji})^{-1} p^{lk} \alpha_j^k \alpha_i^l + (q_{ji})^{-1}(\lambda - 1) \alpha_j^l \alpha_i^k$ , $\quad 1 \leq i < j \leq n , \ 1 \leq k < l \leq n$ .

Idée de la démonstration: On effectue d'abord la construction de [**Mal**] qui revient a écrire que les $\delta(x_i)$ et $\delta(\xi_i)$ satisfont aux mêmes relations que les $x_i$ et $\xi_i$. On obtient ainsi une bigèbre différentielle quotient $\mathbb{W}_1$ de $\mathbb{M}$ qui agit sur $\mathbb{A}_{q,p,\lambda}$ et on constate que

$$\dim_k(\mathbb{W}_1^{2,0}) < \frac{n^2(n^2+1)}{2}$$

à moins que $\lambda = q_{ji}p^{ji}$ pour tout $i$ et $j$, $1 \leq i < j \leq n$, dans quel cas

$$\dim_k(\mathbb{W}_1^{2,0}) = \frac{n^2(n^2+1)}{2} \quad .$$

On supposera donc cette condition satisfaite. Neanmoins, la bigèbre $\mathbb{W}_1$ n'a pas la bonne fonction de Hilbert. En particulier, on a

$$\dim_k(\mathbb{W}_1^{1,1}) = n^4 + \frac{n(n-1)}{2}$$

(au lieu de $n^4$). Ensuite, on détermine tous les sous-espaces vectoriels $V$ de dimension $n(n-1)/2$ de $\mathbb{W}_1^{1,1}$ tels que l'idéal différentiel $R$ de $\mathbb{W}_1$ engendré par $V$ satisfasse à

$$\Delta(R) \subset R \otimes \mathbb{W}_1 + \mathbb{W}_1 \otimes R$$

(il s'agit d'une sous-variété de dimension $n(n-1)/2$ de la grassmannienne des sous-espaces vectoriels de dimension $n(n-1)/2$ de $\mathbb{W}_1^{1,1}$). Enfin, en appliquant le "diamond lemma", on démontre qu'il y a exactement un sous-espace $V$ qui convient et on obtient les générateurs (1) - (18) ci-dessus.

La démonstration ci-dessus n'est pas raisonnable. En effet, la vérification finale que les générateurs (1) - (18) satisfont au "diamond lemma" démande quatre-vingts pages de calculs. Évidemment on peut faire la vérification par ordinateur, mais est-ce une démonstration? Il est en tout cas souhaitable de trouver une preuve plus conceptuelle. Avis aux amateurs ...

## Références


[**Ab**] E. Abe, "Hopf algebras," Cambridge Tracts in Math., Vol.74, Cambridge Univ. Press, 1980.

[**Ar1**] M. Artin, *Classification des formes quantiques de $Gl(n)$*, Exposé au Séminaire d'Algèbre de M. P. Malliavin (1990).

[**Ar2**] M. Artin, W. Schelter, J. Tate, *Quantum deformations of $Gl_n$*, Preprint (1990).

[**Be**] G. M. Bergman, *The Diamond Lemma for Ring Theory*, Adv. in Math. **29** (1978), 178-218.

[**Bo**] N. Bourbaki, "Éléments de Mathématique," Algèbre, Chapitres 1 à 3, Hermann, Paris, 1970.

[**Ca**] P. Cartier, *Calcul différentiel non commutatif*, Exposés à l'E.N.S. (1989).

[**Co**] A. Connes, *Non-commutative differential geometry*, Publ. Math. de l'I.H.E.S. **62** (1985), 41-144.

[**D-V1**] M. Dubois-Violette, *Dérivations et calcul différentiel non commutatif*, C.R.A.S. **307** (1988), 403-408.

[**D-V2**] M. Dubois-Violette, R. Kerner, J. Madore, *Noncommutative differential geometry of matrix algebras*, J. Math. Phys. **31, 2** (1990), 316-322.

[**Mal**] G. Maltsiniotis, *Groupes Quantiques et Structures Différentielles*, C. R. Acad. Sci. **311, Série I** (1990), 831-834.

[**Ma1**] Yu. I. Manin, *Some remarks on Koszul algebras and quantum groups*, Ann. Inst. Fourier **37,4** (1987), 191-205.

[**Ma2**] Yu. I. Manin, "Quantum groups and non-commutative geometry," Centre de Recherches Mathematiques de l'Université de Montréal, 1988.

[**Ma3**] Yu. I. Manin, *Multiparametric Quantum Deformation of the General Linear Supergroup*, Commun. Math. Phys. **123** (1989), 163-175.

[**Ma4**] Yu. I. Manin, *Quantum Groups*, Exposés au College de France (1989).

[**Po**] P. Podles, S. L. Woronowicz, *Quantum deformation of Lorentz group*, Preprint (1989).

[**Re**] N. Yu. Reshetikhin, *Multiparameter quantum groups and twisted quasitriangular Hopf algebras*, Preprint (1990).

[**Su**] A. Sudbery, *Consistent multiparameter quantization of $GL(n)$*, Preprint (1990).

[**Wo1**] S. L. Woronowicz, *Twisted $SU(2)$ Group. An Example of a Non-Commutative Differential Calculus*, Publ. RIMS, Kyoto Univ. **23** (1987), 117-181.

[**Wo2**] S. L. Woronowicz, *Compact matrix pseudogroups*, Commun. Math. Phys. **111** (1987), 613-655.

[**Wo3**] S. L. Woronowicz, *Tanaka-Krein duality for compact matrix pseudogroups. Twisted $SU(N)$ groups*, Invent. Math. **93** (1988), 35-76.

[**Wo4**] S. L. Woronowicz, *Differential Calculus on Compact Matrix Pseudogroups (Quantum Groups)*, Commun. Math. Phys. **122** (1989), 125-170.