Algèbre/*Algebra*

GROUPOÏDES QUANTIQUES

Georges Maltsiniotis

Résumé - Le but de cette note est d'introduire une notion généralisant à la fois celle de groupoïde et celle de groupe quantique, notion qu'on pourrait appeler groupoïde quantique.

QUANTUM GROUPOIDS

Abstract - The aim of this note is to introduce a notion that generalizes simultaneously the notion of a groupoid and the notion of a quantum group. This new mathematical object can be called a quantum groupoid.

On se fixe un anneau commutatif K. Dans la suite, on dira module pour K-module, application linéaire pour application K-linéaire, algèbre pour K-algèbre associative unifère et on notera $\otimes$ le produit tensoriel $\otimes_K$ sur K.

§ **1.** On appelle *cogèbroïde* (cf. [**De**]) un quadruplet $(A, M, \Delta, \varepsilon)$, où A désigne une algèbre, M un (A, A)-bimodule (les deux structures de K-module sous-jacent étant supposées identiques) et $\Delta : M \to M \otimes_A M$ et $\varepsilon : M \to A$ des morphismes de (A, A)-bimodules, tels que $(\Delta \otimes_A 1_M)\Delta = (1_M \otimes_A \Delta)\Delta$ et $(\varepsilon \otimes_A 1_M)\Delta = 1_M = (1_M \otimes_A \varepsilon)\Delta$.

Soient $(A', M', \Delta', \varepsilon')$ et $(A'', M'', \Delta'', \varepsilon'')$ deux cogèbroïdes. On définit un cogèbroide produit tensoriel $(A, M, \Delta, \varepsilon)$ comme suit: $A = A' \otimes A''$ est l'algèbre produit tensoriel, $M = M' \otimes M''$ est le (A, A)-bimodule produit tensoriel, $\varepsilon = \varepsilon' \otimes \varepsilon''$ et $\Delta = \chi(\Delta' \otimes \Delta'')$, où $\chi : (M' \otimes_{A'} M') \otimes (M'' \otimes_{A''} M'') \to (M' \otimes M'') \otimes_{A' \otimes A''} (M' \otimes M'')$ désigne l'isomorphisme canonique défini par $\chi((x_1 \otimes_{A'} x_2) \otimes (y_1 \otimes_{A''} y_2)) = (x_1 \otimes y_1) \otimes_{A' \otimes A''} (x_2 \otimes y_2)$, pour $x_1, x_2 \in M'$ et $y_1, y_2 \in M''$.

§ **2.** On appelle *graphe* un quadruplet (C, B, s, b), où C désigne une algèbre *commutative*,

B une algèbre (non nécessairement commutative) et $s : C \to B$ et $b : C \to B$ des morphismes d'algèbres, dont l'image est contenue dans le centre de B.

Ainsi B est muni par s et b de deux structures de C-module à gauche (resp. à droite), notées ${}_sB$ et ${}_bB$ (resp B_s et B_b), de quatre structures de (C,C)-bimodule notées ${}_sB_s$, ${}_sB_b$, ${}_bB_s$ et ${}_bB_b$, et on remarque que pour tout $\alpha \in \{s,b\}$, $\alpha : C \to {}_\alpha B_\alpha$ est un morphisme de (C,C)-bimodules. De même, s et b définissent deux structures de C-algèbre sur B et la multiplication $\mu : B \otimes B \to B$ de B définit par passage au quotient deux applications linéaires $\mu_s : B_s \otimes_C {}_sB \to B$ et $\mu_b : B_b \otimes_C {}_bB \to B$. Pour tout $\alpha, \beta, \gamma \in \{s,b\}$, l'application linéaire $\mu_\beta : {}_\alpha B_\beta \otimes_C {}_\beta B_\gamma \to {}_\alpha B_\gamma$ est un morphisme de (C,C)-bimodules, l'associativité de la multiplication μ implique que l'on a $\mu_\alpha(1_B \otimes_C \mu_\beta) = \mu_\beta(\mu_\alpha \otimes_C 1_B)$ et la propriété de l'unité que $\mu_\alpha(1_B \otimes_C \alpha) = 1_B = \mu_\alpha(\alpha \otimes_C 1_B)$.

Soient (C, B', s', b') et (C, B'', s'', b'') deux graphes. On définit un graphe produit tensoriel (C, B, s, b) comme suit: $B = B'_{s'} \otimes_C {}_{b''}B''$ et $s : C \to B$ et $b : C \to B$ sont définis par $s(c) = 1 \otimes_C s''(c)$ et $b(c) = b'(c) \otimes_C 1$, pour $c \in C$.

§ **3.** Soient A une algèbre, C une algèbre commutative, $\varphi : A \to C$ un morphisme d'algèbres, $\mathbf{M} = (A, M, \Delta, \varepsilon)$ un cogèbroïde et $\mathbf{G} = (C, B, s, b)$ un graphe. On va définir une catégorie $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{\mathbf{M},\mathbf{G},\varphi}$ comme suit. L'ensemble des objets de $\mathcal{C}$ est l'ensemble $\mathcal{O}b(\mathcal{C}) = \{s,b\}$. Pour tout $\alpha, \beta \in \{s,b\}$ l'ensemble des flèches de α dans β est l'ensemble des morphismes de (A,A)-bimodules de M dans le (A,A)-bimodule associé par φ au (C,C)-bimodule ${}_\beta B_\alpha$. Pour tout $\alpha, \beta, \gamma \in \{s,b\}$, la composition d'une flèche $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\alpha,\beta)$ et d'une flèche $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\beta,\gamma)$ est définie par $g \circ f = \mu_\beta(g \otimes_\varphi f)\Delta$ et la flèche identique 1_α par $1_\alpha = \alpha\varphi\varepsilon$.

La composition ci-dessus est associative: Soient $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \{s,b\}$ et $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\alpha,\beta)$, $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\beta,\gamma)$, $h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\gamma,\delta)$. On a

$$\begin{aligned} h \circ (g \circ f) &= \mu_\gamma(h \otimes_\varphi [\mu_\beta(g \otimes_\varphi f)\Delta])\Delta = \mu_\gamma(1_B \otimes_C \mu_\beta)(h \otimes_\varphi g \otimes_\varphi f)(1_M \otimes_A \Delta)\Delta \\ &= \mu_\beta(\mu_\gamma \otimes_C 1_B)(h \otimes_\varphi g \otimes_\varphi f)(\Delta \otimes_A 1_M)\Delta = \mu_\beta([\mu_\gamma(h \otimes_\varphi g)\Delta] \otimes_\varphi f)\Delta \\ &= (h \circ g) \circ f \quad . \end{aligned}$$

Il reste à vérifier la propriété de l'unité: Soient $\alpha, \beta \in \{s, b\}$ et $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\alpha, \beta)$. On a $f \circ 1_\alpha = \mu_\alpha(f \otimes_\varphi (\alpha\varphi\varepsilon))\Delta = \mu_\alpha(1_B \otimes_C \alpha)(f \otimes_\varphi \varphi)(1_M \otimes_A \varepsilon)\Delta = f$ et $1_\beta \circ f = \mu_\beta((\beta\varphi\varepsilon) \otimes_\varphi f)\Delta = \mu_\beta(\beta \otimes_C 1_B)(\varphi \otimes_\varphi f)(\varepsilon \otimes_A 1_M)\Delta = f$.

§ **4.** Soit C une algèbre commutative. On appelle *bigèbroïde* un sextuplet $\mathbf{B} = (C, B, s, b, \Delta, \varepsilon)$, où (C, B, s, b) est un graphe et $(C, {}_bB_s, \Delta, \varepsilon)$ un cogèbroïde, tels que Δ et ε soient des morphismes d'algèbres (la structure de K-algèbre de $B_s \otimes_C {}_bB$ étant la structure sous-jacente à celle de C-algèbre produit tensoriel de celle définie par s et de celle définie par b). On remarque que si $C = K$, alors $s = b$ et $\mathbf{B}$ est simplement une K-bigèbre.

Le bigèbroïde opposé au bigèbroïde $\mathbf{B}$ est le bigèbroïde $\mathbf{B}^\circ = (C, B^\circ, b, s, \Delta^\circ, \varepsilon)$, où B° désigne l'algèbre opposée à B et $\Delta^\circ = \tau\Delta$, où $\tau : B_s \otimes_C {}_bB \to B_b \otimes_C {}_sB$ est l'application linéaire définie par $\tau(x \otimes_C y) = y \otimes_C x$, $x, y \in B$.

Soient $\mathbf{B}_1 = (C, B_1, s_1, b_1, \Delta_1, \varepsilon_1)$ et $\mathbf{B}_2 = (C, B_2, s_2, b_2, \Delta_2, \varepsilon_2)$ deux bigèbroïdes. On appelle C-morphisme de $\mathbf{B}_1$ dans $\mathbf{B}_2$ un morphisme d'algèbres $\psi : B_1 \to B_2$ tel que $\psi s_1 = s_2$, $\psi b_1 = b_2$, $\varepsilon_2\psi = \varepsilon_1$ et $\Delta_2\psi = (\psi \otimes_C \psi)\Delta_1$.

Proposition 1. *Soit* $\mathbf{B} = (C, B, s, b, \Delta, \varepsilon)$ *un bigèbroïde. Alors on a:*

i) $\varepsilon s = 1_C$, $\varepsilon b = 1_C$;

ii) $\Delta s(c) = 1 \otimes_C s(c)$, $\Delta b(c) = b(c) \otimes_C 1$, $c \in C$.

§ **5. Définition.** On dit qu'une application linéaire $I : B \to B$ est un *antipode* du bigèbroïde $\mathbf{B} = (C, B, s, b, \Delta, \varepsilon)$ si:

a) $I : {}_bB_s \to {}_sB_b$ est un morphisme de (C, C)-bimodules;

b) $\mu_b(I \otimes_C 1_B)\Delta = s\varepsilon$ et $\mu_s(1_B \otimes_C I)\Delta = b\varepsilon$.

On appelle *bigèbroïde de Hopf* un bigèbroïde muni d'un antipode.

En considérant la catégorie $\mathcal{C}$ définie ci-dessus, correspondant au cogèbroïde $(C, {}_bB_s, \Delta, \varepsilon)$, au graphe (C, B, s, b) et au morphisme identique de l'algèbre C, une application linéaire $I : B \to B$ est un antipode du bigèbroïde $\mathbf{B}$, si et seulement si I est l'inverse de

$1_B : {}_bB_s \to {}_bB_s$ considéré comme flèche de s dans b, $1_B \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(s,b)$. En particulier, on en déduit la proposition suivante.

Proposition 2. *Un bigèbroïde possède au plus un antipode.*

Proposition 3. *Un antipode I d'un bigèbroïde $\mathbf{B} = (C, B, s, b, \Delta, \varepsilon)$ est un C-morphisme du bigèbroïde opposé $\mathbf{B}^\circ$ dans $\mathbf{B}$.*

Démonstration. a) $Ib = s$ et $Is = b$. L'égalité $\mu_b(I \otimes_C 1_B)\Delta = s\varepsilon$ (resp. $\mu_s(1_B \otimes_C I)\Delta = b\varepsilon$) implique que pour tout $c \in C$, $\mu_b(I \otimes_C 1_B)\Delta b(c) = s\varepsilon b(c)$ (resp. $\mu_s(1_B \otimes_C I)\Delta s(c) = b\varepsilon s(c)$), et en vertu de la proposition 1, que $Ib(c) = s(c)$ (resp. $Is(c) = b(c)$).

b) $I\mu = \mu\sigma(I \otimes I)$, où $\sigma : B \otimes B \to B \otimes B$ désigne l'application linéaire définie par $\sigma(x \otimes y) = y \otimes x$, $x, y \in B$. Considérons le cogèbroïde $\mathbf{M} = (C \otimes C, M, \Delta', \varepsilon')$, produit tensoriel du cogèbroïde $(C, {}_bB_s, \Delta, \varepsilon)$ avec lui même, et la catégorie $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{\mathbf{M},\mathbf{G},\mu_0}$ correspondant à ce cogèbroïde, le graphe $\mathbf{G} = (C, B, s, b)$ et la multiplication $\mu_0 : C \otimes C \to C$ de C (qui est un morphisme d'algèbres, puisque C est commutative). On a $\mu \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(s,b)$ et si l'on pose $\rho = I\mu$ et $\nu = \mu\sigma(I \otimes I)$ on a $\rho, \nu \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(b,s)$. Une vérification analogue à celle de [**Ab**], th. 2.1.4, p. 63, montre que ρ (resp. ν) est un inverse à gauche (resp. à droite) de μ dans la catégorie $\mathcal{C}$, ce qui prouve que $\rho = \nu$.

c) $\varepsilon I = \varepsilon$. L'égalité $\mu_b(I \otimes_C 1_B)\Delta = s\varepsilon$ implique que $\varepsilon\mu_b(I \otimes_C 1_B)\Delta = \varepsilon s\varepsilon$, d'où (prop. 1) $\varepsilon = (\varepsilon \otimes_C \varepsilon)(I \otimes_C 1_B)\Delta \ = \varepsilon I(1_B \otimes_C \varepsilon)\Delta = \varepsilon I$.

d) $\Delta I = (I \otimes_C I)\tau\Delta$, où $\tau : B_s \otimes_C {}_bB \to B_b \otimes_C {}_sB$ désigne l'application linéaire définie par $\tau(x \otimes_C y) = y \otimes_C x$, $x, y \in B$. Considéront le produit tensoriel $(C, B_s \otimes_C {}_bB, s', b')$ du graphe (C, B, s, b) avec lui même et la catégorie $\mathcal{C}$ correspondant au cogèbroïde $(C, {}_bB_s, \Delta, \varepsilon)$, à ce graphe et au morphisme identique de l'algèbre C. Alors $\Delta \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(s', b')$ et si l'on pose $\rho = \Delta I$ et $\nu = (I \otimes_C I)\tau\Delta$ on a $\rho, \nu \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(b', s')$. Une vérification analogue à celle de [**Ab**], th. 2.1.4, p. 64, montre que ρ (resp. ν) est un inverse à gauche (resp. à droite) de Δ dans la catégorie $\mathcal{C}$, ce qui prouve que $\rho = \nu$.

§ **6. Exemple.** Soient p, q, p_s, q_s, p_b, q_b et $(a^i_j)_{1 \le i,j \le 2}$ des indéterminées, $C = K[p, q, p^{-1}, q^{-1}]$

l'algèbre des polynômes de Laurent, $B_0 = K[p_s, q_s, p_b, q_b, p_s^{-1}, q_s^{-1}, p_b^{-1}, q_b^{-1}]/(p_s q_s - p_b q_b)$ et $B = B_0\langle a_1^1, a_2^1, a_1^2, a_2^2\rangle/J$ la B_0-algèbre des polynômes non commutatifs en $(a_j^i)_{1\leq i,j\leq 2}$, quotientée par l'idéal bilatère J engendré par $a_2^1 a_1^1 - q_s a_1^1 a_2^1$, $a_2^2 a_1^2 - q_s a_1^2 a_2^2$, $a_1^2 a_1^1 - p_b a_1^1 a_1^2$, $a_2^2 a_2^1 - p_b a_2^1 a_2^2$, $q_s a_1^2 a_2^1 - p_b a_2^1 a_1^2$ et $q_b a_2^2 a_1^1 - q_s a_1^1 a_2^2 - (p_s q_s - 1) a_2^1 a_1^2$. On définit des morphismes d'algèbres $s, b : C \to B$ par $s(p) = p_s$, $s(q) = q_s$, $b(p) = p_b$, $b(q) = q_b$ et on vérifie qu'il existe un unique morphisme de K-algèbres $\varepsilon : B \to C$ (resp. $\Delta : B \to B_s \otimes_C {}_b B$) tel que $\varepsilon(p_s) = \varepsilon(p_b) = p$, $\varepsilon(q_s) = \varepsilon(q_b) = q$, $\varepsilon(a_1^1) = \varepsilon(a_2^2) = 1$ et $\varepsilon(a_2^1) = \varepsilon(a_1^2) = 0$ (resp. $\Delta(p_s) = 1 \otimes_C p_s$, $\Delta(q_s) = 1 \otimes_C q_s$, $\Delta(p_b) = p_b \otimes_C 1$, $\Delta(q_b) = q_b \otimes_C 1$ et $\Delta(a_j^i) = a_1^i a_j^1 + a_2^i a_j^2$, pour $1 \leq i, j \leq 2$). Le sextuplet $(C, B, s, b, \Delta, \varepsilon)$ est alors un bigèbroïde et si l'on pose $d = a_1^1 a_2^2 - q_s^{-1} a_2^1 a_1^2$, on a $Bd = dB$, $\Delta(d) = d \otimes_C d$ et $\varepsilon(d) = 1$. Soient B' l'algèbre obtenue en "rendant d inversible" ($B' = B_0\langle a_1^1, a_2^1, a_1^2, a_2^2, \delta\rangle/J'$, où δ désigne une nouvelle indéterminée et J' l'idéal bilatère engendré par J, $d\delta - 1$ et $\delta d - 1$) et s' (resp. b') le composé de s (resp. b) avec le morphisme canonique de B dans B'. On démontre que les morphismes Δ et ε se prolongent en des morphismes d'algèbres $\Delta' : B' \to B'_{s'} \otimes_C {}_{b'} B'$ et $\varepsilon' : B' \to C$, qu'il existe un unique anti-homomorphisme d'algèbres I de B' dans B' tel que $I(p_s) = p_b$, $I(q_s) = q_b$, $I(p_b) = p_s$, $I(q_b) = q_s$, $I(a_1^1) = a_2^2 d^{-1}$, $I(a_2^1) = -q_b a_2^1 d^{-1}$, $I(a_1^2) = -q_s^{-1} a_1^2 d^{-1}$, $I(a_2^2) = q_s^{-1} q_b a_1^1 d^{-1}$, et que $(C, B', s', b', \Delta', \varepsilon', I)$ est un bigèbroïde de Hopf.

§ **7.** Soit $(C, B, s, b, \Delta, \varepsilon, I)$ un bigèbroïde de Hopf et supposons que B soit une algèbre commutative. Si l'on pose $S = \mathrm{Spec}(C)$, $X = \mathrm{Spec}(B)$, $\mathbf{s} = \mathrm{Spec}(s) : X \to S$, $\mathbf{b} = \mathrm{Spec}(b) : X \to S$, $m = \mathrm{Spec}(\Delta) : X \times_S X \to X$, $e = \mathrm{Spec}(\varepsilon) : S \to X$ et $i = \mathrm{Spec}(I) : X \to X$, alors $(S, X, \mathbf{s}, \mathbf{b}, m, e, i)$ est un *K-groupoïde agissant sur S* (cf. [**De**]). La notion de bigèbroïde de Hopf généralise donc celle de groupoïde (et on peut considérer qu'un bigèbroïde de Hopf est "l'algèbre des fonctions sur un *groupoïde quantique*"). Supposons que K soit un corps et soient Q une K-algèbre commutative, $\pi : Q \to K$ un morphisme surjectif d'algèbres, tel que $\mathrm{Ker}(\pi) = hQ$, où h désigne un élément de Q qui n'est pas diviseur de zéro, et $(C', B', s', b', \Delta', \varepsilon', I')$ un Q-bigèbroïde de Hopf tel que C' et B' soient plats sur Q et tel que $C = C' \otimes_Q K = C'/hC'$, $B = B' \otimes_Q K = B'/hB'$, $s = s' \otimes_Q 1_K$, $b = b' \otimes_Q 1_K$, $\Delta = \Delta' \otimes_Q 1_K$, $\varepsilon = \varepsilon' \otimes_Q 1_K$ et $I = I' \otimes_Q 1_K$. Alors, pour tout $x, y \in B'$ il existe un unique $z \in B'$ tel que $xy - yx = hz$ et on vérifie aussitôt que si l'on pose $\pi' = 1_{B'} \otimes_Q \pi$, $\pi'(z)$ ne dépend que de $\pi'(x)$ et de $\pi'(y)$. En posant $\{\pi'(x), \pi'(y)\} = \pi'(z)$, on définit un crochet de Poisson sur B, autrement dit une structure de Poisson sur X ([**Dr**]). En vertu des propriétés des bigèbroïdes, ce crochet satisfait aux conditions suivantes:

i) pour tout $c \in C$ et tout $x \in B$ on a $\{s(c), x\} = 0 = \{b(c), x\}$ (B est une C-algèbre de Poisson pour chacune des structures de C-algèbre définie par s ou b);

ii) Δ est un morphisme d'algèbres de Poisson (la structure de K-algèbre de Poisson de $B_s \otimes_{C\ b} B$ étant la structure sous-jacente à celle de C-algèbre de Poisson produit tensoriel de celle définie par s et de celle définie par b (cf. à i)), autrement dit, $X \times_S X$ est une sous-variété de Poisson de $X \times X$ (éventuellement singulière) et m est un morphisme de variétés de Poisson;

iii) pour tout $x, y \in B$ on a $\varepsilon\{x, y\} = 0$ (e est un morphisme de variétés de Poisson pour la structure de Poisson triviale sur S);

iv) pour tout $x, y \in B$ on a $I\{x, y\} = \{I(y), I(x)\} = -\{I(x), I(y)\}$ (i est un antihomomorphisme de variétés de Poisson).

On dit qu'un crochet satisfaisant aux propriétés (i) à (iv) munit X d'une structure de *groupoïde de Poisson.*

Références

[**Ab**] E. Abe, "Hopf algebras," Cambridge Tracts in Math., Vol.74, Cambridge Univ. Press, 1980.

[**De**] P. Deligne, *Catégories tannakiennes,* in "The Grothendieck Festschrift," Vol. II, Progress in Mathematics 87, Birkhäuser, 1990, pp. 111-195.

[**Dr**] V. G. Drinfel'd, *Quantum groups,* in "Proceedings of the International Congress of Mathematicians," Berkeley, California, 1986, pp. 798-820.

C.N.R.S, Université de Paris VII, UFR de Mathématiques, URA 212,
2, Place Jussieu, 75251 Paris CEDEX 05.