GROUPOÏDES QUANTIQUES

DE BASE NON COMMUTATIVE

G. MALTSINIOTIS

GROUPOÏDES QUANTIQUES

DE BASE NON COMMUTATIVE

G. MALTSINIOTIS

QUANTUM GROUPOIDS

Abstract - The aim of this paper is to introduce a notion of quantum groupoid, non-commutative analogue of Lie groupoids. This notion generalizes simultaneously the notion of a Hopf bigebroid [Mal] (corresponding to a quantum groupoid with commutative space of units) and the notion of a braided quantum group of Majid [Maj]. The commutativity hypothesis of the base in [Mal] is no more necessary and a construction of L. Vainerman [V] enters in this frame.

Introduction

Le but de cet article est d'introduire une notion de groupoïde quantique, analogue non commutatif des groupoïdes de Lie, ou des groupoïdes algébriques. Cette notion généralise celle de bigébroïde de Hopf, introduite dans [Mal], qui correspond à un groupoïde de base (ou espace d'unités) commutative. L'étude des bigébroïdes de Hopf s'est avérée fructueuse dans la théorie tannakienne des groupes quantiques [Br1], [Br2]. Pour cette théorie, le besoin de généraliser la notion pour englober le cas d'une base non commutative n'était pas ressenti. De plus, il n'était pas clair comment procéder à cette généralisation, ni même si une telle généralisation existait. C'est un exemple de Vainerman [V] décrivant "quelque chose" qui était visiblement un exemple de groupoïde quantique de base non commutative qui a lancé le défi de dégager les axiomes d'une espèce de structure méritant ce nom. Dans cet article, on définit une notion englobant l'exemple de Vainerman (et même une généralisation de cet exemple), la notion de bigébroïde de Hopf, ainsi que celle de groupe quantique tressé introduite par Majid [Maj]. La difficulté conceptuelle principale réside à la définition d'un analogue quantique de la notion de catégorie. Ensuite, la définition d'un antipode (correspondant à l'inverse d'un morphisme) ne pose pas de vrai problème, bien que techniquement les démonstrations sont plus difficiles. Les deux ingrédients de base pour définir les "catégories quantiques" sont :

a) Une définition simpliciale des catégories, due à Grothendieck ;

b) Les produits tensoriels tordus d'algèbres, introduits par Cartier [Ca] (légèrement généralisés).

On rappelle qu'un *ensemble simplicial* est un foncteur contravariant

$$\mathbf{\Delta}^{\circ} \longrightarrow \mathcal{E}ns \quad ,$$

où $\mathcal{E}ns$ désigne la catégorie des ensembles et $\mathbf{\Delta}$ la catégorie dont les objets sont les ensembles

$$[\,n\,] = \{0, 1, \dots, n\} \ , \quad n \geq 0 \ ,$$

ordonnés par l'ordre naturel, et les morphismes les applications croissantes. On note

$$\delta_n^i : [\,n-1\,] \to [\,n\,] \quad , \qquad n \geq 1 \ , \quad 0 \leq i \leq n \ ,$$

l'unique morphisme injectif de $\mathbf{\Delta}$ dont l'image ne contient pas $\{i\}$, et

$$\sigma_n^i : [\,n+1\,] \to [\,n\,] \quad , \qquad n \geq 0 \ , \quad 0 \leq i \leq n \ ,$$

l'unique morphisme surjectif tel que l'image réciproque de $\{i\}$ soit formée de deux éléments.

Grothendieck a défini un foncteur nerf

$$N : \mathcal{C}at \longrightarrow \widehat{\mathbf{\Delta}}$$

de la catégorie des petites catégories dans celle des ensembles simpliciaux, associant à une petite catégorie A l'ensemble simplicial NA :

$$[\,n\,] \mapsto \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}at}([\,n\,], A) = \underbrace{\mathsf{Fl}(A)_s \times_{\mathsf{Ob}(A)} {}_b\,\mathsf{Fl}(A)_s \times_{\mathsf{Ob}(A)} \cdots \times_{\mathsf{Ob}(A)} {}_b\,\mathsf{Fl}(A)}_{n \text{ fois}}$$

$$= \text{ensemble des suites de } n \text{ morphismes composables}\,,$$

où la notation ${}_b\,\mathsf{Fl}(A)_s$ indique qu'on utilise l'application but (resp. source) pour le produit fibré situé à gauche (resp. à droite) du symbole ${}_b\,\mathsf{Fl}(A)_s$. Le foncteur nerf est pleinement fidèle et son image essentielle est formée des ensembles simpliciaux

$$F : \mathbf{\Delta}^{\circ} \longrightarrow \mathcal{E}ns \quad ,$$

satisfaisant à la propriété d'exactitude à gauche suivante : les sommes amalgamées :

$$(*) \qquad \begin{array}{ccc} [\,0\,] & \xrightarrow{\ b_n\ } & [\,n\,] \\ {\scriptstyle a_m}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle j} \\ [\,m\,] & \xrightarrow[\ i\ ]{} & [\,m\,] \amalg_{[\,0\,]} [\,n\,] = [\,m+n\,] \end{array} \qquad \begin{array}{ll} a_m(0) = 0 & \\ b_n(0) = n & \\ j(k) = k \,, & 0 \leq k \leq n \,, \\ i(l) = n + l \,, & 0 \leq l \leq m \,, \end{array}$$

(on imagine les ensembles ordonnés $[\,n\,]$ écrits dans l'ordre décroissant

$$[\,n\,] = \{n \geq n-1 \geq \cdots \geq 1 \geq 0\} \qquad)$$

sont transformés en carrés cartésiens

$$\begin{tikzcd} F[\,0\,] & F[\,n\,] \arrow[l, "F(b_n)"'] \\ F[\,m\,] \arrow[u, "F(a_m)"] & F[\,m+n\,] \arrow[l, "F(i)"] \arrow[u, "F(j)"'] \end{tikzcd} \quad ,$$

autrement dit, le morphisme canonique

$$F[\,m+n\,] \xrightarrow{\theta} F[\,m\,] \times_{F[\,0\,]} F[\,n\,]$$

est un isomorphisme (ici une bijection). On peut donc définir une petite catégorie comme étant un ensemble simplicial satisfaisant à la propriété ci dessus. Réciproquement, à partir d'un tel ensemble simplicial F on récupère une catégorie (au sens ordinaire) A comme suit :

$$\mathsf{Ob}(A) = F[\,0\,] \qquad , \qquad \mathsf{Fl}(A) = F[\,1\,] \quad ,$$

les applications source et but

$$s,\, b : F[\,1\,] \rightrightarrows F[\,0\,]$$

sont définies par

$$s = F(\delta_1^1)\ , \quad b = F(\delta_1^0)\ , \qquad \delta_1^0,\, \delta_1^1 : [\,0\,] \rightrightarrows [\,1\,] \quad ,$$

l'unité d'un objet $X \in \mathsf{Ob}(A) = F[\,0\,]$ par

$$1_X = F(\sigma_0^0)(X)\ , \qquad \sigma_0^0 : [\,1\,] \longrightarrow [\,0\,] \quad ,$$

et la composition par la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd} F[\,2\,] \arrow[r, shift left, "\theta"] \arrow[d, "F(\delta_2^1)"'] & F[\,1\,]_s \times_{F[\,0\,]} {}_b F[\,1\,] \arrow[l, shift left, "\theta^{-1}"] \arrow[dl, "\text{composition}"] \\ F[\,1\,] & \end{tikzcd} \qquad \delta_2^1 : [\,1\,] \longrightarrow [\,2\,]\ ,$$

autrement dit, si $u, v \in F[\,1\,]$ et si $F(\delta_1^1)(u) = F(\delta_1^0)(v)$, alors $u \circ v = F(\delta_2^1)\theta^{-1}(u, v)$.

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie admettant des produits fibrés. On rappelle qu'un *objet catégorie dans* $\mathcal{C}$, ou plus simplement une *catégorie dans* $\mathcal{C}$, est la donnée

$$A = (\mathsf{Ob}(A), \mathsf{Fl}(A), s, b, comp, id)$$

formée de deux objets $\mathsf{Ob}(A)$ et $\mathsf{Fl}(A)$ de $\mathcal{C}$ et de morphismes

$$s, b : \mathsf{Fl}(A) \rightrightarrows \mathsf{Ob}(A)\ , \quad id : \mathsf{Ob}(A) \longrightarrow \mathsf{Fl}(A) \quad \text{et} \quad comp : \mathsf{Fl}(A)_s \times_{\mathsf{Ob}(A)} {}_b\, \mathsf{Fl}(A) \longrightarrow \mathsf{Fl}(A)$$

de $\mathcal{C}$, tels que $s \circ id = 1_{\mathsf{Ob}(A)} = b \circ id$ et rendant commutatifs les diagrammes suivants :

$$
\begin{tikzcd}
\mathsf{Fl}(A)_s \times_{\mathsf{Ob}(A)} {}_b\mathsf{Fl}(A) \arrow[r, "comp"] \arrow[d, "pr_1"'] & \mathsf{Fl}(A) \arrow[d, "b"] \\
\mathsf{Fl}(A) \arrow[r, "b"] & \mathsf{Ob}(A)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathsf{Fl}(A)_s \times_{\mathsf{Ob}(A)} {}_b\mathsf{Fl}(A) \arrow[r, "comp"] \arrow[d, "pr_2"'] & \mathsf{Fl}(A) \arrow[d, "s"] \\
\mathsf{Fl}(A) \arrow[r, "s"] & \mathsf{Ob}(A)
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\mathsf{Fl}(A)_s \times_{\mathsf{Ob}(A)} {}_b\mathsf{Fl}(A)_s \times_{\mathsf{Ob}(A)} {}_b\mathsf{Fl}(A) \arrow[r, "comp\times_{\mathsf{Ob}(A)}1_{\mathsf{Fl}(A)}"] \arrow[d, "1_{\mathsf{Fl}(A)}\times_{\mathsf{Ob}(A)}comp"'] & \mathsf{Fl}(A)_s \times_{\mathsf{Ob}(A)} {}_b\mathsf{Fl}(A) \arrow[d, "comp"] \\
\mathsf{Fl}(A)_s \times_{\mathsf{Ob}(A)} {}_b\mathsf{Fl}(A) \arrow[r, "comp"'] & \mathsf{Fl}(A)
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\mathsf{Fl}(A)_s \times_{\mathsf{Ob}(A)} \mathsf{Ob}(A) \arrow[r, "1_{\mathsf{Fl}(A)}\times_{\mathsf{Ob}(A)}id"] \arrow[dr, "\simeq"'] & \mathsf{Fl}(A)_s \times_{\mathsf{Ob}(A)} {}_b\mathsf{Fl}(A) \arrow[d, "comp"] & \mathsf{Ob}(A) \times_{\mathsf{Ob}(A)} {}_b\mathsf{Fl}(A) \arrow[l, "id\times_{\mathsf{Ob}(A)}1_{\mathsf{Fl}(A)}"'] \arrow[dl, "\simeq"] \\
& \mathsf{Ob}(A) &
\end{tikzcd}
.
$$

Bien entendu, si $\mathcal{C} = \mathcal{E}ns$, alors une catégorie dans $\mathcal{C}$ n'est rien d'autre qu'une catégorie ordinaire. On démontre dans le cas général (comme dans le cas où $\mathcal{C} = \mathcal{E}ns$) que se donner une catégorie dans $\mathcal{C}$ équivaut à se donner un objet simplicial de $\mathcal{C}$ (foncteur contravariant $\boldsymbol{\Delta}^\circ \to \mathcal{C}$) transformant les sommes amalgamées $(*)$ en carrés cartésiens.

Un *objet groupoïde dans* $\mathcal{C}$, ou plus simplement *groupoïde dans* $\mathcal{C}$ est une catégorie dans $\mathcal{C}$ telle qu'il existe un morphisme $inv : \mathsf{Fl}(A) \to \mathsf{Fl}(A)$ tel que $s \circ inv = b$, $b \circ inv = s$ et rendant commutatif le diagramme suivant

$$
\begin{tikzcd}
\mathsf{Fl}(A) \arrow[r] \arrow[d, "b"'] & \mathsf{Fl}(A)_s \times_{\mathsf{Ob}(A)} {}_s\mathsf{Fl}(A) \arrow[r, "1_{\mathsf{Fl}(A)}\times_{\mathsf{Ob}(A)}inv"] & \mathsf{Fl}(A)_s \times_{\mathsf{Ob}(A)} {}_b\mathsf{Fl}(A) \arrow[d, "comp"] \\
\mathsf{Ob}(A) \arrow[rr, "id"] & & \mathsf{Fl}(A) \\
\mathsf{Fl}(A) \arrow[r] \arrow[u, "s"] & \mathsf{Fl}(A)_b \times_{\mathsf{Ob}(A)} {}_b\mathsf{Fl}(A) \arrow[r, "inv\times_{\mathsf{Ob}(A)}1_{\mathsf{Fl}(A)}"'] & \mathsf{Fl}(A)_s \times_{\mathsf{Ob}(A)} {}_b\mathsf{Fl}(A) \arrow[u, "comp"']
\end{tikzcd}
$$

(les deux morphismes non explicités étant les morphismes diagonaux).

En fait, on peut affaiblir un peu les hypothèses sur $\mathcal{C}$. Au lieu de supposer que *tous* les produits fibrés existent dans $\mathcal{C}$, il suffit de supposer l'existence des produits fibrés itérés

$$\mathsf{Fl}(A)_s \times_{\mathsf{Ob}(A)} {}_b\mathsf{Fl}(A)_s \times_{\mathsf{Ob}(A)} \cdots \times_{\mathsf{Ob}(A)} {}_b\mathsf{Fl}(A)$$

dans le cas des catégories, ou des produits fibrés itérés

$$\mathsf{Fl}(A)_{\alpha_n} \times_{\mathsf{Ob}(A)} {}_{\beta_{n-1}} \mathsf{Fl}(A)_{\alpha_{n-1}} \times_{\mathsf{Ob}(A)} \cdots \times_{\mathsf{Ob}(A)} {}_{\beta_1} \mathsf{Fl}(A)$$

($\alpha_i\,,\ \beta_j \in \{s, b\}\,,\ 1 < i \leq n,\ 1 \leq j < n$) dans le cas des groupoïdes. Cette généralisation n'est pas purement gratuite. En effet, un exemple important est celui où $\mathcal{C}$ est la catégorie des variétés différentiables, qui n'admet pas des produits fibrés généraux. Néanmoins, il suffit que les morphismes source et but s et b soient des submersions pour que les produits fibrés pertinent existent. On obtient ainsi les notions de *catégorie de Lie* et de *groupoïde de Lie*.

Un autre exemple intéressant est celui des groupoïdes algébriques. Soient K un corps (resp. anneau) commutatif et $\mathcal{C}$ la catégorie des variétés algébriques sur K (resp. des K-schémas). On appelle *catégorie* (ou *groupoïde*) *algébrique* (resp. *schéma en catégories* (ou *en groupoïdes*)) une catégorie (ou groupoïde) dans $\mathcal{C}$. En vertu de ce qui précède, se donner une catégorie algébrique (resp. un schéma en catégories) revient à se donner un objet simplicial de $\mathcal{C}$ transformant les sommes amalgamées $(*)$ en carrés cartésiens. Si on se limite aux variétés (resp. schémas) affines, comme la catégorie des variétés (resp. schémas) affines est équivalente à la catégorie opposée à celle des K-algèbres commutatives de type fini (resp. des K-algèbres commutatives arbitraires), la donnée d'une catégorie algébrique (resp. schéma en catégories) affine équivaut à la donnée d'une algèbre *cosimpliciale*, foncteur *covariant* de $\mathbf{\Delta}$ dans la catégorie des K-algèbres commutatives de type fini (resp. des K-algèbres commutatives arbitraires), satisfaisant à la propriété de transformer les carrés cocartésiens $(*)$ en carrés *cocartésiens*. On rappelle que les carrés cocartésiens d'algèbres commutatives sont les carrés isomorphes à un carré de la forme

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "v"] \arrow[d, "u"'] & C \arrow[d, "j"] \\ B \arrow[r, "i"] & B \otimes_A C \end{tikzcd} \quad ,$$

où $B \otimes_A C$ désigne l'algèbre produit tensoriel sur A, et i et j designent les morphismes définis par

$$i(b) = b \otimes 1\ , \quad b \in B\ , \qquad \text{et} \qquad j(c) = 1 \otimes c\ , \quad c \in C\ .$$

De façon équivalente un carré commutatif d'algèbres commutatives

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "v"] \arrow[d, "u"'] & C \arrow[d, "j"] \\ B \arrow[r, "i"] & D \end{tikzcd}$$

est cocartésien si et seulement si le morphisme

$$B \otimes_A C \longrightarrow D \quad , \qquad b \otimes c \mapsto i(b)j(c)\ , \quad b \in B\ , \quad c \in C\ ,$$

est un isomorphisme.

Une "catégorie quantique" doit être un analogue non commutatif d'une catégorie algébrique. Pour définir cette notion, on remplacera, comme d'habitude, la catégorie des algèbres commutatives par celle des algèbres (associatives, unifères) non nécessairement commutatives (sur un anneau commutatif de base K), qu'on notera $\mathcal{A}lg_K$ ou $\mathcal{A}lg$. Néanmoins, on doit modifier la notion de carré cocartésien. (De même qu'un groupe quantique n'est pas un objet groupe de la catégorie $\mathcal{A}lg^\circ$ (catégorie opposée à $\mathcal{A}lg$), une catégorie quantique ne sera pas une catégorie dans $\mathcal{A}lg^\circ$.) En effet, les sommes amalgamées existent dans $\mathcal{A}lg$, mais ils sont "trop gros", dans le sens suivant. Si A, B, C sont des algèbres qui sont déformation (ou "quantification") d'algèbres commutatives et $u : A \to B$, $v : A \to C$ des morphismes d'algèbres, alors la somme amalgamée $B \amalg_A C$ dans $\mathcal{A}lg$ n'est pas en général déformation d'une algèbre commutative. Par exemple, si $A = K$, $B = C = K[X]$, alors $B \amalg_A C \simeq K\langle X_1, X_2\rangle$ est l'algèbre des polynomes non commutatifs en deux variables. De façon imprécise mais imagée, on peut dire que la "quantification ne commute pas aux sommes amalgamées". D'un autre coté, dans le cas non commutatif, le K-module $B \otimes_A C$ n'a pas de structure naturelle d'algèbre, et ne peut donc pas être utilisé à la place des sommes amalgamées. La solution est inspirée des produits tensoriels tordus de Cartier. On dira qu'un carré commutatif

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "v"] \arrow[d, "u"'] & C \arrow[d, "j"] \\ B \arrow[r, "i"] & D \end{tikzcd}$$

de $\mathcal{A}lg$ est cocartierien si les morphismes de K-modules

$$\begin{array}{lcll} B \otimes_A C \longrightarrow D & \text{et} & C \otimes_A B \longrightarrow D & \\ b \otimes c \mapsto i(b)j(c) & & c \otimes b \mapsto j(c)i(b)\ , & b \in B,\ c \in C\ , \end{array}$$

sont des isomorphismes. Le point est que si l'on se donne un diagramme :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "v"] \arrow[d, "u"'] & C \\ B & \end{tikzcd}$$

dans $\mathcal{A}lg$, ce diagramme ne peut pas toujours être complété en un carré cocartierien, ni de façon unique (à isomorphisme près) quand cela est possible. Pierre Cartier a obtenu une classification (à isomorphisme près) des carrés cocartieriens, complétant le diagramme ci dessus.

On définira donc une catégorie quantique comme étant une algèbre cosimpliciale, foncteur covariant de $\mathbf{\Delta}$ dans $\mathcal{A}lg$, transformant les carrés cocartésiens $(*)$ en carrés cocartieriens. Autrement dit, il s'agit d'un foncteur

$$F : \mathbf{\Delta} \longrightarrow \mathcal{A}lg$$

tel que pour tout m et n le carré

$$(**)\qquad \begin{array}{ccc} F[\,0\,] & \xrightarrow{F(b_n)} & F[\,n\,] \\ {\scriptstyle F(a_m)}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle F(j)} \\ F[\,m\,] & \xrightarrow[F(i)]{} & F[\,m+n\,] \end{array} \qquad \begin{array}{ll} a_m(0)=0 & \\ b_n(0)=n & \\ j(k)=k\,, & 0\leq k\leq n\,, \\ i(l)=n+l\,, & 0\leq l\leq m\,, \end{array}$$

est cocartierien.

Une théorie de groupoïdes quantiques non équivalente à celle présentée ici a été développée par J.-H. Lu [Lu] et par P. Xu [Xu].

Plan

Dans le premier paragraphe, on étudie plusieurs présentations de la catégorie des simplexes. Après un bref rappel de la présentation classique, on définit une notion de catégorie partiellement monoïdale, on munit d'une telle structure la catégorie des simplexes, et on décrit une présentation de cette dernière, comme catégorie partiellement monoïdale. À la fin de ce paragraphe, on interprète et on renforce les résultats obtenus, en termes de 2-catégories.

Dans le deuxième paragraphe, inspiré de [Ca], on généralise la notion de produit tensoriel tordu d'algèbres [Ca], [Man], [CSV], au cas des produits tensoriels sur un anneau de base non commutatif. Sans chercher à être complet, on démontre uniquement les résultats utilisés dans la suite de l'article.

Dans le troisième paragraphe, on introduit la notion de catégorie quantique qui est au centre de ce travail. On étudie les propriétés élémentaires de cette nouvelle structure, et on montre que cette notion généralise celle de bigèbre. On expose un exemple inspiré de [V], et un analogue quantique d'une famille de monoïdes.

Dans le paragraphe quatre, on introduit la notion d'antipode d'une catégorie quantique, ainsi que celle de groupoïde quantique de base non commutative. Après une partie technique, consacrée aux pseudo-bigébroïdes de Hopf, on démontre les propriétés essentielles de l'antipode. On termine par quelques exemples. En particulier, on expose une généralisation de l'exemple de Vainerman [V], et on montre que les groupes quantiques tressés de Majid [Maj] entrent dans le cadre des groupoïdes quantiques.

1. Présentations de la catégorie des simplexes

1.1. La catégorie des simplexes.

Définition 1.1.1. On appelle *catégorie des simplexes* et on note $\mathbf{\Delta}$ la catégorie dont les objets sont les ensembles

$$[\,n\,] = \{0, 1, \dots, n\} \ , \quad n \geq 0 \ ,$$

ordonnés par l'ordre naturel, et les morphismes les applications croissantes.

1.1.2. On note

$$\delta_n^i : [\,n-1\,] \to [\,n\,] \quad , \qquad n \geq 1 \ , \quad 0 \leq i \leq n \ ,$$

le morphisme de $\mathbf{\Delta}$ défini par

$$\delta_n^i(k) = k \ , \quad 0 \leq k < i \ , \qquad \text{et} \qquad \delta_n^i(k) = k+1 \ , \quad i \leq k \leq n-1 \ ,$$

et

$$\sigma_n^i : [\,n+1\,] \to [\,n\,] \quad , \qquad n \geq 0 \ , \quad 0 \leq i \leq n \ ,$$

le morphisme défini par

$$\sigma_n^i(k) = k \ , \quad 0 \leq k \leq i \ , \qquad \text{et} \qquad \sigma_n^i(k) = k-1 \ , \quad i < k \leq n+1 \ .$$

Ces morphismes, qu'on appelle respectivement *opérateurs de face* et *opérateurs de dégénérescence* satisfont aux relations suivantes, qu'on appelle *relations simpliciales*

$$\delta_{n+1}^i \delta_n^j = \delta_{n+1}^{j+1} \delta_n^i \quad , \qquad 0 \leq i \leq j \leq n \ , \quad n > 0 \ ,$$

$$\sigma_n^j \sigma_{n+1}^i = \sigma_n^i \sigma_{n+1}^{j+1} \quad , \qquad 0 \leq i \leq j \leq n \ , \quad n \geq 0 \ ,$$

$$\sigma_n^j \delta_{n+1}^i = \begin{cases} \delta_n^i \sigma_{n-1}^{j-1} \ , & 0 \leq i < j \leq n \ , \quad n > 0 \ , \\ 1_{[\,n\,]} \quad , & 0 \leq j \leq n \ , \quad i \in \{j, j+1\} \ , \quad n \geq 0 \ , \\ \delta_n^{i-1} \sigma_{n-1}^j \ , & 0 \leq j < i-1 \leq n \ , \quad n > 0 \ , \end{cases}$$

Lemme 1.1.3. *Tout morphisme $\varphi : [\,m\,] \to [\,n\,]$ admet une décomposition unique :*

$$\varphi = \delta_n^{i_s} \delta_{n-1}^{i_{s-1}} \dots \delta_{n-s+1}^{i_1} \sigma_{m-t}^{j_t} \dots \sigma_{m-2}^{j_2} \sigma_{m-1}^{j_1} \quad ,$$

avec $0 \leq i_1 < \dots < i_s \leq n$, $0 \leq j_t < \dots < j_1 < m$ et $m - t = n - s$. De plus, $\{i_1, \dots i_s\} = [\,n\,] - \varphi([\,m\,])$ et $\{j_1, \dots j_t\} = \{j \in [\,m\,] : \varphi(j) = \varphi(j+1)\}$.

Proposition 1.1.4. *La catégorie des simplexes est engendrée par les objets* $[n]$, $n \in \mathbb{N}$, *et les opérateurs de face et de dégénérescence, soumis aux relations simpliciales. Autrement dit, pour toute catégorie* $\mathcal{C}$, *toute famille* $(X_n)_{n\geq 0}$ *d'objets de* $\mathcal{C}$ *et toutes familles*

$$(d_n^i : X_{n-1} \to X_n)_{n\geq 1,\, 0\leq i\leq n} \qquad et \qquad (s_n^i : X_{n+1} \to X_n)_{n\geq 0,\, 0\leq i\leq n}$$

de morphismes de $\mathcal{C}$ *satisfaisant aux relations :*

$$d_{n+1}^i d_n^j = d_{n+1}^{j+1} d_n^i \quad , \qquad 0 \leq i \leq j \leq n \ , \quad n > 0 \ ,$$

$$s_n^j s_{n+1}^i = s_n^i s_{n+1}^{j+1} \quad , \qquad 0 \leq i \leq j \leq n \ , \quad n \geq 0 \ ,$$

$$s_n^j d_{n+1}^i = \begin{cases} d_n^i s_{n-1}^{j-1} \ , & 0 \leq i < j \leq n \ , \quad n > 0 \ , \\ 1_{X_n} \quad , & 0 \leq j \leq n \ , \quad i \in \{j, j+1\} \ , \quad n \geq 0 \ , \\ d_n^{i-1} s_{n-1}^j \ , & 0 \leq j < i-1 \leq n \ , \quad n > 0 \ , \end{cases}$$

il existe un foncteur unique $F : \mathbf{\Delta} \to \mathcal{C}$ (objet cosimplicial de $\mathcal{C}$) *tel que*

$$F[n] = X_n \ , \ n \in \mathbb{N} \ , \quad F(\delta_n^i) = d_n^i \ , \ 0 \leq i \leq n \ , \ n > 0 \ , \quad F(\sigma_n^i) = s_n^i \ , \ 0 \leq i \leq n \ , \ n \geq 0 \ .$$

La démonstration du lemme 1.1.3 est facile et classique. Pour la démonstration de la proposition 1.1.4, qui en est conséquence, voir [G-Z], II, 2.2.

1.2 Catégories partiellement monoïdales.

1.2.1. On appelle *catégorie partiellement monoïdale* la donnée de $(\mathcal{V},\ {}_\bullet\mathcal{V},\ \mathcal{V}_\bullet,\ \otimes,\ I,\ a,\ l,\ r)$, où $\mathcal{V}$ désigne une catégorie, ${}_\bullet\mathcal{V}$ et $\mathcal{V}_\bullet$ des sous-catégories (non pleines) de $\mathcal{V}$, ayant même ensemble d'objets que $\mathcal{V}$ et telles que les foncteurs d'inclusion soient conservatifs (autrement dit, si u est un morphisme inversible de $\mathcal{V}$ et si u est dans ${}_\bullet\mathcal{V}$ (resp. dans $\mathcal{V}_\bullet$) il en est de même pour son inverse),

$$\mathcal{V}_\bullet \times {}_\bullet\mathcal{V} \xrightarrow{\otimes} \mathcal{V}$$

un foncteur tel que si l'on note ${}_\bullet\mathcal{V}_\bullet$ l'intersection de ${}_\bullet\mathcal{V}$ et $\mathcal{V}_\bullet$, on ait :

a) pour tout $u \in \mathsf{Fl}({}_\bullet\mathcal{V}_\bullet)$ et tout $v \in \mathsf{Fl}({}_\bullet\mathcal{V})$, on a $u \otimes v \in \mathsf{Fl}({}_\bullet\mathcal{V})$;

b) pour tout $u \in \mathsf{Fl}(\mathcal{V}_\bullet)$ et tout $v \in \mathsf{Fl}({}_\bullet\mathcal{V}_\bullet)$, on a $u \otimes v \in \mathsf{Fl}(\mathcal{V}_\bullet)$;

I est un objet de $\mathcal{V}$ et a, l, r sont des *contraintes d'associativité, d'unité à gauche* et *d'unité à droite* respectivement. De façon précise, en vertu de (a) et (b), "le produit tensoriel" $\otimes$ définit deux foncteurs

$$\mathcal{V}_\bullet \times {}_\bullet\mathcal{V}_\bullet \times {}_\bullet\mathcal{V} \rightrightarrows \mathcal{V}$$

par

$$(X, Y, Z) \mapsto (X \otimes Y) \otimes Z \qquad \text{et} \qquad (X, Y, Z) \mapsto X \otimes (Y \otimes Z) \ ,$$

et a est un isomorphisme du premier sur le second. De plus, on demande que pour tous objets X, Y et Z de $\mathcal{V}$,

$$a_{X,Y,Z} : (X \otimes Y) \otimes Z \longrightarrow X \otimes (Y \otimes Z)$$

soit dans ${}_\bullet\mathcal{V}_\bullet$. De même, l (resp. r) est un isomorphisme du foncteur

$$\begin{array}{ll} {}_\bullet\mathcal{V} \longrightarrow {}_\bullet\mathcal{V} & \qquad (\text{resp.}\quad \mathcal{V}_\bullet \longrightarrow \mathcal{V}_\bullet\ ) \\ X \mapsto I \otimes X & \qquad (\text{resp.}\quad X \mapsto X \otimes I\ ) \end{array}$$

sur le foncteur identique de ${}_\bullet\mathcal{V}$ (resp. $\mathcal{V}_\bullet$) et on demande que, pour tout objet X de $\mathcal{V}$,

$$l_X : I \otimes X \longrightarrow X \qquad \text{et} \qquad r_X : X \otimes I \longrightarrow X$$

soient dans ${}_\bullet\mathcal{V}_\bullet$. Ces contraintes doivent satisfaire aux conditions du "pentagone" et du "triangle" de Mac Lane : elles doivent rendre commutatifs les diagrammes suivants :

$$\begin{tikzcd} ((X \otimes Y) \otimes Z) \otimes T \arrow[r, "a_{X\otimes Y,Z,T}"] \arrow[d, "a_{X,Y,Z}\otimes 1_T"'] & (X \otimes Y) \otimes (Z \otimes T) \arrow[r, "a_{X,Y,Z\otimes T}"] & X \otimes (Y \otimes (Z \otimes T)) \\ (X \otimes (Y \otimes Z)) \otimes T \arrow[rr, "a_{X,Y\otimes Z,T}"] & & X \otimes ((Y \otimes Z) \otimes T) \arrow[u, "1_X \otimes a_{Y,Z,T}"'] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} (X \otimes I) \otimes Y \arrow[rr, "a_{X,I,Y}"] \arrow[dr, "r_X \otimes 1_Y"'] & & X \otimes (I \otimes Y) \arrow[dl, "1_X \otimes l_Y"] \\ & X \otimes Y & \end{tikzcd} \qquad ,$$

pour tous objets X, Y, Z et T de $\mathcal{V}$.

On remarque que ${}_\bullet\mathcal{V}_\bullet$ munie de la restriction du foncteur $\otimes$, de l'objet I et des isomorphismes fonctoriels a, l et r est une catégorie monoïdale. Par ailleurs, une catégorie monoïdale n'est rien d'autre qu'une catégorie partiellement monoïdale telle que ${}_\bullet\mathcal{V} = \mathcal{V}_\bullet = \mathcal{V}$. Soit $f : X \to Y$ un moprhisme de $\mathcal{V}$. On note, parfois, $f : {}_\bullet X \to {}_\bullet Y$, $f : X_\bullet \to Y_\bullet$ ou $f : {}_\bullet X_\bullet \to {}_\bullet Y_\bullet$ pour indiquer que f est un morphisme de ${}_\bullet\mathcal{V}$, $\mathcal{V}_\bullet$ ou ${}_\bullet\mathcal{V}_\bullet$ respectivement.

Enfin, il est facile de vérifier que si l'on définit un foncteur $\otimes^\circ : {}_\bullet\mathcal{V} \times \mathcal{V}_\bullet \to \mathcal{V}$ par $X \otimes^\circ Y = Y \otimes X$ et un isomorphisme de foncteurs a° par $a^\circ_{X,Y,Z} = a^{-1}_{Z,Y,X}$, pour X, Y, Z objets de $\mathcal{V}$, alors $(\mathcal{V},\ \mathcal{V}_\bullet,\ {}_\bullet\mathcal{V},\ \otimes^\circ,\ I,\ a^\circ,\ r,\ l)$ est une catégorie partiellement monoïdale appelée *transposée* de la précédente.

1.2.2. Soient $(\mathcal{V},\ {}_\bullet\mathcal{V},\ \mathcal{V}_\bullet,\ \otimes,\ I,\ a,\ l,\ r)$ et $(\mathcal{V}',\ {}_\bullet\mathcal{V}',\ \mathcal{V}'_\bullet,\ \otimes',\ I',\ a',\ l',\ r')$ deux catégories partiellement monoïdales. Un *foncteur partiellement monoïdal* de la première vers la deuxième est la donnée de (F, Φ_2, Φ_0), où $F : \mathcal{V} \to \mathcal{V}'$ est un foncteur tel que

a) pour tout $u \in \mathsf{Fl}({}_\bullet\mathcal{V})$, on a $F(u) \in \mathsf{Fl}({}_\bullet\mathcal{V}')$;

b) pour tout $u \in \mathsf{Fl}(\mathcal{V}_\bullet)$, on a $F(u) \in \mathsf{Fl}(\mathcal{V}'_\bullet)$;

et Φ_2 et Φ_0 sont des *contraintes de compatibilité aux produits tensoriels* et *de compatibilité aux unités* respectivement. De façon précise, en vertu des conditions (a) et (b), on définit deux foncteurs

$$\mathcal{V}_\bullet \times {}_\bullet\mathcal{V} \rightrightarrows \mathcal{V}'$$

par

$$(X,Y) \mapsto F(X) \otimes' F(Y) \qquad \text{et} \qquad (X,Y) \mapsto F(X \otimes Y)\ ,$$

et Φ_2 est un isomorphisme du premier sur le second. De plus, on demande que pour tous objets X et Y de $\mathcal{V}$,

$$\Phi_{2,X,Y} : F(X) \otimes' F(Y) \longrightarrow F(X \otimes Y)$$

soit dans ${}_\bullet\mathcal{V}'_\bullet$. De même, $\Phi_0 : I' \to F(I)$ est un isomorphisme appartenant à ${}_\bullet\mathcal{V}'_\bullet$. Ces contraintes doivent rendre commutatifs les diagrammes suivants :

$$(1.2.2.1) \qquad \begin{tikzcd}
(F(X) \otimes' F(Y)) \otimes' F(Z) \arrow[r, "a'_{F(X),F(Y),F(Z)}"] \arrow[d, "\Phi_{2,X,Y} \otimes' 1_{F(Z)}"'] & F(X) \otimes' (F(Y) \otimes' F(Z)) \arrow[d, "1_{F(X)} \otimes' \Phi_{2,Y,Z}"] \\
F(X \otimes Y) \otimes' F(Z) \arrow[d, "\Phi_{2,X \otimes Y,Z}"'] & F(X) \otimes' F(Y \otimes Z) \arrow[d, "\Phi_{2,X,Y \otimes Z}"] \\
F((X \otimes Y) \otimes Z) \arrow[r, "F(a_{X,Y,Z})"] & F(X \otimes (Y \otimes Z))
\end{tikzcd}$$

$$(1.2.2.2) \qquad \begin{tikzcd}
I' \otimes' F(X) \arrow[r, "l'_{F(X)}"] \arrow[d, "\Phi_0 \otimes' 1_{F(X)}"'] & F(X) \\
F(I) \otimes' F(X) \arrow[r, "\Phi_{2,I,X}"] & F(I \otimes X) \arrow[u, "F(l_X)"']
\end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd}
F(X) & F(X) \otimes' I' \arrow[l, "r'_{F(X)}"'] \arrow[d, "1_{F(X)} \otimes' \Phi_0"] \\
F(X \otimes I) \arrow[u, "F(r_X)"] & F(X) \otimes' F(I) \arrow[l, "\Phi_{2,X,I}"']
\end{tikzcd}\ ,$$

pour tous objets X, Y et Z de $\mathcal{V}$.

Si (F', Φ'_2, Φ'_0) désigne un deuxième foncteur partiellement monoïdal de même source et but que (F, Φ_2, Φ_0) un *morphisme de foncteurs partiellement monoïdaux* de (F, Φ_2, Φ_0) vers (F', Φ'_2, Φ'_0) est un morphisme de foncteurs α de F vers F' tel que :

$a)$ pour tout objet X de $\mathcal{V}$, α_X est un morphisme de ${}_\bullet\mathcal{V}'_\bullet$;

$b)$ pour tous objets X et Y de $\mathcal{V}$ les diagrammes suivants sont commutatifs :

$$(1.2.2.3) \qquad \begin{tikzcd}
F(X) \otimes' F(Y) \arrow[r, "\alpha_X \otimes \alpha_Y"] \arrow[d, "\Phi_{2,X,Y}"'] & F'(X) \otimes' F'(Y) \arrow[d, "\Phi'_{2,X,Y}"] \\
F(X \otimes Y) \arrow[r, "\alpha_{X \otimes Y}"] & F'(X \otimes Y)
\end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd}
& I' \arrow[dl, "\Phi_0"'] \arrow[dr, "\Phi'_0"] & \\
F(I) \arrow[rr, "\alpha_I"] & & F'(I)
\end{tikzcd}\ .$$

La composition des foncteurs partiellement monoïdaux, ainsi que celle des morphismes de tels foncteurs, est définie de la façon évidente, et $(1_{\mathcal{V}}, 1_{\otimes}, 1_I)$ est un foncteur partiellement monoïdal, appelé foncteur partiellement monoïdal identique. On dit que le foncteur partiellement monoïdal (F, Φ_2, Φ_0) est une *équivalence de catégories partiellement monoïdales* s'il existe un foncteur partiellement monoïdal de source (resp. de but) le but (resp. la source) de (F, Φ_2, Φ_0) tel que les deux composés soient isomorphes aux foncteurs identiques, par des isomorphismes de foncteurs partiellement monoïdaux.

1.2.3. On dit qu'une catégorie partiellement monoïdale est *stricte* si les contraintes d'associativité, d'unité à gauche et d'unité à droite sont des isomorphismes identiques (ce qui implique, en particulier, que les foncteurs source et but sont égaux). On démontre un théorème de cohérence, pour les catégories partiellement monoïdales, analogue au théorème de cohérence de Mac Lane, ce qui permet, sans perte de généralité, de ne considérer que des catégories partiellement monoïdales strictes. Ce théorème résulte de celui de Mac Lane, appliqué à la catégorie monoïdale ${}_\bullet\mathcal{V}_\bullet$, et implique, en particulier, que pour toute catégorie partiellement monoïdale, il existe une catégorie partiellement monoïdale stricte et une équivalence de catégories partiellement monoïdales de la deuxième sur la première.

On dit qu'un foncteur partiellement monoïdal est *strict* si les contraintes de compatibilité aux produits tensoriels et de compatibilité aux unités sont des isomorphismes identiques.

Exemple 1.2.4. Soient K un anneau commutatif, B une K-algèbre, $\mathcal{V}$ la catégorie dont les objets sont les $(B\,;B)$-bimodules et dont les morphismes sont les applications K-linéaires, ${}_\bullet\mathcal{V}$ (resp. $\mathcal{V}_\bullet$) la sous-catégorie ayant mêmes objets et dont les morphismes sont les applications B-linéaires à gauche (resp. à droite), de sorte que ${}_\bullet\mathcal{V}_\bullet$ soit la catégorie des $(B\,;B)$-bimodules,

$$\mathcal{V}_\bullet \times {}_\bullet\mathcal{V} \xrightarrow{\otimes} \mathcal{V}$$

le foncteur produit tensoriel $\otimes_B$ sur B d'un B-module à droite par un B-module à gauche, I le $(B\,;B)$-bimodule B, et a, l et r les contraintes d'associativité et d'unité habituelles. Alors

$$(\mathcal{V},\ {}_\bullet\mathcal{V},\ \mathcal{V}_\bullet,\ \otimes,\ I,\ a,\ l,\ r)$$

est une catégorie partiellement monoïdale, qu'on appelle la *catégorie partiellement monoïdale des* $(B\,;B)$*-bimodules.* Cette catégorie partiellement monoïdale n'est pas stricte, mais en vertu du théorème de cohérence, on fera comme si elle l'était, quitte à la remplacer par une catégorie partiellement monoïdale stricte équivalente (par une équivalence de catégories partiellement monoïdales). (Dans ce cas particulier, le théorème de cohérence étant une évidence puisque les contraintes sont définies par des propriétés universelles.)

Notons B° la K-algèbre opposée à B et, pour tout $(B\,;B)$-bimodule X, notons X° le $(B^\circ; B^\circ)$-bimodule opposé à X, ayant même K-module sous-jacent et dont la structure de B°-module à gauche (resp. à droite) est définie par

$$(b,x) \longmapsto xb \qquad (\text{resp.} \quad (x,b) \longmapsto bx\ ) \qquad b \in B\,, \quad x \in X \quad .$$

Pour toute application K-linéaire $u : X \to Y$ d'un $(B\,;B)$-bimodule dans un autre, $u^\circ = u : X^\circ \to Y^\circ$ est une application K-linéaire qui est B°-linéaire à droite (resp. à gauche) si u est B-linéaire à gauche (resp. à droite). Pour tout couple de $(B\,;B)$-bimodules X, Y, notons

$$\Psi_{X,Y} : X^\circ \otimes_{B^\circ} Y^\circ \longrightarrow (Y \otimes_B X)^\circ$$

le morphisme de $(B^\circ;B^\circ)$-bimodules défini par

$$x \otimes_{B^\circ} y \longmapsto y \otimes_B x \qquad x \in X\,, \quad y \in Y \quad .$$

On vérifie facilement que $(?^\circ, \Psi, 1_B)$ est une équivalence de catégories partiellement monoïdales (et même un isomorphisme) de la catégorie partiellement monoïdale transposée à celle des $(B\,;B)$-bimodules vers celle des $(B^\circ;B^\circ)$-bimodules.

Exemple 1.2.5. Soit $\mathcal{V} = \mathbf{\Delta}$ la catégorie des simplexes. Pour tout m, $m \in \mathbb{N}$, notons

$$a_m,\, b_m : [\,0\,] \rightrightarrows [\,m\,]$$

les morphismes de $\mathcal{V}$ définis par $a_m(0) = 0$ et $b_m(0) = m$, autrement dit

$$a_m = \delta^m_m \delta^{m-1}_{m-1} \dots \delta^1_1 \qquad \text{et} \qquad b_m = \delta^{m-1}_m \delta^{m-2}_{m-1} \dots \delta^0_1 \quad .$$

On définit ${}_\bullet\mathcal{V} = {}_\bullet\mathbf{\Delta}$ (resp. $\mathcal{V}_\bullet = \mathbf{\Delta}_\bullet$) comme étant la sous-catégorie de $\mathcal{V}$, ayant mêmes objets que $\mathcal{V}$ et telle que

$$\mathsf{Hom}_{{}_\bullet\mathcal{V}}([\,m\,],[\,n\,]) = \{\varphi \in \mathsf{Hom}_{\mathcal{V}}([\,m\,],[\,n\,]) : \varphi b_m = b_n\}$$

$$\text{(resp.} \qquad \mathsf{Hom}_{\mathcal{V}_\bullet}([\,m\,],[\,n\,]) = \{\varphi \in \mathsf{Hom}_{\mathcal{V}}([\,m\,],[\,n\,]) : \varphi a_m = a_n\} \quad)$$

La somme amalgamée au dessus de $[\,0\,]$ via a_m et b_n :

$$\begin{tikzcd} {[\,0\,]} \arrow[r, "b_n"] \arrow[d, "a_m"'] & {[\,n\,]} \arrow[d, "j"] \\ {[\,m\,]} \arrow[r, "i"'] & {[\,m\,] \amalg_{[\,0\,]} [\,n\,] = [\,m+n\,]} \end{tikzcd}$$

définit un foncteur

$$\otimes = \amalg_{[\,0\,]} : \mathcal{V}_\bullet \times {}_\bullet\mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V} \quad .$$

De façon explicite $[\,m\,] \otimes [\,n\,] = [\,m+n\,]$ et si $\varphi : [\,m\,]_\bullet \to [\,m'\,]_\bullet$ et $\psi : {}_\bullet[\,n\,] \to {}_\bullet[\,n'\,]$ sont des morphismes de $\mathcal{V}_\bullet$ et ${}_\bullet\mathcal{V}$ respectivement, autrement dit, des applications croissantes telles que $\varphi(0) = 0$ et $\psi(n) = n'$, alors le morphisme $\varphi \otimes \psi : [\,m+n\,] \to [\,m'+n'\,]$ de $\mathcal{V}$ est défini par

$$\varphi \otimes \psi(i) = \begin{cases} \psi(i) \quad , & 0 \le i \le n\ , \\ \varphi(i-n) + n' \ , & n \le i \le m+n\ . \end{cases}$$

(On rappelle qu'on imagine les ensembles $[\,l\,]$ écrits dans l'odre décroissant.) Enfin, on note I l'objet $[\,0\,]$ de $\mathbf{\Delta}$. Alors

$$(\mathcal{V},\ {}_\bullet\mathcal{V},\ \mathcal{V}_\bullet,\ \otimes,\ I) = (\mathbf{\Delta},\ {}_\bullet\mathbf{\Delta},\ \mathbf{\Delta}_\bullet,\ \amalg_{[\,0\,]},\ [\,0\,])$$

est une catégorie partiellement monoïdale stricte (dans le cas strict on se dispense d'indiquer les contraintes, puisque elles sont l'identité). On dira que ($\mathbf{\Delta}$, ${}_\bullet\mathbf{\Delta}$, $\mathbf{\Delta}_\bullet$, $\amalg_{[0]}$, $[0]$) est la *catégorie partiellement monoïdale des simplexes.*

Posons $\mathsf{s} = \delta_1^1$, $\mathsf{b} = \delta_1^0$, $\delta = \delta_2^1$ et $\epsilon = \sigma_0^0$. On remarque que

$$\mathsf{s} : [0]_\bullet \to [1]_\bullet \ , \quad \mathsf{b} : {}_\bullet[0] \to {}_\bullet[1] \ , \quad \delta : {}_\bullet[1]_\bullet \to {}_\bullet[2]_\bullet \ , \quad \epsilon : {}_\bullet[1]_\bullet \to {}_\bullet[0]_\bullet \ ,$$

autrement dit, s est un morphisme de $\mathbf{\Delta}_\bullet$, b un morphisme de ${}_\bullet\mathbf{\Delta}$, et δ et ϵ des morphismes de ${}_\bullet\mathbf{\Delta}_\bullet$. On vérifie aussitôt que

$$(1.2.5.1) \qquad \begin{aligned} &\delta_n^0 = 1_{[n-1]} \otimes \mathsf{b} = 1_{[n-1]} \amalg_{[0]} \mathsf{b} \ , \\ &\delta_n^i = 1_{[n-i-1]} \otimes \delta \otimes 1_{[i-1]} = 1_{[n-i-1]} \amalg_{[0]} \delta \amalg_{[0]} 1_{[i-1]} \ , \quad 0 < i < n \ , \\ &\delta_n^n = \mathsf{s} \otimes 1_{[n-1]} = \mathsf{s} \amalg_{[0]} 1_{[n-1]} \ , \\ &\sigma_n^i = 1_{[n-i]} \otimes \epsilon \otimes 1_{[i]} = 1_{[n-i]} \amalg_{[0]} \epsilon \amalg_{[0]} 1_{[i]} \ , \quad 0 \leq i \leq n \ , \end{aligned}$$

De plus, il résulte des relations simpliciales qu'on a

$$(1.2.5.2) \qquad \begin{aligned} &\epsilon\,\mathsf{s} = 1_{[0]} = \epsilon\,\mathsf{b} \quad , \qquad \delta\,\mathsf{s} = (\mathsf{s} \otimes 1_{[1]})\,\mathsf{s} \quad , \qquad \delta\,\mathsf{b} = (1_{[1]} \otimes \mathsf{b})\,\mathsf{b} \quad , \\ &(\delta \otimes 1_{[1]})\,\delta = (1_{[1]} \otimes \delta)\,\delta \quad , \qquad (\epsilon \otimes 1_{[1]})\,\delta = 1_{[1]} = (1_{[1]} \otimes \epsilon)\,\delta \quad . \end{aligned}$$

On remarque que les opérateurs de dégénérescence, σ_n^i, $0 \leq i \leq n$, sont tous dans ${}_\bullet\mathbf{\Delta}_\bullet$, tandis que pour les opérateurs de face, on a $\delta_n^i \in \mathsf{Fl}({}_\bullet\mathbf{\Delta}_\bullet)$, $0 < i < n$, $\delta_n^0 \in \mathsf{Fl}({}_\bullet\mathbf{\Delta})$ et $\delta_n^n \in \mathsf{Fl}(\mathbf{\Delta}_\bullet)$, pour tout $n > 0$.

Théorème 1.2.6. *La catégorie partiellement monoïdale des simplexes est la catégorie partiellement monoïdale stricte engendrée par l'objet* $[1]$ *et les morphismes*

$$\mathsf{s} : [0]_\bullet \to [1]_\bullet \ , \quad \mathsf{b} : {}_\bullet[0] \to {}_\bullet[1] \ , \quad \delta : {}_\bullet[1]_\bullet \to {}_\bullet[2]_\bullet \ , \quad \epsilon : {}_\bullet[1]_\bullet \to {}_\bullet[0]_\bullet \ ,$$

soumis aux relations (1.2.5.2). *Autrement dit, pour toute catégorie partiellement monoïdale stricte* $(\mathcal{V}, {}_\bullet\mathcal{V}, \mathcal{V}_\bullet, \otimes, I)$, *tout objet* X *de* $\mathcal{V}$, *et tous morphismes*

$$s : I_\bullet \to X_\bullet \ , \quad b : {}_\bullet I \to {}_\bullet X \ , \quad \Delta : {}_\bullet X_\bullet \to {}_\bullet X \otimes X_\bullet \ , \quad \varepsilon : {}_\bullet X_\bullet \to {}_\bullet I_\bullet \ ,$$

satisfaisant aux relations

$$(1.2.6.1) \qquad \begin{aligned} &\varepsilon s = 1_I = \varepsilon b \quad , \qquad \Delta s = (s \otimes 1_X)s \quad , \qquad \Delta b = (1_X \otimes b)b \quad , \\ &(\Delta \otimes 1_X)\Delta = (1_X \otimes \Delta)\Delta \quad , \qquad (\varepsilon \otimes 1_X)\Delta = 1_X = (1_X \otimes \varepsilon)\Delta \quad , \end{aligned}$$

il existe un foncteur partiellement monoïdal strict unique F *tel que*

$$F[1] = X \quad , \qquad F(\mathsf{s}) = s \quad , \qquad F(\mathsf{b}) = b \quad , \qquad F(\delta) = \Delta \qquad \textit{et} \qquad F(\epsilon) = \varepsilon \quad .$$

De plus, si F et F' sont deux foncteurs partiellement monoïdaux stricts de la catégorie partiellement monoïdale des simplexes dans $(\mathcal{V},\, {}_\bullet\mathcal{V},\, \mathcal{V}_\bullet,\, \otimes,\, I)$, pour tout morphisme $a : F[\,1\,] \to F'[\,1\,]$ de $\mathcal{V}$ tel que

$$(1.2.6.2)\qquad aF(\mathsf{s}) = F'(\mathsf{s})\ ,\quad aF(\mathsf{b}) = F'(\mathsf{b})\ ,\quad (a\otimes a)F(\delta) = F'(\delta)a\ ,\quad F(\epsilon) = F'(\epsilon)a$$

il existe un unique morphisme de foncteurs partiellement monoïdaux α de source F et de but F' tel que $\alpha_{[\,1\,]} = a$.

Démonstration. Pour montrer l'unicité de F, on remarque que comme F est un foncteur partiellement monoïdal strict, pour tout n, $n \geq 0$, on a

$$(1.2.6.3)\qquad F[\,n\,] = F\Big(\underbrace{[\,1\,]\amalg_{[\,0\,]}\cdots\amalg_{[\,0\,]}[\,1\,]}_{n \text{ fois}}\Big) = \underbrace{X\otimes\ldots\otimes X}_{n \text{ fois}}\quad ,$$

où par convention

$$\underbrace{X\otimes\ldots\otimes X}_{0 \text{ fois}} = I \qquad \text{et} \qquad \underbrace{X\otimes\ldots\otimes X}_{1 \text{ fois}} = X \quad ,$$

et les relation 1.2.5.1 impliquent que si l'on pose

$$(1.2.6.4)\qquad \begin{aligned} d^0_n &= 1_{F[\,n-1\,]}\otimes b\ ,\\ d^i_n &= 1_{F[\,n-i-1\,]}\otimes\Delta\otimes 1_{F[\,i-1\,]}\ ,\quad 0<i<n\ ,\\ d^n_n &= s\otimes 1_{F[\,n-1\,]}\ ,\\ s^i_n &= 1_{F[\,n-i\,]}\otimes\varepsilon\otimes 1_{F[\,i\,]}\ ,\quad 0\leq i\leq n\ ,\end{aligned}$$

on a

$$(1.2.6.5)\qquad F(\delta^i_n) = d^i_n\ ,\quad 0\leq i\leq n\ ,\ n>0\ ,\qquad F(\sigma^i_n) = s^i_n\ ,\quad 0\leq i\leq n\ ,\ n\geq 0\ ,$$

ce qui prouve l'unicité, en vertu de la proposition 1.1.4. En vertu de cette même proposition, pour montrer l'existence d'un foncteur $F : \mathbf{\Delta} \to \mathcal{V}$ satisfaisant aux relations 1.2.6.3 et 1.2.6.5, il suffit de montrer que les morphismes de $\mathcal{V}$ définis par les formules 1.2.6.4 satisfont aux relations simpliciales. On vérifie aussitôt que les seules relations qui ne sont pas conséquence formelle de la fonctorialité du produit tensoriel de $\mathcal{V}$ sont

a) La relation $d^i_{n+1}d^j_n = d^{j+1}_{n+1}d^i_n$, pour $0\leq i=j\leq n$;

b) La relation $s^j_n d^i_{n+1} = 1_{F[\,n\,]}$, pour $i\in\{j,j+1\}$, $0\leq j\leq n$.

Pour traiter le cas (a), on remarque que cette relation résulte pour $i=j=0$ de la relation $\Delta b = (1_X\otimes b)b$, pour $0<i=j<n$ de la relation $(\Delta\otimes 1_X)\Delta = (1_X\otimes\Delta)\Delta$, et pour $i=j=n$ de la relation $\Delta s = (s\otimes 1_X)s$. Pour traiter le cas (b), on remarque que cette relation résulte pour $i=j=0$ de la relation $\varepsilon b = 1_I$, pour $0<i=j\leq n$ de

$(\varepsilon \otimes 1_X)\Delta = 1_X$, pour $0 \leq j = i-1 < n$ de $(1_X \otimes \varepsilon)\Delta = 1_X$, et pour $j = n$, $i = n+1$ de $\varepsilon s = 1_I$. Pour conclure, on vérifie facilement que le foncteur ainsi défini est un foncteur partiellement monoïdal strict.

Pour montrer la dernière assertion , on remarque que si $\alpha : F \to F'$ est un morphisme de foncteurs partiellement monoïdaux tel que $\alpha_{[\,1\,]} = a$, en vertu de 1.2.2.3, on a

$$\alpha_{[\,0\,]} = 1_I \qquad \text{et} \qquad \alpha_{[\,n+1\,]} = \alpha_{[\,n\,]} \otimes a \ , \quad n \geq 0 \ ,$$

ce qui implique que

$$\alpha_{[\,n\,]} = \underbrace{a \otimes \cdots \otimes a}_{n \text{ fois}} \quad , \qquad n \geq 0 \quad , \tag{1.2.6.6}$$

et prouve l'unicité de α. Pour montrer l'existence, définissont α par 1.2.6.6 et montrons que α est un morphisme de foncteurs, autrement dit, que pour tout morphisme $\varphi : [\,m\,] \to [\,n\,]$ de $\mathbf{\Delta}$, on a

$$\alpha_{[\,n\,]} F(\varphi) = F'(\varphi)\alpha_{[\,m\,]} \quad . \tag{1.2.6.7}$$

Or, en vertu du lemme 1.1.3, il suffit de le vérifier pour φ opérateur de face ou de dégénérescence. Mais dans ce cas, l'égalité 1.2.6.7 résulte aussitôt des relations 1.2.6.2, du fait que F et F' sont des foncteurs monoïdaux stricts et des relations 1.2.5.1, ce qui achève la démonstration du théorème.

Proposition 1.2.7. *Soit (G, Φ_2, Φ_0) un foncteur partiellement monoïdal de la catégorie partiellement monoïdale des simplexes, dans une catégorie partiellement monoïdale stricte $(\mathcal{V},\ {}_\bullet\mathcal{V},\ \mathcal{V}_\bullet,\ \otimes,\ I)$. Alors il existe un couple unique (F, α), formé d'un foncteur partiellement monoïdal strict $F : \mathbf{\Delta} \to \mathcal{V}$ et d'un isomorphisme de foncteurs partiellement monoïdaux $\alpha : F \to G$, tel que*

$$F[\,1\,] = G[\,1\,] \qquad \textit{et} \qquad \alpha_{[\,1\,]} = 1_{G[\,1\,]} \quad .$$

Démonstration. Pour montrer l'unicité, on remarque que comme F est un foncteur partiellement monoïdal strict et $F[\,1\,] = G[\,1\,]$, pour tout n, $n \geq 0$, on a

$$F[\,n\,] = F\Big(\underbrace{[\,1\,] \amalg_{[\,0\,]} \cdots \amalg_{[\,0\,]} [\,1\,]}_{n \text{ fois}}\Big) = \underbrace{G[\,1\,] \otimes \ldots \otimes G[\,1\,]}_{n \text{ fois}} \quad , \tag{1.2.7.1}$$

et comme α est un morphisme de foncteurs partiellement monoïdaux et $\alpha_{[\,1\,]} = 1_{G[\,1\,]}$, on a

$$\alpha_{[\,0\,]} = \Phi_0 \qquad \text{et} \qquad \alpha_{[\,n+1\,]} = \Phi_{2,[\,n\,],[\,1\,]}(\alpha_{[\,n\,]} \otimes 1_{G[\,1\,]}) \ , \quad n \geq 0 \ , \tag{1.2.7.2}$$

ce qui prouve l'unicité de α. Comme α est un isomorphisme de foncteurs, pour tout morphisme $\varphi : [\,m\,] \to [\,n\,]$ de $\mathbf{\Delta}$, on a

$$F(\varphi) = \alpha_{[\,n\,]}^{-1} G(\varphi) \alpha_{[\,m\,]} \quad , \tag{1.2.7.3}$$

ce qui prouve l'unicité de F.

Montrons l'existence. On définit $\alpha_{[n]}$, $n \geq 0$, par récurrence, en utilisant les formules 1.2.7.2. Comme Φ_0 et $\Phi_{2,[n],[1]}$, $n \geq 0$, sont des isomorphismes de ${}_\bullet\mathcal{V}_\bullet$, il en est de même pour α_n, $n \geq 0$. On peut donc définir F par les formules 1.2.7.1 et 1.2.7.3. Il est immédiat que F est un foncteur, que α est un isomorphisme de foncteurs, et que F transforme les morphismes de ${}_\bullet\mathbf{\Delta}$ (resp. $\mathbf{\Delta}_\bullet$) en morphisme de ${}_\bullet\mathcal{V}$ (resp. $\mathcal{V}_\bullet$). Il reste à montrer que F est un foncteur partiellement monoïdal strict et établir la condition 1.2.2.3. La commutativité du triangle 1.2.2.3 est satisfaite, par définition de $\alpha_{[0]}$. Pour montrer donc la condition 1.2.2.3, il suffit de montrer que pour tous m, $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\alpha_{[m+n]} = \Phi_{2,[m],[n]}(\alpha_{[m]} \otimes \alpha_{[n]}) \quad . \tag{1.2.7.4}$$

On raisonne par récurrence sur n. Pour $n = 0$ la formule résulte de la commutativité du deuxième carré 1.2.2.2. Pour $n = 1$ elle est satisfaite par définition (car il résulte de la commutativité du premier carré 1.2.2.2 que $\alpha_{[1]} = 1_{G[1]}$). Supposons qu'elle est établie pour n et montrons la pour $n + 1$. On a

$$\begin{aligned}
\alpha_{[m+n+1]} &= \Phi_{2,[m+n],[1]}(\alpha_{[m+n]} \otimes 1_{G[1]}) \\
&= \Phi_{2,[m+n],[1]}(\Phi_{2,[m],[n]} \otimes 1_{G[1]})(\alpha_{[m]} \otimes \alpha_{[n]} \otimes 1_{G[1]}) \\
&= \Phi_{2,[m],[n+1]}(1_{G[m]} \otimes \Phi_{2,[n],[1]})(\alpha_{[m]} \otimes \alpha_{[n]} \otimes 1_{G[1]}) \\
&= \Phi_{2,[m],[n+1]}(\alpha_{[m]} \otimes \alpha_{[n+1]})
\end{aligned}$$

(la deuxième égalité résultant de l'hypothèse de récurrence et la troisième de la commutativité du carré 1.2.2.1). Il reste à montrer que pour tous $\varphi : [m] \to [n]$ et $\psi : [m'] \to [n']$ morphismes de $\mathbf{\Delta}_\bullet$ et ${}_\bullet\mathbf{\Delta}$ respectivement, on a $F(\varphi \amalg_{[0]} \psi) = F(\varphi) \otimes F(\psi)$, mais cela résulte de 1.2.7.3, de la fonctorialité de Φ_2 et de 1.2.7.4.

1.2.8. La catégorie des simplexes $\mathbf{\Delta}$ admet un automorphisme involutif $E : \mathbf{\Delta} \to \mathbf{\Delta}$ défini comme suit. Pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$E[m] = [m] \quad ,$$

et pour tout morphisme $\varphi : [m] \to [m']$ de $\mathbf{\Delta}$, $E(\varphi) = \overline{\varphi} : [m] \to [m']$ est défini par

$$\overline{\varphi}(i) = m' - \varphi(m - i) \quad , \qquad 0 \leq i \leq m \quad ,$$

de sorte que

$$E(\delta^i_n) = \delta^{n-i}_n \;, \quad 0 \leq i \leq n \,, \quad n > 0 \,, \qquad \text{et} \qquad E(\sigma^i_n) = \sigma^{n-i}_n \;, \quad 0 \leq i \leq n \quad .$$

Si φ appartient à ${}_\bullet\mathbf{\Delta}$ (resp. $\mathbf{\Delta}_\bullet$), alors $\overline{\varphi}$ appartient à $\mathbf{\Delta}_\bullet$ (resp. ${}_\bullet\mathbf{\Delta}$). Pour tous morphismes $\varphi : [m] \to [m']$ et $\psi : [n] \to [n']$ de $\mathbf{\Delta}_\bullet$ et ${}_\bullet\mathbf{\Delta}$ respectivement, on a

$$E(\varphi \amalg_{[0]} \psi) = E(\psi) \amalg_{[0]} E(\varphi) \quad .$$

Ainsi, E est un foncteur partiellement monoïdal strict de source la catégorie partiellement monoïdale des simplexes et de but sa transposée, définissant un isomorphisme entre ces catégories partiellement monoïdales.

EXEMPLE 1.2.9. Soient K un anneau commutatif et B une K-algèbre. On rappelle qu'un *K-cogébroïde de base B* [De] est un triplet (X, Δ, ε), où X est un $(B\,;B)$-bimodule et

$$\Delta : X \longrightarrow X \otimes_B X \quad , \qquad \text{et} \qquad \varepsilon : X \longrightarrow B$$

deux morphismes de $(B\,;B)$-bimodules, satisfaisant aux relations

$$(1.2.9.1)\quad (\Delta \otimes_B 1_X)\Delta = (1_X \otimes_B \Delta)\Delta \quad , \qquad \text{et} \qquad (\varepsilon \otimes_B 1_X)\Delta = 1_X = (1_X \otimes_B \varepsilon)\Delta \quad .$$

En vertu du théorème 1.2.6, se donner un foncteur partiellement monoïdal strict de la catégorie partiellement monoïdale des simplexes dans la catégorie partiellement monoïdale des $(B\,;B)$-bimodules revient à se donner un K-cogébroïde de base B, (X, Δ, ε) muni d'une application B-linéaire à gauche $b : B \to X$ et une application B-linéaire à droite $s : B \to X$, satisfaisant aux relations

$$(1.2.9.2)\qquad \varepsilon s = 1_B = \varepsilon b \quad , \qquad \Delta s = (s \otimes_B 1_X)s \quad , \qquad \text{et} \qquad \Delta b = (1_X \otimes_B b)b \quad .$$

Or, la donnée d'une application B-linéaire à gauche $b : B \to X$ (resp. à droite $s : B \to X$) équivaut à la donnée de l'image $\beta = b(1)$ (resp. $\alpha = s(1)$) de l'unité de B par cette application, et on vérifie aussitôt que les conditions 1.2.9.2 sont équivalentes à

$$(1.2.9.3)\qquad \varepsilon(\alpha) = 1 = \varepsilon(\beta) \quad , \qquad \Delta(\alpha) = \alpha \otimes_B \alpha \quad , \qquad \text{et} \qquad \Delta(\beta) = \beta \otimes_B \beta \quad .$$

Finalement, se donner un tel foncteur partiellement monoïdal revient à se donner un cogébroïde de base B muni de deux éléments α et β satisfaisant aux relations (1.2.9.3). Une telle structure $(B, X, \Delta, \varepsilon, s, b)$ ou $(B, X, \Delta, \varepsilon, \alpha, \beta)$ sera appelée *catégorie pré-quantique.*

1.3. Catégories partiellement monoïdales et 2-catégories.

La lecture de ce paragraphe peut être omise en première lecture. Ces résultats ne sont utiles que pour l'exemple de Vainerman, dont ils permettent une meilleure compréhension.

1.3.1. On rappelle qu'une 2-*catégorie* $\mathcal{C}$ consiste en la donnée :

a) d'un ensemble $\mathsf{Ob}(\mathcal{C})$, appelé ensemble des *objets* de $\mathcal{C}$;

b) pour tout couple X, $Y \in \mathsf{Ob}(\mathcal{C})$, d'une catégorie $\mathcal{H}om_{\mathcal{C}}(X,Y)$, notée $\mathcal{H}om(X,Y)$ quand aucune ambiguité n'en résulte, dont les objets sont appelés 1-*flèches* de $\mathcal{C}$ (de source X et de but Y) et dont les morphismes sont appelés 2-*flèches* de $\mathcal{C}$;

c) pour tous X, Y, $Z \in \mathsf{Ob}(\mathcal{C})$, d'un foncteur

$$\otimes : \mathcal{H}om(Y,Z) \times \mathcal{H}om(X,Y) \longrightarrow \mathcal{H}om(X,Z)$$

appelé *foncteur de composition horizontale* ;

d) pour tout objet X de $\mathcal{C}$, d'un foncteur $\mathsf{id}_X : e \to \mathcal{H}om(X,X)$, où e désigne la catégorie ayant un seul objet et l'identité de cet objet comme seule flèche, objet final de $\mathcal{C}at$. Par abus de notation, on note aussi id_X la 1-flèche de $\mathcal{C}$ image par id_X de l'unique objet de e, et on l'appelle *identité* de X.

On demande que ces foncteurs rendent commutatifs les diagrammes suivants

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H}om(Z,T)\times\mathcal{H}om(Y,Z)\times\mathcal{H}om(X,Y) \arrow[r, "\otimes\times 1_{\mathcal{H}om(X,Y)}"] \arrow[d, "1_{\mathcal{H}om(Z,T)}\times\otimes"'] & \mathcal{H}om(Y,T)\times\mathcal{H}om(X,Y) \arrow[d, "\otimes"] \\
\mathcal{H}om(Z,T)\times\mathcal{H}om(X,Z) \arrow[r, "\otimes"] & \mathcal{H}om(X,T)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
e\times\mathcal{H}om(X,Y) \arrow[d, "\mathsf{id}_Y\times 1_{\mathcal{H}om(X,Y)}"'] \arrow[dr, "\simeq"] & & \mathcal{H}om(X,Y)\times e \arrow[dl, "\simeq"'] \arrow[d, "1_{\mathcal{H}om(X,Y)}\times\mathsf{id}_X"] \\
\mathcal{H}om(Y,Y)\times\mathcal{H}om(X,Y) \arrow[r, "\otimes"'] & \mathcal{H}om(X,Y) & \mathcal{H}om(X,Y)\times\mathcal{H}om(X,X) \arrow[l, "\otimes"]
\end{tikzcd}$$

pour $X,\ Y,\ Z,\ T\in\mathsf{Ob}(\mathcal{C})$.

Un 2-*foncteur* (strict) de $\mathcal{C}$ dans une deuxième 2-catégorie $\mathcal{C}'$ consiste en la donnée d'une application $F:\mathsf{Ob}(\mathcal{C})\to\mathsf{Ob}(\mathcal{C}')$ et pour tout couple d'objets X, Y de $\mathcal{C}$ d'un foncteur $F_{X,Y}:\mathcal{H}om_{\mathcal{C}}(X,Y)\to\mathcal{H}om_{\mathcal{C}'}(F(X),F(Y))$ tels que, pour tout $X\in\mathsf{Ob}(\mathcal{C})$, $F_{X,X}\mathsf{id}_X=\mathsf{id}_{F(X)}$ et rendant commutatif le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H}om(Y,Z)\times\mathcal{H}om(X,Y) \arrow[r, "F_{Y,Z}\times F_{X,Y}"] \arrow[d, "\otimes"'] & \mathcal{H}om(F(Y),F(Z))\times\mathcal{H}om(F(X),F(Y)) \arrow[d, "\otimes"] \\
\mathcal{H}om(X,Z) \arrow[r, "F_{X,Z}"] & \mathcal{H}om(F(X),F(Z))
\end{tikzcd}$$

pour $X,\ Y,\ Z\in\mathsf{Ob}(\mathcal{C})$. Par abus de notation, $F_{X,Y}$ est noté, souvent, simplement F.

1.3.2. Soit $(\mathcal{V},\ {}_\bullet\mathcal{V},\ \mathcal{V}_\bullet,\ \otimes,\ I)$ une catégorie partiellement monoïdale stricte. On va lui associer une 2-catégorie $\mathcal{C}=\mathcal{C}_{\mathcal{V}}$ comme suit :

$$\mathsf{Ob}(\mathcal{C})=\{\alpha,\bullet,\beta\}\quad,$$

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{C}}(\bullet,\bullet)={}_\bullet\mathcal{V}_\bullet\quad,$$

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{C}}(\alpha,\bullet)={}_\bullet\mathcal{V}\quad,$$

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{C}}(\bullet,\beta)=\mathcal{V}_\bullet\quad,$$

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{C}}(\alpha,\beta)=\mathcal{V}\quad,$$

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{C}}(\alpha,\alpha)=\mathcal{H}om_{\mathcal{C}}(\beta,\beta)=e\quad,$$

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{C}}(\beta,\bullet)=\mathcal{H}om_{\mathcal{C}}(\beta,\alpha)=\mathcal{H}om_{\mathcal{C}}(\bullet,\alpha)=\emptyset\quad.$$

Les foncteurs de composition non triviaux sont définis par le foncteur $\otimes$ et ses restrictions, et l'identité de $\bullet$ est I. On vérifie aussitôt que les axiomes des catégories partiellement monoïdales stictes assurent qu'on a ainsi défini une 2-catégorie.

Soit X un objet de $\mathcal{V}$. On le notera ${}_\bullet X_\bullet$, ${}_\bullet X$, $X_\bullet$, ou X selon qu'on le considère comme objet de $\mathcal{H}om_{\mathcal{C}}(\bullet,\bullet)$, $\mathcal{H}om_{\mathcal{C}}(\alpha,\bullet)$, $\mathcal{H}om_{\mathcal{C}}(\bullet,\beta)$, ou $\mathcal{H}om_{\mathcal{C}}(\alpha,\beta)$ respectivement.

1.3.3. On appele 2-*catégorie des simplexes* et on note $\mathcal{D}=\mathcal{C}_{\mathbf{\Delta}}$ la 2-catégorie associée à la catégorie partiellement monoïdale des simplexes. Alors on a des 1-flèches de $\mathcal{D}$

$$\alpha \xrightarrow{\bullet[\,0\,]} \bullet \quad , \qquad \bullet \xrightarrow{\bullet[\,1\,]\bullet} \bullet \quad , \qquad \bullet \xrightarrow{[\,0\,]\bullet} \beta \quad ,$$

et les morphismes s, b, δ, ϵ de $\mathbf{\Delta}$, définis dans 1.2.5, s'interprètent comme des 2-flèches :

$$\mathsf{s} : [\,0\,]_\bullet \longrightarrow [\,1\,]_\bullet = [\,0\,]_\bullet \otimes {}_\bullet[\,1\,]_\bullet \quad , \qquad \mathsf{b} : {}_\bullet[\,0\,] \longrightarrow {}_\bullet[\,1\,] = {}_\bullet[\,1\,]_\bullet \otimes {}_\bullet[\,0\,] \quad ,$$

$$\delta : {}_\bullet[\,1\,]_\bullet \longrightarrow {}_\bullet[\,2\,]_\bullet = {}_\bullet[\,1\,]_\bullet \otimes {}_\bullet[\,1\,]_\bullet \quad , \qquad \epsilon : {}_\bullet[\,1\,]_\bullet \longrightarrow {}_\bullet[\,0\,]_\bullet = \mathsf{id}_\bullet \quad ,$$

et les relations 1.2.5.2 se traduisent par :

$$(1.3.3.1)\qquad \begin{aligned} &(1_{[\,0\,]_\bullet} \otimes \delta)\,\mathsf{s} = (\mathsf{s} \otimes 1_{\bullet[\,1\,]_\bullet})\,\mathsf{s} \quad , && (1_{[\,0\,]_\bullet} \otimes \epsilon)\,\mathsf{s} = 1_{[\,0\,]_\bullet} \quad , \\ &(\delta \otimes 1_{\bullet[\,0\,]})\,\mathsf{b} = (1_{\bullet[\,1\,]_\bullet} \otimes \mathsf{b})\,\mathsf{b} \quad , && (\epsilon \otimes 1_{\bullet[\,0\,]})\,\mathsf{b} = 1_{\bullet[\,0\,]} \quad , \\ &(\delta \otimes 1_{\bullet[\,1\,]_\bullet})\,\delta = (1_{\bullet[\,1\,]_\bullet} \otimes \delta)\,\delta \quad , && (\epsilon \otimes 1_{\bullet[\,1\,]_\bullet})\,\delta = 1_{\bullet[\,1\,]_\bullet} = (1_{\bullet[\,1\,]_\bullet} \otimes \epsilon)\,\delta \end{aligned}$$

les deux premières relations étant dans $\mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(\bullet,\beta)$, les deux suivantes dans $\mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(\alpha,\bullet)$, et les deux dernières dans $\mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(\bullet,\bullet)$. On remarque que les relations 1.2.5.1 impliquent que dans $\mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(\bullet,\bullet) = {}_\bullet\mathbf{\Delta}_\bullet$ on a :

$$(1.3.3.2)\qquad \begin{aligned} &\delta^i_n = 1_{\bullet[\,n-i-1\,]_\bullet} \otimes \delta \otimes 1_{\bullet[\,i-1\,]_\bullet} : {}_\bullet[\,n-1\,]_\bullet \to {}_\bullet[\,n\,]_\bullet \,, \quad 0<i<n \,, \\ &\sigma^i_n = 1_{\bullet[\,n-i\,]_\bullet} \otimes \epsilon \otimes 1_{\bullet[\,i\,]_\bullet} : {}_\bullet[\,n+1\,]_\bullet \to {}_\bullet[\,n\,]_\bullet \,, \quad 0\le i\le n \,, \end{aligned}$$

dans $\mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(\alpha,\bullet) = {}_\bullet\mathbf{\Delta}$ on a :

$$(1.3.3.3)\qquad \begin{aligned} &\delta^0_n = 1_{\bullet[\,n-1\,]_\bullet} \otimes \mathsf{b} : {}_\bullet[\,n-1\,] \to {}_\bullet[\,n\,] \,, \quad n>0 \,, \\ &\delta^i_n = 1_{\bullet[\,n-i-1\,]_\bullet} \otimes \delta \otimes 1_{\bullet[\,i-1\,]} : {}_\bullet[\,n-1\,] \to {}_\bullet[\,n\,] \,, \quad 0<i<n \,, \\ &\sigma^i_n = 1_{\bullet[\,n-i\,]_\bullet} \otimes \epsilon \otimes 1_{\bullet[\,i\,]} : {}_\bullet[\,n+1\,] \to {}_\bullet[\,n\,] \,, \quad 0\le i\le n \,, \end{aligned}$$

dans $\mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(\bullet,\beta) = \mathbf{\Delta}_\bullet$ on a :

$$(1.3.3.4)\qquad \begin{aligned} &\delta^i_n = 1_{[\,n-i-1\,]_\bullet} \otimes \delta \otimes 1_{\bullet[\,i-1\,]_\bullet} : [\,n-1\,]_\bullet \to [\,n\,]_\bullet \,, \quad 0<i<n \,, \\ &\delta^n_n = \mathsf{s} \otimes 1_{\bullet[\,n-1\,]_\bullet} : [\,n-1\,]_\bullet \to [\,n\,]_\bullet \,, \quad n>0 \,, \\ &\sigma^i_n = 1_{[\,n-i\,]_\bullet} \otimes \epsilon \otimes 1_{\bullet[\,i\,]_\bullet} : [\,n+1\,]_\bullet \to [\,n\,]_\bullet \,, \quad 0\le i\le n \,, \end{aligned}$$

et dans $\mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(\alpha,\beta) = \mathbf{\Delta}$ on a :

$$(1.3.3.5)\qquad \begin{aligned} &\delta^0_n = 1_{[\,n-1\,]_\bullet} \otimes \mathsf{b} : [\,n-1\,] \to [\,n\,] \,, \quad n>0 \,, \\ &\delta^i_n = 1_{[\,n-i-1\,]_\bullet} \otimes \delta \otimes 1_{\bullet[\,i-1\,]} : [\,n-1\,] \to [\,n\,] \,, \quad 0<i<n \,, \\ &\delta^n_n = \mathsf{s} \otimes 1_{\bullet[\,n-1\,]} : [\,n-1\,] \to [\,n\,] \,, \quad n>0 \,, \\ &\sigma^i_n = 1_{[\,n-i\,]_\bullet} \otimes \epsilon \otimes 1_{\bullet[\,i\,]} : [\,n+1\,] \to [\,n\,] \,, \quad 0\le i\le n \,, \end{aligned}$$

où avec un léger abus de notations on désigne par le même symbole les opérateurs de face et de dégénérescence qu'ils soient considérés comme morphismes de $\mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(\bullet,\bullet)$, de $\mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(\alpha,\bullet)$, de $\mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(\bullet,\beta)$, ou de $\mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(\alpha,\beta)$.

Théorème 1.3.4. *La 2-categorie des simplexes est la 2-catégorie engendrée par les objets α, $\bullet$, β, les 1-flèches*

$$\alpha \xrightarrow{\ \bullet[0]\ } \bullet \quad , \qquad \bullet \xrightarrow{\ \bullet[1]\bullet\ } \bullet \quad , \qquad \bullet \xrightarrow{\ [0]\bullet\ } \beta \quad ,$$

et les 2-flèches s, b, δ, ϵ *soumises aux relations* 1.3.3.1. *Autrement dit, pour toute 2-catégorie $\mathcal{C}$, tous objets $\mathcal{M}$, $\mathcal{X}$, $\mathcal{N}$ de $\mathcal{C}$, toutes 1-flèches*

$$\mathcal{M} \xrightarrow{\ M\ } \mathcal{X} \quad , \qquad \mathcal{X} \xrightarrow{\ X\ } \mathcal{X} \quad , \qquad \mathcal{X} \xrightarrow{\ N\ } \mathcal{N} \quad ,$$

et toutes 2-flèches

$$s : N \longrightarrow N \otimes X \quad , \qquad b : M \longrightarrow X \otimes M \quad ,$$

$$\Delta : X \longrightarrow X \otimes X \quad , \qquad \varepsilon : X \longrightarrow \mathsf{id}_{\mathcal{X}} \quad ,$$

satisfaisant aux relations

$$(1_N \otimes \Delta)s = (s \otimes 1_X)s \quad , \qquad (1_N \otimes \varepsilon)s = 1_N \quad ,$$

$$(\Delta \otimes 1_M)b = (1_X \otimes b)b \quad , \qquad (\varepsilon \otimes 1_M)b = 1_M \quad , \tag{1.3.4.1}$$

$$(\Delta \otimes 1_X)\Delta = (1_X \otimes \Delta)\Delta \quad , \qquad (\varepsilon \otimes 1_X)\Delta = 1_X = (1_X \otimes \varepsilon)\Delta \quad ,$$

il existe un 2-foncteur unique $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ tel que

$$F(\alpha) = \mathcal{M} \quad , \qquad F(\bullet) = \mathcal{X} \quad , \qquad F(\beta) = \mathcal{N} \quad ,$$

$$F(\bullet[0]) = M \quad , \qquad F(\bullet[1]\bullet) = X \quad , \qquad F([0]\bullet) = N \quad , \tag{1.3.4.2}$$

$$F(\mathsf{s}) = s \quad , \qquad F(\mathsf{b}) = b \quad , \qquad F(\delta) = \Delta \quad , \qquad F(\epsilon) = \varepsilon \quad .$$

Pour démontrer le théorème, on a besoin de la proposition suivante, analogue de la proposition 1.1.4.

Proposition 1.3.5. *La catégorie* $_\bullet\mathbf{\Delta}$ (resp. $\mathbf{\Delta}_\bullet$, resp. $_\bullet\mathbf{\Delta}_\bullet$) *est engendrée par les objets $[n]$, $n \in \mathbb{N}$, et les opérateurs de dégénérescence et ceux des opérateurs de face qui sont des flèches de cette catégorie* (autrement dit, δ_n^i, $0 \leq i < n$ (resp. $0 < i \leq n$, resp. $0 < i < n$)) *soumis à celles des relations simpliciales dont tous les morphismes sont des flèches de cette catégorie.*

La démonstration, analogue à celle de la proposition 1.1.4 est laissée au lecteur. L'observation clef est que si les morphismes qui figurent au premier membre d'une relation simpliciale appartiennent à la catégorie considérée, il en est de même pour ceux du second membre.

1.3.6. Démonstration du théorème. Pour montrer l'unicité, on remarque que comme F est un 2-foncteur, pour tout n, $n \geq 0$, on a

$$F_{\bullet,\bullet}({}_{\bullet}[n]_{\bullet}) = F_{\bullet,\bullet}\Big(\underbrace{{}_{\bullet}[1]_{\bullet} \otimes \ldots \otimes {}_{\bullet}[1]_{\bullet}}_{n \text{ fois}}\Big) = \underbrace{X \otimes \ldots \otimes X}_{n \text{ fois}} \quad , \tag{1.3.6.1}$$

$$F_{\alpha,\bullet}({}_{\bullet}[n]) = F_{\alpha,\bullet}\Big(\underbrace{{}_{\bullet}[1]_{\bullet} \otimes \ldots \otimes {}_{\bullet}[1]_{\bullet}}_{n \text{ fois}} \otimes {}_{\bullet}[0]\Big) = \underbrace{X \otimes \ldots \otimes X}_{n \text{ fois}} \otimes M \quad , \tag{1.3.6.2}$$

$$F_{\bullet,\beta}([n]_{\bullet}) = F_{\bullet,\beta}\Big([0]_{\bullet} \otimes \underbrace{{}_{\bullet}[1]_{\bullet} \otimes \ldots \otimes {}_{\bullet}[1]_{\bullet}}_{n \text{ fois}}\Big) = N \otimes \underbrace{X \otimes \ldots \otimes X}_{n \text{ fois}} \quad , \tag{1.3.6.3}$$

$$F_{\alpha,\beta}([n]) = F_{\alpha,\beta}\Big([0]_{\bullet} \otimes \underbrace{{}_{\bullet}[1]_{\bullet} \otimes \ldots \otimes {}_{\bullet}[1]_{\bullet}}_{n \text{ fois}} \otimes {}_{\bullet}[0]\Big) = N \otimes X^{\otimes n} \otimes M \quad , \tag{1.3.6.4}$$

où

$$X^{\otimes n} = \underbrace{X \otimes \ldots \otimes X}_{n \text{ fois}} \quad ,$$

les relations 1.3.3.2 impliquent que

$$\begin{aligned} &F_{\bullet,\bullet}(\delta_n^i) = 1_{X^{\otimes n-i-1}} \otimes \Delta \otimes 1_{X^{\otimes i-1}} \ , \quad 0 < i < n \ , \\ &F_{\bullet,\bullet}(\sigma_n^i) = 1_{X^{\otimes n-i}} \otimes \varepsilon \otimes 1_{X^{\otimes i}} \ , \quad 0 \leq i \leq n \ , \end{aligned} \tag{1.3.6.5}$$

les relations 1.3.3.3 impliquent que

$$\begin{aligned} &F_{\alpha,\bullet}(\delta_n^0) = 1_{X^{\otimes n-1}} \otimes b \ , \quad n > 0 \ , \\ &F_{\alpha,\bullet}(\delta_n^i) = 1_{X^{\otimes n-i-1}} \otimes \Delta \otimes 1_{X^{\otimes i-1}} \otimes 1_M \ , \quad 0 < i < n \ , \\ &F_{\alpha,\bullet}(\sigma_n^i) = 1_{X^{\otimes n-i}} \otimes \varepsilon \otimes 1_{X^{\otimes i}} \otimes 1_M \ , \quad 0 \leq i \leq n \ , \end{aligned} \tag{1.3.6.6}$$

les relations 1.3.3.4 impliquent que

$$\begin{aligned} &F_{\bullet,\beta}(\delta_n^i) = 1_N \otimes 1_{X^{\otimes n-i-1}} \otimes \Delta \otimes 1_{X^{\otimes i-1}} \ , \quad 0 < i < n \ , \\ &F_{\bullet,\beta}(\delta_n^n) = s \otimes 1_{X^{\otimes n-1}} \ , \quad n > 0 \ , \\ &F_{\bullet,\beta}(\sigma_n^i) = 1_N \otimes 1_{X^{\otimes n-i}} \otimes \varepsilon \otimes 1_{X^{\otimes i}} \ , \quad 0 \leq i \leq n \ , \end{aligned} \tag{1.3.6.7}$$

et les relations 1.3.3.5 impliquent que

$$\begin{aligned} &F_{\alpha,\beta}(\delta_n^0) = 1_N \otimes 1_{X^{\otimes n-1}} \otimes b \ , \quad n > 0 \ , \\ &F_{\alpha,\beta}(\delta_n^i) = 1_N \otimes 1_{X^{\otimes n-i-1}} \otimes \Delta \otimes 1_{X^{\otimes i-1}} \otimes 1_M \ , \quad 0 < i < n \ , \\ &F_{\alpha,\beta}(\delta_n^n) = s \otimes 1_{X^{\otimes n-1}} \otimes 1_M \ , \quad n > 0 \ , \\ &F_{\alpha,\beta}(\sigma_n^i) = 1_N \otimes 1_{X^{\otimes n-i}} \otimes \varepsilon \otimes 1_{X^{\otimes i}} \otimes 1_M \ , \quad 0 \leq i \leq n \ , \end{aligned} \tag{1.3.6.8}$$

ce qui, en vertu de la proposition 1.1.4 et le lemme 1.3.4.3, prouve l'unicité de F. En vertu de ces mêmes propositions, pour montrer l'existence d'un foncteur

$$
\begin{array}{ll}
 & F_{\bullet,\bullet} : \mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(\bullet,\bullet) = {}_{\bullet}\mathbf{\Delta}_{\bullet} \longrightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{C}}(\mathcal{X},\mathcal{X}) \\
(\text{ resp.} & F_{\alpha,\bullet} : \mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(\alpha,\bullet) = {}_{\bullet}\mathbf{\Delta} \longrightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{C}}(\mathcal{M},\mathcal{X}) \\
\text{resp.} & F_{\bullet,\beta} : \mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(\bullet,\beta) = \mathbf{\Delta}_{\bullet} \longrightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{C}}(\mathcal{X},\mathcal{N}) \\
\text{resp.} & F_{\alpha,\beta} : \mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(\alpha,\beta) = \mathbf{\Delta} \longrightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{C}}(\mathcal{M},\mathcal{N}) \quad)
\end{array}
$$

satisfaisant aux relations 1.3.6.1 et 1.3.6.5 (resp. 1.3.6.2 et 1.3.6.6, resp. 1.3.6.3 et 1.3.6.7, resp. 1.3.6.4 et 1.3.6.8), il suffit de montrer que les morphismes définis par les formules 1.3.6.5 (resp. 1.3.6.6, resp. 1.3.6.7, resp. 1.3.6.8) satisfont aux relations simpliciales pertinentes, ce qui se vérifie comme dans la démonstration du théorème 1.2.6. Pour conclure, on vérifie facilement la compatibilité de ces foncteurs à la composition horizontale, ce qui prouve qu'ils définissent un 2-foncteur. Les détails sont laissés au lecteur.

Exemple 1.3.7. Soient $(\mathcal{V},\otimes,I)$ une catégorie monoïdale stricte, (X,Δ,ε) une cogèbre de $\mathcal{V}$, autrement dit, un objet X de $\mathcal{V}$, et des morphismes

$$\Delta : X \to X\otimes X \quad , \qquad \varepsilon : X \to I$$

de $\mathcal{V}$ tels que

$$(1.3.7.1) \qquad (\Delta\otimes 1_X)\Delta = (1_X\otimes\Delta)\Delta \qquad \text{et} \qquad (\varepsilon\otimes 1_X)\Delta = 1_X = (1_X\otimes\varepsilon)\Delta \quad ,$$

(M,b) (resp. (N,s)) un X-comodule à gauche (resp. à droite), autrement dit, un objet M (resp. N) de $\mathcal{V}$ et un morphisme

$$b : M \to X\otimes M \qquad (\text{resp.} \quad s : N \to N\otimes X \quad)$$

tel que

$$(1.3.7.2) \qquad \begin{array}{llll} & (\Delta\otimes 1_M)b = (1_X\otimes b)b & \text{et} & (\varepsilon\otimes 1_M)b = 1_M \\ (\text{resp.} & (1_N\otimes\Delta)s = (s\otimes 1_X)s & \text{et} & (1_N\otimes\varepsilon)s = 1_N \quad). \end{array}$$

Soit $\mathcal{C}$ la 2-catégorie correspondant à la catégorie monoïdale $\mathcal{V}$, autrement dit, la 2-catégorie ayant un seul objet $\bullet$, et telle que $\mathcal{H}om_{\mathcal{C}}(\bullet,\bullet) = \mathcal{V}$, la composition horizontale étant définie par le produit tensoriel $\otimes$ de $\mathcal{V}$. Alors, en vertu du théorème 1.3.4, il existe un 2-foncteur unique $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, de la 2-catégorie des simplexes dans $\mathcal{C}$, tel que

$$(1.3.7.3) \qquad \begin{array}{llll} F({}_{\bullet}[0]) = M \quad , & F({}_{\bullet}[1]_{\bullet}) = X \quad , & F([0]_{\bullet}) = N \quad , & \\ F(\mathsf{s}) = s \quad , & F(\mathsf{b}) = b \quad , & F(\delta) = \Delta \quad , & F(\epsilon) = \varepsilon \quad . \end{array}$$

En effet, les relations 1.3.7.1 et 1.3.7.2 sont exactement les relations 1.3.4.1. En particulier, si l'on pose

$$X^{\otimes n} = \underbrace{X \otimes X \otimes \ldots \otimes X}_{n \text{ fois}} \quad ,$$

il résulte des relations 1.3.6.4 et 1.3.6.8 qu'il existe un foncteur (nécessairement unique, en vertu de 1.1.4), noté aussi F, de la catégorie des simplexes $\mathbf{\Delta}$ dans la catégorie $\mathcal{V}$, tel que

$$\begin{aligned}
&F[\,n\,] = N \otimes X^{\otimes n} \otimes M \ , \quad n \geq 0 \\
&F(\delta_n^0) = 1_N \otimes 1_{X^{\otimes n-1}} \otimes b \ , \quad n > 0 \ , \\
&F(\delta_n^i) = 1_N \otimes 1_{X^{\otimes n-i-1}} \otimes \Delta \otimes 1_{X^{\otimes i-1}} \otimes 1_M \ , \quad 0 < i < n \ , \\
&F(\delta_n^n) = s \otimes 1_{X^{\otimes n-1}} \otimes 1_M \ , \quad n > 0 \ , \\
&F(\sigma_n^i) = 1_N \otimes 1_{X^{\otimes n-i}} \otimes \varepsilon \otimes 1_{X^{\otimes i}} \otimes 1_M \ , \quad 0 \leq i \leq n \ ,
\end{aligned} \tag{1.3.7.4}$$

Ce résultat s'applique, en particulier, au cas où $\mathcal{V}$ est la catégorie des K modules, où K est un anneau commutatif, et $\otimes$ le produit tensoriel $\otimes_K$ sur K (en considérant qu'il s'agit d'une catégorie monoïdale stricte, quitte à la remplacer par une catégorie monoïdale stricte, monoïdalement équivalente), dans quel cas on a des cogèbres et comodules au sens ordinaire.

2. Carrés cocartieriens et produits tensoriels tordus

Dans la suite de cet article, on se fixe un anneau commutatif K. On dira module, pour K-module, application linéaire, pour application K-linéaire, algèbre, pour K-algèbre associative unifère, et morphisme d'algèbres, pour morphisme unifère de K-algèbres. On notera $\otimes$ le produit tensoriel $\otimes_K$ sur K, et $\mathcal{A}lg$ la catégorie des K-algèbres.

2.1. La classification des carrés cocartieriens de base donnée.

Définition 2.1.1. On dit qu'un carré

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "v"] \arrow[d, "u"'] & C \arrow[d, "j"] \\ B \arrow[r, "i"] & D \end{tikzcd} \quad , \qquad \text{noté} \qquad (u,v,i,j)\ ,$$

de $\mathcal{A}lg$ est *cocartierien direct* si

$a)$ il est commutatif;

$b)$ le morphisme de $(A\,;A)$-bimodules

$$\varphi(u,v,i,j) : B \otimes_A C \longrightarrow D$$
$$b \otimes_A c \mapsto i(b)j(c)$$

est un isomorphisme.

Les carrés cocartieriens directs sont considérés comme plongés dans un plan orienté. En effet, l'hypothèse que (u,v,i,j) est un carré cocartierien direct n'implique pas qu'il en est de même pour le carré (v,u,j,i). On dira que le carré (u,v,i,j) est *cocartierien inverse* si le carré (v,u,j,i) est cocartierien direct. On dira que (u,v,i,j) est *cocartierien* s'il est à la fois cocartierien direct et cocartierien inverse, autrement dit, s'il satisfait aux conditions (a), (b) ci-dessus ainsi qu'à la condition

$c)$ le morphisme de $(A\,;A)$-bimodules

$$\varphi'(u,v,i,j) : C \otimes_A B \longrightarrow D$$
$$c \otimes_A b \mapsto j(c)i(b)$$

est un isomorphisme. On dit que le diagramme

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "v"] \arrow[d, "u"'] & C \\ B & \end{tikzcd} \quad , \qquad \text{noté} \qquad (u,v)\ ,$$

est la base du carré cocartierien direct (resp. cocartierien inverse) (resp. cocartierien) (u,v,i,j).

2.1.2. Soit (u, v, i, j) un carré cocartierien direct comme ci-dessus. On note
$$T = T(u, v, i, j) : C \otimes_A B \longrightarrow B \otimes_A C$$
le morphisme de $(A\,;A)$-bimodules défini par
$$T = T(u, v, i, j) = \varphi^{-1}(u, v, i, j)\varphi'(u, v, i, j) \quad .$$
Alors les deux diagrammes suivants sont commutatifs

(2.1.2.1)
$$\begin{tikzcd} C \otimes_A C \otimes_A B \arrow[r, "1_C \otimes_A T"] \arrow[d, "\mu_C \otimes_A 1_B"'] & C \otimes_A B \otimes_A C \arrow[r, "T \otimes_A 1_C"] & B \otimes_A C \otimes_A C \arrow[d, "1_B \otimes_A \mu_C"] \\ C \otimes_A B \arrow[rr, "T"] & & B \otimes_A C \end{tikzcd}$$

et

(2.1.2.2)
$$\begin{tikzcd} C \otimes_A B \otimes_A B \arrow[r, "T \otimes_A 1_B"] \arrow[d, "1_C \otimes_A \mu_B"'] & B \otimes_A C \otimes_A B \arrow[r, "1_B \otimes_A T"] & B \otimes_A B \otimes_A C \arrow[d, "\mu_B \otimes_A 1_C"] \\ C \otimes_A B \arrow[rr, "T"] & & B \otimes_A C \end{tikzcd}$$

autrement dit,

(2.1.2.3) $$(1_B \otimes_A \mu_C)(T \otimes_A 1_C)(1_C \otimes_A T) = T(\mu_C \otimes_A 1_B)$$

et

(2.1.2.4) $$(\mu_B \otimes_A 1_C)(1_B \otimes_A T)(T \otimes_A 1_B) = T(1_C \otimes_A \mu_B) \quad ,$$

où $\mu_B : B \otimes_A B \to B$ et $\mu_C : C \otimes_A C \to C$ désignent les morphismes de $(A\,;A)$-bimodules définis par les multiplications de B et C respectivement. En effet, si $\mu_D : D \otimes_A D \to D$ désigne le morphisme de $(A\,;A)$-bimodules défini par la multiplication de D, par définition de T, on a
$$\mu_D(i \otimes_A j)T = \varphi(u, v, i, j)T = \varphi'(u, v, i, j) = \mu_D(j \otimes_A i) \quad .$$
On en déduit que
$$\begin{aligned} &\varphi(u, v, i, j)(1_B \otimes_A \mu_C)(T \otimes_A 1_C)(1_C \otimes_A T) \\ &\quad = \mu_D(i \otimes_A j)(1_B \otimes_A \mu_C)(T \otimes_A 1_C)(1_C \otimes_A T) \\ &\quad = \mu_D(1_D \otimes_A \mu_D)(i \otimes_A j \otimes_A j)(T \otimes_A 1_C)(1_C \otimes_A T) \\ &\quad = \mu_D(\mu_D \otimes_A 1_D)(i \otimes_A j \otimes_A j)(T \otimes_A 1_C)(1_C \otimes_A T) \\ &\quad = \mu_D(\mu_D \otimes_A 1_D)(j \otimes_A i \otimes_A j)(1_C \otimes_A T) \\ &\quad = \mu_D(1_D \otimes_A \mu_D)(j \otimes_A i \otimes_A j)(1_C \otimes_A T) \\ &\quad = \mu_D(1_D \otimes_A \mu_D)(j \otimes_A j \otimes_A i) = \mu_D(\mu_D \otimes_A 1_D)(j \otimes_A j \otimes_A i) \\ &\quad = \mu_D(j \otimes_A i)(\mu_C \otimes_A 1_B) = \varphi(u, v, i, j)T(\mu_C \otimes_A 1_B) \end{aligned}$$

(la deuxième et l'huitième égalité résultant du fait que j est un morphisme d'algèbres, et la troisième, la cinquième et la septième de l'associativité de la multiplication de D), ce qui prouve la relation 2.1.2.3, puisque, par hypothèse, $\varphi(u,v,i,j)$ est inversible. La relation 2.1.2.4 se démontre de façon duale. De plus, pour tous $b \in B$ et $c \in C$, on a

$$(2.1.2.5) \qquad T(c \otimes_A 1) = 1 \otimes_A c \qquad \text{et} \qquad T(1 \otimes_A b) = b \otimes_A 1 \quad ,$$

où 1 désigne indifféremment l'unité de l'algèbre B ou C. En effet,

$$\varphi(u,v,i,j)T(c \otimes_A 1) = \mu_D(j \otimes_A i)(c \otimes_A 1) = j(c) = \mu_D(i \otimes_A j)(1 \otimes_A c) = \varphi(u,v,i,j)(1 \otimes_A c),$$

ce qui prouve que $T(c \otimes_A 1) = 1 \otimes_A c$, et la relation $T(1 \otimes_A b) = b \otimes_A 1$ se démontre de façon duale. Les relations 2.1.2.5 sont équivalentes aux relations

$$(2.1.2.6) \qquad T(1_C \otimes_A u) = u \otimes_A 1_C \qquad \text{et} \qquad T(v \otimes_A 1_B) = 1_B \otimes_A v \quad ,$$

qui ont un sens modulo les identifications

$$(2.1.2.7) \qquad C \otimes_A A \simeq C \simeq A \otimes_A C \qquad \text{et} \qquad A \otimes_A B \simeq B \simeq B \otimes_A A \quad .$$

Il faut néanmoins se garder de croire que les relations 2.1.2.6 impliquent que, pour tous $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$, on ait

$$T(c \otimes_A u(a)) = u(a) \otimes_A c \qquad \text{et} \qquad T(v(a) \otimes_A b) = b \otimes_A v(a) \quad .$$

En fait, elles impliquent que

$$T(c \otimes_A u(a)) = (u \otimes_A 1_C)(1 \otimes_A cv(a)) = 1 \otimes_A cv(a)$$

et

$$T(v(a) \otimes_A b) = (1_B \otimes_A v)(u(a)b \otimes_A 1) = u(a)b \otimes_A 1 \quad ,$$

car l'identification 2.1.2.7 de $C \otimes_A A$ avec $A \otimes_A C$ (resp. de $A \otimes_A B$ avec $B \otimes_A A$) n'est pas $c \otimes_A a \mapsto a \otimes_A c$ (resp. $a \otimes_A b \mapsto b \otimes_A a$) mais $c \otimes_A a \mapsto cv(a) \mapsto 1 \otimes_A cv(a)$ (resp. $a \otimes_A b \mapsto u(a)b \mapsto u(a)b \otimes_A 1$.

Si $u : A \to B$ et $v : A \to C$ sont des morphismes d'algèbres et

$$T : C \otimes_A B \longrightarrow B \otimes_A C$$

un morphisme de $(A;A)$-bimodules satisfaisant aux conditions 2.1.2.3, 2.1.2.4 et 2.1.2.5, on dit que T est un *A-tressage de l'algèbre B avec l'algèbre C*. On remarque que si $T : C \otimes_A B \longrightarrow B \otimes_A C$ est un *isomorphisme* de $(A;A)$-bimodules, pour qu'il soit un A-tressage de l'algèbre B avec l'algèbre C, il suffit qu'il satisfasse aux conditions 2.1.2.3 et 2.1.2.4. En effet, alors pour tout c, $c \in C$, on a

$$\begin{aligned} T(c \otimes_A 1) &= (\mu_B \otimes_A 1_C)(1_B \otimes_A T)(1 \otimes_A c \otimes_A 1) \\ &= (\mu_B \otimes_A 1_C)(1_B \otimes_A T)(T \otimes_A 1_B)(T^{-1} \otimes_A 1_B)(1 \otimes_A c \otimes_A 1) \\ &= T(1_C \otimes_A \mu_B)(T^{-1} \otimes_A 1_B)(1 \otimes_A c \otimes_A 1) \\ &= TT^{-1}(1 \otimes_A c) = 1 \otimes_A c \quad , \end{aligned}$$

et on démontre de façon duale que, pour tout b, $b \in B$, on a $T(1 \otimes_A b) = b \otimes_A 1$.

2.1.3. Soient

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "v"] \arrow[d, "u"'] & C \arrow[d, "j"] \\ B \arrow[r, "i"] & D \end{tikzcd} \qquad \text{et} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "v"] \arrow[d, "u"'] & C \arrow[d, "j'"] \\ B \arrow[r, "i'"] & D' \end{tikzcd}$$

deux carrés cocartieriens directs de même base (u, v). On dit qu'ils sont *isomorphes* s'il existe un isomorphisme d'algèbres $w : D \to D'$ tel que $i' = wi$ et $j' = wj$.

Théorème 2.1.4 [Ca]. *L'application qui associe à un carré cocartierien direct (u, v, i, j) le morphisme de $(A;A)$-bimodules $T(u, v, i, j)$ établit une bijection entre l'ensemble des classes d'isomorphisme de carrés cocartieriens directs de base (u, v) et l'ensemble des A-tressages T de l'algèbre B avec l'algèbre C. L'application inverse associe à T le carré cocartierien direct*

$$(u, v, i, j) = \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "v"] \arrow[d, "u"'] & C \arrow[d, "j"] \\ B \arrow[r, "i"] & D \end{tikzcd}$$

défini comme suit. Comme $(A;A)$-bimodule $D = B \otimes_A C$, le morphisme de $(A;A)$-bimodules $\mu : D \otimes_A D \to D$ associé à la multiplication de D est défini par

(2.1.4.1) $$\mu = (\mu_B \otimes_A \mu_C)(1_B \otimes_A T \otimes_A 1_C)$$

et les morphismes d'algèbres $i : B \to D$ et $j : C \to D$ sont définis par

(2.1.4.2) $$i(b) = b \otimes_A 1 \ , \quad b \in B \ , \qquad \text{et} \qquad j(c) = 1 \otimes_A c \ , \quad c \in C \ ,$$

autrement dit,

(2.1.4.3) $$i = 1_B \otimes_A v \qquad \text{et} \qquad j = u \otimes_A 1_C \quad .$$

De plus, on a $\mu(i \otimes_A j) = 1_D$, $T = \mu(j \otimes_A i)$, et le carré cocartierien direct (u, v, i, j) satisfait à la propriété universelle suivante. Pour tout diagramme commutatif d'algèbres

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "v"] \arrow[d, "u"'] & C \arrow[d, "j'"] \\ B \arrow[r, "i'"] & E \end{tikzcd}$$

tel que $\mu_E(i' \otimes_A j')T = \mu_E(j' \otimes_A i')$, où μ_E désigne le morphisme de $(A;A)$-bimodules associé à la multiplication de E, il existe un morphisme unique d'algèbres $w : D \to E$ tel que $i' = wi$ et $j' = wj$, et cet unique morphisme w est égal à $\mu_E(i' \otimes_A j')$. Enfin, le carré (u, v, i, j) est cocartierien si et seulement si T est bijectif.

DÉMONSTRATION. Montrons que si T est un A-tressage de l'algèbre B avec l'algèbre C, alors la multiplication μ de $D = B \otimes_A C$ définie par 2.1.4.1 est associative. En effet, on a

$$\begin{aligned}
\mu(\mu \otimes_A 1_D) &= (\mu_B \otimes_A \mu_C)(1_B \otimes_A T \otimes_A 1_C)(\mu_B \otimes_A \mu_C \otimes_A 1_B \otimes_A 1_C) \\
&\qquad\qquad (1_B \otimes_A T \otimes_A 1_C \otimes_A 1_B \otimes_A 1_C) \\
&= (\mu_B \otimes_A \mu_C)(\mu_B \otimes_A 1_B \otimes_A \mu_C \otimes_A 1_C)(1_B \otimes_A 1_B \otimes_A T \otimes_A 1_C \otimes_A 1_C) \\
&\qquad (1_B \otimes_A 1_B \otimes_A 1_C \otimes_A T \otimes_A 1_C)(1_B \otimes_A T \otimes_A 1_C \otimes_A 1_B \otimes_A 1_C) \\
&= (\mu_B \otimes_A \mu_C)(1_B \otimes_A \mu_B \otimes_A 1_C \otimes_A \mu_C)(1_B \otimes_A 1_B \otimes_A T \otimes_A 1_C \otimes_A 1_C) \\
&\qquad (1_B \otimes_A T \otimes_A 1_B \otimes_A 1_C \otimes_A 1_C)(1_B \otimes_A 1_C \otimes_A 1_B \otimes_A T \otimes_A 1_C) \\
&= (\mu_B \otimes_A \mu_C)(1_B \otimes_A T \otimes_A 1_C)(1_B \otimes_A 1_C \otimes_A \mu_B \otimes_A \mu_C) \\
&\qquad\qquad (1_B \otimes_A 1_C \otimes_A 1_B \otimes_A T \otimes_A 1_C) \\
&= \mu(1_D \otimes_A \mu)
\end{aligned}$$

(la deuxième égalité résultant de 2.1.2.3, la troisième de l'associativité de B et C, et la quatrième de 2.1.2.4). D'autre part, en vertu de 2.1.2.5, pour tous $b \in B$ et $c \in C$, on a

$$\begin{aligned}
\mu(b \otimes_A c \otimes_A 1 \otimes_A 1) &= (\mu_B \otimes_A \mu_C)(1_B \otimes_A T \otimes_A 1_C)(b \otimes_A c \otimes_A 1 \otimes_A 1) \\
&= (\mu_B \otimes_A \mu_C)(b \otimes_A 1 \otimes_A c \otimes_A 1) = b \otimes_A c
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\mu(1 \otimes_A 1 \otimes_A b \otimes_A c) &= (\mu_B \otimes_A \mu_C)(1_B \otimes_A T \otimes_A 1_C)(1 \otimes_A 1 \otimes_A b \otimes_A c) \\
&= (\mu_B \otimes_A \mu_C)(1 \otimes_A b \otimes_A 1 \otimes_A c) = b \otimes_A c \quad ,
\end{aligned}$$

où 1 désigne indifféremment l'unité de B ou C, ce qui prouve que $1 \otimes_A 1$ est une unité pour μ, et prouve que D, muni de la multiplication μ, est une algèbre.

Montrons que les applications linéaires i et j, définies par 2.1.4.2, sont des morphismes d'algèbres. Pour tous $b, b' \in B$, on a

$$\begin{aligned}
\mu(i \otimes_A i)(b \otimes_A b') &= (\mu_B \otimes_A \mu_C)(1_B \otimes_A T \otimes_A 1_C)(b \otimes_A 1 \otimes_A b' \otimes_A 1) \\
&= (\mu_B \otimes_A \mu_C)(b \otimes_A b' \otimes_A 1 \otimes_A 1) = \mu_B(b \otimes_A b') \otimes_A 1 = i\mu_B(b \otimes_A b')
\end{aligned}$$

(la deuxième égalité résultant de 2.1.2.5), ce qui prouve que i est un morphisme d'algèbres. Pour j, la démonstration est duale.

Montrons que le carré (u, v, i, j) est cocartierien direct. On remarque que

$$T(v \otimes_A u) = T(1_C \otimes_A u)v = (u \otimes_A 1_C)v = u \otimes_A v \tag{2.1.4.4}$$

(la deuxième égalité résultant de 2.1.2.6). On a donc

$$\begin{aligned}
\varphi(u, v, i, j) = \mu(i \otimes_A j) &= (\mu_B \otimes_A \mu_C)(1_B \otimes_A T \otimes_A 1_C)(1_B \otimes_A v \otimes_A u \otimes_A 1_C) \\
&= (\mu_B \otimes_A \mu_C)(1_B \otimes_A u \otimes_A v \otimes_A 1_C) = 1_B \otimes_A 1_C
\end{aligned}$$

(car la propriété d'unité de μ_B et μ_C implique que $\mu_B(1_B \otimes_A u) = 1_B$ et $\mu_C(v \otimes_A 1_C) = 1_C$ respectivement), ce qui prouve que $\varphi(u,v,i,j)$ est le morphisme identique, et est, en particulier, un isomorphisme. Cela implique aussi que

$$\begin{aligned}
T(u,v,i,j) = \varphi'(u,v,i,j) &= \mu(j \otimes_A i) \\
&= (\mu_B \otimes_A \mu_C)(1_B \otimes_A T \otimes_A 1_C)(u \otimes_A 1_C \otimes_A 1_B \otimes_A v) \\
&= (\mu_B \otimes_A \mu_C)(u \otimes_A 1_B \otimes_A 1_C \otimes_A v)T = T
\end{aligned}$$

(car la propriété d'unité de μ_B et μ_C implique que $\mu_B(u \otimes_A 1_B) = 1_B$ et $\mu_C(1_C \otimes_A v) = 1_C$ respectivement), ce qui prouve que l'application qui associe à un carré cocartierien (u,v,i,j) le A-tressage $T(u,v,i,j)$ est un inverse à gauche de l'application qui associe à un A-tressage T le carré cocartierien (u,v,i,j) défini ci-dessus.

Montrons la propriété universelle. Soit donc

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "v"] \arrow[d, "u"'] & C \arrow[d, "j'"] \\
B \arrow[r, "i'"] & E
\end{tikzcd}$$

un carré commutatif d'algèbres tel que

(2.1.4.5) $$\mu_E(i' \otimes_A j')T = \mu_E(j' \otimes_A i') \quad ,$$

où μ_E désigne le morphisme de $(A\,;A)$-bimodules défini par la multiplication de E. Si $w : D \to E$ est un morphisme d'algèbres tel que $i' = wi$ et $j' = wj$, comme, en vertu de ce qui précède, $\mu(i \otimes_A j) = 1_B \otimes_A 1_C$, on a

$$w = w\mu(i \otimes_A j) = \mu_E(w \otimes_A w)(i \otimes_A j) = \mu_E(i' \otimes_A j') \quad ,$$

ce qui prouve l'unicité de w. Pour conclure, il suffit de montrer que le morphisme de $(A\,;A)$-bimodules w, défini par la formule ci-dessus, est un morphisme d'algèbres et satisfait aux relations $i' = wi$ et $j' = wj$. On a

$$\begin{aligned}
w\mu &= \mu_E(i' \otimes_A j')(\mu_B \otimes_A \mu_C)(1_B \otimes_A T \otimes_A 1_C) \\
&= \mu_E(\mu_E \otimes_A \mu_E)(i' \otimes_A i' \otimes_A j' \otimes_A j')(1_B \otimes_A T \otimes_A 1_C) \\
&= \mu_E(1_E \otimes_A \mu_E)(1_E \otimes_A \mu_E \otimes_A 1_E)(i' \otimes_A i' \otimes_A j' \otimes_A j')(1_B \otimes_A T \otimes_A 1_C) \\
&= \mu_E(1_E \otimes_A \mu_E)(1_E \otimes_A \mu_E \otimes_A 1_E)(i' \otimes_A j' \otimes_A i' \otimes_A j') \\
&= \mu_E(\mu_E \otimes_A \mu_E)(i' \otimes_A j' \otimes_A i' \otimes_A j') = \mu_E(w \otimes_A w)
\end{aligned}$$

(la deuxième égalité résultant du fait que i' et j' sont des morphismes d'algèbres, la troisième et la cinquième de l'associativité de μ_E, et la quatrième de 2.1.4.5),

$$w(1 \otimes_A 1) = \mu_E(i' \otimes_A j')(1 \otimes_A 1) = \mu_E(1 \otimes_A 1) = 1 \quad ,$$

ce qui prouve que w est un morphisme d'algèbres, et

$$wi = \mu_E(i' \otimes_A j')(1_B \otimes_A v) = \mu_E(i' \otimes_A i')(1_B \otimes_A u) = i'\mu_B(1_B \otimes_A u) = i'$$

(la deuxième égalité résultant de la commutativité du carré (u, v, i', j'), la troisième du fait que i' est un morphisme d'algèbres, et la quatrième de la propriété d'unité de μ_B). La relation $wj = j'$ se démontre de façon duale.

Supposons maintenant que le carré (u, v, i', j') soit cocartierien direct, et posons

$$T = T(u, v, i', j') \quad .$$

Alors, par définition de $T(u, v, i', j')$, on a

$$\mu_E(i' \otimes_A j')T = \mu_E(j' \otimes_A i') \quad .$$

En vertu de ce qui précède, il existe donc un unique morphisme d'algèbres $w : D \to E$ tel que $i' = wi$ et $j' = wj$, et on a

$$w = \mu_E(i' \otimes_A j') = \varphi(u, v, i', j') \quad .$$

On en déduit que w est un isomorphisme d'algèbres, ce qui achève la démonstration du fait que l'application qui associe à un carré cocartierien direct (u, v, i, j) le morphisme de $(A\,;A)$-bimodules $T(u, v, i, j)$ établit une bijection entre l'ensemble des classes d'isomorphisme de carrés cocartieriens directs de base (u, v) et l'ensemble des A-tressages T de l'algèbre B avec l'algèbre C. La dernière assertion du théorème est évidente.

Définition 2.1.5. Soient A, B, et C des algèbres, $u : A \to B$ et $v : A \to C$ des morphismes d'algèbres et $T : C \otimes_A B \to B \otimes_A C$ un A-tressage de l'algèbre B avec l'algèbre C. On dit que l'algèbre $B \otimes_A C$ dont la multiplication μ est définie par 2.1.4.1 est le *produit tensoriel tordu sur A de B et C associé au A-tressage* T. On dit qu'une structure d'algèbre sur $B \otimes_A C$ est un *produit tensoriel tordu sur A de B et C* s'il existe un A-tressage T, tel que cette structure soit le produit tensoriel tordu sur A, associé à ce tressage. On dit qu'un produit tensoriel tordu sur A est *régulier* si le A-tressage correspondant est bijectif, ou de façon équivalente, si le carré cocartierien direct correspondant est cocartierien.

Remarque 2.1.6. *a*) En vertu du théorème 2.1.4, l'ensemble des structures d'algèbre sur $B \otimes_A C$ qui sont un produit tensoriel tordu sur A de B et C est en bijection avec l'ensemble des A-tressages de B avec C, et une structure d'algèbre sur $B \otimes_A C$ est un produit tensoriel tordu si et seulement si, pour tous $b, b' \in B$ et $c, c' \in C$, on a

$$(b \otimes_A 1)\cdot(b' \otimes_A 1) = bb' \otimes_A 1\,, \quad (1 \otimes_A c)\cdot(1 \otimes_A c') = 1 \otimes_A cc'\,, \quad (b \otimes_A 1)\cdot(1 \otimes_A c) = b \otimes_A c \quad .$$

b) Si $B = A$ et $u = 1_A$, l'isomorphisme canonique $C \otimes_A A \to A \otimes_A C$, déduit des identifications $C \otimes_A A \simeq C \simeq A \otimes_A C$, est un A-tressage de l'algèbre A avec l'algèbre C, et la structure d'algèbre sur $A \otimes_A C$, produit tensoriel tordu sur A, associé à ce tressage, s'identifie à celle de l'algèbre C.

c) Si l'algèbre A est *commutative* et si l'image de u (resp. v) est centrale dans B (resp. C), autrement dit, si u (resp. v) fait de B (resp. C) une A-algèbre, alors la volte

$$\begin{aligned} \sigma : C \otimes_A B &\longrightarrow B \otimes_A C \\ c \otimes_A b &\longmapsto b \otimes_A c \end{aligned}$$

est un A-tressage de l'algèbre B avec l'algèbre C, et la structure d'algèbre sur $B \otimes_A C$, produit tensoriel tordu sur A, associé à ce tressage, s'identifie à la structure de produit tensoriel ordinaire sur A des algèbres B et C.

Corollaire 2.1.7. *Soient A, B, B', C, C' des algèbres,*

$$u : A \longrightarrow B \quad , \qquad u' : A \longrightarrow B' \quad , \qquad v : A \longrightarrow C \quad , \qquad v' : A \longrightarrow C' \quad ,$$

des morphismes d'algèbres, et

$$T : C \otimes_A B \longrightarrow B \otimes_A C \qquad (\text{resp.} \quad T' : C' \otimes_A B' \longrightarrow B' \otimes_A C' \quad)$$

un A-tressage de l'algèbre B (resp. B') *avec l'algèbre C* (resp. C'). *Soient*

$$f : B \longrightarrow B' \quad , \qquad g : C \longrightarrow C'$$

des morphismes d'algèbres tels que $u' = fu$, $v' = gv$, et tels que le carré

$$\begin{tikzcd}
C \otimes_A B \arrow[r, "T"] \arrow[d, "g \otimes_A f"'] & B \otimes_A C \arrow[d, "f \otimes_A g"] \\
C' \otimes_A B' \arrow[r, "T'"] & B' \otimes_A C'
\end{tikzcd}$$

soit commutatif. Alors, si l'on munit $B \otimes_A C$ (resp. $B' \otimes_A C'$) *de la structure d'algèbre, produit tensoriel tordu sur A de B et C* (resp. B' *et* C'), *associé au tressage T* (resp. T'), *le morphisme de $(A\,;A)$-bimodules $f \otimes_A g$ est un morphisme d'algèbres.*

Démonstration. Considérons les carrés cocartieriens correspondants aux A-tressages T et T'

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "v"] \arrow[d, "u"'] & C \arrow[d, "j"] \\
B \arrow[r, "i"] & D = B \otimes_A C
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "v'"] \arrow[d, "u'"'] & C' \arrow[d, "j'"] \\
B' \arrow[r, "i'"] & D' = B' \otimes_A C'
\end{tikzcd}$$

$$i = 1_B \otimes_A v \qquad\qquad i' = 1_{B'} \otimes_A v'$$

$$j = u \otimes_A 1_C \qquad\qquad j' = u' \otimes_A 1_{C'}$$

et notons

$$\mu : D \otimes_A D \longrightarrow D \quad , \qquad \mu' : D' \otimes_A D' \longrightarrow D'$$

les morphismes de $(A\,;A)$-bimodules définis par les multiplications de D et D' respectivement. En vertu du théorème 2.1.4, on a $\mu'(i' \otimes_A j') = 1_{D'}$ et $\mu'(j' \otimes_A i') = T'$. Si l'on pose $i'' = i'f$, $j'' = j'g$, on a donc

$$\mu'(i'' \otimes_A j'') = \mu'(i' \otimes_A j')(f \otimes_A g) = (f \otimes_A g) \ ,$$

$$\mu'(j'' \otimes_A i'') = \mu'(j' \otimes_A i')(g \otimes_A f) = T'(g \otimes_A f)$$

et, en particulier,

$$\mu'(i'' \otimes_A j'')T = (f \otimes_A g)T = T'(g \otimes_A f) = \mu'(j'' \otimes_A i'') \ .$$

En vertu donc de la propriété universelle de l'algèbre D, établie dans le théorème 2.1.4, il existe un unique morphisme d'algèbres $w : D \to D'$, tel que $i'' = wi$ et $j'' = wj$, et $w = \mu'(i'' \otimes_A j'') = f \otimes_A g$, ce qui prouve le corollaire.

2.2. Les sorites sur les carrés cocartieriens.

Lemme 2.2.1. *Soit*

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "v"] \arrow[d, "u"'] & C \arrow[d, "j"] \\
B \arrow[r, "i"] & D
\end{tikzcd}
\tag{2.2.1.1}
$$

un diagramme d'algèbres et de morphismes d'algèbres, et considérons le diagramme

$$
\begin{tikzcd}
A^\circ \arrow[r, "v^\circ"] \arrow[d, "u^\circ"'] & C^\circ \arrow[d, "j^\circ"] \\
B^\circ \arrow[r, "i^\circ"] & D^\circ
\end{tikzcd}
\quad ,
\tag{2.2.1.2}
$$

où pour une algèbre X on note X° l'algèbre opposée et pour un morphisme d'algèbres $t : X \to Y$, on note $t^\circ : X^\circ \to Y^\circ$ le morphisme d'algèbres ayant même application sous-jacente que t. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

a) *le carré (u, v, i, j) est cocartierien direct ;*

b) *le carré $(u, v, i, j)^\circ := (v^\circ, u^\circ, j^\circ, i^\circ)$ est cocartierien direct, autrement dit le carré $(u^\circ, v^\circ, i^\circ, j^\circ)$ est cocartierien inverse.*

Lemme 2.2.2. *Soit $u : A \to B$ un morphisme d'algèbres. Alors les carrés $(u, 1_A, 1_B, u)$ et $(1_A, u, u, 1_B)$*

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "1_A"] \arrow[d, "u"'] & A \arrow[d, "u"] \\
B \arrow[r, "1_B"] & B
\end{tikzcd}
\quad , \quad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "u"] \arrow[d, "1_A"'] & B \arrow[d, "1_B"] \\
A \arrow[r, "u"] & B
\end{tikzcd}
$$

sont cocartieriens directs (donc cocartieriens).

La démonstration des lemmes 2.2.1 et 2.2.2 est immédiate.

Lemme 2.2.3. *Le produit tensoriel (sur K) de deux carrés cocartieriens directs est cocartierien direct, autrement dit, si*

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "v"] \arrow[d, "u"'] & C \arrow[d, "j"] \\
B \arrow[r, "i"] & D
\end{tikzcd}
\quad , \quad
\begin{tikzcd}
A' \arrow[r, "v'"] \arrow[d, "u'"'] & C' \arrow[d, "j'"] \\
B' \arrow[r, "i'"] & D'
\end{tikzcd}
$$

sont des diagrammes d'algèbres et de morphismes d'algèbres et si les carrés (u, v, i, j) et (u', v', i', j') sont cocartieriens directs, il en est de même pour le carré :

$$
(u \otimes u', v \otimes v', i \otimes i', j \otimes j') = \quad
\begin{tikzcd}
A \otimes A' \arrow[r, "v \otimes v'"] \arrow[d, "u \otimes u'"'] & C \otimes C' \arrow[d, "j \otimes j'"] \\
B \otimes B' \arrow[r, "i \otimes i'"] & D \otimes D'
\end{tikzcd}
\quad .
$$

Démonstration. Par hypothèse, les morphismes

$$\begin{array}{ccc} B \otimes_A C \xrightarrow{\varphi} D & \text{et} & B' \otimes_{A'} C' \xrightarrow{\varphi'} D' \\ b \otimes_A c \mapsto i(b)j(c) & & b' \otimes_{A'} c' \mapsto i'(b')j'(c') \end{array}$$

sont des isomorphismes de K-modules, et il s'agit de montrer que

$$\begin{array}{c} (B \otimes B') \otimes_{A \otimes A'} (C \otimes C') \xrightarrow{\psi} D \otimes D' \\ (b \otimes b') \otimes_{A \otimes A'} (c \otimes c') \mapsto \big(i(b) \otimes i'(b')\big) \cdot \big(j(c) \otimes j'(c')\big) \end{array}$$

est aussi un isomorphisme de K-modules. Or, on a un isomorphisme canonique

$$\begin{array}{c} (B \otimes B') \otimes_{A \otimes A'} (C \otimes C') \xrightarrow{\theta} (B \otimes_A C) \otimes (B' \otimes_{A'} C') \\ (b \otimes b') \otimes_{A \otimes A'} (c \otimes c') \longmapsto (b \otimes_A c) \otimes (b' \otimes_{A'} c') \end{array}$$

et on vérifie aussitôt que $\psi = (\varphi \otimes \varphi')\theta$, ce qui prouve le lemme.

Lemme 2.2.4. *Soit*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "b"] \arrow[d, "a"'] \arrow[dr, phantom, "(1)"] & B_2 \arrow[r, "e"] \arrow[d, "d"] \arrow[dr, phantom, "(2)"] & C_2 \arrow[d, "g"] \\ B_1 \arrow[r, "c"'] & C_1 \arrow[r, "f"'] & D \end{tikzcd}$$

un diagramme commutatif d'algèbres et de morphismes d'algèbres. On suppose que le carré $(1) = (a, b, c, d)$ *est cocartierien direct. Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

a) *le carré* $(2) = (d, e, f, g)$ *est cocartierien direct ;*

b) *le carré* $(2) \circ (1) = (a, eb, fc, g)$ *est cocartierien direct.*

Démonstration. Considérons le diagramme de K-modules et applications K-linéaires

(2.2.4.1)
$$\begin{tikzcd} B_1 \otimes_A B_2 \otimes_{B_2} C_2 \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & B_1 \otimes_A C_2 \arrow[d, "\psi"] \\ C_1 \otimes_{B_2} C_2 \arrow[r, "\varphi"'] & D \end{tikzcd} \quad ,$$

où α désigne l'isomorphisme canonique

$$\alpha(x_1 \otimes_A x_2 \otimes_{B_2} y_2) = x_1 \otimes_A e(x_2) y_2 \quad , \qquad x_1 \in B_1 \ , \quad x_2 \in B_2 \ , \quad y_2 \in C_2 \ ,$$

et les applications linéaires β, φ, ψ sont définies par

$$\beta(x_1 \otimes_A x_2 \otimes_{B_2} y_2) = c(x_1)d(x_2) \otimes_{B_2} y_2 \quad , \qquad x_1 \in B_1 \ , \quad x_2 \in B_2 \ , \quad y_2 \in C_2 \ ,$$

$$\varphi(y_1 \otimes_{B_2} y_2) = f(y_1)g(y_2) \quad , \qquad y_1 \in C_1 \ , \quad y_2 \in C_2 \ ,$$

$$\psi(x_1 \otimes_A y_2) = fc(x_1)g(y_2) \quad , \qquad x_1 \in B_1 \ , \quad y_2 \in C_2 \ .$$

Le diagramme ci-dessus est commutatif. En effet, pour tous $x_1 \in B_1$, $x_2 \in B_2$, $y_2 \in C_2$, on a

$$\psi\alpha(x_1 \otimes_A x_2 \otimes_{B_2} y_2) = \psi\big(x_1 \otimes_A e(x_2)y_2\big) = fc(x_1)g\big(e(x_2)y_2\big) = fc(x_1)ge(x_2)g(y_2)$$

et

$$\varphi\beta(x_1 \otimes_A x_2 \otimes_{B_2} y_2) = \varphi\big(c(x_1)d(x_2) \otimes_{B_2} y_2\big) = f\big(c(x_1)d(x_2)\big)g(y_2) = fc(x_1)fd(x_2)g(y_2)$$

et la commutativité du diagramme 2.2.4.1 résulte de celle de (2). Comme le carré (a, b, c, d) est cocartierien direct, β est un isomorphisme, et comme α est un isomorphisme, φ est un isomorphisme si et seulement si ψ l'est, ce qui prouve le lemme.

Proposition 2.2.5. *Soient n un entier, pour tous k, l, $0 \leq k \leq l \leq n$, $(k,l) \neq (0,0)$, $(k,l) \neq (n,n)$, une algèbre $B_{k,l}$, pour tous k, l, $0 \leq k < l \leq n$, $(k,l) \neq (0,1)$, $b_{k,l} : B_{k,l-1} \to B_{k,l}$ un morphisme d'algèbres, pour tous k, l, $0 \leq k < l \leq n$, $(k,l) \neq (n-1,n)$, $s_{k,l} : B_{k+1,l} \to B_{k,l}$ un morphisme d'algèbres, tels que pour tous k, l, $0 \leq k$, $k+1 \leq l-1$, $l \leq n$, on ait*

$$\begin{array}{ccc} B_{k+1,l-1} & \xrightarrow{b_{k+1,l}} & B_{k+1,l} \\ {\scriptstyle s_{k,l-1}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle s_{k,l}} \\ B_{k,l-1} & \xrightarrow{b_{k,l}} & B_{k,l} \end{array} \qquad\qquad s_{k,l}b_{k+1,l} = b_{k,l}s_{k,l-1} \quad .$$

Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) *pour tous k, l, $0 \leq k$, $k+1 \leq l-1$, $l \leq n$, le carré $(k,l) = (s_{k,l-1}, b_{k+1,l}, b_{k,l}, s_{k,l})$ est cocartierien direct ;*

b) *pour tous k, l, $0 \leq k$, $k+1 \leq l-1$, $l \leq n$, le carré*

$$(k,l)\circ(k,l-1)\circ\cdots\circ(k,k+2) = (s_{k,k+1}, b_{k+1,l}b_{k+1,l-1}\cdots b_{k+1,k+2}, b_{k,l}b_{k,l-1}\cdots b_{k,k+2}, s_{k,l})$$

est cocartierien direct ;

c) *pour tous k, l, $0 \leq k$, $k+1 \leq l-1$, $l \leq n$, le carré*

$$(k,l)\circ(k+1,l)\circ\cdots\circ(l-2,l) = (s_{k,l-1}s_{k+1,l-1}\cdots s_{l-2,l-1}, b_{l-1,l}, b_{k,l}, s_{k,l}s_{k+1,l}\cdots s_{l-2,l})$$

est cocartierien direct ;

d) *pour tous k, k', l, l', $0 \leq k < k' \leq l' < l \leq n$, le carré*

$$\begin{tikzcd}
B_{k',l'} \arrow[r] \arrow[d] & B_{k',l} \arrow[d] \\
B_{k,l'} \arrow[r] & B_{k,l}
\end{tikzcd}$$

$$(s_{k,l'}s_{k+1,l'}\cdots s_{k'-1,l'}, b_{k',l}b_{k',l-1}\cdots b_{k',l'+1}, b_{k,l}b_{k,l-1}\cdots b_{k,l'+1}, s_{k,l}s_{k+1,l}\cdots s_{k'-1,l})$$

est cocartierien direct ;

e) *pour tous k, l, $0 \leq k$, $k+1 \leq l-1$, $l \leq n$, l'application linéaire*

$$B_{k,k+1} \otimes_{B_{k+1,k+1}} B_{k+1,k+2} \otimes_{B_{k+2,k+2}} \cdots \otimes_{B_{l-1,l-1}} B_{l-1,l} \xrightarrow{\varphi_{k,l}} B_{k,l}$$

$$x_1 \otimes_{B_{k+1,k+1}} x_2 \otimes_{B_{k+2,k+2}} \cdots \otimes_{B_{l-1,l-1}} x_{l-k} \mapsto i_1(x_1)i_2(x_2)\cdots i_{l-k}(x_{l-k}) \quad ,$$

où pour tout p, $1 \leq p \leq l-k$,

$$i_p = b_{k,l}b_{k,l-1}\cdots b_{k,k+p+1}s_{k,k+p}s_{k+1,k+p}\cdots s_{k+p-2,k+p}$$

$(i_1 = b_{k,l}b_{k,l-1}\cdots b_{k,k+2}$ *et* $i_{l-k} = s_{k,l}s_{k+1,l}\cdots s_{l-2,l})$ *est bijective.*

$$\begin{tikzcd}
 & & & B_{4,4} \arrow[r, "b_{4,5}"] \arrow[d, swap, "s_{3,4}"] & B_{4,5} \arrow[d, "s_{3,5}"] \\
 & & B_{3,3} \arrow[r, "b_{3,4}"] \arrow[d, swap, "s_{2,3}"] & B_{3,4} \arrow[r, "b_{3,5}"] \arrow[d, swap, "s_{2,4}"] & B_{3,5} \arrow[d, "s_{2,5}"] \\
 & B_{2,2} \arrow[r, "b_{2,3}"] \arrow[d, swap, "s_{1,2}"] & B_{2,3} \arrow[r, "b_{2,4}"] \arrow[d, swap, "s_{1,3}"] & B_{2,4} \arrow[r, "b_{2,5}"] \arrow[d, swap, "s_{1,4}"] & B_{2,5} \arrow[d, "s_{1,5}"] \\
B_{1,1} \arrow[r, "b_{1,2}"] \arrow[d, swap, "s_{0,1}"] & B_{1,2} \arrow[r, "b_{1,3}"] \arrow[d, swap, "s_{0,2}"] & B_{1,3} \arrow[r, "b_{1,4}"] \arrow[d, swap, "s_{0,3}"] & B_{1,4} \arrow[r, "b_{1,5}"] \arrow[d, swap, "s_{0,4}"] & B_{1,5} \arrow[d, "s_{0,5}"] \\
B_{0,1} \arrow[r, swap, "b_{0,2}"] & B_{0,2} \arrow[r, swap, "b_{0,3}"] & B_{0,3} \arrow[r, swap, "b_{0,4}"] & B_{0,4} \arrow[r, swap, "b_{0,5}"] & B_{0,5}
\end{tikzcd}$$

Figure 1 : cas $n = 5$

Démonstration. L'équivalence des conditions (a), (b), (c) et (d) résulte aussitôt du lemme 2.2.4. L'équivalence de (c) et (e) va résulter de deux observations suivantes. Soient k, l, $0 \leq k$, $k+1 \leq l-1$, $l \leq n$:

i) si $l-k=2$, l'application $\varphi_{k,l}$ est, par définition, bijective si et seulement si le carré $(k,l) = (l-2,l) = (s_{l-2,l-1}, b_{l-1,l}, b_{l-2,l}, s_{l-2,l})$ est cocartierien direct ;

ii) si $l-k>2$, pourvu que l'application $\varphi_{k,l-1}$ soit bijective, l'application $\varphi_{k,l}$ est bijective si et seulement si le carré

$$(k,l)\circ(k+1,l)\circ\cdots\circ(l-2,l) = (s_{k,l-1}s_{k+1,l-1}\cdots s_{l-2,l-1}, b_{l-1,l}, b_{k,l}, s_{k,l}s_{k+1,l}\cdots s_{l-2,l})$$

est cocartierien direct.

Cela résulte aussitôt de la commutativité du triangle suivant :

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
B_{k,k+1} \otimes_{B_{k+1,k+1}} \cdots \otimes_{B_{l-2,l-2}} B_{l-2,l-1} \otimes_{B_{l-1,l-1}} B_{l-1,l} \arrow[d, "\varphi_{k,l-1} \otimes_{B_{l-1,l-1}} 1_{B_{l-1,l}}"'] \arrow[drr, "\varphi_{k,l}"] & & \\
B_{k,l-1} \otimes_{B_{l-1,l-1}} B_{l-1,l} \arrow[rr] & & B_{k,l}
\end{tikzcd}$$

$$x \otimes_{B_{l-1,l-1}} y \mapsto b_{k,l}(x)s_{k,l}s_{k+1,l}\cdots s_{l-2,l}(y)$$

L'équivalence de (c) et (e) en résulte par récurrence sur $l-k \geq 2$.

2.3. Produits tensoriels tordus multiples.

Les résultats de ce paragraphe ne sont utilisés que dans 3.4 *et* 4.4.4.

Définition 2.3.1. Soient B une algèbre, X_1, X_2, X_3 trois $(B\,;B)$-bimodules et

$$T_{ji} : X_j \otimes_B X_i \longrightarrow X_i \otimes_B X_j \quad , \qquad 1 \leq i < j \leq 3 \quad ,$$

des morphismes de $(B\,;B)$-bimodules. On dit que le triplet (T_{21}, T_{31}, T_{32}) satisfait à *l'équation de Yang-Baxter quantique* si le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd}
& X_3 \otimes_B X_2 \otimes_B X_1 \arrow[r, "T_{32}\otimes_B 1_{X_1}"] \arrow[dl, "1_{X_3}\otimes_B T_{21}"'] & X_2 \otimes_B X_3 \otimes_B X_1 \arrow[dr, "1_{X_2}\otimes_B T_{31}"] & \\
X_3 \otimes_B X_1 \otimes_B X_2 \arrow[dr, "T_{31}\otimes_B 1_{X_2}"'] & & & X_2 \otimes_B X_1 \otimes_B X_3 \arrow[dl, "T_{21}\otimes_B 1_{X_3}"] \\
& X_1 \otimes_B X_3 \otimes_B X_2 \arrow[r, "1_{X_1}\otimes_B T_{32}"] & X_1 \otimes_B X_2 \otimes_B X_3 &
\end{tikzcd} \quad ,$$

autrement dit,

$$(T_{21} \otimes_B 1_{X_3})(1_{X_2} \otimes_B T_{31})(T_{32} \otimes_B 1_{X_1}) = (1_{X_1} \otimes_B T_{32})(T_{31} \otimes_B 1_{X_2})(1_{X_3} \otimes_B T_{21}) \ .$$

Si $X_1 = X_2 = X_3$ et $T_{21} = T_{31} = T_{32} = T$, on dit, plus simplement, que T satisfait à l'équation de Yang-Baxter quantique.

Lemme 2.3.2. *Soient B une algèbre, X_i, $1 \leq i \leq 4$, des $(B\,;B)$-bimodules et*

$$T_{ji} : X_j \otimes_B X_i \longrightarrow X_i \otimes_B X_j \quad , \qquad 1 \leq i < j \leq 4 \quad , \quad (i,j) \neq (1,2) \quad ,$$

des morphismes de $(B\,;B)$-bimodules tels que les triplets (T_{31}, T_{41}, T_{43}) et (T_{32}, T_{42}, T_{43}) satisfassent à l'équation de Yang-Baxter quantique. On pose

$$T_{3,12} = (1_{X_1} \otimes_B T_{32})(T_{31} \otimes_B 1_{X_2})$$

$$T_{4,12} = (1_{X_1} \otimes_B T_{42})(T_{41} \otimes_B 1_{X_2}) \quad .$$

Alors le triplet $(T_{3,12}, T_{4,12}, T_{43})$ satisfait à l'équation de Yang-Baxter quantique.

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}
&(T_{3,12} \otimes_B 1_{X_4})(1_{X_3} \otimes_B T_{4,12})(T_{43} \otimes_B 1_{X_1 \otimes_B X_2}) \\
&\qquad = (1_{X_1} \otimes_B T_{32} \otimes_B 1_{X_4})(T_{31} \otimes_B 1_{X_2} \otimes_B 1_{X_4})(1_{X_3} \otimes_B 1_{X_1} \otimes_B T_{42}) \\
&\qquad\qquad (1_{X_3} \otimes_B T_{41} \otimes_B 1_{X_2})(T_{43} \otimes_B 1_{X_1} \otimes_B 1_{X_2}) \\
&\qquad = (1_{X_1} \otimes_B T_{32} \otimes_B 1_{X_4})(1_{X_1} \otimes_B 1_{X_3} \otimes_B T_{42})(T_{31} \otimes_B 1_{X_4} \otimes_B 1_{X_2}) \\
&\qquad\qquad (1_{X_3} \otimes_B T_{41} \otimes_B 1_{X_2})(T_{43} \otimes_B 1_{X_1} \otimes_B 1_{X_2}) \\
&\qquad = (1_{X_1} \otimes_B T_{32} \otimes_B 1_{X_4})(1_{X_1} \otimes_B 1_{X_3} \otimes_B T_{42})(1_{X_1} \otimes_B T_{43} \otimes_B 1_{X_2}) \\
&\qquad\qquad (T_{41} \otimes_B 1_{X_3} \otimes_B 1_{X_2})(1_{X_4} \otimes_B T_{31} \otimes_B 1_{X_2}) \\
&\qquad = (1_{X_1} \otimes_B 1_{X_2} \otimes_B T_{43})(1_{X_1} \otimes_B T_{42} \otimes_B 1_{X_3})(1_{X_1} \otimes_B 1_{X_4} \otimes_B T_{32}) \\
&\qquad\qquad (T_{41} \otimes_B 1_{X_3} \otimes_B 1_{X_2})(1_{X_4} \otimes_B T_{31} \otimes_B 1_{X_2}) \\
&\qquad = (1_{X_1} \otimes_B 1_{X_2} \otimes_B T_{43})(1_{X_1} \otimes_B T_{42} \otimes_B 1_{X_3})(T_{41} \otimes_B 1_{X_2} \otimes_B 1_{X_3}) \\
&\qquad\qquad (1_{X_4} \otimes_B 1_{X_1} \otimes_B T_{32})(1_{X_4} \otimes_B T_{31} \otimes_B 1_{X_2}) \\
&\qquad = (1_{X_1 \otimes_B X_2} \otimes_B T_{43})(T_{4,12} \otimes_B 1_{X_3})(1_{X_4} \otimes_B T_{3,12})
\end{aligned}$$

(la troisième (resp. la quatrième) égalité résultant du fait que le triplet (T_{31}, T_{41}, T_{43}) (resp. (T_{32}, T_{42}, T_{43})) satisfait à l'équation de Yang-Baxter quantique), ce qui prouve le lemme.

Lemme 2.3.3. *Soient B, X_1, X_2, X_3 des algèbres, $u_i : B \to X_i$, $i = 1, 2, 3$, des morphismes d'algèbres, et*

$$T_{ji} : X_j \otimes_B X_i \longrightarrow X_i \otimes_B X_j \quad , \qquad 1 \leq i < j \leq 3 \quad ,$$

un B-tressage de l'algèbre X_i avec l'algèbre X_j. On munit $X_i \otimes_B X_j$, $1 \leq i < j \leq 3$, de la structure d'algèbre produit tensoriel tordu sur B de X_i et X_j, associé au tressage T_{ji}.

i) *Si l'on pose*

$$T_{3,12} = (1_{X_1} \otimes_B T_{32})(T_{31} \otimes_B 1_{X_2}) \quad , \tag{2.3.3.1}$$

$$(2.3.3.2) \qquad T_{23,1} = (T_{21} \otimes_B 1_{X_3})(1_{X_2} \otimes_B T_{31}) \quad ,$$

les conditions suivantes sont équivalentes :

a) *le triplet* (T_{21}, T_{31}, T_{32}) *satisfait à l'équation de Yang-Baxter quantique;*

b) $T_{3,12}$ *est un* B*-tressage de l'algèbre* $X_1 \otimes_B X_2$ *avec l'algèbre* X_3*;*

c) $T_{23,1}$ *est un* B*-tressage de l'algèbre* X_1 *avec l'algèbre* $X_2 \otimes_B X_3$.

De plus, si ces conditions sont satisfaites, la structure d'algèbre sur $X_1 \otimes_B X_2 \otimes_B X_3$*, produit tensoriel tordu sur* B *de* $X_1 \otimes_B X_2$ *et* X_3*, associé au* B*-tressage* $T_{3,12}$*, coïncide avec celle de produit tensoriel tordu sur* B *de* X_1 *et* $X_2 \otimes_B X_3$*, associé au* B*-tressage* $T_{23,1}$*, et le morphisme de* $(B\,;B)$*-bimodules* $1_{X_1} \otimes_B u_2 \otimes_B 1_{X_3} : X_1 \otimes_B X_3 \to X_1 \otimes_B X_2 \otimes_B X_3$ *est un morphisme d'algèbres.*

ii) *Réciproquement, supposont* $X_1 \otimes_B X_2 \otimes_B X_3$ *muni d'une structure d'algèbre, faisant de* $X_1 \otimes_B X_2 \otimes_B X_3$ *un produit tensoriel tordu sur* B *de* $X_1 \otimes_B X_2$ *et* X_3*, associé à un* B*-tressage* $T_{3,12}$*. Si* $1_{X_1} \otimes_B u_2 \otimes_B 1_{X_3}$ *et* $u_1 \otimes_B 1_{X_2} \otimes_B 1_{X_3}$ *sont des morphismes l'algèbres, alors le* B*-tressage* $T_{3,12}$ *est donné par la formule* 2.3.3.1 *En particulier, l'existence d'une telle structure d'algèbre sur* $X_1 \otimes_B X_2 \otimes_B X_3$ *implique que le triplet* (T_{21}, T_{31}, T_{32}) *satisfait à l'équation de Yang-Baxter quantique.*

Démonstration. On note $\mu_i : X_i \otimes_B X_i \to X_i$, $1 \le i \le 3$, le morphisme de $(B\,;B)$-bimodules défini par la multiplication de X_i, et

$$\mu_{ij} : X_i \otimes_B X_j \otimes_B X_i \otimes_B X_j \longrightarrow X_i \otimes_B X_j \quad , \qquad 1 \le i < j \le 3 \quad ,$$

le morphisme de $(B\,;B)$-bimodules défini par la multiplication de $X_i \otimes_B X_j$. Par définition,

$$\mu_{ij} = (\mu_i \otimes_B \mu_j)(1_{X_i} \otimes_B T_{ji} \otimes_B 1_{X_j}) \quad .$$

Pour démontrer la partie (i), montrons d'abord que $T_{3,12}$ satisfait à la condition 2.1.2.3. On a

$$\begin{aligned}
&(1_{X_1 \otimes_B X_2} \otimes_B \mu_3)(T_{3,12} \otimes_B 1_{X_3})(1_{X_3} \otimes_B T_{3,12}) \\
&\quad = (1_{X_1} \otimes_B 1_{X_2} \otimes_B \mu_3)(1_{X_1} \otimes_B T_{32} \otimes_B 1_{X_3})(T_{31} \otimes_B 1_{X_2} \otimes_B 1_{X_3}) \\
&\qquad\qquad (1_{X_3} \otimes_B 1_{X_1} \otimes_B T_{32})(1_{X_3} \otimes_B T_{31} \otimes_B 1_{X_2}) \\
&\quad = (1_{X_1} \otimes_B 1_{X_2} \otimes_B \mu_3)(1_{X_1} \otimes_B T_{32} \otimes_B 1_{X_3})(1_{X_1} \otimes_B 1_{X_3} \otimes_B T_{32}) \\
&\qquad\qquad (T_{31} \otimes_B 1_{X_3} \otimes_B 1_{X_2})(1_{X_3} \otimes_B T_{31} \otimes_B 1_{X_2}) \\
&\quad = (1_{X_1} \otimes_B T_{32})(1_{X_1} \otimes_B \mu_3 \otimes_B 1_{X_2}) \\
&\qquad\qquad (T_{31} \otimes_B 1_{X_3} \otimes_B 1_{X_2})(1_{X_3} \otimes_B T_{31} \otimes_B 1_{X_2}) \\
&\quad = (1_{X_1} \otimes_B T_{32})(T_{31} \otimes_B 1_{X_2})(\mu_3 \otimes_B 1_{X_1} \otimes_B 1_{X_2}) \\
&\quad = T_{3,12}(\mu_3 \otimes_B 1_{X_1 \otimes_B X_2})
\end{aligned}$$

(la troisième égalité résultant de 2.1.2.3 pour T_{32}, et la quatrième de 2.1.2.3 pour T_{31}), ce qui prouve 2.1.2.3 pour $T_{3,12}$. Montrons que $T_{3,12}$ satisfait à la condition 2.1.2.4 si et seulement si le triplet (T_{21}, T_{31}, T_{32}) satisfait à l'équation de Yang-Baxter quantique. On a

$$
\begin{aligned}
&(\mu_{12} \otimes_B 1_{X_3})(1_{X_1 \otimes_B X_2} \otimes_B T_{3,12})(T_{3,12} \otimes_B 1_{X_1 \otimes_B X_2}) \\
&\qquad = (\mu_1 \otimes_B \mu_2 \otimes_B 1_{X_3})(1_{X_1} \otimes_B T_{21} \otimes_B 1_{X_2} \otimes_B 1_{X_3}) \\
&\qquad\qquad (1_{X_1} \otimes_B 1_{X_2} \otimes_B 1_{X_1} \otimes_B T_{32})(1_{X_1} \otimes_B 1_{X_2} \otimes_B T_{31} \otimes_B 1_{X_2}) \\
&\qquad\qquad (1_{X_1} \otimes_B T_{32} \otimes_B 1_{X_1} \otimes_B 1_{X_2})(T_{31} \otimes_B 1_{X_2} \otimes_B 1_{X_1} \otimes_B 1_{X_2}) \\
&\qquad = (\mu_1 \otimes_B \mu_2 \otimes_B 1_{X_3})(1_{X_1} \otimes_B 1_{X_1} \otimes_B 1_{X_2} \otimes_B T_{32}) \\
&\qquad\qquad (1_{X_1} \otimes_B T_{21} \otimes_B 1_{X_3} \otimes_B 1_{X_2})(1_{X_1} \otimes_B 1_{X_2} \otimes_B T_{31} \otimes_B 1_{X_2}) \\
&\qquad\qquad (1_{X_1} \otimes_B T_{32} \otimes_B 1_{X_1} \otimes_B 1_{X_2})(T_{31} \otimes_B 1_{X_2} \otimes_B 1_{X_1} \otimes_B 1_{X_2})
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
&T_{3,12}(1_{X_3} \otimes_B \mu_{12}) \\
&\qquad = (1_{X_1} \otimes_B T_{32})(T_{31} \otimes_B 1_{X_2})(1_{X_3} \otimes_B \mu_1 \otimes_B \mu_2) \\
&\qquad\qquad (1_{X_3} \otimes_B 1_{X_1} \otimes_B T_{21} \otimes_B 1_{X_2}) \\
&\qquad = (1_{X_1} \otimes_B T_{32})(1_{X_1} \otimes_B 1_{X_3} \otimes_B \mu_2)(T_{31} \otimes_B 1_{X_2} \otimes_B 1_{X_2}) \\
&\qquad\qquad (1_{X_3} \otimes_B \mu_1 \otimes_B 1_{X_2} \otimes_B 1_{X_2})(1_{X_3} \otimes_B 1_{X_1} \otimes_B T_{21} \otimes_B 1_{X_2}) \\
&\qquad = (1_{X_1} \otimes_B T_{32})(1_{X_1} \otimes_B 1_{X_3} \otimes_B \mu_2) \\
&\qquad\qquad (\mu_1 \otimes_B 1_{X_3} \otimes_B 1_{X_2} \otimes_B 1_{X_2})(1_{X_1} \otimes_B T_{31} \otimes_B 1_{X_2} \otimes_B 1_{X_2}) \\
&\qquad\qquad (T_{31} \otimes_B 1_{X_1} \otimes_B 1_{X_2} \otimes_B 1_{X_2})(1_{X_3} \otimes_B 1_{X_1} \otimes_B T_{21} \otimes_B 1_{X_2}) \\
&\qquad = (\mu_1 \otimes_B \mu_2 \otimes_B 1_{X_3})(1_{X_1} \otimes_B 1_{X_1} \otimes_B 1_{X_2} \otimes_B T_{32}) \\
&\qquad\qquad (1_{X_1} \otimes_B 1_{X_1} \otimes_B T_{32} \otimes_B 1_{X_2})(1_{X_1} \otimes_B T_{31} \otimes_B 1_{X_2} \otimes_B 1_{X_2}) \\
&\qquad\qquad (1_{X_1} \otimes_B 1_{X_3} \otimes_B T_{21} \otimes_B 1_{X_2})(T_{31} \otimes_B 1_{X_2} \otimes_B 1_{X_1} \otimes_B 1_{X_2})
\end{aligned}
$$

(la troisième égalité résultant de 2.1.2.4 pour T_{31}, et la quatrième de 2.1.2.4 pour T_{32}), ce qui prouve que si le triplet (T_{21}, T_{31}, T_{32}) satisfait à l'équation de Yang-Baxter quantique, alors $T_{3,12}$ satisfait à la condition 2.1.2.4. Réciproquement, si $T_{3,12}$ satisfait à la condition 2.1.2.4, en composant à droite par $1_{X_3} \otimes_B u_1 \otimes_B 1_{X_2} \otimes_B 1_{X_1} \otimes_B u_2$, on a

$$
\begin{aligned}
&(\mu_{12} \otimes_B 1_{X_3})(1_{X_1 \otimes_B X_2} \otimes_B T_{3,12})(T_{3,12} \otimes_B 1_{X_1 \otimes_B X_2})(1_{X_3} \otimes_B u_1 \otimes_B 1_{X_2} \otimes_B 1_{X_1} \otimes_B u_2) \\
&\qquad = T_{3,12}(1_{X_3} \otimes_B \mu_{12})(1_{X_3} \otimes_B u_1 \otimes_B 1_{X_2} \otimes_B 1_{X_1} \otimes_B u_2)
\end{aligned}
$$

et il résulte de ce qui précède et de 2.1.2.6 pour T_{31} et T_{32} que

$$
\begin{aligned}
&(\mu_1 \otimes_B \mu_2 \otimes_B 1_{X_3})(u_1 \otimes_B 1_{X_1} \otimes_B 1_{X_2} \otimes_B u_2 \otimes_B 1_{X_3}) \\
&\qquad\qquad (T_{21} \otimes_B 1_{X_3})(1_{X_2} \otimes_B T_{31})(T_{32} \otimes_B 1_{X_1}) \\
&\qquad = (\mu_1 \otimes_B \mu_2 \otimes_B 1_{X_3})(u_1 \otimes_B 1_{X_1} \otimes_B 1_{X_2} \otimes_B u_2 \otimes_B 1_{X_3}) \\
&\qquad\qquad (1_{X_1} \otimes_B T_{32})(T_{31} \otimes_B 1_{X_2})(1_{X_3} \otimes_B T_{21}) \quad ,
\end{aligned}
$$

ce qui, en vertu de la propriété de l'unité de μ_1 et μ_2, implique que le triplet (T_{21}, T_{31}, T_{32}) satisfait à l'équation de Yang-Baxter quantique. D'autre part, pour tous $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$, $x_3 \in X_3$, en vertu de 2.1.2.5 pour T_{31} et T_{32}, on a

$$\begin{aligned} T_{3,12}(1 \otimes_B x_1 \otimes_B x_2) &= (1_{X_1} \otimes_B T_{32})(T_{31} \otimes_B 1_{X_2})(1 \otimes_B x_1 \otimes_B x_2) \\ &= (1_{X_1} \otimes_B T_{32})(x_1 \otimes_B 1 \otimes_B x_2) = x_1 \otimes_B x_2 \otimes_B 1 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} T_{3,12}(x_3 \otimes_B 1 \otimes_B 1) &= (1_{X_1} \otimes_B T_{32})(T_{31} \otimes_B 1_{X_2})(x_3 \otimes_B 1 \otimes_B 1) \\ &= (1_{X_1} \otimes_B T_{32})(1 \otimes_B x_3 \otimes_B 1) = 1 \otimes_B 1 \otimes_B x_3 \quad , \end{aligned}$$

ce qui établit 2.1.2.5 pour $T_{3,12}$, et prouve l'équivalence des conditions (a) et (b). Dualement, on montre l'équivalence des conditions (a) et (c).

Supposons donc que les conditions équivalentes (a), (b) et (c) sont satisfaites. Montrons que la structure d'algèbre sur $X_1 \otimes_B X_2 \otimes_B X_3$, produit tensoriel tordu sur B de $X_1 \otimes_B X_2$ et X_3, associé au B-tressage $T_{3,12}$, coïncide avec celle de produit tensoriel tordu sur B de X_1 et $X_2 \otimes_B X_3$, associé au B-tressage $T_{23,1}$. On a

$$\begin{aligned} &(\mu_{12} \otimes_B \mu_3)(1_{X_1 \otimes_B X_2} \otimes_B T_{3,12} \otimes_B 1_{X_3}) \\ &\quad = (\mu_1 \otimes_B \mu_2 \otimes_B \mu_3)(1_{X_1} \otimes_B T_{21} \otimes_B 1_{X_2} \otimes_B 1_{X_3} \otimes_B 1_{X_3}) \\ &\qquad (1_{X_1} \otimes_B 1_{X_2} \otimes_B 1_{X_1} \otimes_B T_{32} \otimes_B 1_{X_3})(1_{X_1} \otimes_B 1_{X_2} \otimes_B T_{31} \otimes_B 1_{X_2} \otimes_B 1_{X_3}) \\ &\quad = (\mu_1 \otimes_B \mu_2 \otimes_B \mu_3)(1_{X_1} \otimes_B 1_{X_1} \otimes_B 1_{X_2} \otimes_B T_{32} \otimes_B 1_{X_3}) \\ &\qquad (1_{X_1} \otimes_B T_{21} \otimes_B 1_{X_3} \otimes_B 1_{X_2} \otimes_B 1_{X_3})(1_{X_1} \otimes_B 1_{X_2} \otimes_B T_{31} \otimes_B 1_{X_2} \otimes_B 1_{X_3}) \\ &\quad = (\mu_1 \otimes_B \mu_{23})(1_{X_1} \otimes_B T_{23,1} \otimes_B 1_{X_2 \otimes_B X_3}) \quad , \end{aligned}$$

ce qui prouve l'assertion.

Enfin, on a

$$\begin{aligned} T_{3,12}(1_{X_3} \otimes_B 1_{X_1} \otimes_B u_2) &= (1_{X_1} \otimes_B T_{32})(T_{31} \otimes_B 1_{X_2})(1_{X_3} \otimes_B 1_{X_1} \otimes_B u_2) \\ &= (1_{X_1} \otimes_B T_{32})(1_{X_1} \otimes_B 1_{X_3} \otimes_B u_2)T_{31} = (1_{X_1} \otimes_B u_2 \otimes_B 1_{X_3})T_{31} \end{aligned}$$

(la dernière égalité résultant de 2.1.2.6 pour T_{32}), ce qui, en vertu du corollaire 2.1.7, implique que $1_{X_1} \otimes_B u_2 \otimes_B 1_{X_3}$ est un morphisme d'algèbres, et achève la démonstration de la partie (i) du lemme.

Pour montrer la partie (ii), notons

$$\mu : X_1 \otimes_B X_2 \otimes_B X_3 \otimes_B X_1 \otimes_B X_2 \otimes_B X_3 \longrightarrow X_1 \otimes_B X_2 \otimes_B X_3$$

le morphisme de $(B\,;B)$-bimodules défini par la multiplication de $X_1 \otimes_B X_2 \otimes_B X_3$. Pour tous $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$, $x_3 \in X_3$, on a

$$\begin{aligned}
T_{3,12}(x_3 \otimes_B x_1 \otimes_B x_2) &= (1 \otimes_B 1 \otimes_B x_3) \cdot (x_1 \otimes_B x_2 \otimes_B 1) \\
&= (1 \otimes_B 1 \otimes_B x_3) \cdot (x_1 \otimes_B 1 \otimes_B 1) \cdot (1 \otimes_B x_2 \otimes_B 1) \\
&= \big[(1_{X_1} \otimes_B u_2 \otimes_B 1_{X_3})((1 \otimes_B x_3) \cdot (x_1 \otimes_B 1))\big] \cdot (1 \otimes_B x_2 \otimes_B 1) \\
&= \big[(1_{X_1} \otimes_B u_2 \otimes_B 1_{X_3}) T_{31}(x_3 \otimes_B x_1)\big] \cdot (1 \otimes_B x_2 \otimes_B 1)
\end{aligned}$$

(la deuxième égalité résultant de 2.1.6, (a), et la troisième du fait que $1_{X_1} \otimes_B u_2 \otimes_B 1_{X_3}$ est un morphisme d'algèbres), ce qui implique que

$$T_{3,12} = \mu(1_{X_1} \otimes_B u_2 \otimes_B 1_{X_3} \otimes_B u_1 \otimes_B 1_{X_2} \otimes_B u_3)(T_{31} \otimes_B 1_{X_2}) \quad .$$

D'autre part, pour tous $y_1 \in X_1$, $y_2 \in X_2$, $y_3 \in X_3$, on a

$$\begin{aligned}
&\mu(1_{X_1} \otimes_B u_2 \otimes_B 1_{X_3} \otimes_B u_1 \otimes_B 1_{X_2} \otimes_B u_3)(y_1 \otimes_B y_3 \otimes_B y_2) \\
&\qquad = (y_1 \otimes_B 1 \otimes_B y_3) \cdot (1 \otimes_B y_2 \otimes_B 1) \\
&\qquad = (y_1 \otimes_B 1 \otimes_B 1) \cdot (1 \otimes_B 1 \otimes_B y_3) \cdot (1 \otimes_B y_2 \otimes_B 1) \\
&\qquad = (y_1 \otimes_B 1 \otimes_B 1) \cdot \big[(u_1 \otimes_B 1_{X_2} \otimes_B 1_{X_3})((1 \otimes_B y_3) \cdot (y_2 \otimes_B 1))\big] \\
&\qquad = (y_1 \otimes_B 1 \otimes_B 1) \cdot \big[(u_1 \otimes_B 1_{X_2} \otimes_B 1_{X_3}) T_{32}(y_3 \otimes_B y_2)\big]
\end{aligned}$$

(la deuxième égalité résultant de 2.1.6, (a), et la troisième du fait que $u_1 \otimes_B 1_{X_2} \otimes_B 1_{X_3}$ est un morphisme d'algèbres). On en déduit que

$$\begin{aligned}
&\mu(1_{X_1} \otimes_B u_2 \otimes_B 1_{X_3} \otimes_B u_1 \otimes_B 1_{X_2} \otimes_B u_3) \\
&\qquad = \mu(1_{X_1} \otimes_B u_2 \otimes_B u_3 \otimes_B u_1 \otimes_B 1_{X_2} \otimes_B 1_{X_3})(1_{X_1} \otimes_B T_{32})
\end{aligned}$$

Enfin, pour tous $z_1 \in X_1$, $z_2 \in X_2$, $z_3 \in X_3$, on a

$$\begin{aligned}
&\mu(1_{X_1} \otimes_B u_2 \otimes_B u_3 \otimes_B u_1 \otimes_B 1_{X_2} \otimes_B 1_{X_3})(z_1 \otimes_B z_2 \otimes_B z_3) \\
&\qquad = (z_1 \otimes_B 1 \otimes_B 1) \cdot (1 \otimes_B z_2 \otimes_B z_3) \\
&\qquad = (z_1 \otimes_B 1 \otimes_B 1) \cdot (1 \otimes_B z_2 \otimes_B 1) \cdot (1 \otimes_B 1 \otimes_B z_3) \\
&\qquad = (z_1 \otimes_B z_2 \otimes_B z_3)
\end{aligned}$$

(les deux dernières égalités résultant de 2.1.6, (a)), ce qui prouve 2.3.3.1 et démontre le lemme.

Théorème 2.3.4. *Soient I un ensemble ordonné, B une algèbre, $(X_i)_{i\in I}$ une famille d'algèbres, pour tout i, $i \in I$, $u_i : B \to X_i$ un morphisme d'algèbres, et pour tous $i, j \in I$, $i < j$,*

$$T_{ji} : X_j \otimes_B X_i \longrightarrow X_i \otimes_B X_j$$

un B-tressage de l'algèbre X_i avec l'algèbre X_j. On suppose que pour tous $i, j, k \in I$, $i < j < k$, le triplet (T_{ji}, T_{ki}, T_{kj}) satisfait à l'équation de Yang-Baxter quantique. Alors si $\mathcal{J}$ désigne l'ensemble des parties finies,non vides, totalement ordonées de I, ordonné par

$$J_1 < J_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \forall j_1 \in J_1\,,\ \forall j_2 \in J_2\,,\ j_1 < j_2 \quad ,$$

il existe une famille d'algèbres $(X_J)_{J\in\mathcal{J}}$, une famille de morphismes d'algèbres

$$u_J : B \to X_J\,, \quad J \in \mathcal{J} \quad ,$$

et une famille de B-tressages

$$T_{J_2,J_1} : X_{J_2} \otimes_B X_{J_1} \longrightarrow X_{J_1} \otimes_B X_{J_2} \quad , \qquad J_1, J_2 \in \mathcal{J}\,, \quad J_1 < J_2 \quad ,$$

de l'algèbre X_{J_1} avec l'algèbre X_{J_2}, uniques, telles que :

a) *pour tout J, $J \in \mathcal{J}$, le $(B\,;B)$-bimodule sous-jacent à X_J est donné par*

$$X_J = X_{j_1} \otimes_B X_{j_2} \otimes_B \cdots \otimes_B X_{j_n} \quad , \tag{2.3.4.1}$$

où $J = \{j_1, j_2, \ldots, j_n\}$, $j_1 < j_2 < \cdots < j_n$, et on a

$$u_J = u_{j_1} \otimes_B u_{j_2} \otimes_B \cdots \otimes_B u_{j_n} \quad ; \tag{2.3.4.2}$$

b) *pour tout i, $i \in I$, l'algèbre $X_{\{i\}}$ n'est autre que l'algèbre X_i ;*

c) *pour tous $i, j \in I$, $i < j$, on a $T_{\{j\},\{i\}} = T_{ji}$;*

d) *pour tous $J_1, J_2 \in \mathcal{J}$, $J_1 < J_2$, l'algèbre $X_{J_1\cup J_2}$ est le produit tensoriel tordu sur B de X_{J_1} et X_{J_2}, associé au B-tressage T_{J_2,J_1} ;*

e) *pour tous $J_1, J_2, J_3 \in \mathcal{J}$, $J_1 < J_2 < J_3$, on a*

$$T_{J_3,J_1\cup J_2} = (1_{X_{J_1}} \otimes_B T_{J_3,J_2})(T_{J_3,J_1} \otimes_B 1_{X_{J_2}}) \quad . \tag{2.3.4.3}$$

De plus, alors, pour tous $J_1, J_2, J_3 \in \mathcal{J}$, $J_1 < J_2 < J_3$, on a

$$T_{J_2\cup J_3,J_1} = (T_{J_2,J_1} \otimes_B 1_{X_{J_3}})(1_{X_{J_2}} \otimes_B T_{J_3,J_1}) \quad , \tag{2.3.4.4}$$

et le triplet $(T_{J_2,J_1}, T_{J_3,J_1}, T_{J_3,J_2})$ satisfait à l'équation de Yang-Baxter quantique.

Démonstration. L'unicité résulte aussitôt des conditions (a), (b), (c), (d), et (e). Pour montrer l'existence, définissons, pour $J \in \mathcal{J}$, le $(B\,;B)$-bimodule X_J par 2.3.4.1, le morphisme de $(B\,;B)$-bimodules u_J par 2.3.4.2, et pour tout j, $j \in I$, tel que $J < \{j\}$, définissons, par récurrence sur le nombre d'éléments de J, un morphisme de $(B\,;B)$-bimodules

$$T_{j,J} : X_j \otimes_B X_J \longrightarrow X_J \otimes_B X_j$$

par

$$T_{j,\{i\}} = T_{ji} \quad , \quad \text{si} \quad J = \{i\} \quad ,$$

$$T_{j,J} = (1_{X_{J'}} \otimes_B T_{ji})(T_{j,J'} \otimes_B 1_{X_i}) \quad ,$$
$$\text{si } \operatorname{card}(J) > 1 \ , \ i = \max(J) \ , \ J' = J - \{i\} \quad .$$

Si $J = J_1 \cup J_2$, $J_1, J_2 \in \mathcal{J}$, $J_1 < J_2$, on vérifie aussitôt, par récurrence sur $\operatorname{card}(J_2)$, que

(2.3.4.5) $$T_{j,J} = (1_{X_{J_1}} \otimes_B T_{j,J_2})(T_{j,J_1} \otimes_B 1_{X_{J_2}}) \quad ,$$

et il résulte du lemme 2.3.2, par récurrence sur $\operatorname{card}(J)$, que, pour tout $k \in I$, $j < k$, le triplet $(T_{j,J}, T_{k,J}, T_{kj})$ satisfait à l'équation de Yang-Baxter quantique.

Notons, pour $i \in I$, $\mu_i : X_i \otimes_B X_i \to X_i$ le morphisme de $(B\,;B)$-bimodules défini par la multiplication de X_i, et, pour tout J, $J \in \mathcal{J}$, définissons, par récurrence sur $\operatorname{card}(J)$, un morphisme de $(B\,;B)$-bimodules $\mu_J : X_J \otimes_B X_J \to X_J$ par

$$\mu_{\{i\}} = \mu_i \quad , \quad \text{si} \quad J = \{i\} \quad ,$$

$$\mu_J = (\mu_{J'} \otimes_B \mu_j)(1_{X_{J'}} \otimes_B T_{j,J'} \otimes_B 1_{X_j}) \quad ,$$
$$\text{si } \operatorname{card}(J) > 1 \ , \ j = \max(J) \ , \ J' = J - \{j\} \quad .$$

Il résulte aussitôt du théorème 2.1.4 et du lemme 2.3.3, (i) (implication $(a) \Rightarrow (b)$), par récurrence sur $\operatorname{card}(J)$, $J \in \mathcal{J}$, que :

i) le morphisme de $(B\,;B)$-bimodules μ_J définit une multiplication, faisant du $(B\,;B)$-bimodule X_J une algèbre, et de u_J un morphisme d'algèbres ;

ii) si $\operatorname{card}(J) > 1$, $J = J' \cup \{j\}$, $J' < \{j\}$, alors $T_{j,J'}$ est un B-tressage de l'algèbre $X_{J'}$ avec l'algèbre X_j, et l'algèbre X_J (cf. (i)) est le produit tensoriel tordu sur B de $X_{J'}$ et X_j, associé à ce tressage.

Pour tous $J_1, J_2 \in \mathcal{J}$, $J_1 < J_2$, définissons, par récurrence sur le nombre d'éléments de J_2, un morphisme de $(B\,;B)$-bimodules

$$T_{J_2,J_1} : X_{J_2} \otimes_B X_{J_1} \longrightarrow X_{J_1} \otimes_B X_{J_2}$$

par

$$T_{J_2,J_1} = T_{j,J_1} \quad , \quad \text{si} \quad J_2 = \{j\} \quad ,$$

$$T_{J_2,J_1} = (T_{J'_2,J_1} \otimes_B 1_{X_j})(1_{X_{J'_2}} \otimes_B T_{j,J_1}) \quad ,$$
$$\text{si } \operatorname{card}(J_2) > 1 \ , \ j = \max(J_2) \ , \ J'_2 = J_2 - \{j\} \quad .$$

Montrons, par récurrence sur $\operatorname{card}(J_2)$, que T_{J_2,J_1} est un B-tressage de l'algèbre X_{J_1} avec l'algèbre X_{J_2}, et que l'algèbre $X_{J_1 \cup J_2}$ est le produit tensoriel tordu sur B de X_{J_1} et X_{J_2}, associé à ce tressage. Si $\operatorname{card}(J_2) = 1$, cela résulte de ce qui précède. Supposons le résultat établi pour $\operatorname{card}(J_2) = n \geq 1$, et démontrons le pour $\operatorname{card}(J_2) = n+1$. Posons $j = \max(J_2)$, $J'_2 = J_2 - \{j\}$. Par hypothèse de récurrence, $T_{J'_2,J_1}$ est un B-tressage de l'algèbre X_{J_1} avec l'algèbre $X_{J'_2}$, et l'algèbre $X_{J_1 \cup J'_2}$ est le produit tensoriel tordu sur B de X_{J_1} et $X_{J'_2}$, associé à ce tressage. Or, par définition,

$$T_{J_2,J_1} = (T_{J'_2,J_1} \otimes_B 1_{X_j})(1_{X_{J'_2}} \otimes_B T_{j,J_1}) \quad ,$$

et, en vertu de 2.3.4.5,

$$T_{j,J_1 \cup J'_2} = (1_{X_{J_1}} \otimes_B T_{j,J'_2})(T_{j,J_1} \otimes_B 1_{X_{J'_2}}) \quad .$$

Comme, en vertu de ce qui précède, $T_{j,J_1 \cup J'_2}$ est un B-tressage de l'algèbre $X_{J_1 \cup J'_2}$ avec l'algèbre X_j, et l'algèbre $X_{J_1 \cup J_2}$ est le produit tensoriel tordu sur B de $X_{J_1 \cup J'_2}$ et X_j, associé à ce tressage, il résulte du lemme 2.3.3, (i) (implication $(b) \Rightarrow (c)$) que T_{J_2,J_1} est un B-tressage de l'algèbre X_{J_1} avec l'algèbre X_{J_2}, et que l'algèbre $X_{J_1 \cup J_2}$ est le produit tensoriel tordu sur B de X_{J_1} et X_{J_2}, associé à ce tressage.

Soient $J_1, J_2, J_3 \in \mathcal{J}$, $J_1 < J_2 < J_3$. L'égalité 2.3.4.3 résulte alors aussitôt de 2.3.4.5, par récurrence sur $\operatorname{card}(J_3)$. Il résulte donc de ce qui précède et du lemme 2.3.3, (i), implication $(b) \Rightarrow (a)$, que le triplet $(T_{J_2,J_1}, T_{J_3,J_1}, T_{J_3,J_2})$ satisfait à l'équation de Yang-Baxter quantique, et de l'implication $(b) \Rightarrow (c)$ que si l'on pose

$$T' = (T_{J_2,J_1} \otimes_B 1_{X_{J_3}})(1_{X_{J_2}} \otimes_B T_{J_3,J_1}) \quad ,$$

alors T' est un B-tressage de l'algèbre X_{J_1} avec l'algèbre $X_{J_2 \cup J_3}$, et l'algèbre $X_{J_1 \cup J_2 \cup J_3}$ est le produit tensoriel tordu de X_{J_1} et $X_{J_2 \cup J_3}$, associé à ce tressage. Or, en vertu de ce qui précède, l'algèbre $X_{J_1 \cup J_2 \cup J_3}$ est déjà le produit tensoriel tordu de X_{J_1} et $X_{J_2 \cup J_3}$, associé au tressage $T_{J_2 \cup J_3, J_1}$. Il résulte donc du théorème 2.1.4 que $T' = T_{J_2 \cup J_3, J_1}$, ce qui prouve 2.3.4.4, et achève la démonstration du théorème.

2.3.5. En gardant les notations du théorème, on dit que l'algèbre X_J, $J \in \mathcal{J}$, est le *produit tensoriel tordu multiple* (sur B) de la famille d'algèbres $(X_j)_{j \in J}$ (indexée par l'ensemble fini totalement ordonné J), associé aux B-tressages T_{ji}, $i, j \in J$, $i < j$. Pour tous $J_1, J_2 \in \mathcal{J}$, $J_1 < J_2$, on dit que T_{J_2,J_1} est le B-tressage déduit des B-tressages T_{j_2,j_1}, $j_1 \in J_1$, $j_2 \in J_2$. Les produits tensoriels tordus multiples sont fonctoriels dans le sens suivant. Soient $(X'_i)_{i \in I}$ une deuxième famille d'algèbres, pour tout i, $i \in I$, $u'_i : B \to X'_i$ un morphisme d'algèbres, et pour tous $i, j \in I$, $i < j$, $T'_{ji} : X'_j \otimes_B X'_i \to X'_i \otimes_B X'_j$ un B-tressage de l'algèbre X_i avec l'algèbre X_j, tels que, pour tous $i, j, k \in I$, $i < j < k$, le triplet $(T'_{ji}, T'_{ki}, T'_{kj})$ satisfasse à l'équation de Yang-Baxter quantique. Soit $(f_i : X_i \to X'_i)_{i \in I}$ une famille de morphismes d'algèbres telle que, pour tout i, $i \in I$, on ait $u'_i = f_i u_i$, et telle que pour tous $i, j \in I$, $i < j$, on ait $T'_{ji}(f_j \otimes_B f_i) = (f_i \otimes_B f_j) T_{ji}$. Alors, pour tout $J \in \mathcal{J}$, $J = \{j_1, \dots, j_n\}$, $j_1 < \dots < j_n$, le morphisme de $(B\,; B)$-bimodules $f_J = f_{j_1} \otimes_B \dots \otimes_B f_{j_n}$ est un morphisme d'algèbres, de l'algèbre produit tensoriel tordu multiple X_J de la famille d'algèbres $(X_j)_{j \in J}$, associé aux B-tressages T_{ji}, $i, j \in J$, $i < j$, dans l'algèbre produit tensoriel tordu multiple X'_J de la famille d'algèbres $(X'_j)_{j \in J}$, associé aux B-tressages T'_{ji}, $i, j \in J$, $i < j$. De plus, pour tous $J_1, J_2 \in \mathcal{J}$, $J_1 < J_2$, on a $T'_{J_2,J_1}(f_{J_2} \otimes_B f_{J_1}) = (f_{J_1} \otimes_B f_{J_2}) T_{J_2,J_1}$, où T'_{J_2,J_1} désigne le B tressage de l'algèbre X'_{J_1} avec l'algèbre X'_{J_2} déduit des B-tressages T'_{j_2,j_1}, $j_1 \in J_1$, $j_2 \in J_2$. (La première assertion résulte par récurrence du corollaire 2.1.7, et la deuxième se démontre par une simple récurrence).

Corollaire 2.3.6. *Soient $u : B \to X$ un morphisme d'algèbres et $T : X \otimes_B X \to X \otimes_B X$ un B-tressage de l'algèbre X avec elle même, satisfaisant à l'équation de Yang-Baxter quantique. Alors, il existe une famille d'algèbres $(X_n)_{n\geq 1}$, une famille de morphismes d'algèbres $u_n : B \to X_n$, $n \geq 1$, et une famille de B-tressages*

$$T_{n,m} : X_n \otimes_B X_m \to X_m \otimes_B X_n \quad , \qquad m, n \geq 1 \quad ,$$

de l'algèbre X_m avec l'algèbre X_n, uniques, telles que

a) *pour tout n, $n \geq 1$, le $(B\,;B)$-bimodule sous-jacent à X_n est donné par*

$$X_n = \underbrace{X \otimes_B \cdots \otimes_B X}_{n \text{ fois}} \qquad et \qquad u_n = \underbrace{u \otimes_B \cdots \otimes_B u}_{n \text{ fois}} \quad ;$$

b) $X_1 = X$ *et* $u_1 = u$;

c) *pour tous $m, n \geq 1$, l'algèbre X_{m+n} est le produit tensoriel tordu sur B de X_m et X_n, associé au B-tressage $T_{n,m}$;*

d) *pour tous $l, m, n \geq 1$, on a*

$$T_{n,l+m} = (1_{X_l} \otimes_B T_{n,m})(T_{n,l} \otimes_B 1_{X_m}) \quad . \tag{2.3.6.1}$$

De plus, alors, pour tous $l, m, n \geq 1$, on a

$$T_{m+n,l} = (T_{m,l} \otimes_B 1_{X_n})(1_{X_m} \otimes_B T_{n,l}) \quad , \tag{2.3.6.2}$$

et le triplet $(T_{m,l}, T_{n,l}, T_{n,m})$ satisfait à l'équation de Yang-Baxter quantique.

2.3.7. En gardant les notations du corollaire 2.3.6, on dit que l'algèbre X_n, $n \geq 1$, est le *produit tensoriel tordu n-uple* (sur B) de l'algèbre X, associé au B-tressage T. Pour tous $m, n \geq 1$, on dit que $T_{n,m}$ est le B-tressage de l'algèbre X_m avec l'algèbre X_n, déduit du B-tressage T.

3. Catégories quantiques

Dans la suite de cet article, si A, B, C désignent des algèbres et $u : A \to C$, $v : B \to C$ des morphismes d'algèbres, on notera ${}_uC$ la structure de A-module à gauche sur C définie par $(a,c) \mapsto u(a)c$, $a \in A$, $c \in C$, C_v la structure de B-module à droite définie par $(c,b) \mapsto cv(b)$, $b \in B$, $c \in C$, et ${}_uC_v$ la structure de $(A\,;B)$-bimodule correspondante.

3.1. La définition des catégories quantiques.

Définition 3.1.1. On appelle *catégorie quantique* une algèbre cosimpliciale, foncteur covariant

$$F : \mathbf{\Delta} \longrightarrow \mathcal{A}lg$$

de la catégorie des simplexes dans la catégorie des algèbres, telle que, pour tous entiers m et n, $m, n \in \mathbb{N}$, le carré

(3.1.1.1)
$$\begin{tikzcd} F[\,0\,] \arrow[r, "F(b_n)"] \arrow[d, "F(a_m)"'] & F[\,n\,] \arrow[d, "F(j)"] \\ F[\,m\,] \arrow[r, "F(i)"'] & F[\,m+n\,] \end{tikzcd}
\qquad
\begin{array}{ll} a_m(0) = 0 & \\ b_n(0) = n & \\ j(k) = k\,, & 0 \le k \le n\,, \\ i(l) = n + l\,, & 0 \le l \le m\,, \end{array}$$

soit cocartierien. Autrement dit, on demande que, pour tous m et n, m, $n \in \mathbb{N}$, les applications linéaires

$$\Phi_{[\,m\,],[\,n\,]} : F[\,m\,]_{F(a_m)} \otimes_{F[\,0\,]} {}_{F(b_n)}F[\,n\,] \longrightarrow F[\,m+n\,]\ , \quad x \otimes_{F[\,0\,]} y \mapsto F(i)(x)\cdot F(j)(y)\ ,$$

$$\Phi'_{[\,n\,],[\,m\,]} : F[\,n\,]_{F(b_n)} \otimes_{F[\,0\,]} {}_{F(a_m)}F[\,m\,] \longrightarrow F[\,m+n\,]\ , \quad y \otimes_{F[\,0\,]} x \mapsto F(j)(y)\cdot F(i)(x)$$

soient bijectives.

Intuitivement, $F[\,0\,]$ s'interprète comme l'algèbre des fonctions sur l'espace (non commutatif) des objets, $F[\,1\,]$ comme celle des fonctions sur l'espace des flèches, et, plus généralement, $F[\,n\,]$ comme l'algèbre des fonctions sur l'espace des suites de n flèches composables.

Un *morphisme de catégories quantiques* ou *foncteur quantique* d'une catégorie quantique $F : \mathbf{\Delta} \longrightarrow \mathcal{A}lg$ dans une catégorie quantique $F' : \mathbf{\Delta} \longrightarrow \mathcal{A}lg$ est un morphisme d'algèbres cosimpliciales de F' dans F, autrement dit, un morphisme des foncteurs correspondants.

Notations 3.1.2. Pour tous m et n, $0 \le m \le n$ notons

$$a^m_n\,,\ b^m_n : [\,m\,] \rightrightarrows [\,n\,]$$

les morphismes de $\mathbf{\Delta}$ définis par

$$a^m_n(k) = k\ , \quad 0 \le k \le m \qquad \text{et} \qquad b^m_n(k) = n - m + k\ , \quad 0 \le k \le m \quad ,$$

$$a^m_n = \delta^n_n \delta^{n-1}_{n-1} \cdots \delta^{m+1}_{m+1} \qquad \text{et} \qquad b^m_n = \delta^0_n \delta^0_{n-1} \cdots \delta^0_{m+1} \quad .$$

En particulier, les morphismes figurant au carré cocartierien 2.1.1.1 sont

$$a_m = a^0_m \ , \quad b_n = b^0_n \ , \quad i = b^m_{m+n} \ , \quad j = a^n_{m+n} \quad .$$

Enfin, pour tout m, $m \in \mathbb{N}$, et tout k, $1 \leq k \leq m$, notons $i^k_m : [\,1\,] \to [\,m\,]$ le morphisme de $\mathbf{\Delta}$ défini par

$$i^k_m(0) = k-1 \qquad \text{et} \qquad i^k_m(1) = k \quad ,$$

$$i^k_m = a^k_m b^1_k = \delta^m_m \delta^{m-1}_{m-1} \cdots \delta^{k+1}_{k+1} \delta^0_k \delta^0_{k-1} \cdots \delta^0_2 \quad .$$

Proposition 3.1.3. *Soit $F : \mathbf{\Delta} \to \mathcal{A}lg$ une algèbre cosimpliciale. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) *l'algèbre cosimpliciale F est une catégorie quantique ;*

b) *pour tout m, $m \in \mathbb{N}$, le carré*

$$\begin{tikzcd} F[\,0\,] \arrow[r, "F(b^0_m)"] \arrow[d, "F(a^0_1)"'] & F[\,m\,] \arrow[d, "F(a^m_{m+1})"] \\ F[\,1\,] \arrow[r, "F(b^1_{m+1})"'] & F[\,m+1\,] \end{tikzcd}$$

est cocartierien ;

c) *pour tout m, $m \in \mathbb{N}$, le carré*

$$\begin{tikzcd} F[\,0\,] \arrow[r, "F(b^0_1)"] \arrow[d, "F(a^0_m)"'] & F[\,1\,] \arrow[d, "F(a^1_{m+1})"] \\ F[\,m\,] \arrow[r, "F(b^m_{m+1})"'] & F[\,m+1\,] \end{tikzcd}$$

est cocartierien ;

d) *pour tous l, m, $n \in \mathbb{N}$, $l \leq m$, $l \leq n$, le carré*

$$\begin{tikzcd} F[\,l\,] \arrow[r, "F(b^l_n)"] \arrow[d, "F(a^l_m)"'] & F[\,n\,] \arrow[d, "F(a^n_{m+n-l})"] \\ F[\,m\,] \arrow[r, "F(b^m_{m+n-l})"'] & F[\,m+n-l\,] \end{tikzcd}$$

est cocartierien ;

e) *si l'on pose $s = F(a^0_1)$ et $b = F(b^0_1)$, pour tout m, $m \in \mathbb{N}$, les applications linéaires*

$$\begin{aligned} \alpha_{[\,m\,]} : F[\,1\,]_s \otimes_{F[\,0\,]} {}_bF[\,1\,]_s \otimes_{F[\,0\,]} \cdots \otimes_{F[\,0\,]} {}_bF[\,1\,] &\longrightarrow F[\,m\,] \\ x_1 \otimes_{F[\,0\,]} x_2 \otimes_{F[\,0\,]} \cdots \otimes_{F[\,0\,]} x_m &\longmapsto F(i^m_m)(x_1) \cdot F(i^{m-1}_m)(x_2) \cdots F(i^1_m)(x_m) \ , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha'_{[\,m\,]} : F[\,1\,]_b \otimes_{F[\,0\,]} {}_sF[\,1\,]_b \otimes_{F[\,0\,]} \cdots \otimes_{F[\,0\,]} {}_sF[\,1\,] &\longrightarrow F[\,m\,] \\ x_1 \otimes_{F[\,0\,]} x_2 \otimes_{F[\,0\,]} \cdots \otimes_{F[\,0\,]} x_m &\longmapsto F(i^1_m)(x_1) \cdot F(i^2_m)(x_2) \cdots F(i^m_m)(x_m) \end{aligned}$$

sont bijectives (par convention, $\alpha_{[0]} = \alpha'_{[0]} = 1_{F[0]}$*).*

DÉMONSTRATION. L'équivalence de (b), (c), (d) et (e) résulte de la proposition 2.2.5 et de la proposition analogue relative aux carrés cocartieriens inverses qui s'en déduit en utilisant le lemme 2.2.1. D'autre part, on a des implications évidentes $(a) \Rightarrow (b)$ et $(d) \Rightarrow (a)$, ce qui démontre la proposition.

3.1.4. En gardant les notations de 3.1.1, posons $B = F[0]$. Pour tout m, $m \in \mathbb{N}$, les morphismes d'agèbres $F(a_m)$, $F(b_m)$ définissent sur $F[m]$ une structure de $(B\,;B)$-bimodule ${}_{F(b_m)}F[m]_{F(a_m)}$. De plus, pour tous m et n, $m, n \in \mathbb{N}$,

$$\Phi_{[m],[n]} : {}_{F(b_m)}F[m]_{F(a_m)} \otimes_B {}_{F(b_n)}F[n]_{F(a_n)} \longrightarrow {}_{F(b_{m+n})}F(m+n)_{F(a_{m+n})}$$

est un morphisme de $(B\,;B)$-bimodules, et si $\varphi : [m] \to [m']$ et $\psi : [n] \to [n']$ sont des morphismes de $\mathbf{\Delta}_\bullet$ et ${}_\bullet\mathbf{\Delta}$ respectivement, autrement dit, si $\varphi a_m = a_{m'}$ et $\psi b_n = b_{n'}$, alors $F(\varphi)$ et $F(\psi)$ sont B-linéaires à droite et à gauche respectivement, et le diagramme

$$\begin{tikzcd}
F[m]_{F(a_m)} \otimes_B {}_{F(b_n)}F[n] \arrow[r, "\Phi_{[m],[n]}"] \arrow[d, "F(\varphi) \otimes_B F(\psi)"'] & F[m+n] \arrow[d, "F(\varphi \amalg_{[0]} \psi)"] \\
F[m']_{F(a_{m'})} \otimes_B {}_{F(b_{n'})}F[n'] \arrow[r, "\Phi_{[m'],[n']}"] & F[m'+n']
\end{tikzcd}$$

est commutatif. On vérifie facilement que $(F, \Phi, 1_B)$ est un foncteur partiellement monoïdal de la catégorie partiellement monoïdale des simplexes dans la catégorie partiellement monoïdale des $(B\,;B)$-bimodules (*cf.* 1.2.2, 1.2.4 et 1.2.5), où, par abus, on note aussi F le foncteur $[m] \mapsto {}_{F(b_m)}F[m]_{F(a_m)}$ de la catégorie des simplexes dans celle des $(B\,;B)$-bimodules. De même, si l'on considère $F[m]$ muni de la structure de $(B\,;B)$-bimodule ${}_{F(a_m)}F[m]_{F(b_m)}$, qu'on notera $F'[m]$, alors $(F', \Phi', 1_B)$ est un foncteur partiellement monoïdal de la catégorie partiellement monoïdale transposée de celle des simplexes dans la catégorie partiellement monoïdale des $(B\,;B)$-bimodules (*cf.* 1.2.1).

En gardant les notations de 3.1.3, (e), on vérifie facilement que si l'on pose $X = F[1]$,

(3.1.4.1)
$$G[m] = {}_bX_s \otimes_B {}_bX_s \otimes_B \cdots \otimes_B {}_bX_s = \bigotimes_B^m {}_bX_s \quad ,$$
$$G'[m] = {}_sX_b \otimes_B {}_sX_b \otimes_B \cdots \otimes_B {}_sX_b = \bigotimes_B^m {}_sX_b$$

et, pour tout morphisme $\varphi : [m] \to [m']$ de $\mathbf{\Delta}$,

(3.1.4.2)
$$G(\varphi) = \alpha^{-1}_{[m']} F(\varphi) \alpha_{[m]} \quad , \qquad G'(\varphi) = \alpha'^{-1}_{[m']} F(\varphi) \alpha'_{[m]} \quad ,$$

alors le couple (G, α) (resp. (G', α')) est l'unique couple (*cf.* prop. 1.2.7), formé d'un foncteur partiellement monoïdal *strict* G (resp. G') et d'un isomorphisme de foncteurs partiellement monoïdaux α (resp. α'), de source G (resp. G') et but le foncteur partiellement monoïdal (non strict) $(F, \Phi, 1_B)$ (resp. $(F', \Phi', 1_B)$), tel que $G[1] = F[1]$ (resp. $G'[1] = F'[1]$) et $\alpha_{[1]} = 1_{F[1]}$ (resp. $\alpha'_{[1]} = 1_{F'[1]}$).

Posons

$$d_n^i = G(\delta_n^i) = \alpha_{[n]}^{-1} F(\delta_n^i) \alpha_{[n-1]} , \quad 0 \le i \le n , \quad n > 0 ,$$

$$s_n^i = G(\sigma_n^i) = \alpha_{[n]}^{-1} F(\sigma_n^i) \alpha_{[n+1]} , \quad 0 \le i \le n ,$$

$$d_n'^i = G'(\delta_n^i) = \alpha_{[n]}'^{-1} F(\delta_n^i) \alpha'_{[n-1]} , \quad 0 \le i \le n , \quad n > 0 ,$$

$$s_n'^i = G'(\sigma_n^i) = \alpha_{[n]}'^{-1} F(\sigma_n^i) \alpha'_{[n+1]} , \quad 0 \le i \le n ,$$

de sorte qu'on ait des diagrammes commutatifs de K-modules

$$\begin{tikzcd}
\bigotimes\limits_B^{n-1} {}_bX_s \arrow[r, "\alpha_{[n-1]}"] \arrow[d, "d_n^i"'] & F[n-1] \arrow[d, "F(\delta_n^i)"'] & \bigotimes\limits_B^{n-1} {}_sX_b \arrow[l, "\alpha'_{[n-1]}"'] \arrow[d, "d_n'^i"] \\
\bigotimes\limits_B^{n} {}_bX_s \arrow[r, "\alpha_{[n]}"] & F[n] & \bigotimes\limits_B^{n} {}_sX_b \arrow[l, "\alpha'_{[n]}"']
\end{tikzcd}$$

et

$$\begin{tikzcd}
\bigotimes\limits_B^{n+1} {}_bX_s \arrow[r, "\alpha_{[n+1]}"] \arrow[d, "s_n^i"'] & F[n+1] \arrow[d, "F(\sigma_n^i)"'] & \bigotimes\limits_B^{n+1} {}_sX_b \arrow[l, "\alpha'_{[n+1]}"'] \arrow[d, "s_n'^i"] \\
\bigotimes\limits_B^{n} {}_bX_s \arrow[r, "\alpha_{[n]}"] & F[n] & \bigotimes\limits_B^{n} {}_sX_b \arrow[l, "\alpha'_{[n]}"']
\end{tikzcd} \quad .$$

En particulier, on a

$$d_1^0 = d_1'^0 = F(\delta_1^0) = F(b_1^0) = b \quad ,$$

$$d_1^1 = d_1'^1 = F(\delta_1^1) = F(a_1^0) = s \quad .$$

On pose

$$\varepsilon = s_0^0 = s_0'^0 = F(\sigma_0^0) \quad ,$$

$$\Delta = d_2^1 = \alpha_{[2]}^{-1} F(\delta_2^1) \qquad \text{et} \qquad \Delta' = d_2'^1 = \alpha_{[2]}'^{-1} F(\delta_2^1) \quad .$$

Alors (*cf.* 1.2.9), $(B, {}_bX_s, \Delta, \varepsilon, s, b)$ est une catégorie pré-quantique et, en particulier, $({}_bX_s, \Delta, \varepsilon)$ est un cogébroïde de base B. Dualement, $(B, {}_sX_b, \Delta', \varepsilon, b, s)$ est aussi une catégorie pré-quantique et $({}_sX_b, \Delta', \varepsilon)$ un cogébroïde de base B. Les foncteurs partiellement monoïdaux G et G' étant stricts, on a :

$$
\begin{array}{lll}
d_n^0 = 1_{\overset{n-1}{\underset{B}{\otimes}} {}_bX_s} \otimes_B b \quad , & d_n'^0 = b \otimes_B 1_{\overset{n-1}{\underset{B}{\otimes}} {}_sX_b} \quad , & n > 0 \, , \\
d_n^i = 1_{\overset{n-i-1}{\underset{B}{\otimes}} {}_bX_s} \otimes_B \Delta \otimes_B 1_{\overset{i-1}{\underset{B}{\otimes}} {}_bX_s} \, , & d_n'^i = 1_{\overset{i-1}{\underset{B}{\otimes}} {}_sX_b} \otimes_B \Delta' \otimes_B 1_{\overset{n-i-1}{\underset{B}{\otimes}} {}_sX_b} \, , & 0 < i < n \, , \\
d_n^n = s \otimes_B 1_{\overset{n-1}{\underset{B}{\otimes}} {}_bX_s} \quad , & d_n'^n = 1_{\overset{n-1}{\underset{B}{\otimes}} {}_sX_b} \otimes_B s \quad , & n > 0 \, , \\
s_n^i = 1_{\overset{n-i}{\underset{B}{\otimes}} {}_bX_s} \otimes_B \varepsilon \otimes_B 1_{\overset{i}{\underset{B}{\otimes}} {}_bX_s} \quad , & s_n'^i = 1_{\overset{i}{\underset{B}{\otimes}} {}_sX_b} \otimes_B \varepsilon \otimes_B 1_{\overset{n-i}{\underset{B}{\otimes}} {}_sX_b} \quad , & 0 \leq i \leq n \, .
\end{array}
$$

3.1.5. On dit qu'une catégorie quantique $F : \mathbf{\Delta} \to \mathcal{A}lg$ est stricte si le foncteur

$$[\, m \,] \longmapsto {}_{F(b_m)}F[\, m \,]_{F(a_m)} \quad ,$$

de la catégorie partiellement monoïdale des simplexes dans celle des $(B\,;B)$-bimodules, est un foncteur partiellement monoïdal strict, ou de façon équivalente si l'isomorphisme fonctoriel α, défini ci dessus, est l'identité. En vertu de ce qui précède, si pour tout m, $m \in \mathbb{N}$, on munit $G[\, m \,]$ de la structure d'algèbre obtenue de celle de $F[\, m \,]$ par transport de structure par $\alpha_{[\, m \,]}$, alors le foncteur G devient une catégorie quantique stricte. Cela prouve en particulier que toute catégorie quantique est isomorphe à une catégorie quantique stricte.

Pour résumer, une catégorie quantique stricte est définie par la donnée :

a) d'une catégorie pré-quantique $(B, X, \Delta, \varepsilon, s, b)$ (*cf.* 1.2.9), de sorte qu'en posant

$$
\begin{array}{l}
F[\, n \,] = \displaystyle\bigotimes_B^n X \quad , \qquad n \geq 0 \, , \\
F(\delta_n^0) = d_n^0 = 1_{\overset{n-1}{\underset{B}{\otimes}} X} \otimes_B b \quad , \qquad n > 0 \, , \\
F(\delta_n^i) = d_n^i = 1_{\overset{n-i-1}{\underset{B}{\otimes}} X} \otimes_B \Delta \otimes_B 1_{\overset{i-1}{\underset{B}{\otimes}} X} \quad , \qquad 0 < i < n \, , \\
F(\delta_n^n) = d_n^n = s \otimes_B 1_{\overset{n-1}{\underset{B}{\otimes}} X} \quad , \qquad n > 0 \, , \\
F(\sigma_n^i) = s_n^i = 1_{\overset{n-i}{\underset{B}{\otimes}} X} \otimes_B \varepsilon \otimes_B 1_{\overset{i}{\underset{B}{\otimes}} X} \quad , \qquad 0 \leq i \leq n \, ,
\end{array}
$$

on définisse un foncteur partiellement monoïdal strict de la catégorie partiellement monoïdale des simplexes dans celle des $(B\,;B)$-bimodules;

b) pour tout n, $n \in \mathbb{N}$, d'une structure d'algèbre sur $F[\, n \,]$ rendant les applications $F(\delta_n^i)$, $0 \leq i \leq n$, $n > 0$, et $F(\sigma_n^i)$, $0 \leq i \leq n$, des morphismes d'algèbres, la structure d'algèbre sur $F[\, 0 \,]$ étant celle de B, et la structure de $(B\,;B)$-bimodule ${}_bF[\, 1 \,]_s$ coïncidant avec celle de X.

De plus, on demande que, si l'on note $j_k : X \to \bigotimes_B^n = F[\,n\,]$ l'application linéaire définie par

$$j_k(x) = \underbrace{1 \otimes_B \cdots \otimes_B 1}_{k-1 \text{ fois}} \otimes_B x \otimes_B \underbrace{1 \otimes_B \cdots \otimes_B 1}_{n-k \text{ fois}} \quad ,$$

alors, pour tout n, $n \in \mathbb{N}$, l' application linéaire

$$\begin{aligned} \bigotimes_B^n X = \bigotimes_B^n {}_bX_s &\longrightarrow F[\,n\,] = \bigotimes_B^n X \\ x_1 \otimes_B x_2 \otimes_B \cdots \otimes_B x_n &\longmapsto j_1(x_1) \cdot j_2(x_2) \cdots j_n(x_n) \end{aligned}$$

soit l'identité, et l'application linéaire

$$\begin{aligned} \bigotimes_B^n {}_sX_b &\longrightarrow F[\,n\,] \\ x_1 \otimes_B x_2 \otimes_B \cdots \otimes_B x_n &\longmapsto j_n(x_1) \cdot j_{n-1}(x_2) \cdots j_1(x_n) \end{aligned}$$

soit bijective.

3.2. L'exemple des bigébroïdes.

Définition 3.2.1. Soit B une algèbre *commutative*. Un *bigébroïde de base* B [Mal] est la donnée $(X, s, b, \Delta, \varepsilon)$, où X est une algèbre (non nécessairement commutative), $s,\, b : B \rightrightarrows X$ sont des morphismes d'algèbres dont l'image est centrale dans X, et

$$\Delta : {}_bX_s \longrightarrow {}_bX_s \otimes_B {}_bX_s \qquad \text{et} \qquad \varepsilon : {}_bX_s \longrightarrow B$$

des morphismes de $(B\,;B)$-bimodules et d'algèbres ($X_s \otimes_B {}_bX$ étant muni de la structure d'algèbre produit tensoriel, ce qui a un sens puisque l'image de s ainsi que celle de b est dans le centre de X) tels que $({}_bX_s, \Delta, \varepsilon)$ soit un cogébroïde de base B (*cf.* 1.2.9).

3.2.2. En vertu de 1.2.6 et 1.2.9, la donnée du bigébroïde ci-dessus définit, en particulier, un foncteur partiellement monoïdal strict F de la catégorie partiellement monoïdale des simplexes dans la catégorie partiellement monoïdale des $(B\,;B)$-bimodules. De façon explicite,

$$F[\,n\,] = \underbrace{{}_bX_s \otimes_B \cdots \otimes_B {}_bX_s}_{n \text{ fois}} \,,$$

(3.2.2.1)
$$\begin{aligned} F(\delta_n^0) &= 1_{F[\,n-1\,]} \otimes_B b \,, \\ F(\delta_n^i) &= 1_{F[\,n-i-1\,]} \otimes_B \Delta \otimes_B 1_{F[\,i-1\,]} \,, \quad 0 < i < n \,, \\ F(\delta_n^n) &= s \otimes_B 1_{F[\,n-1\,]} \,, \\ F(\sigma_n^i) &= 1_{F[\,n-i\,]} \otimes_B \varepsilon \otimes_B 1_{F[\,i\,]} \,, \quad 0 \le i \le n \,. \end{aligned}$$

Comme l'image de s et b est contenue dans le centre de X, on peut munir $F[n]$ de la structure d'algèbre produit tensoriel n-uple, et comme s, b, Δ et ε sont des morphismes d'algèbres, il en est de même pour $F(\delta_n^i)$ et $F(\sigma_n^i)$, $0 \leq i \leq n$, et en vertu de 1.1.3, il en est de même aussi pour $F(\varphi)$, pour tout $\varphi : [m] \to [n]$, morphisme de $\mathbf{\Delta}$. Le foncteur F définit donc une algèbre cosimpliciale. En fait, cette algèbre cosimpliciale est une catégorie quantique. Pour prouver cela, on va montrer que la condition (e) de la proposition 3.1.3 est satisfaite. Or, on constate immédiatement que, dans les notations de cette proposition, l'application linéaire $\alpha_{[n]}$ est l'application identique et l'aplication

$$\alpha'_{[n]} : \underbrace{X_b \otimes_B {}_sX_b \otimes_B \cdots \otimes_B {}_sX}_{n \text{ fois}} \longrightarrow \underbrace{X_s \otimes_B {}_bX_s \otimes_B \cdots \otimes_B {}_bX}_{n \text{ fois}}$$

n'est autre que l'application

$$x_1 \otimes_B x_2 \otimes_B \cdots \otimes_B x_n \longmapsto x_n \otimes_B x_{n-1} \otimes_B \cdots \otimes_B x_1 \quad ,$$

qui est aussi bijective, ce qui prouve l'assertion.

3.3. La généralisation de l'exemple de Vainerman.

3.3.1. L'exemple qu'on va présenter ci-dessous est une version quantique de l'exemple classique de catégorie suivant. On se donne un monoïde M, une action à gauche $M \times X \to X$ de M sur un espace X et une action à droite $X' \times M \to X'$ sur un espace X'. On définit une catégorie $\mathcal{C}$ comme suit. L'ensemble des objets de $\mathcal{C}$ est $X' \times X$, l'ensemble des flèches est $X' \times M \times X$, les applications source et but sont définies par

$$s(x', g, x) = (x'g, x) \qquad \text{et} \qquad b(x', g, x) = (x', gx) \quad , \qquad (x', g, x) \in \mathsf{Fl}(\mathcal{C}) \quad ,$$

la composition par

$$(x', g, x) \circ (y', h, y) = (x', gh, y) \quad ,$$

pour (x', g, x), $(y', h, y) \in \mathsf{Fl}(\mathcal{C})$ tels que $(y', hy) = (x'g, x)$, et l'identité d'un objet (x', x) de $\mathcal{C}$ par $1_{(x',x)} = (x', e, x)$, où e désigne l'élément neutre du monoïde M.

3.3.2. Voici l'analogue quantique de l'exemple ci-dessus. On se donne une bigèbre H (qui correspond au monoïde) de coproduit $\Delta_H : H \to H \otimes H$ et de coünité $\varepsilon_H : H \to K$, deux algèbres A et A' (qui correspondent aux espaces X et X') et des morphismes d'algèbres

$$\delta : A \to H \otimes A \quad , \qquad \delta' : A' \to A' \otimes H$$

faisant de A et A' un H-comodule à gauche et à droite respectivement (et qui correspondent aux actions). On définit des algèbres

$$H_n = \bigotimes^n H \quad , \qquad X_n = A' \otimes H_n \otimes A \quad , \qquad n \geq 0 \quad , \tag{3.3.2.1}$$

et des morphismes d'algèbres

$$d_n^i : X_{n-1} \to X_n \ , \quad 0 \leq i \leq n \, , \ n > 0 \, , \qquad s_n^i : X_{n+1} \to X_n \ , \quad 0 \leq i \leq n \, , \ n \geq 0$$

par

$$
(3.3.2.2)\qquad
\begin{aligned}
d_n^0 &= 1_{A'} \otimes 1_{H_{n-1}} \otimes \delta \quad , \\
d_n^i &= 1_{A'} \otimes 1_{H_{n-i-1}} \otimes \Delta_H \otimes 1_{H_{i-1}} \otimes 1_A \quad , \qquad 0 < i < n \quad , \\
d_n^n &= \delta' \otimes 1_{H_{n-1}} \otimes 1_A \quad , \\
s_n^i &= 1_{A'} \otimes 1_{H_{n-i}} \otimes \varepsilon_H \otimes 1_{H_i} \otimes 1_A \quad , \qquad 0 \le i \le n \quad .
\end{aligned}
$$

Proposition 3.3.3. *Il existe une catégorie quantique unique $F : \mathbf{\Delta} \to \mathcal{A}lg$ telle que*

(3.3.3.1) $F[\,n\,] = X_n \,,\ n \ge 0 \,,\ \ F(\delta_n^i) = d_n^i \,,\ 0 \le i \le n \,,\ n > 0 \,,\ \ F(\sigma_n^i) = s_n^i \,,\ 0 \le i \le n \,.$

Démonstration. Montrons d'abord qu'il existe une algèbre cosimpliciale unique

$$F : \mathbf{\Delta} \to \mathcal{A}lg$$

satisfaisant aux conditions 3.3.3.1. La méthode la plus élémentaire consiste à vérifier directement les relations simpliciales, et conclure par la proposition 1.1.4. On laisse cette vérification fastidieuse au lecteur courageux.

En effet, la théorie développée au premier paragraphe permet d'éviter ces calculs. Pour cela, on peut utiliser le théorème 1.2.6, en considérant la catégorie partiellement monoïdale stricte $(\mathcal{V},\ {}_\bullet\mathcal{V},\ \mathcal{V}_\bullet,\ \odot,\ I)$ définie comme suit. La catégorie $\mathcal{V}$ est la sous-catégorie pleine de $\mathcal{A}lg$ dont les objets sont les X_m, $m \in \mathbb{N}$. La sous-catégorie $\mathcal{V}_\bullet$ (resp. ${}_\bullet\mathcal{V}$) est la sous-catégorie de $\mathcal{V}$ ayant mêmes objets que $\mathcal{V}$, un morphisme de X_m dans X_n étant un morphisme de la forme $u \otimes 1_A$ (resp. $1_{A'} \otimes u'$), où $u : A' \otimes H_m \to A' \otimes H_n$ (resp. $u' : H_m \otimes A \to H_n \otimes A$) est un morphisme d'algèbres. Le produit tensoriel

$$\mathcal{V}_\bullet \times {}_\bullet\mathcal{V} \xrightarrow{\ \odot\ } \mathcal{V}$$

est défini par $X_m \odot X_{m'} = X_{m+m'}$ sur les objets, et si $v = u \otimes 1_A$ (resp. $v' = 1_{A'} \otimes u'$) est un morphisme de $\mathcal{V}_\bullet$ (resp. ${}_\bullet\mathcal{V}$), de source X_m (resp. $X_{m'}$) et de but X_n (resp. $X_{n'}$), alors $v \odot v'$ est le morphisme $u \otimes u'$, de source $X_{m+m'}$ et de but $X_{n+n'}$. Cette définition demande une justification : on doit vérifier que $u \otimes u'$ ne dépend que de v et v' (si K n'et pas un corps, les applications $u \mapsto u \otimes 1_A$ et $u' \mapsto 1_{A'} \otimes u'$ ne sont pas nécessairement injectives). Cela résulte du fait que

$$
\begin{aligned}
u \otimes u' &= (u \otimes 1_{H_{n'} \otimes A})(1_{A' \otimes H_m} \otimes u') \\
&= (1_{A' \otimes H_n} \otimes \sigma_{A,H_{n'}})(v \otimes 1_{H_{n'}})(\sigma_{H_m,A'} \otimes \sigma_{H_{n'},A})(1_{H_m} \otimes v')(\sigma_{A',H_m} \otimes 1_{H_{m'} \otimes A}) \,,
\end{aligned}
$$

où, pour tout couple de K-modules M et N, $\sigma_{M,N} : M \otimes N \to N \otimes M$ désigne la volte, définie par $\sigma_{M,N}(x \otimes y) = y \otimes x$, $x \in M$, $y \in N$. Enfin, I est l'objet $X_0 = A' \otimes A$. On vérifie immédiatement qu'on définit ainsi une catégorie partiellement monoïdale stricte.

Le théorème 1.2.6 implique alors aussitôt l'existence et l'unicité du foncteur F en posant, dans les notations de ce théorème

$$X = X_1 \ , \quad s = \delta' \otimes 1_A \ , \quad b = 1_{A'} \otimes \delta \ , \quad \Delta = 1_{A'} \otimes \Delta_H \otimes 1_A \ , \quad \varepsilon = 1_{A'} \otimes \varepsilon_H \otimes 1_A \ ,$$

les relations 1.2.6.1 étant conséquence immédiate des propriétés de coassociativité et de coünité de la bigèbre H et des comodules A et A'.

Une troisième alternative, si l'on accepte d'avoir recours aux 2-catégories, est de constater que l'existence et l'unicité du foncteur F est une conséquence immédiate du théorème 1.3.4 (*cf.* exemple 1.3.7).

Il reste à montrer que l'algèbre cosimpliciale ainsi définie est une catégorie quantique. En vertu de la proposition 3.1.3, il suffit de montrer que pour tout n, $n \in \mathbb{N}$, le carré

$$\begin{tikzcd} X_0 \arrow[r, "F(b_1^0)"] \arrow[d, "F(a_n^0)"'] & X_1 \arrow[d, "F(a_{n+1}^1)"] \\ X_n \arrow[r, "F(b_{n+1}^n)"'] & X_{n+1} \end{tikzcd} \tag{3.3.3.2}$$

est cocartierien. Définissons par récurrence sur m

$$\delta_{(m)} : A \longrightarrow H_m \otimes A \quad , \qquad \delta'_m : A' \longrightarrow A' \otimes H_m$$

par

$$\delta_{(0)} = 1_A \quad , \qquad \delta_{(m+1)} = (1_{H_m} \otimes \delta)\delta_{(m)} \quad ,$$

$$\delta'_{(0)} = 1_{A'} \quad , \qquad \delta'_{(m+1)} = (\delta' \otimes 1_{H_m})\delta'_{(m)}$$

(ce qui implique en particulier que $\delta_{(1)} = \delta$ et $\delta'_{(1)} = \delta'$). Il résulte aussitôt de 3.3.3.1 que, pour tous m et n, $0 \leq m \leq n$, on a

$$F(a_n^m) = \delta'_{(n-m)} \otimes 1_{H_m} \otimes 1_A \qquad \text{et} \qquad F(b_n^m) = 1_{A'} \otimes 1_{H_m} \otimes \delta_{(n-m)} \quad .$$

On en déduit que le diagramme commutatif 3.3.3.2 n'est autre que le diagramme

$$\begin{tikzcd} A' \otimes A \arrow[r, "1_{A'} \otimes \delta"] \arrow[d, "\delta'_{(n)} \otimes 1_A"'] & A' \otimes H \otimes A \arrow[d, "\delta'_{(n)} \otimes 1_H \otimes 1_A"] \\ A' \otimes H_n \otimes A \arrow[r, "1_{A'} \otimes 1_{H_n} \otimes \delta"'] & A' \otimes H_{n+1} \otimes A \end{tikzcd} \quad ,$$

qui est produit tensoriel sur K des carrés

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "1_{A'}"] \arrow[d, "\delta'_{(n)}"'] & A' \arrow[d, "\delta'_{(n)}"] \\ A' \otimes H_n \arrow[r, "1_{A'} \otimes 1_{H_n}"'] & A' \otimes H_n \end{tikzcd} \qquad \text{et} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "1_A"'] & H \otimes A \arrow[d, "1_H \otimes 1_A"] \\ A \arrow[r, "\delta"'] & H \otimes A \end{tikzcd} \quad ,$$

ce qui prouve, en vertu des lemmes 2.2.2 et 2.2.3, que le carré 3.3.3.2 est cocartierien, et termine la démonstration.

3.4. L'exemple des familles non commutatives de monoïdes quantiques tressés.

3.4.1. L'exemple qu'on va présenter ci-dessous est l'analogue quantique d'une catégorie (classique) $\mathcal{C}$, dont l'application source coïncide avec l'application but, autrement dit, telle que l'ensemble des morphismes entre deux objets distincts soit vide. Une telle catégorie peut être considérée comme une famille de monoïdes, indexés par $\mathsf{Ob}(\mathcal{C})$.

Définition 3.4.2. Soit B une algèbre (non nécessairement commutative). Une *famille de monoïdes quantiques tressés de base* B est la donnée $(X, u, T, \Delta, \varepsilon)$, où X est une algèbre, $u : B \to X$ un morphisme d'algèbres, $T : X \otimes_B X \to X \otimes_B X$ un B-tressage *bijectif* de l'algèbre X avec elle même (cf. 2.1.2), satisfaisant à l'équation de Yang-Baxter quantique (cf. 2.3.1), et

$$\Delta : X \longrightarrow X \otimes_B X \qquad \text{et} \qquad \varepsilon : X \to B$$

des morphismes d'algèbres, le $(B\,;B)$-bimodule $X \otimes_B X$ étant muni de la structure d'algèbre produit tensoriel tordu sur B, associé au B-tressage T (cf. 2.1.5), tels que (X, Δ, ε) soit un cogébroïde de base B (cf. 1.2.9), et tels que

$$\begin{aligned} &(1_X \otimes_B T)(T \otimes_B 1_X)(1_X \otimes_B \Delta) = (\Delta \otimes_B 1_X)T \quad , \\ &(T \otimes_B 1_X)(1_X \otimes_B T)(\Delta \otimes_B 1_X) = (1_X \otimes_B \Delta)T \quad . \end{aligned} \tag{3.4.2.1}$$

Comme T est bijectif, un argument dual à celui développé à la fin de 2.1.2 prouve qu'on a

$$(1_X \otimes_B \varepsilon)T = \varepsilon \otimes_B 1_X \qquad \text{et} \qquad (\varepsilon \otimes_B 1_X)T = 1_X \otimes_B \varepsilon \quad . \tag{3.4.2.2}$$

3.4.3. En vertu de 1.2.6 et 1.2.9, la donnée de la famille de monoïdes quantiques tressés ci-dessus définit, en particulier, un foncteur partiellement monoïdal strict F de la catégorie partiellement monoïdale des simplexes dans la catégorie partiellement monoïdale des $(B\,;B)$-bimodules. De façon explicite,

$$\begin{aligned} &F[\,n\,] = \underbrace{X \otimes_B \cdots \otimes_B X}_{n \text{ fois}} \,, \\ &F(\delta_n^0) = 1_{F[\,n-1\,]} \otimes_B u \,, \\ &F(\delta_n^i) = 1_{F[\,n-i-1\,]} \otimes_B \Delta \otimes_B 1_{F[\,i-1\,]} \,, \quad 0 < i < n \,, \\ &F(\delta_n^n) = u \otimes_B 1_{F[\,n-1\,]} \,, \\ &F(\sigma_n^i) = 1_{F[\,n-i\,]} \otimes_B \varepsilon \otimes_B 1_{F[\,i\,]} \,, \quad 0 \leq i \leq n \,. \end{aligned} \tag{3.4.3.1}$$

Munissons $F[\,n\,]$ de la structure produit tensoriel tordu n-uple sur B, associé au B-tressage T (cf. 2.3.7). En vertu de 2.3.5, il résulte de 3.4.2.1 (resp. 3.4.2.2) que, pour tout n et tout i, $0 < i < n$ (resp. $0 \leq i \leq n$), $F(\delta_n^i)$ (resp. $F(\sigma_n^i)$) est un morphisme d'algèbres. D'autre part, comme, pour tout n, $n > 1$, l'algèbre $F[n]$ est produit tensoriel tordu sur B de $F[\,n-1\,]$ et de $F[\,1\,]$ (resp. de $F[\,1\,]$ et de $F[\,n-1\,]$) (cf. 2.3.6) $F(\delta_n^0)$ (resp. $F(\delta_n^n)$) est aussi un morphisme d'algèbres, et en vertu de 1.1.3, il en est de même pour $F(\varphi)$, pour tout $\varphi : [\,m\,] \to [\,n\,]$, morphisme de $\mathbf{\Delta}$. Le foncteur F définit donc une algèbre cosimpliciale. En fait, cette algèbre cosimpliciale est une catégorie quantique. En effet, en gardant les notations de la définition 3.1.1, on vérifie facilement que

$$\Phi_{[\,m\,],[\,n\,]} = 1_{F[\,m+n\,]} \qquad \text{et} \qquad \Phi_{[\,n\,],[\,m\,]} = T_{n,m} \quad ,$$

où $T_{n,m}$ est le B-tressage de l'algèbre $F([\,m\,])$ avec l'algèbre $F([\,n\,])$, déduit du B-tressage T (cf. 2.3.7). Comme T est bijectif, il résulte aussitôt de 2.3.6.1 et 2.3.6.2, par récurrence sur m et n, que $T_{n,m}$ est aussi bijectif, ce qui prouve l'assertion. On dit que cette catégorie quantique est la *catégorie quantique associée à la famille des monoïdes quantiques tressés* $(X, u, T, \Delta, \varepsilon)$. En gardant les notations de 3.1.4, on remarque qu'on a $s = u = b$. Réciproquement :

Proposition 3.4.4. *Soit $F : \mathbf{\Delta} \to \mathcal{A}lg$ une catégorie quantique telle que $s = b$* (cf. 3.1.4). *Alors F est isomorphe à la catégorie quantique associée à une famille de monoïdes quantiques tressés.*

DÉMONSTRATION. En vertu de 3.1.5, on peut supposer que la catégorie quantique F est stricte. En gardant les notations de 3.1.4, posons $u = s = b$, et notons $T_{n,m}$ le B-tressage de l'algèbre $F([\,m\,])$ avec l'algèbre $F([\,n\,])$ associé au carré cocartierien direct 3.1.1.1 (cf. 2.1.2). Comme ce carré est cocartierien, le B-tressage $T_{n,m}$ est bijectif (cf. 2.1.4). Comme la catégorie quantique F est stricte, $\Phi_{[\,m\,],[\,n\,]} = 1_{F[\,m+n\,]}$, et il résulte de 2.1.4 que l'algèbre $F[\,m+n\,]$ est le produit tensoriel tordu sur B de $F[\,m\,]$ et F[n], asocié au B-tressage $T_{n,m}$. Il résulte donc du lemme 2.3.3 (ii) que, pour tous l, m, n, le triplet $(T_{m,l}, T_{n,l}, T_{n,m})$ satisfait à l'équation de Yang-Baxter quantique, et que $T_{n,l+m}$ satisfait à la relation 2.3.6.1. En particulier, si l'on pose $T = T_{1,1}$, alors T est un B-tressage bijectif de l'algèbre X avec elle même, satisfaisant à l'équation de Yang-Baxter quantique. Comme, en vertu de 3.1.4, (X, Δ, ε) est un cogébroïde de base B, on en déduit que $(X, u, T, \Delta, \varepsilon)$ est une famille de monoïdes quantiques tressés. Il résulte de la partie unicité du corollaire 2.3.6 que la catégorie quantique F est la catégorie quantique associée à cette famille de groupoïdes quantiques tressés, ce qui prouve la proposition.

4. Groupoïdes quantiques

4.1. La définition des groupoïdes quantiques.

Définition 4.1.1. Soit $F : \mathbf{\Delta} \to \mathcal{A}lg$ une catégorie quantique. Posons (*cf.* 3.1.4)

$$B = F[\,0\,]\ , \quad X = F[\,1\,]\ , \quad s = F(\delta_1^1)\ , \quad b = F(\delta_1^0)\ , \quad \varepsilon = F(\sigma_0^0)\ , \quad \Delta = \alpha_{[\,2\,]}^{-1} F(\delta_2^1)\ ,$$

où (*cf.* 3.1.3 (e))

$$\alpha_{[\,2\,]} : {}_bX_s \otimes_B {}_bX_s \longrightarrow {}_{F(b_2)}F[\,2\,]_{F(a_2)} = {}_{F(\delta_2^0\delta_1^0)}F[\,2\,]_{F(\delta_2^2\delta_1^1)}$$

désigne l'isomorphisme de $(B\,;B)$-bimodules défini par

$$x_1 \otimes_B x_2 \longmapsto F(\delta_2^0)(x_1) \cdot F(\delta_2^2)(x_2) \quad .$$

On appelle *antipode* un morphisme de $(B\,;B)$-bimodules

$$I : {}_bX_s \longrightarrow {}_sX_b$$

rendant commutatif le diagramme suivant de $(B\,;B)$-bimodules

$$\begin{tikzcd}
{}_bX_s \otimes_B {}_bX_s \arrow[r, "I \otimes_B 1_X"] & {}_sX_b \otimes_B {}_bX_s \arrow[r] & {}_sX_s \\
{}_bX_s \arrow[u, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] \arrow[rr, "\varepsilon"] & & B \arrow[u, "s"'] \arrow[d, "b"] \\
{}_bX_s \otimes_B {}_bX_s \arrow[r, "1_X \otimes_B I"'] & {}_bX_s \otimes_B {}_sX_b \arrow[r] & {}_bX_b
\end{tikzcd}$$

les deux morphismes non spécifiés étant définis par la multiplication de X. On appelle *groupoïde quantique* une catégorie quantique admettant un antipode.

Pour étudier les propriétés de l'antipode, on a besoin de quelques préliminaires.

4.2. Pseudo-bigébroïdes.

4.2.1. Soient B et C deux algèbres et (X, Δ, ε) in cogébroïde de base B. On va définir une catégorie $\mathcal{C}$ dont l'ensemble des objets est l'ensemble $\mathsf{Hom}_{\mathcal{A}lg}(B, C)$ des morphismes d'algèbres de B dans C. Pour tout couple $\alpha, \beta \in \mathsf{Ob}(\mathcal{C})$, $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(\alpha, \beta)$ est l'ensemble des morphismes de $(B\,;B)$-bimodules de X dans ${}_\beta C_\alpha$.

$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(\alpha, \beta) = \mathsf{Hom}_{(B\,;B)\text{-}\mathcal{B}imod}(X,\ {}_\beta C_\alpha) \quad .$$

Pour tous $\alpha, \beta, \gamma \in \mathsf{Ob}(\mathcal{C})$, la composition d'une flèche $f \in \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(\alpha, \beta)$ et d'une flèche $g \in \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(\beta, \gamma)$ est définie par

$$g \circ f = \mu_\beta (g \otimes_B f)\Delta$$

$$X \xrightarrow{\ \Delta\ } X \otimes_B X \xrightarrow{g \otimes_B f} {}_\gamma C_\beta \otimes_B {}_\beta C_\alpha \xrightarrow{\ \mu_\beta\ } {}_\gamma C_\alpha \quad ,$$

où μ_β désigne l'application linéaire déduite de la multiplication de C, qui est un morphisme de $(B\,;B)$-bimodules. Pour tout objet α de $\mathcal{C}$, la flèche identique 1_α est définie par

$$1_\alpha = \alpha\varepsilon$$

$$X \xrightarrow{\ \varepsilon\ } B \xrightarrow{\ \alpha\ } {}_\alpha C_\alpha \quad .$$

La composition ci-dessus est associative : soient $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathsf{Ob}(\mathcal{C})$ et $f \in \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(\alpha, \beta)$, $g \in \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(\beta, \gamma)$, $h \in \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(\gamma, \delta)$. On a

$$\begin{aligned} h \circ (g \circ f) &= \mu_\gamma (h \otimes_B [\mu_\beta (g \otimes_B f)\Delta])\Delta \\ &= \mu_\gamma (1_C \otimes_B \mu_\beta)(h \otimes_B g \otimes_B f)(1_X \otimes_B \Delta)\Delta \\ &= \mu_\beta (\mu_\gamma \otimes_B 1_C)(h \otimes_B g \otimes_B f)(\Delta \otimes_B 1_X)\Delta \\ &= \mu_\beta ([\mu_\gamma (h \otimes_B g)\Delta] \otimes_B f)\Delta \\ &= (h \circ g) \circ f \quad . \end{aligned}$$

Il reste à vérifier la propriété de l'unité : soient $\alpha, \beta \in \mathsf{Ob}(\mathcal{C})$ et $f \in \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(\alpha, \beta)$. On a

$$\begin{aligned} f \circ 1_\alpha &= \mu_\alpha (f \otimes_B (\alpha\varepsilon))\Delta \\ &= \mu_\alpha (1_C \otimes_B \alpha)(f \otimes_B 1_B)(1_X \otimes_B \varepsilon)\Delta \\ &= f \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} 1_\beta \circ f &= \mu_\beta ((\beta\varepsilon) \otimes_B f)\Delta \\ &= \mu_\beta (\beta \otimes_B 1_C)(1_B \otimes_B f)(\varepsilon \otimes_B 1_X)\Delta \\ &= f \quad . \end{aligned}$$

Définition 4.2.2. Soit B une algèbre. Un *pseudo-bigébroïde* de base B est la donnée $(X, s, b, \Delta, \varepsilon)$, où X est une algèbre $s,\, b : B \rightrightarrows X$ sont des morphismes d'algèbres et

$$\Delta : {}_bX_s \longrightarrow {}_bX_s \otimes_B {}_bX_s \qquad \text{et} \qquad \varepsilon : {}_bX_s \longrightarrow B$$

des morphismes de $(B\,;B)$-bimodules tels que $({}_bX_s, \Delta, \varepsilon)$ soit un cogébroïde de base B.

On remarque que si $\Delta(1) = 1 \otimes_B 1$ et $\varepsilon(1) = 1$, alors $(B, {}_bX_s, \Delta, \varepsilon, s, b)$ est une catégorie pré-quantique (*cf.* 1.2.9), et qu'un bigébroïde de base B (*cf.* 3.2.1) est, en particulier, un pseudo-bigébroïde de base B.

Définition 4.2.3. On dit qu'une application linéaire $I : X \to X$ est un *antipode* du pseudo-bigébroïde $(X, s, b, \Delta, \varepsilon)$ de base B si :

a) $I : {}_bX_s \to {}_sX_b$ est un morphisme de $(B\,;B)$-bimodules;

b) le diagramme

$$\begin{tikzcd} {}_bX_s \otimes_B {}_bX_s \arrow[r, "I \otimes_B 1_X"] & {}_sX_b \otimes_B {}_bX_s \arrow[r, "\mu_b"] & {}_sX_s \\ {}_bX_s \arrow[u, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] \arrow[rr, "\varepsilon"] & & B \arrow[u, "s"'] \arrow[d, "b"] \\ {}_bX_s \otimes_B {}_bX_s \arrow[r, "1_X \otimes_B I"'] & {}_bX_s \otimes_B {}_sX_b \arrow[r, "\mu_s"'] & {}_bX_b \end{tikzcd}$$

est commutatif : $\mu_b(I \otimes_B 1_X)\Delta = s\varepsilon$ et $\mu_s(1_X \otimes_B I)\Delta = b\varepsilon$.

On appelle *pseudo-bigébroïde de Hopf* un pseudo-bigébroïde admettant un antipode. On appelle *bigébroïde de Hopf* un bigébroïde (*cf.* 3.2.1) dont le pseudo-bigébroïde sous-jacent est de Hopf.

En considérant la catégorie $\mathcal{C}$, dont l'ensemble des objets est $\mathsf{Hom}_{\mathcal{A}lg}(B, X)$, définie par le cogébroïde de base B $({}_bX_s, \Delta, \varepsilon)$ (*cf.* 4.2.1), on remarque que s et b sont des objets de $\mathcal{C}$, que 1_X est un morphisme de $\mathcal{C}$ de source s et de but b

$$1_X \in \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(s, b) \quad ,$$

et qu'une application linéaire $I : X \to X$ est un antipode si et seulement si I est un inverse de ce morphisme dans $\mathcal{C}$. En particulier, on en déduit la proposition suivante.

Proposition 4.2.4. *Un pseudo-bigébroïde possède au plus un antipode.*

Proposition 4.2.5. *Soient B une algèbre et $(X, s, b, \Delta, \varepsilon)$ un pseudo-bigébroïde de base B.*

i) *Si $\varepsilon(1) = 1$, alors $\varepsilon s = 1_B$ et $\varepsilon b = 1_B$.*

ii) *Si $\Delta(1) = 1 \otimes_B 1$, alors, pour tout a, $a \in B$, $\Delta s(a) = 1 \otimes_B s(a)$ et $\Delta b(a) = b(a) \otimes_B 1$.*

iii) *Si $\varepsilon(1) = 1$, $\Delta(1) = 1 \otimes_B 1$, et si le pseudo-bigébroïde X possède un antipode I, alors on a $Ib = s$ et $Is = b$.*

iv) *Si ε est un morphisme d'algèbres et si le pseudo-bigébroïde X possède un antipode I, alors on a $\varepsilon I = \varepsilon$.*

Démonstration. Soit $a \in B$. Si $\varepsilon(1) = 1$, on a :

$$\varepsilon(s(a)) = \varepsilon(1 \cdot s(a)) = \varepsilon(1 \cdot a) = \varepsilon(1) \cdot a = 1 \cdot a = a \quad ,$$

$$\varepsilon(b(a)) = \varepsilon(b(a) \cdot 1) = \varepsilon(a \cdot 1) = a \cdot \varepsilon(1) = a \cdot 1 = a \quad ,$$

ce qui prouve l'assertion (i). Si $\Delta(1) = 1 \otimes_B 1$, on a :

$$\Delta(s(a)) = \Delta(1 \cdot s(a)) = \Delta(1 \cdot a) = \Delta(1) \cdot a = (1 \otimes_B 1) \cdot a = 1 \otimes_B (1 \cdot s(a)) = 1 \otimes_B s(a) \quad ,$$

$$\Delta(b(a)) = \Delta(b(a) \cdot 1) = \Delta(a \cdot 1) = a \cdot \Delta(1) = a \cdot (1 \otimes_B 1) = (b(a) \cdot 1) \otimes_B 1 = b(a) \otimes_B 1 \quad ,$$

ce qui prouve l'assertion (ii). Pour démontrer l'assertion (iii), on remarque que l'égalité $\mu_b(I \otimes_B 1_X)\Delta = s\varepsilon$ (resp. $\mu_s(1_X \otimes_B I)\Delta = b\varepsilon$) implique que pour tout a, $a \in B$,

$$\mu_b(I \otimes_B 1_X)\Delta b(a) = s\varepsilon b(a) \qquad (\text{resp.} \quad \mu_s(1_X \otimes_B I)\Delta s(a) = b\varepsilon s(a)\ ) \quad ,$$

et il résulte des assertions (i) et (ii) que $Ib(a) = s(a)$ (resp. $Is(a) = b(a)$). De même, pour démontrer l'assertion (iv), on remarque que l'égalité $\mu_b(I \otimes_B 1_X)\Delta = s\varepsilon$ implique que $\varepsilon\mu_b(I \otimes_B 1_X)\Delta = \varepsilon s\varepsilon$, d'où, en vertu de l'assertion (i), de l'hypothèse que ε est un morphisme d'algèbres, et de la propriété de coünité,

$$\varepsilon = (\varepsilon \otimes_B \varepsilon)(I \otimes_B 1_X)\Delta = \varepsilon I(1_X \otimes_B \varepsilon)\Delta = \varepsilon I \quad ,$$

ce qui termine la démonstration.

4.3. Propriétés de l'antipode d'un groupoïde quantique.

Proposition 4.3.1. *Une catégorie quantique possède au plus un antipode.*

Démonstration. Soit $F : \mathbf{\Delta} \to \mathcal{A}lg$ une catégorie quantique. En gardant les notations de la définition 4.1.1, $(X, s, b, \Delta, \varepsilon)$ est un pseudo-bigébroïde de base B, et un antipode de F est un antipode de ce pseudo-bigébroïde, ce qui, en vertu de 4.2.4, prouve la proposition.

Proposition 4.3.2. *Soit $F : \mathbf{\Delta} \to \mathcal{A}lg$ un groupoïde quantique d'antipode I. En gardant les notations de* 3.1.4, *on a*

$$Is = b\ , \quad Ib = s\ , \quad \varepsilon I = \varepsilon$$

et le diagramme

$$\begin{array}{ccc} {}_bX_s & \xrightarrow{\quad I \quad} & {}_sX_b \\ \Big\downarrow{\scriptstyle\Delta} & & \Big\downarrow{\scriptstyle\Delta'} \\ {}_bX_s \otimes_B {}_bX_s & \xrightarrow[I \otimes_B I]{} & {}_sX_b \otimes_B {}_sX_b \end{array}$$

est commutatif.

Démonstration. On a $\Delta(1) = 1 \otimes_B 1$ (*cf.* 1.2.9.3), ε est un morphisme d'algèbres et $(X, s, b, \Delta, \varepsilon)$ est un pseudo-bigébroïde d'antipode I. Il résulte donc de 4.2.5 que $Is = b$, $Ib = s$ et $\varepsilon I = \varepsilon$. Il reste à établir la dernière assertion.

On utilisera librement les notations de 3.1.4. Pour montrer que $\Delta' I = (I \otimes_B I)\Delta$, on va montrer que les composés avec l'isomorphisme de $(B\,;B)$-bimodules

$$\alpha'_{[2]} : {}_sX_b \otimes_B {}_sX_b \longrightarrow {}_{F(a_2)}F[2]_{F(b_2)}$$

sont égaux, autrement dit, en vertu de le définition de Δ', que

$$F(\delta_2^1)I = \alpha'_{[2]}(I \otimes_B I)\Delta \quad . \tag{4.3.2.1}$$

Pour cela, considérons la catégorie $\mathcal{C}$, dont l'ensemble des objets est $\mathsf{Hom}_{\mathcal{A}lg}(B, F[2])$, définie par le cogébroïde de base B $({}_bX_s, \Delta, \varepsilon)$ (*cf.* 4.2.1). On remarque que

$$F(a_2), F(b_2) \in \mathsf{Ob}(\mathcal{C}) \qquad \text{et} \qquad F(\delta_2^1)I\,,\ \alpha'_{[2]}(I \otimes_B I)\Delta \in \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(F(b_2), F(a_2)) \quad .$$

D'autre part, comme $\delta_2^1 \in \mathsf{Ob}({}_\bullet\boldsymbol{\Delta}_\bullet)$, $F(\delta_2^1)$ est un morphisme de $(B\,;B)$-bimodules

$$F(\delta_2^1) : {}_bX_s \longrightarrow {}_{F(b_2)}F[2]_{F(a_2)} \quad ,$$

donc

$$F(\delta_2^1) \in \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(F(a_2), F(b_2)) \quad .$$

On va montrer que dans $\mathcal{C}$

$$\big[F(\delta_2^1)I\big] \circ F(\delta_2^1) = 1_{F(a_2)} \qquad \text{et} \qquad F(\delta_2^1) \circ \big[\alpha'_{[2]}(I \otimes_B I)\Delta\big] = 1_{F(b_2)} \quad , \tag{4.3.2.2}$$

ce qui prouvera que $F(\delta_2^1)$ est un isomorphisme de $\mathcal{C}$ d'inverse à gauche $F(\delta_2^1)I$ et d'inverse à droite $\alpha'_{[2]}(I \otimes_B I)\Delta$, ce qui établira que $F(\delta_2^1)I = \alpha'_{[2]}(I \otimes_B I)\Delta$. On va donc montrer que

$$\mu\Big(\big[F(\delta_2^1)I\big] \otimes_B F(\delta_2^1)\Big)\Delta = F(a_2)\varepsilon \qquad \text{et} \qquad \mu'\Big(F(\delta_2^1) \otimes_B \big[\alpha'_{[2]}(I \otimes_B I)\Delta\big]\Big)\Delta = F(b_2)\varepsilon \quad ,$$

où

$$\mu : {}_{F(a_2)}F[2]_{F(b_2)} \otimes_B {}_{F(b_2)}F[2]_{F(a_2)} \longrightarrow {}_{F(a_2)}F[2]_{F(a_2)} \quad ,$$

$$\mu' : {}_{F(b_2)}F[2]_{F(a_2)} \otimes_B {}_{F(a_2)}F[2]_{F(b_2)} \longrightarrow {}_{F(b_2)}F[2]_{F(b_2)}$$

désignent les morphismes de $(B\,;B)$-bimodules déduits de la multiplication de $F[2]$. On a

$$\begin{aligned}\mu\Big(\big[F(\delta_2^1)I\big] \otimes_B F(\delta_2^1)\Big)\Delta &= F(\delta_2^1)\mu_b(I \otimes_B 1_X)\Delta = F(\delta_2^1)s\varepsilon \\ &= F(\delta_2^1)F(\delta_1^1)\varepsilon = F(\delta_2^1\delta_1^1)\varepsilon = F(\delta_2^2\delta_1^1)\varepsilon = F(a_2)\varepsilon\end{aligned}$$

(la première égalité résultant du fait que $F(\delta_2^1)$ est un morphisme d'algèbres, la deuxième de la définition de l'antipode, la troisième de la définition de s, la quatrième de la fonctorialité de F, la cinquième des relations simpliciales, et la sixième de la définition de a_2), ce qui prouve la première égalité 4.3.2.2.

Pour montrer la deuxième, on remarque d'abord qu'on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
{}_bX_s \otimes_B {}_bX_s \otimes_B {}_sX_b \otimes_B {}_sX_b \arrow[r, "\alpha_{[2]} \otimes_B \alpha'_{[2]}"] \arrow[d, "1_X \otimes_B \mu_s \otimes_B 1_X"'] & {}_{F(b_2)}F[2]_{F(a_2)} \otimes_B {}_{F(a_2)}F[2]_{F(b_2)} \arrow[d, "\mu'"] \\
{}_bX_s \otimes_B {}_bX_b \otimes_B {}_sX_b \arrow[r, "\psi"] & {}_{F(b_2)}F[2]_{F(b_2)}
\end{tikzcd} \quad ,$$

où ψ est le morphisme de $(B\,;B)$-bimodules défini par

$$\psi(x_1 \otimes_B x_2 \otimes_B x_3) = F(\delta_2^0)(x_1) \cdot F(\delta_2^2)(x_2) \cdot F(\delta_2^0)(x_3) \quad , \qquad x_1\,,\, x_2\,,\, x_3 \in X$$

(l'égalité simpliciale $\delta_2^0\delta_1^1 = \delta_2^2\delta_1^0$, impliquant que $F(\delta_2^0)s = F(\delta_2^2)b$, montre que cette application est bien définie, et l'égalité $F(\delta_2^0)b = F(\delta_2^0)F(\delta_1^0) = F(\delta_2^0\delta_1^0) = F(b_2)$ montre que cette application est bien un morphisme de $(B\,;B)$-bimodules). En effet, pour tous $x_1, x_2, x_3, x_4 \in X$, on a

$$\begin{aligned}\mu'(\alpha_{[2]} \otimes_B \alpha'_{[2]})(x_1 \otimes_B x_2 \otimes_B x_3 \otimes_B x_4) &= F(\delta_2^0)(x_1) \cdot F(\delta_2^2)(x_2) \cdot F(\delta_2^2)(x_3) \cdot F(\delta_2^0)(x_4) \\ &= F(\delta_2^0)(x_1) \cdot F(\delta_2^2)(x_2 \cdot x_3) \cdot F(\delta_2^0)(x_4) \\ &= \psi(1_X \otimes_B \mu_s \otimes_B 1_X)(x_1 \otimes_B x_2 \otimes_B x_3 \otimes_B x_4)\,.\end{aligned}$$

Comme, par définition de Δ, $F(\delta_2^1) = \alpha_{[2]}\Delta$, on a donc

$$\begin{aligned}&\mu'\Big(F(\delta_2^1) \otimes_B \big[\alpha'_{[2]}(I \otimes_B I)\Delta\big]\Big)\Delta \\ &\qquad = \psi(1_X \otimes_B \mu_s \otimes_B 1_X)\big(\Delta \otimes_B (I \otimes_B I)\Delta\big)\Delta \\ &\qquad = \psi(1_X \otimes_B \mu_s \otimes_B 1_X)(1_X \otimes_B 1_X \otimes_B I \otimes_B I)(1_X \otimes_B \Delta \otimes_B 1_X)(1_X \otimes_B \Delta)\Delta \\ &\qquad = \psi(1_X \otimes_B (b\varepsilon) \otimes_B I)(1_X \otimes_B \Delta)\Delta \\ &\qquad = \psi(1_X \otimes_B b \otimes_B I)\Delta = \psi(1_X \otimes_B b \otimes_B 1_X)(1_X \otimes_B I)\Delta\end{aligned}$$

(la deuxième égalité résultant d'une double application de la propriété de coassociativité, la troisième de la définition de l'antipode, et la quatrième de la propriété de coünité). D'autre part, on remarque que le diagramme

$$\begin{tikzcd} {}_bX_s \otimes_B {}_sX_b \arrow[r, "\mu_s"] \arrow[d, "1_X \otimes_B b \otimes_B 1_X"'] & {}_bX_b \arrow[d, "F(\delta_2^0)"] \\ {}_bX_s \otimes_B {}_bX_b \otimes_B {}_sX_b \arrow[r, "\psi"] & {}_{F(b_2)}F[2]_{F(b_2)} \end{tikzcd}$$

est commutatif. En effet, pour tous $x_1, x_2 \in X$,

$$\begin{aligned}\psi(1_X \otimes_B b \otimes_B 1_X)(x_1 \otimes_B x_2) &= \psi(x_1 \otimes_B 1 \otimes_B x_2) \\ &= F(\delta_2^0)(x_1) \cdot F(\delta_2^2)(1) \cdot F(\delta_2^0)(x_2) = F(\delta_2^0)(x_1 \cdot x_2)\ .\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}\mu'\Big(F(\delta_2^1) \otimes_B \big[\alpha'_{[2]}(I \otimes_B I)\Delta\big]\Big)\Delta &= F(\delta_2^0)\mu_s(1_X \otimes_B I)\Delta = F(\delta_2^0)b\varepsilon \\ &= F(\delta_2^0)F(\delta_1^0)\varepsilon = F(\delta_2^0\delta_1^0)\varepsilon = F(b_2)\varepsilon\end{aligned}$$

(la deuxième égalité résultant de la définition de l'antipode, la troisième de la définition de b, la quatrième de la fonctorialité de F, et la cinquième de la définition de b_2), ce qu'on voulait démontrer. Ceci achève la démonstration de la proposition.

4.3.3. Soit $F : \mathbf{\Delta} \to \mathcal{A}lg$ un groupoïde quantique d'antipode I. En gardant les notations de 3.1.4, on définit un morphisme de $(B\,;B)$-bimodules

$$I_{[\,n\,]} : {}_{F(b_n)}F[\,n\,]_{F(a_n)} \longrightarrow {}_{F(a_n)}F[\,n\,]_{F(b_n)}$$

en posant

$$I_{[\,n\,]} = \alpha'_{[\,n\,]}\Big(\bigotimes_B^n I\Big)\alpha^{-1}_{[\,n\,]}$$

$$ {}_{F(b_n)}F[\,n\,]_{F(a_n)} \xrightarrow{\alpha^{-1}_{[\,n\,]}} \bigotimes_B^n {}_bX_s \xrightarrow{\bigotimes_B^n I} \bigotimes_B^n {}_sX_b \xrightarrow{\alpha'_{[\,n\,]}} {}_{F(a_n)}F[\,n\,]_{F(b_n)} \quad .$$

En particulier, on a $I_0 = 1_B$ et $I_1 = I$.

Théorème 4.3.4. *Soit $F : \mathbf{\Delta} \to \mathcal{A}lg$ un groupoïde quantique d'antipode I. Alors, pour tout morphisme $\varphi : [\,m\,] \to [\,n\,]$ de $\mathbf{\Delta}$, le diagramme suivant est commutatif*

(4.3.4.1)
$$\begin{tikzcd} F[\,m\,] \arrow[r, "I_{[\,m\,]}"] \arrow[d, "F(\varphi)"'] & F[\,m\,] \arrow[d, "F(\overline{\varphi})"] \\ F[\,n\,] \arrow[r, "I_{[\,n\,]}"] & F[\,n\,] \end{tikzcd} \quad ,$$

où $\overline{\varphi}$ est défini par $\overline{\varphi}(i) = n - \varphi(m-i)$, $0 \le i \le m$, (cf. 1.2.8). *De façon plus précise, en gardant les notations de* 3.1.4,

$$[\,m\,] \longmapsto I_{[\,m\,]}$$

définit un morphisme de foncteurs partiellement monoïdaux de source $(F, \Phi, 1_B)$ et de but le composé du foncteur partiellement monoïdal strict E, de source la catégorie partiellement monoïdale des simplexes et de but sa transposée (cf. 1.2.8), *suivi du foncteur partiellement monoïdal $(F', \Phi', 1_B)$, de source cette dernière et de but la catégorie partiellement monoïdale des $(B\,;B)$-bimodules* (cf. 3.1.4).

Démonstration. Pour vérifier la commutativité du diagramme 4.3.4.1, on peut, en vertu du lemme 1.1.3, se ramener au cas où φ est un opérateur de face ou de dégénérescence et utiliser la proposition 4.3.2 et les formules de 3.1.4 pour conclure. Ces vérifications sont néanmoins superflues. En effet, en gardant les notations de 3.1.4, en vertu de la dernière assertion du théorème 1.2.6, il résulte de la proposition 4.3.2 qu'il existe un morphisme unique de foncteurs partiellement monoïdaux stricts $\beta : G \to G'E$ tel que $\beta_{[\,1\,]} = I$, et, en vertu de 1.2.2.3, on a

$$\beta_{[\,n\,]} = \bigotimes_B^n I \quad , \qquad n \in \mathbb{N} \quad .$$

On a donc

$$I_{[\,n\,]} = \alpha'_{[\,n\,]}\beta_{[\,n\,]}\alpha^{-1}_{[\,n\,]} \quad , \qquad n \in \mathbb{N} \quad ,$$

et $[\,n\,] \mapsto I_{[\,n\,]}$ est donc un morphisme de foncteurs partiellement monoïdaux, puisque α, β, et α^{-1} le sont, ce qui prouve la version précise du théorème et, en particulier, la commutativité du diagramme 4.3.4.1.

4.4. Exemples.

EXEMPLE 4.4.1. Soient B une algèbre commutative et $(X, s, b, \Delta, \varepsilon)$ un bigébroïde de Hopf de base B, d'antipode I (*cf.* 3.2.1 et 4.2.3). Alors la catégorie quantique associée à ce bigébroïde (*cf.* 3.2.2) est un groupoïde quantique, d'antipode I (c'est tautologique).

EXEMPLE 4.4.2. En gardant les notations de 3.3.1, si le monoïde M est un groupe, alors la catégorie (classique) $\mathcal{C}$ est un groupoïde (classique). En effet, pour tout morphisme (x', g, x) de $\mathcal{C}$, on vérifie aussitôt que $(x'g, g^{-1}, gx)$ est un inverse de (x', g, x). De même, pour l'analogue quantique, en gardant les notations de 3.3.2, si la bigèbre H est de Hopf, d'antipode I_H, et si l'on définit

$$I : A' \otimes H \otimes A \longrightarrow A' \otimes H \otimes A$$

par

$$a' \otimes h \otimes a \longmapsto (\delta'(a') \otimes 1) \cdot (1 \otimes I_H(h) \otimes 1) \cdot (1 \otimes \delta(a)) \quad ,$$
$$I = (1_{A'} \otimes \mu_H \otimes 1_A)(1_{A'} \otimes \mu_H \otimes 1_H \otimes 1_A)(\delta' \otimes I_H \otimes \delta) \quad ,$$

où $\mu_H : H \otimes H \to H$ désigne la multiplication de H, alors la catégorie quantique de la proposition 3.3.3 est un groupoïde quantique, d'antipode I.

En effet, par définition de cette catégorie quantique (*cf.* 3.3.2.1, 3.3.2.2 et 3.3.3.1), en gardant les notations de la définition 4.1.1, on a

$$B = A' \otimes A \ , \quad X = A' \otimes H \otimes A \ , \quad s = \delta' \otimes 1_A \ , \quad b = 1_{A'} \otimes \delta \ ,$$

$$\Delta = \alpha_{[2]}^{-1}(1_{A'} \otimes \Delta_H \otimes 1_A) \ , \quad \varepsilon = (1_{A'} \otimes \varepsilon_H \otimes 1_A) \ ,$$

où, pour tous $a_1, a_2 \in A$, $h_1, h_2 \in H$, $a'_1, a'_2 \in A'$,

$$\begin{aligned}\alpha_{[2]}\big((a'_1 \otimes h_1 \otimes a_1) \otimes_B (a'_2 \otimes h_2 \otimes a_2)\big) &= \big(a'_1 \otimes h_1 \otimes \delta(a_1)\big) \cdot \big(\delta'(a'_2) \otimes h_2 \otimes a_2\big) \\ &= (a'_1 \otimes h_1) \cdot \delta'(a'_2) \otimes \delta(a_1) \cdot (h_2 \otimes a_2) \quad .\end{aligned}$$

Il suffit donc de montrer que

$$\mu_b(I \otimes_B 1_X)\alpha_{[2]}^{-1}(1_{A'} \otimes \Delta_H \otimes 1_A) = (\delta' \otimes 1_A)(1_{A'} \otimes \varepsilon_H \otimes 1_A)$$

et

$$\mu_s(1_X \otimes_B I)\alpha_{[2]}^{-1}(1_{A'} \otimes \Delta_H \otimes 1_A) = (1_{A'} \otimes \delta)(1_{A'} \otimes \varepsilon_H \otimes 1_A) \quad ,$$

où

$$\mu_b : {}_sX_b \otimes_B {}_bX_s \longrightarrow {}_sX_s \qquad \text{et} \qquad \mu_s : {}_bX_s \otimes_B {}_sX_b \longrightarrow {}_bX_b$$

sont les morphismes de $(B\,;B)$-bimodules définis par la multiplication de X. Montrons, par exemple, la première de ces égalités. On remarque d'abord que, pour tous $h_1, h_2 \in H$, $a \in A$, $a' \in A'$, on a

$$\alpha_{[2]}\big((a' \otimes h_1 \otimes 1) \otimes_B (1 \otimes h_2 \otimes a)\big) = (a' \otimes h_1) \cdot \delta'(1) \otimes \delta(1) \cdot (h_2 \otimes a) = a' \otimes h_1 \otimes h_2 \otimes a \ .$$

On en déduit que

$$\alpha_{[2]}^{-1}(a' \otimes h_1 \otimes h_2 \otimes a) = (a' \otimes h_1 \otimes 1) \otimes_B (1 \otimes h_2 \otimes a) \quad .$$

Soient donc $a \in A$, $h \in H$, $a' \in A'$, et posons

$$\Delta_H(h) = \sum_{i=1}^{m} h_i' \otimes h_i'' \quad .$$

On a

$$\begin{aligned}
&\mu_b(I \otimes_B 1_X)\alpha_{[2]}^{-1}(1_{A'} \otimes \Delta_H \otimes 1_A)(a' \otimes h \otimes a) \\
&\qquad = \sum_{i=1}^{m} \mu_b(I \otimes_B 1_X)\alpha_{[2]}^{-1}(a' \otimes h_i' \otimes h_i'' \otimes a) \\
&\qquad = \sum_{i=1}^{m} \mu_b(I \otimes_B 1_X)\big((a' \otimes h_i' \otimes 1) \otimes_B (1 \otimes h_i'' \otimes a)\big) \\
&\qquad = \sum_{i=1}^{m} \mu_b\Big(\big((\delta'(a') \otimes 1) \cdot (1 \otimes I_H(h_i') \otimes 1)\big) \otimes_B \big(1 \otimes h_i'' \otimes a\big)\Big) \\
&\qquad = \big(\delta'(a') \otimes a\big) \cdot \big(1 \otimes \sum_{i=1}^{m} I_H(h_i')h_i'' \otimes 1\big) \\
&\qquad = \big(\delta'(a') \otimes a\big)\varepsilon_H(h) = (\delta' \otimes 1_A)(1_{A'} \otimes \varepsilon_H \otimes 1_A)(a' \otimes h \otimes a)
\end{aligned}$$

(la cinquième égalité résultant de la définition de l'antipode d'une bigèbre de Hopf), ce qui prouve la première égalité. La deuxième se démontre de façon duale.

Cet exemple est une généralisation de l'exemple de Vainerman [V], qui traitait le cas particulier où l'agèbre A' était l'anneau de base K, et δ' la coaction triviale, définie par la coünité ε_H de H.

Proposition 4.4.3. *En gardant les notations de* 4.4.2, *si I_H est inversible, il en est de même pour I.*

Démonstration. Définissons

$$I' : A' \otimes H \otimes A \longrightarrow A' \otimes H \otimes A$$

par

$$I' = (1_{A'} \otimes \mu_H' \otimes 1_A)(1_{A'} \otimes \mu_H' \otimes 1_H \otimes 1_A)(\delta' \otimes I_H^{-1} \otimes \delta) \quad ,$$

où $\mu_H' : H \otimes H \to H$ désigne la multiplication de l'algèbre opposée à H, autrement dit, $\mu_H' = \mu_H\sigma$, où $\sigma : H \otimes H \to H \otimes H$ est définie par $\sigma(h \otimes h') = h' \otimes h$, pour $h, h' \in H$. On rappelle que l'antipode d'une bigèbre de Hopf est un anti-homomorphisme d'algèbres :

$$I_H\mu_H' = \mu_H(I_H \otimes I_H) \quad .$$

On a donc, en notant $\eta_H : K \to H$ l'application linéaire définie par l'unité de H,

$$\begin{aligned}
II' &= (1_{A'} \otimes \mu_H \otimes 1_A)(1_{A'} \otimes \mu_H \otimes 1_H \otimes 1_A)(\delta' \otimes I_H \otimes \delta)(1_{A'} \otimes \mu'_H \otimes 1_A) \\
&\qquad\qquad (1_{A'} \otimes \mu'_H \otimes 1_H \otimes 1_A)(\delta' \otimes I_H^{-1} \otimes \delta) \\
&= (1_{A'} \otimes \mu_H \otimes 1_A)(1_{A'} \otimes \mu_H \otimes 1_H \otimes 1_A)(\delta' \otimes \mu_H \otimes \delta)(1_{A'} \otimes I_H \otimes I_H \otimes 1_A) \\
&\qquad\qquad (1_{A'} \otimes \mu'_H \otimes 1_H \otimes 1_A)(\delta' \otimes I_H^{-1} \otimes \delta) \\
&= (1_{A'} \otimes \mu_H \otimes 1_A)(1_{A'} \otimes \mu_H \otimes 1_H \otimes 1_A)(\delta' \otimes \mu_H \otimes \delta)(1_{A'} \otimes \mu_H \otimes 1_H \otimes 1_A) \\
&\qquad\qquad (1_{A'} \otimes I_H \otimes I_H \otimes I_H \otimes 1_A)(\delta' \otimes I_H^{-1} \otimes \delta) \\
&= (1_{A'} \otimes \mu_H \otimes 1_A)(1_{A'} \otimes \mu_H \otimes 1_H \otimes 1_A)(1_{A'} \otimes 1_H \otimes \mu_H \otimes 1_H \otimes 1_A) \\
&\qquad (1_{A'} \otimes 1_H \otimes \mu_H \otimes 1_H \otimes 1_H \otimes 1_A)(1_{A'} \otimes 1_H \otimes I_H \otimes 1_H \otimes I_H \otimes 1_H \otimes 1_A) \\
&\qquad\qquad (\delta' \otimes 1_H \otimes 1_H \otimes 1_H \otimes \delta)(\delta' \otimes 1_H \otimes \delta) \\
&= (1_{A'} \otimes \mu_H \otimes 1_A)(1_{A'} \otimes \mu_H \otimes 1_H \otimes 1_A)(1_{A'} \otimes \mu_H \otimes 1_H \otimes \mu_H \otimes 1_A) \\
&\qquad (1_{A'} \otimes 1_H \otimes I_H \otimes 1_H \otimes I_H \otimes 1_H \otimes 1_A)(1_{A'} \otimes \Delta_H \otimes 1_H \otimes \Delta_H \otimes 1_A)(\delta' \otimes 1_H \otimes \delta) \\
&= (1_{A'} \otimes \mu_H \otimes 1_A)(1_{A'} \otimes \mu_H \otimes 1_H \otimes 1_A)(1_{A'} \otimes (\eta_H \varepsilon_H) \otimes 1_H \otimes (\eta_H \varepsilon_H) \otimes 1_A) \\
&\qquad\qquad\qquad (\delta' \otimes 1_H \otimes \delta) \\
&= 1_{A'} \otimes 1_H \otimes 1_A
\end{aligned}$$

(la cinquième égalité résultant des propriétés d'associativité et coassociativité, la sixième de la définition de l'antipode d'une bigèbre de Hopf, et la septième des propriétés d'unité et coünité). Pour établir l'égalité $II' = 1_{A'} \otimes 1_H \otimes 1_A$ ci dessus, on a utilisé que $(H, \mu_H, \eta_H, \Delta_H, \varepsilon_H, I_H)$ est une bigèbre de Hopf, et que (A, δ) (resp. (A', δ')) est un comodule à gauche (resp. à droite) sur la cogèbre $(H, \Delta_H, \varepsilon_H)$. En remarquant que I et I' se correspondent si l'on échange $\mu_H \leftrightarrow \mu'_H$ et $I_H \leftrightarrow I_H^{-1}$, et en se souvenant que $(H, \mu'_H, \eta_H, \Delta_H, \varepsilon_H, I_H^{-1})$ est une bigèbre de Hopf, l'égalité $I'I = 1_{A'} \otimes 1_H \otimes 1_A$ résulte de ce qui précède, appliqué à cette nouvelle situation, ce qui prouve que I est bien bijectif.

Exemple 4.4.4. Soient B une algèbre et $(X, u, T, \Delta, \varepsilon)$ une famille de monoïdes quantiques tressés de base B (cf. 3.4.2). On remarque qu'alors $(X, u, u, \Delta, \varepsilon)$ est un pseudo-bigébroïde de base B (cf. 4.2.2). On dit que $(X, u, T, \Delta, \varepsilon)$ est une *famille de groupes quantiques tressés de base* B, si le pseudo-bigébroïde $(X, u, u, \Delta, \varepsilon)$ admet un antipode I (cf. 4.2.3). Alors, on vérifie immédiatement que la catégorie quantique associée à la famille de monoïdes quantiques tressés $(X, u, T, \Delta, \varepsilon)$ (cf. 3.4.3) est un groupoïde quantique d'antipode I.

Bibliographie.

[Br1] A. Bruguières, *Théorie tannakienne non commutative*, Comm. in Alg. 22, 14 (1994), pp. 5817-5860.

[Br2] A. Bruguières, *Dualité tannakienne pour les quasi-groupoïdes quantiques*, Comm. in Alg. 25, 3 (1997), pp. 737-767.

[B-M] A. Bruguières, G. Maltsiniotis, *Quasi-groupoïdes quantiques*, C.R.A.S. 319 (1994), pp. 933-936.

[CSV] A. Čap, H. Schichl, J. Vanžura, *On twisted tensor products of algebras*, Comm. in Alg. 23, 12 (1995), pp. 4701-4735.

[Ca] P. Cartier, *Produits tensoriels tordus*, Exposé au Séminaire des groupes quantiques de l'É.N.S. 1991-92.

[De] P. Deligne, *Catégories tannakiennes*, "The Grothendieck Festschrift", Volume II, pp. 111-195, Progress in Mathematics 87, Birkhäuser (1990).

[G-Z] P. Gabriel, M. Zisman, "Calculus of fractions and homotopy theory", Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 35, Springer-Verlag (1967).

[Lu] J.-H. Lu, *Hopf algebroids and quantum groupoids*, Internat. J. Math. 7 (1996), no 1, pp. 47-70.

[Maj] S. Majid, *Braided groups*, J. of Pure and Appl. Alg. 86 (1993), pp. 187-221.

[Mal] G. Maltsiniotis, *Groupoïdes quantiques*, C.R.A.S. 314 (1992), pp. 249-252.

[Man] Yu. I. Manin, *Notes on quantum groups and quantum de Rham complexes*, Theoret. and Math. Phys. 92, 3 (1993), pp. 997-1023.

[V] L. Vainerman, *A note on quantum groupoids*, C.R.A.S. 315 (1992), pp. 1125-1130.

[Xu] P. Xu, *Quantum groupoids and deformation quantization*, C.R.A.S. 326 (1998), pp. 289-294.