Introduction aux travaux de Lurie sur la classification des théories topologiques des champs

- Introduction de l'introduction
- La définition d'Atiyah
- Théories topologiques de champs une fois étendues
- Théories topologiques de champs étendues
- La version (∞, n)-catégorique

Introduction aux travaux de Lurie sur la classification des théories topologiques des champs

Le but de ce groupe de travail est de donner un sens et esquisser une preuve de l'assertion suivante, connue sous le nom d'"hypothèse de cobordisme"[1].

" La n-catégorie monoïdale symétrique des cobordismes cadrés (framed) de dimension n est la n-catégorie monoïdale symétrique librement engendrée par un objet complètement dualisable."

Une théorie topologique de champs étendue de dimension n étant un n-foncteur monoïdal symétrique de cette n-catégorie vers une n-catégorie monoïdale symétrique donnée $\mathcal{C}$ cette assertion signifie en particulier que les classes d'équivalence de théories topologiques de champs étendues de dimension n sont en bijection avec les classes d'équivalence d'objets complètement dualisables de $\mathcal{C}$

$$\left\{\begin{array}{l}\text{classes d'équivalence de théories}\\ \text{topologiques de champs étendues}\\ \text{de dimension } n \text{ à valeurs dans } \mathcal{C}\end{array}\right\} \longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{classe d'équivalence}\\ \text{d'objets complètement}\\ \text{dualisables de } \mathcal{C}\end{array}\right\}$$

---

(1) Formulée en premier par Baez et Dolan

Tous les termes de cette assertion seront définis en termes d'espaces topologiques, variétés différentiables, et ensembles simpliciaux, et non <u>pas</u> en termes de théorie classique de catégories. En effet, dans ce groupe de travail ce qui est connu comme "hypothèse d'homotopie" sera pris comme définition : Un n-groupoïde sera un type d'homotopie n-tronqué, ou si l'on préfère un complexe de Kan dont les groupes d'homotopie π_k sont triviaux en tout point pour $k > n$.

L'exposé d'aujourd'hui sera une introduction au sujet. Il y aura par la suite trois exposés consacrés au cas $n = 2$, qu'on peut entièrement traiter de façon élémentaire en utilisant la théorie de Morse et la théorie de Cerf. Le premier, par Joachim Kock, sur les théories de champs ordinaires classifiées par les algèbres de Frobenius, et les deux autres, par Alain Bruguières, sur le cas "étendu" d'après la thèse de Christopher John Schommer-Pries. A la séance suivante Frédéric Paugam va exposer le point de vue original sur l'hypothèse du cobordisme par Baez et Dolan. Ensuite, il y aura trois exposés de Geoffrey Powell sur le type d'homotopie de la catégorie des cobordismes, d'après Søren Galatius, Ib Madsen, Ulrike Tillmann et Michael Weiss qui constitue une première approximation du résultat de Lurie. Bien que techniquement on n'ait pas besoin des résultats de cet article pour la preuve de Lurie, il en constitue une excellente introduction. D'autant plus que c'est un texte extrêmement précis, écrit avec un grand soin, en contraste avec le papier de Lurie, assez pédagogique mais peu précis.(*) Les trois derniers exposés avant les vacances du printemps, par Dimitri Ara, seront consacrés au modèle simplicial qu'on utilisera pour les n-catégories, les espaces de Segal complets supérieurs, dans une variante due à Rezk. Ce n'est qu'après les vacances du printemps qu'on commencera à étudier en détail la preuve de Lurie

---

(*) Après le premier exposé de Geoffrey Powell, il y aura un exposé par Christian Blanchet, au groupe de travail homotopique, sur le cas $n = 3$ "partiellement étendu".

La définition d'Atiyah

Une théorie topologique de champs quantiques en dimension n est un foncteur monoïdal symétrique

$$\mathrm{Cob}(n) \xrightarrow{Z} \mathrm{Vect}(k)$$

$\mathrm{Vect}(k)$: catégorie des espaces vectoriels munie du produit tensoriel ordinaire

$\mathrm{Cob}(n)$; Objet variétés compactes orientées sans bord de dimension (pure) $n-1$

Flèches $M \to N$ couples $(X, \overline{M} \amalg N \xrightarrow[\sim]{\varphi} \partial X)$
X variété compacte orientée de bord ∂X, de dimension (pure) n à difféomorphisme compatible à φ près
($\overline{M}$ la variété M avec l'orientation opposée) ((X,φ) cobordisme de M vers N)

Composition composition de cobordismes (dans le cas différentiable cela nécessite un choix de colliers, mais le composé en est indépendant à difféomorphisme près)

Produit tensoriel somme disjointe

$$M \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{Cob}(n) \xmapsto{\ Z\ } Z(M) \text{ espace vectoriel}$$

$$M \to N \in \mathrm{Fl}\,\mathrm{Cob}(n) \longmapsto Z(M) \to Z(N) \text{ application linéaire}$$

On rappelle qu'une catégorie monoïdale symétrique est une catégorie $\mathcal{C}$ munie d'un bifoncteur $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$, un objet $I \in Ob\,\mathcal{C}$ et d'isomorphismes fonctoriels

$$X \otimes I \simeq X \simeq I \otimes X \qquad \text{unité}$$
$$X \otimes Y \simeq Y \otimes X \qquad \text{symétrie}$$
$$(X \otimes Y) \otimes Z \simeq X \otimes (Y \otimes Z) \qquad \text{associativité}$$

satisfaisant à des cohérences que je ne rappellerai pas (y compris celle affirmant que le carré de la symétrie est l'identité).

Un foncteur monoïdal symétrique
$$(\mathcal{C}, \otimes, I) \longrightarrow (\mathcal{C}', \otimes', I')$$
est défini par la donnée d'un foncteur
$$Z : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$$
et d'isomorphismes fonctoriels
$$ZX \otimes' ZY \longrightarrow Z(X \otimes Y)$$
$$I' \longrightarrow Z(I)$$
compatibles aux isomorphismes fonctoriels structuraux

Ainsi une théorie topologique de champs en dimension n
$$Z : (Cob(n), \amalg, \phi) \longrightarrow (Vect(k), \otimes, k)$$
associe en particulier à toute variété compacte <u>sans</u> <u>bord</u> X, vue comme morphisme de $Cob(n)$
$$\phi \xrightarrow{(X,\ \phi \amalg \phi = \phi \xrightarrow{\sim} \phi = \partial X)} \phi$$

une application linéaire

$$k \xrightarrow{\sim} Z(\phi) \xrightarrow{Z(X,1_\phi)} Z(\phi) \xrightarrow{\sim} k$$

autrement dit un scalaire.

Revenons au cas d'une catégorie monoïdale symétrique générale $(\mathcal{C}, \otimes, I)$ (qu'on supposera pour simplifier stricte (isomorphismes d'unité et d'associativité des identités), ce qui n'est pas restrictif, en vertu du théorème de cohérence de Mac-Lane). On rappelle qu'un objet X de $\mathcal{C}$ <u>admet</u> <u>un</u> <u>dual</u> s'il existe un objet Y de $\mathcal{C}$ et des morphismes

$$X \otimes Y \xrightarrow{\varepsilon} I \quad , \quad I \xrightarrow{\eta} Y \otimes X$$

satisfaisant aux relations triangulaires

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "1_X \otimes \eta"] \arrow[rr, bend right, "1_X"'] & X \otimes Y \otimes X \arrow[r, "\varepsilon \otimes 1_X"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & X \\
 & {} &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "\eta \otimes 1_Y"] \arrow[rr, bend right, "1_Y"'] & Y \otimes X \otimes Y \arrow[r, "1_Y \otimes \varepsilon"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & Y \\
 & {} &
\end{tikzcd}$$

<u>Exercice</u> Un espace vectoriel admet un dual, comme objet de la catégorie monoïdale symétrique des espaces vectoriels, si et seulement si il est de dimension finie. (Plus généralement, un module sur un anneau commutatif admet un dual, au sens de la catégorie monoïdale symétrique correspondante, si il est projectif de type fini)

Ainsi, admettre un dual peut être considéré comme une condition de finitude

<u>Exercice</u> Un foncteur monoïdal transforme les objets admettant un dual en des objets admettant un dual

<u>Exemple</u> Tout objet de $Cob(n)$ admet un dual. En effet, soit M une variété compacte orientée sans bord de dimension $n-1$, et $I = [0,1]$ orienté de 0 vers 1. On a

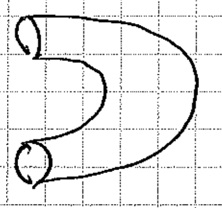
$$\partial(I \times M) = \underset{\{0\}\times M}{\underset{\wr}{\overline{M}}} \amalg \underset{\{1\}\times M}{\underset{\wr}{M}}$$

Le couple $(M, \overline{M} \amalg M \xrightarrow{\sim} \partial M)$ peut être considéré comme un cobordisme de M vers M, c'est l'identité de M dans $Cob(n)$ . Mais il peut être considéré aussi comme un cobordisme $\phi \longrightarrow \overline{M} \amalg M$

$$\left(M, \underset{\underset{\overline{\phi} \amalg (\overline{M} \amalg M)}{\wr}}{\overline{M} \amalg M} \xrightarrow{\sim} \partial M\right)$$

et également comme un cobordisme $\varepsilon : M \amalg \overline{M} \to \emptyset$

$$\left(M,\ \overline{M} \amalg M \xrightarrow{=} \partial M\right)$$
$$\begin{array}{c} \wr\wr \\ \overline{(M \amalg \overline{M})} \amalg \emptyset \end{array}$$



et il est facile de vérifier les identités triangulaires.

En particulier, en vertu de ce qui précède, cela implique que si Z est une théorie topologique de champs en dimension n, pour tout objet M de $Cob(n)$, $Z(M)$ est un espace vectoriel de dimension finie.

<u>Exercice</u> $Cob(1)$ est la catégorie monoïdale symétrique avec duaux librement engendrée par un objet. Formellement cela signifie que la catégorie des foncteurs monoïdaux symétriques de $Cob(1)$ vers une catégorie monoïdale symétrique $\mathcal{C}$ est équivalente à la sous-catégorie ~~pleine~~ de $\mathcal{C}$ formée des objets de $\mathcal{C}$ admettant un dual et des isomorphismes entre iceux, cette équivalence étant définie par

$$Z \longmapsto Z(\text{point})$$

En particulier, se donner une théorie topologique de champs en dimension 1 revient à se donner simplement un espace vectoriel de dimension finie.
L'hypothèse du cobordisme est une vaste généralisation de ce résultat

La semaine prochaine Joachim Kock va nous expliquer un autre résultat classique et assez élémentaire, la classification des théories topologiques de champs en dimension 2 par les algèbres de Frobenius commutatives

On a vu qu'une théorie topologique de champs en dimension n définit en particulier des invariants scalaires pour les variétés compactes orientées sans bord de dimension n. Elle permet aussi de calculer ces invariants en décomposant une variété fermée en un composé de cobordismes dont les variétés à bord sous-jacentes sont plus simples. Par exemple toute surface fermée peut être décomposé en des cobordismes dont les variétés sous-jacentes sont de disques, des cylindres, ou des pantalons. Ce procédé trouve vite ses limites quand la dimension n augmente puisque alors les "morceaux" ne sont pas beaucoup plus simples que la variété de départ et les variétés de dimension $n-1$ le long desquelles on découpe ne sont pas simples. Pour les simplifier, elle doivent elles-mêmes d'être découpées. On est ainsi conduits aux théories topologiques de champs étendues.

Pour cela, on définit, pour $n \geq 2$, une 2-catégorie (ou plus précisément une bicatégorie) monoïdale symétrique $\mathrm{Cob}_2(n)$ comme suit (dans cette nouvelle notation $\mathrm{Cob}(n) = \mathrm{Cob}_1(n)$)

<u>Objets</u> : variétés compactes orientées sans bord de dimension $n-2$

<u>1-Flèches</u> : $M \longrightarrow N$ couples $(X, \overline{M} \amalg N \xrightarrow[\sim]{\varphi} \partial X)$

X variété compacte orientée à bord de dimension $n-1$

φ difféomorphisme

<u>2-Flèches</u> :

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, bend left=50, "{(X,\ \overline{M}\amalg N \xrightarrow[\sim]{\varphi} \partial X)}"] \arrow[r, bend right=50, "{(Y,\ \overline{M}\amalg N \xrightarrow[\sim]{\psi} \partial Y)}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow (Z,\Theta)"] & N \end{tikzcd}$$

Z variété compacte à bord et coins orientée de dimension n

$$\Theta : \overline{X} \amalg_{M \amalg \overline{N}} [0,1] \times (\overline{M} \amalg N) \amalg_{\overline{M} \amalg N} Y \xrightarrow{\sim} \partial Z$$

à difféomorphisme compatible aux Θ près

<u>Compositions</u> : Il y a plusieurs difficultés : pour la composition des 1-flèches, il faut choisir des colliers. Comme les 1-flèches ne sont pas à isomorphisme près, pour être rigoureux, il faut mettre ces colliers dans la définition des 1-flèches. La composition des 1-flèches n'est pas strictement associative. On est donc en présence d'une bicatégorie et non pas d'une 2-catégorie stricte

Produit tensoriel : somme disjointe

Une théorie topologique de champs une fois étendue, en dimension n, est un 2-foncteur monoïdal symétrique

$$\mathrm{Cob}_2(n) \longrightarrow \mathrm{Vect}_2(k)$$

où $\mathrm{Vect}_2(k)$ est la 2-catégorie des catégories k-linéaires cocomplètes et foncteurs k-linéaires cocontinus, 2-catégorie stricte qu'on peut munir d'un produit tensoriel symétrique

Une théorie topologique de champs une fois étendue induit en particulier une théorie topologique de champs classique. En effet, si $\mathcal{C}$ est une bicatégorie monoïdale symétrique d'objet unité I, on définit une catégorie monoïdale symétrique $\Omega\mathcal{C}$ en posant $\Omega\mathcal{C} := \underline{\mathrm{End}}(I)$ catégorie des endomorphismes de I, et on observe qu'un 2-foncteur monoïdal symétrique $Z : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ induit un foncteur monoïdal symétrique $\Omega Z : \Omega\mathcal{C} \to \Omega\mathcal{C}'$. Or, on vérifie facilement que $\Omega\,\mathrm{Cob}_2(n) = \mathrm{Cob}(n)$ et $\Omega\,\mathrm{Vect}_2(k) = \mathrm{Vect}(k)$, et par suite à une théorie topologique de champs une fois étendue $Z : \mathrm{Cob}_2(n) \to \mathrm{Vect}_2(k)$ on associe une théorie topologique de champs ordinaire $\Omega Z : \mathrm{Cob}(n) \longrightarrow \mathrm{Vect}(k)$, mais cette dernière contient moins d'information que la théorie étendue.

Christian Blanchet va nous montrer que les théories topologiques de champs à la Reshetikhin-Turaev se prolongent à des théories topologiques une fois étendues.

Dans sa thèse, Christopher John Schommer-Pries classifie complètement les théories topologiques de champs une fois étendues en dimension 2 par les algèbres de Frobenius symétriques séparables. Il décrit entièrement $Cob_2(2)$ par générateurs et relations en tant que bicatégorie monoïdale symétrique. Alain Bruguières va nous exposer ces résultats. Pour montrer l'hypothèse du cobordisme pour $n=2$ il ne manque que d'interpreter les générateurs et relations de Schommer-Pries en termes d'objets complètement dualisables

Le fait d'avoir choisi $Vect_2(k)$ comme but des théories topologies de champs une fois étendues n'est pas essentiel. On aurait pu choisir une bicatégorie monoïdal symétrique arbitraire, comme par exemple celle des k-algèbres, bimodules et morphismes de bimodules, la structure monoï-dale étant définie par le produit tensoriel des algèbres sur k. Ainsi on ne va pas essayer de généraliser $Vect_2(k)$ (bien que c'est possible), mais on va s'intéresser uniquement à la généra-lisation de $Cob_2(n)$, pour pouvoir si $n>2$

décomposer encore plus nos variétés en des morceaux plus simples, arrivant le cas échéant jusqu'à une triangulation

Soient m, n deux entiers tels que $0 \leq m \leq n$

$Cob_m(n)$ désigne la m-catégorie (non stricte) dont

<u>Objets</u> variétés compactes orientées de dimension $n-m$ sans bord

1 - <u>flèches</u> cobordismes entre telles variétés

2 - <u>flèches</u> cobordismes entre cobordismes entre telles variétés

etc jusqu'à $m-1$

m - <u>flèches</u> classes de difféomorphismes des cobordismes entre cobordismes entres cobordismes etc

Les différentes façon d'amalgamer les cobordismes fournissent les compositions

La somme disjointe fournit la structure monoïdale

Le cas qui va nous intéresser plus particulièrement est le cas $m = n$, où les objets sont les sommes disjointes de points orientés positivement ou négativement et les k-flèches sont des cobordismes de dimension k entre cobordismes de dimension $k-1$, pour $0 < k < n$, des classes de difféomorphisme de tels cobordismes pour $k = n$.

Si $\mathcal{C}$ est une n-catégorie monoïdale symétrique, une théorie topologique de champs étendue en dimension n à valeurs dans $\mathcal{C}$ est un n-foncteur monoïdal symétrique de $Cob_n(n)$ vers $\mathcal{C}$.

Pour la variante la plus simple de l'hypothèse du cobordisme, on doit considérer des cobordismes cadrés (framed). Soient m, n des entiers $0 \leq m \leq n$, et M une variété de dimension m. Un n-cadrage (frame) de M est une trivialisation du fibré $T_M \oplus \mathbb{R}^{n-m}$ sur M, où T_M désigne le fibré tangent de M. La n-catégorie $Cob_n^{fr}(n)$ se définit comme $Cob_n(n)$ sauf qu'on demande que toutes les variétés sont munies d'un n-cadrage. Si $\mathcal{C}$ est une n-catégorie monoïdale symétrique, une théorie topologique de champs étendue, cadré, en dimension n à valeurs dans $\mathcal{C}$ est un n-foncteur monoïdal symétrique de $Cob_n^{fr}(n)$ vers $\mathcal{C}$

La version la plus simple de l'hypothèse du cobordisme affirme que $Cob_n^{fr}(n)$ est la n-catégorie monoïdale symétrique librement engendrée par un objet complètement dualisable à savoir le point. Cela signifie exactement que pour toute catégorie monoïdale symétrique $\mathcal{C}$

$$Z \longmapsto Z(\text{point})$$

définit une équivalence de n-catégories entre la n-catégorie des n-foncteurs monoïdaux symétriques de $Cob_n^{fr}(n)$ vers $\mathcal{C}$ et la sous-n-~~catégorie~~

groupoïde
faible

des objets complètement dualisables de $\mathcal{C}$.
En particulier, il induit une bijection entre classes d'équivalence de théories topologiques de champs étendues, cadrées de dimension n à valeurs dans $\mathcal{C}$ et classes d'équivalence d'objets complètement dualisables de $\mathcal{C}$.

Il reste à expliquer la notion d'objet complètement dualisable, qui sera illustrée pour le cas $n=2$ dans l'exposé d'Alain Bruguières.

Soit $\mathcal{C}$ une n-catégorie. On définit la notion de k-flèche, $0 < k \leq n$, faiblement inversible par récurrence descendante. Soit f une k-flèche $f : x \to y$. Si $k = n$, elle est faiblement inversible si elle est inversible. Supposons que $k < n$ et qu'on ait défini la notion pour les $(k+1)$-flèches. On dit que f est faiblement inversible s'il existe ~~une~~ k-flèches $f' : y \to x$ et des $(k+1)$-flèches faiblement inversibles

$$f'f \xrightarrow{\varepsilon} 1_x \qquad 1_y \xrightarrow{\eta} ff' .$$

~~ff'~~

Si $0 < k < n$, on dit qu'une k-flèche $f : x \to y$ admet des adjoints s'il existe des k-flèches $f', f'' : y \rightrightarrows x$ et des $(k+1)$-flèches

$$f'f \xrightarrow{\varepsilon} 1_x \qquad 1_y \xrightarrow{\eta} ff'$$

$$ff'' \xrightarrow{e} 1_y \qquad 1_x \xrightarrow{h} f''f$$

et des $(k+2)$-flèches faiblement inversibles

$$\begin{tikzcd} f \arrow[r, "\eta f"] \arrow[rr, bend right=40, "1_f"'] & ff'f \arrow[d, phantom, "\Downarrow"] \arrow[r, "f\varepsilon"] & f \\ & & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} f' \arrow[r, "f'\eta"] \arrow[rr, bend right=40, "1_{f'}"'] & f'ff' \arrow[d, phantom, "\Downarrow"] \arrow[r, "\varepsilon f'"] & f' \\ & & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} f \arrow[r, "fh"] \arrow[rr, bend right=40, "1_f"'] & ff''f \arrow[d, phantom, "\Downarrow"] \arrow[r, "ef"] & f \\ & & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} f'' \arrow[r, "hf''"] \arrow[rr, bend right=40, "1_{f''}"'] & f''ff'' \arrow[d, phantom, "\Downarrow"] \arrow[r, "f''e"] & f'' \\ & & \end{tikzcd}$$

(pour $k = n-1$ cela signifie simplement que ces quatre "triangles" commute.

On note $h\mathcal{C}$ la catégorie ayant mêmes objets que $\mathcal{C}$ et comme flèches les 1-flèches de $\mathcal{C}$ à 2-flèche faiblement inversible près ($f \sim f' \iff \exists \alpha : f \to f'$ faiblement inversible). Si $\mathcal{C}$ est une n-catégorie monoïdale symétrique $h\mathcal{C}$ est une catégorie monoïdale symétrique et on dit qu'un objet de $\mathcal{C}$ admet un dual si cet objet admet un dual dans $h\mathcal{C}$

$\mathcal{C}$ n-catégorie monoïdale symétrique

$\mathcal{C}_1$ obtenue de $\mathcal{C}$ en supprimant les $(n-1)$-flèches qui n'ont pas d'adjoints

$\mathcal{C}_2$ obtenue de $\mathcal{C}_1$ en supprimant les $(n-2)$-flèches qui n'ont pas d'adjoints dans $\mathcal{C}_1$

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

$\mathcal{C}_{n-1}$ obtenue de $\mathcal{C}_{n-2}$ en supprimant les 1-flèches qui n'ont pas d'adjoints dans $\mathcal{C}_{n-2}$

$\mathcal{C}_n$ obtenue de $\mathcal{C}_{n-1}$ en supprimant les objets qui n'ont pas de duaux dans $\mathcal{C}_{n-1}$

On pose $\mathcal{C}^{cd} = \mathcal{C}_n$

On dit qu'un objet de $\mathcal{C}$ est complètement dualisable s'il appartient à $\mathcal{C}^{cd}$

Pour la preuve du théorème de Lurie l'idée clef est d'élargir encore la n-catégorie $\mathrm{Cob}_n(n)$ mais cette fois-ci "vers le haut". En effet, on a défini les n-flèches de $\mathrm{Cob}_n(n)$, contrairement aux autres dimensions, comme étant les cobordismes de dimension n, <u>à</u> <u>difféomorphisme</u> <u>près</u>, ce qui s'avère être un gros handicap. L'idée de Lurie est de ne pas négliger les difféomorphismes. Ainsi il remplace la n-catégorie $\mathrm{Cob}_n(n)$ par une (∞, n)-catégorie Bord_n (infini catégorie dont les k-flèches sont faiblement inversibles pour $k > n$)

Les k-flèches de Bord_n sont les mêmes que celles de $\mathrm{Cob}_n(n)$ pour $0 \leq k < n$ et les n-flèches sont le n-cobordismes (tout court, pas à difféo près).

$(n+1)$-flèches : difféomorphismes entre n-cobordismes

$(n+2)$-flèches : isotopies entre difféomorphismes de n-cobordismes

$(n+3)$-flèches : isotopies entres isotopies

... etc.

Comme pour $\mathrm{Cob}_n(n)$, on a une version cadrée Bord_n^{fr} de Bord_n, et on a la version (∞, n)-catégorique de l'hypothèse de cobordisme, théorème de Lurie :

"Soit $\mathcal{C}$ une (∞, n) catégorie monoïdale symétrique. L'évaluation $Z \mapsto Z(\text{point})$ définit une bijection entre les classes d'équivalence de foncteur monoïdaux symétriques $\mathrm{Bord}_n^{fr} \to \mathcal{C}$ et les classes d'équivalence d'objets complètement dualisables de $\mathcal{C}$."

L'assertion concernant $\mathrm{Cob}_n^{fr}(n)$ est conséquence formelle de celle là.