Introduction

Nous proposons dans ce travail un formalisme de l'hyperhomologie.

1. Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux catégories abéliennes, $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un foncteur additif. Lorsque la catégorie $\mathcal{A}$ possède suffisamment d'objets injectifs, la construction des foncteurs dérivés droits de F est maintenant classique [**1**] : tout objet X de $\mathcal{A}$ possède une résolution injective $X \xrightarrow{\varepsilon} I^\bullet(X)$ unique à "*homotopie près*". Les objets de cohomologie du complexe $F(I^\bullet(X))$ sont donc définis à isomorphisme canonique près par l'objet X et dépendent fonctoriellement de X. Les foncteurs obtenus sont les foncteurs dérivés droits de F.

Ainsi, on associe fonctoriellement à tout objet X de $\mathcal{A}$ un complexe d'objets de $\mathcal{B}$ défini "à homotopie près" dont on prend la cohomologie. Cependant le plus souvent, les constructions usuelles de l'algèbre homologique ne fournissent pas des complexes définis à homotopie près, mais des complexes définis à *quasi-isomorphisme près* (un morphisme de complexes est appelé un quasi-isomorphisme s'il induit un isomorphisme sur les objets de cohomologie). Pour illustrer ce point, donnons deux exemples.

Notons tout d'abord que, pour étudier les foncteurs dérivés de F, il y a lieu de considérer des résolutions $X \xrightarrow{\varepsilon'} \mathcal{R}(X)$ plus générales que les résolutions injectives : les résolutions par des objets acycliques pour le foncteur F (en théorie des faisceaux, résolutions par des faisceaux flasques, mous [**23**] ; en théorie des modules, résolutions par des modules plats ...). Ces résolutions ne sont plus nécessairement uniques à homotopie près. Mais étant données une résolution F-acyclique $X \xrightarrow{\varepsilon'} \mathcal{R}(X)$ et une résolution injective $X \xrightarrow{\varepsilon} I^\bullet(X)$, il existe un et un seul (à homotopie près) morphisme de résolutions, *i.e.* un morphisme de complexes $\rho : \mathcal{R}(X) \to I^\bullet(X)$ tel que le diagramme ci-après soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{R}(X) \arrow[d, "\rho"] \\ X \arrow[ur, "\varepsilon'"] \arrow[dr, "\varepsilon"'] & \\ & I^\bullet(X) \end{tikzcd} .$$

De plus, étant donné un morphisme de résolutions F-acycliques :

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{R}_1(X) \arrow[d, "\rho'"] \\ X \arrow[ur, "\varepsilon_1"] \arrow[dr, "\varepsilon_2"'] & \\ & \mathcal{R}_2(X) \end{tikzcd} ,$$

le morphisme de complexes d'objets de $\mathcal{B}$:

$$F(\rho') : F(\mathcal{R}_1(X)) \longrightarrow F(\mathcal{R}_2(X))$$

est un quasi-isomorphisme. Remarquons qu'ici on obtient dans $\mathcal{B}$ un système inductif de complexes et de quasi-isomorphismes qui possède un élément maximal unique à homotopie près : le transformé par F d'une résolution injective de X. Ce phénomène ne se produit plus dans le deuxième exemple que nous abordons maintenant.

Le procédé de définition des foncteurs dérivés par résolution se généralise parfois au cas où la catégorie $\mathcal{A}$ ne possède plus nécessairement suffisamment d'objets injectifs ou projectifs. Considérons le cas où $\mathcal{A}$ est la catégorie des faisceaux de groupes commutatifs sur un espace topologique E. Cette catégorie ne possède pas, en général, suffisamment d'objets projectifs. On se propose néanmoins de définir les *foncteurs dérivés gauches* du foncteur exact à droite de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{A}$ qui, à tout faisceau G, associe le faisceau $F \otimes_{\mathbb{Z}} G$ (F faisceau fixe). On exige, bien entendu, que cette définition fournisse des foncteurs possédant les propriétés usuelles des foncteurs dérivés gauches (comportement par rapport aux suites exactes et une certaine propriété universelle) et qu'elle redonne dans les cas connus (par exemple lorsque E est réduit à un point) les produits de torsion usuels.

On peut opérer de la manière que voici. Tout faisceau G admet une résolution à gauche $L^\bullet \to G$ de longueur finie (en fait de longueur 2) par des faisceaux dont les fibres sont des groupes commutatifs sans torsion (résolution *plate*). On constate aisément les faits suivants :

a) Étant données deux résolutions plates $L_i^\bullet \xrightarrow{\varepsilon_i} G$, $i = 1, 2$, il en existe une troisième $L_3^\bullet \xrightarrow{\varepsilon_3} G$ et un diagramme commutatif à homotopie près de résolutions :

$$\begin{tikzcd} & L_1^\bullet \arrow[dr, "\varepsilon_1"] & \\ L_3^\bullet \arrow[ur, "\rho_1"] \arrow[rr, "\varepsilon_3"] \arrow[dr, "\rho_2"'] & & G \\ & L_2^\bullet \arrow[ur, "\varepsilon_2"'] & \end{tikzcd} \quad .$$

b) Étant donnés deux morphismes de résolutions plates :

$$\begin{tikzcd} L_1^\bullet \arrow[d, shift right, "\rho"'] \arrow[d, shift left, "\rho'"] \arrow[dr, "\varepsilon_1"] & \\ L_2^\bullet \arrow[r, "\varepsilon_2"'] & G \end{tikzcd} \quad ,$$

il existe une troisième résolution plate :

$$L_3^\bullet \xrightarrow{\varepsilon_3} G \quad ,$$

et un morphisme de résolutions :

$$\begin{tikzcd} L_3^\bullet \arrow[d, "\sigma"'] \arrow[dr, "\varepsilon_3"] & \\ L_1^\bullet \arrow[r, "\varepsilon_1"'] & G \end{tikzcd} \quad ,$$

tel que les morphismes de complexes $\rho\sigma$ et $\rho'\sigma$ soient homotopes.

c) Pour tout morphisme de résolutions plates :

$$\begin{tikzcd} L_1^\bullet \arrow[d, "\rho"'] \arrow[dr, "\varepsilon_1"] & \\ L_2^\bullet \arrow[r, "\varepsilon_2"'] & G \end{tikzcd} \quad ,$$

le morphisme de complexes de faisceaux :

$$F \otimes \rho : F \otimes_{\mathbb{Z}} L_1^{\bullet} \longrightarrow F \otimes_{\mathbb{Z}} L_2^{\bullet} \quad ,$$

est un *quasi-isomorphisme.*

On obtient donc un système cohérent de complexes de faisceaux $F \otimes_{\mathbb{Z}} L^{\bullet}$ et de quasi-isomorphismes qui dépend, en un sens qu'on peut préciser, fonctoriellement du faisceau G. En tout cas, les objets de cohomologie des complexes $F \otimes_{\mathbb{Z}} L^{\bullet}$ ($L^{\bullet}$ résolution plate de G) sont définis à isomorphismes uniques près et dépendent fonctoriellement de G . Les foncteurs ainsi obtenus possèdent les propriétés voulues et méritent le nom de foncteurs dérivés gauches du foncteur "produit tensoriel par F ".

Bien entendu, pour calculer les faisceaux de torsion $\mathcal{T}\!or^{\mathbb{Z}}(F, G)$, on peut prendre le faisceau associé au préfaisceau $U \longmapsto \mathsf{Tor}^{\mathbb{Z}}(F(U), G(U))$ (U ouvert de E). Mais la méthode que nous employons fournit un complexe de faisceaux bien défini à quasi-isomorphisme près dont les objets de cohomologie sont $\mathcal{T}\!or^{\mathbb{Z}}(F, G)$ et $F \otimes_{\mathbb{Z}} G$, information supplémentaire essentielle pour le maniement commode de ces foncteurs, ainsi que nous le verrons par la suite. Cette méthode s'étend immédiatement au cas des topos annelés et permet de définir dans ce cadre les foncteurs dérivés gauches du foncteur "produit tensoriel de faisceaux".

2. Dans l'étude des foncteurs dérivés d'un foncteur composé de deux foncteurs, des propriétés d'associativité, des relations du type de Künneth, on est amené à étendre le formalisme des foncteurs dérivés au cas où l'argument n'est plus seulement un objet de la catégorie étudiée, mais un complexe d'objets de cette catégorie. Cette extension a été faite dans [**1**]. Rappelons-en les grandes lignes. Soit $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un foncteur additif entre deux catégories abéliennes telles que $\mathcal{A}$ possède suffisamment d'objets injectifs. Soit $Y^{\bullet}$ un complexe d'objets de $\mathcal{A}$. On définit dans *loc. cit.* les "résolutions injectives" du complexe $Y^{\bullet}$, que nous appelons *résolutions injectives de Cartan-Eilenberg* du complexe $Y^{\bullet}$. Une telle résolution est, par définition, un double complexe $I^{\bullet\bullet}$ dont les composants sont des objets injectifs de $\mathcal{A}$, muni d'une augmentation :

$$Y^{\bullet} \xrightarrow{\varepsilon} I^{\bullet\bullet}$$

qui induit des résolutions injectives (au sens usuel) des composants, des bords, et des objets de cohomologie du complexe $Y^{\bullet}$. Ces résolutions sont uniques à homotopie (de doubles complexes) près. On forme alors le double complexe $F(I^{\bullet\bullet})$, puis le complexe simple associé $\int F(I^{\bullet\bullet})$ qui, lui aussi, est déterminé à homotopie près par le complexe $Y^\bullet$. Les objets de cohomologie $\mathcal{R}^n F(Y^\bullet)$ du complexe $\int F(I^{\bullet\bullet})$ sont donc définis à isomorphisme canonique près et on constate qu'ils dépendent fonctoriellement du complexe $Y^\bullet$. Les foncteurs $\mathcal{R}^n F$ obtenus sont les *hyperdérivés à droite* de F. On obtient de plus deux suites spectrales fonctorielles en $Y^\bullet$ dont les termes initiaux sont :

$$\mathrm{I}_2^{p,q} = \mathsf{H}^p(\mathsf{R}^q F(Y^\bullet)) \qquad (*)$$

$$\mathrm{II}_2^{p,q} = \mathsf{R}^p F(\mathsf{H}^q(Y^\bullet)) \quad , \qquad (**)$$

et dont les termes infinis sont les gradués associés aux objets $\mathcal{R}^n F(Y^\bullet)$ convenablement filtrés. Bornons-nous, pour simplifier, au cas où les composants des complexes envisagés sont nuls en degré suffisamment petit. On constate alors que les suites spectrales $(*)$ et $(**)$ convergent. Un morphisme $m : Y^\bullet \to Z^\bullet$ de complexes induit des morphismes :

$$\mathcal{R}^n F(m) : \mathcal{R}^n F(Y^\bullet) \longrightarrow \mathcal{R}^n F(Z^\bullet)$$

et des morphismes des suites spectrales correspondantes. En particulier, *lorsque m est un quasi-isomorphisme*, la suite spectrale $(**)$ montre que *les morphismes $\mathcal{R}^n F(m)$ sont des isomorphismes.* Ainsi les objets $\mathcal{R}^n F(Y^\bullet)$ sont déterminés dès que l'on connaît le complexe $Y^\bullet$ à "quasi-isomorphisme près". Comme, par ailleurs, on a indiqué que les procédés usuels de l'algèbre homologique ne fournissent le plus souvent que des complexes déterminés à quasi-isomorphisme près, il apparaît que les objets naturels qu'étudie l'hyperhomologie sont les "classes de complexes à quasi-isomorphisme près".

3. La démarche que nous suivons s'impose alors naturellement. On introduit, pour toute catégorie abélienne $\mathcal{A}$, la catégorie $\mathsf{comp}(\mathcal{A})$ des complexes d'objets de $\mathcal{A}$. Puis on construit à partir de $\mathsf{comp}(\mathcal{A})$ une nouvelle catégorie en rendant formellement inversibles les quasi-isomorphismes de $\mathsf{comp}(\mathcal{A})$. On obtient ainsi une catégorie $\mathsf{D}(\mathcal{A})$: *la "catégorie dérivée" de la catégorie abélienne $\mathcal{A}$*. Par des procédés de résolution à droite qu'il importe peu de préciser dans cette introduction, on associe à un foncteur additif entre deux catégories abéliennes $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, un foncteur $\mathsf{R}F : \mathsf{D}(\mathcal{A}) \to \mathsf{D}(\mathcal{B})$ (qui n'est défini le plus souvent que sur une sous-catégorie convenable $\mathsf{D}^*(\mathcal{A}) \subset \mathsf{D}(\mathcal{A})$ obtenue en imposant des limitations aux degrés des complexes envisagés) appelé le *foncteur dérivé total à droite* de F. Pour tout objet X de $\mathsf{D}^*(\mathcal{A})$, l'objet $\mathsf{R}F(X)$ de $\mathsf{D}(\mathcal{B})$ est donc un complexe d'objets de $\mathcal{B}$ défini à "quasi-isomorphisme près", et par suite, les objets de cohomologie $\mathcal{R}^n F(X)$ de ce complexe sont bien définis. Les foncteurs $X \mapsto \mathcal{R}^n F(X)$ sont les "hyperdérivés à droite" du foncteur F, définis ici sans supposer nécessairement que

$\mathcal{A}$ possède suffisamment d'objets injectifs. Le foncteur dérivé total permet donc, en particulier, de reconstruire les "hyperdérivés à droite de F"; mais il fournit plus d'informations. Par exemple, lorsqu'on a un foncteur additif $G : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ entre catégories abéliennes, on peut composer les foncteurs dérivés totaux :

$$\mathsf{R}G \cdot \mathsf{R}F : \mathsf{D}^*(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathsf{D}(\mathcal{C}) \quad .$$

Dans les cas habituels, le foncteur $\mathsf{R}G \cdot \mathsf{R}F$ est canoniquement isomorphe au foncteur dérivé total de GF :

$$\mathsf{R}(GF) \xrightarrow{\sim} \mathsf{R}G \cdot \mathsf{R}F \quad ,$$

formule de composition qui traduit dans notre langage *la suite spectrale des foncteurs composés*, et qui est d'ailleurs plus précise, car elle ne se borne pas à donner certaines informations sur les objets de cohomologie de $\mathsf{R}GF(X)$ (X objet de $\mathsf{D}^*(\mathcal{A})$), mais elle décrit entièrement le complexe à "quasi-isomorphisme près" qui donne naissance à ces objets de cohomologie ; complexe dont la connaissance permet, par exemple, de composer à nouveau avec un autre foncteur dérivé total.

4. D'une manière générale, on est amené, dans ce formalisme, à travailler directement avec les complexes à "quasi-isomorphisme près", complexes qu'on se garde bien de remplacer par les seuls objets de cohomologie. (Si, le plus souvent, les "invariants" que l'on recherche, au terme du calcul ou du raisonnement, sont les objets de cohomologie des complexes, il n'en est pas toujours ainsi : les différentielles des suites spectrales sont, elles aussi, des "invariants" intéressants). On établit, au niveau des complexes à quasi-isomorphisme près, ou au niveau des foncteurs dérivés totaux, ou plus généralement au niveau des foncteurs entre les catégories dérivées, diverses relations (relation d'isomorphie, relation d'adjonction pour les théorèmes du type dualité, *etc.*). Ces relations fourniront, par des procédés purement automatiques (les suites spectrales), des informations sur les objets de cohomologie des complexes, sur les filtrations naturelles dont ces objets sont munis, *etc.*

Même lorsqu'on ne s'intéresse qu'aux valeurs des foncteurs dérivés traditionnels, *i.e.* aux seuls objets de cohomologie, les relations dans les catégories dérivées sont souvent des intermédiaires techniques indispensables pour arriver à étudier ces foncteurs et formuler pour eux certaines relations importantes.

Enfin, avantage essentiel, les relations qu'on établit dans les catégories dérivées sont d'apparence et de fait plus simples que les relations qu'on en déduit pour les objets de cohomologie. Le mécanisme des suites spectrales cache le plus souvent la simplicité des phénomènes. L'exemple élémentaire des relations de Künneth est à cet égard significatif.

5. Soient X et Y deux espaces compacts, A un anneau à élément unité commutatif (pour simplifier), F et G deux faisceaux de A-modules sur X et Y respectivement. Lorsque A est un corps, on sait que le produit cartésien [**23**] définit un isomorphisme d'espaces vectoriels gradués :

$$(\text{Kü})^1_{\text{coh}} \qquad \mathsf{H}^*(X,F)\otimes_A \mathsf{H}^*(Y,G) \xrightarrow{\sim} \mathsf{H}^*(X\times Y, F\otimes_A G) \quad .$$

Lorsque $A=\mathbb{Z}$ et que le faisceau F ou le faisceau G est sans torsion, on a des suites exactes scindables :

$$(\text{Kü})^2_{\text{coh}} \qquad \begin{aligned} 0 \to \bigoplus_{p+q=n} \mathsf{H}^p(X,F)\otimes_A \mathsf{H}^q(Y,G) \to \mathsf{H}^n(X\times Y, F\otimes_A G) \to \\ \to \bigoplus_{p+q=n+1} \mathsf{Tor}^{\mathbb{Z}}(\mathsf{H}^p(X,F),\mathsf{H}^q(Y,G)) \to 0 \quad . \end{aligned}$$

Lorsque $A=\mathbb{Z}$ et qu'on ne fait aucune hypothèse sur F et G, on a deux familles de suites exactes scindables :

$$(\text{Kü})^3_{\text{coh}} \qquad \begin{aligned} 0 \to \bigoplus_{p+q=n} \mathsf{H}^p(X,F)\otimes_A \mathsf{H}^q(Y,G) \to \mathbb{H}^n \to \\ \to \bigoplus_{p+q=n+1} \mathsf{Tor}^{\mathbb{Z}}(\mathsf{H}^p(X,F),\mathsf{H}^q(Y,G)) \to 0 \quad , \\ 0 \to \mathsf{H}^{n+1}(X\times Y, \mathcal{T}or^A(F,G)) \to \mathbb{H}^n \to \mathsf{H}^n(X\times Y, F\otimes_A G) \to 0 \quad . \end{aligned}$$

La formulation initiale $(\text{Kü})^1_{\text{coh}}$ se complique donc, mais reste accessible au calcul explicite. Quand l'anneau A est plus compliqué, par exemple lorsque $A=\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}$, ℓ premier, $r>1$, anneau de dimension cohomologique globale infinie, on n'a plus, traditionnellement, que deux suites spectrales ayant même aboutissement dont les termes initiaux sont :

$$(\text{Kü})^4_{\text{coh}} \qquad \begin{aligned} {}'\mathrm{K}_2^{p,q} &= \bigoplus_{r+s=q} \mathsf{Tor}^A_{-p}(\mathsf{H}^r(X,F),\mathsf{H}^s(Y,G)) \quad , \\ {}''\mathrm{K}_2^{p,q} &= \mathsf{H}^p(X\times Y, \mathcal{T}or^A_{-q}(F,G)) \quad . \end{aligned}$$

Cependant ces suites spectrales et l'isomorphie entre leurs aboutissements ne sont que la conséquence et la traduction imparfaite de la relation suivante dans la catégorie dérivée de la catégorie des A-modules :

$$(\text{Kü})_{\text{Der}} \qquad \mathsf{RH}(X,F)\overset{\mathbb{L}}{\otimes}_A \mathsf{RH}(Y,G) \xrightarrow{\sim} \mathsf{RH}(X\times Y, F\overset{\mathbb{L}}{\otimes}_A G) \quad ,$$

où $\mathsf{RH}(X,\ )$ désigne le foncteur dérivé total à droite du foncteur “sections globales” sur X (de même pour $\mathsf{RH}(Y,\ )$ et $\mathsf{RH}(X\times Y,\ ))$ et où $\overset{\mathbb{L}}{\otimes}_A$ désigne le foncteur dérivé total à gauche du foncteur produit tensoriel. (On suppose que X et Y sont des espaces de dimension cohomologique finie, par exemple des complexes cellulaires finis.) Les deux membres de $(\text{Kü})_{\mathsf{Der}}$ sont des complexes de A-modules déterminés à quasi-isomorphisme près dont les modules de cohomologie sont respectivement l'aboutissement de la première et de la deuxième suite spectrale de $(\text{Kü})^4_{\mathsf{coh}}$. La formule $(\text{Kü})_{\mathsf{Der}}$ est, bien entendu, encore valable lorsque F et G sont des complexes de faisceaux sur X et Y (convenablement bornés). Elle est parfaitement maniable pratiquement, et permet de formuler également les propriétés de commutativité, et d'associativité lorsqu'il y a plusieurs facteurs.

L'extension des scalaires conduit à une formule analogue dans les catégories dérivées. Lorsque $A \to B$ est une A-algèbre et lorsque F est un faisceau de A-modules sur X, on a la relation :

$$\mathsf{RH}(X,F)\overset{\mathbb{L}}{\otimes}_A B \xrightarrow{\sim} \mathsf{RH}(X,F\overset{\mathbb{L}}{\otimes}_A B) \quad .$$

De façon imagée, on peut dire, qu'en général, *les formules naïves et traditionnellement fausses deviennent vraies lorsqu'on travaille dans les catégories dérivées.*

L'importance des anneaux de coefficients $\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}$ provient notamment de la cohomologie étale des schémas. On sait [**6**] que dans cette théorie on doit essentiellement travailler avec des faisceaux de torsion. On obtient la cohomologie ℓ-adique, *i.e.* à valeurs dans l'anneau $\widehat{\mathbb{Z}}_\ell$ des entiers ℓ-adiques, en passant à la limite projective dans la cohomologie à valeurs dans les anneaux $\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}$. La formule $(\text{Kü})_{\mathsf{Der}}$ est encore valable dans ce contexte (lorsque, par exemple, X et Y sont des schémas propres sur un corps algébriquement clos, $A=\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}$), et passe à la limite immédiatement pour fournir une formule analogue pour les $\widehat{\mathbb{Z}}_\ell$-faisceaux. Mais comme $\widehat{\mathbb{Z}}_\ell$ est un anneau principal, la formule $(\text{Kü})_{\mathsf{Der}}$ fournit en passant à la cohomologie une formule du type $(\text{Kü})^3_{\mathsf{coh}}$ et en tensorisant par $\mathbb{Q}_\ell$, la formule $(\text{Kü})^1_{\mathsf{coh}}$ pour les $\mathbb{Q}_\ell$-faisceaux.

6. C'est le développement systématique des considérations esquissées ci-dessus que nous présentons dans ce travail. Voici quel en est le plan.

Nous étudions au premier chapitre les catégories de complexes des catégories additives. Ces catégories sont graduées. Plus précisément, elles sont munies de foncteurs translation (translation des degrés dans une direction donnée et changement de signe de la différentielle correspondante). Les extensions naturelles des foncteurs multi-additifs aux complexes ne commutent pas nécessairement aux translations, mais y commutent "à isomorphisme près", isomorphismes déterminés, pratiquement, au signe près. Il se trouve qu'on ne peut choisir ces isomorphismes de manière cohérente pour la composition des "foncteurs translation", et qu'il s'introduit alors un signe. L'étude de ce signe fait l'objet du paragraphe 1 (voir aussi l'appendice). Au paragraphe 2, nous définissons les notions classiques de complexes multiples, complexes simples, foncteur "complexe simple associé", homotopie, et au paragraphe 3, nous abordons l'étude du cône d'un morphisme de complexes ("mapping cone" ou "mapping cylinder"), construction essentielle pour la suite.

La construction de la catégorie $\mathsf{D}(\mathcal{A})$, catégorie dérivée de la catégorie abélienne $\mathcal{A}$, se fait en deux étapes. Dans la première étape on introduit la catégorie $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ des complexes de $\mathcal{A}$ à homotopie près. Puis on inverse formellement dans $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ les quasi-isomorphismes pour obtenir la catégorie $\mathsf{D}(\mathcal{A})$. Les catégories $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ et $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ ne sont pas nécessairement abéliennes; mais elles sont munies d'une structure supplémentaire, consistant en la donnée d'une famille de diagrammes définis à partir de la construction du cône : *les triangles distingués.* Les triangles distingués jouent, pour ces catégories, le rôle des suites exactes des catégories abéliennes. Les catégories additives munies de cette structure supplémentaire, mise en évidence et étudiée par Puppe [**2**], sont appelées *catégories triangulées* et sont étudiées de notre point de vue au chapitre II. Le premier paragraphe est consacré à l'exposé de résultats élémentaires sur les catégories triangulées. Au paragraphe 2, nous montrons, dans le cadre général des catégories triangulées, que le problème consistant à inverser formellement les quasi-isomorphismes de la catégorie triangulée $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ se résout simplement par un "*calcul de fractions*" [**16**]. Au paragraphe 3, nous démontrons un théorème dû à Freyd [**17**] : une catégorie triangulée $\mathcal{D}$ se plonge de manière universelle dans une catégorie abélienne $\mathsf{A}(\mathcal{D})$. Cette catégorie $\mathsf{A}(\mathcal{D})$ possède une famille E d'objets à la fois injectifs et projectifs, telle que tout objet de $\mathsf{A}(\mathcal{D})$ soit isomorphe à un sous-objet d'un objet de E et à un objet quotient d'un objet de E. La sous-catégorie pleine de $\mathsf{A}(\mathcal{D})$ définie par E est isomorphe à la catégorie $\mathcal{D}$. Enfin au paragraphe 4, nous étudions les "*objets spectraux*" à valeurs dans les catégories triangulées ou les catégories abéliennes. Nous ne faisons ici qu'adapter les définitions de [**1**].

Le chapitre III est consacré à l'étude des catégories dérivées proprement dites. Lorsque X et Y sont deux objets de $\mathsf{D}(\mathcal{A})$, catégorie dérivée de la catégorie abélienne $\mathcal{A}$, les morphismes de degré n de X dans Y s'interprètent, lorsque la catégorie $\mathcal{A}$ possède suffisamment d'objets injectifs et lorsque Y est un complexe dont les composants sont nuls en degré petit, comme les éléments de $\mathsf{Ext}^n_{\mathcal{A}}(X,Y)$, n-ième hyper-ext des complexes X et Y (au sens de [**1**]). Lorsque X et Y sont des complexes bornés (composants nuls sauf un nombre fini), les homomorphismes de degré n de X dans Y peuvent se définir par une construction qui généralise la construction de Yoneda [**3**]. La composition des morphismes dans $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ n'est autre que la composition de Yoneda. Au paragraphe 4, nous étudions les objets spectraux usuels. Tout complexe de $\mathcal{A}$ donne naissance à trois objets spectraux à valeurs dans $\mathsf{D}(\mathcal{A})$, qui permettent d'écrire de façon automatique les suites spectrales essentielles. D'ailleurs toute suite $\cdots \to X_n \to X_{n+1} \to \cdots$ de complexes et de morphismes de complexes (où les morphismes de transition ne sont pas nécessairement des monomorphismes) donne naissance à un objet spectral.

7. En résumé, il s'agit d'établir les fondements d'un formalisme, avec tous les inconvénients qu'un tel travail comporte : enthymèmes et sorites, démonstrations sans réelles difficultés mathématiques mais nécessitant souvent des suites de vérifications parfois (resp. toujours) ennuyeuses. Ce travail ne présente donc un intérêt que dans la mesure où ce formalisme, par sa souplesse et sa généralité, permet la formulation et la démonstration de "vrais" théorèmes. C'est le souci d'énoncer et de démontrer des théorèmes de dualité cohomologique qui a constitué la première motivation de ce formalisme. On sait qu'il existe dans différents contextes des théories de dualité cohomologique formellement très analogues :

1) Théorie de la dualité dans la cohomologie des faisceaux cohérents sur les schémas [**4**].

2) Théorie de la dualité dans la cohomologie des faisceaux pour la topologie étale des schémas [**5**], [**6**].

Ces théories sont dues à A. Grothendieck.

3) Théorie de la dualité dans la cohomologie des modules galoisiens due à J. Tate et J.-L. Verdier [**7**].

4) Théorie de la dualité dans la cohomologie des faisceaux sur un espace localement compact [**9**], [**10**].

5) Théorie de la dualité dans la cohomologie des faisceaux analytiques cohérents. Cette théorie reste encore essentiellement conjecturale.

6) Théorie de la dualité pour les corps locaux, corps de nombres ou corps de fonctions et ses relations avec la théorie du corps de classes. Cette théorie est à développer. Les premiers pas sont dus à M. Artin [**8**].

Toutes ces théories ont pour point de départ (ou d'arrivée) une propriété d'adjonction reliant certains foncteurs entre catégories dérivées. Le cas particulièrement simple des espaces localement compacts fournit le modèle des énoncés qu'on obtient. Soient X et Y deux espaces localement compacts (disons : de dimension cohomologique finie), A un anneau (nœthérien), $\mathsf{D}(X_A)$ et $\mathsf{D}(Y_A)$ les catégories dérivées des catégories de faisceaux de A-modules X_A et Y_A sur X et Y respectivement, $f : X \to Y$ une application continue. On peut alors définir dans cette situation :

a) Un foncteur $f_! : X_A \to Y_A$, image directe à support propre et le foncteur dérivé total correspondant :

$$\mathsf{R}\, f_! : \mathsf{D}(X_A) \to \mathsf{D}(Y_A) \quad .$$

(Lorsque $f : X \to Y$ est une application propre, le foncteur $f_!$ est le foncteur image directe usuel.)

b) Un foncteur $f^! : \mathsf{D}^+(Y_A) \to \mathsf{D}^+(X_A)$ (le signe + signifie qu'on se limite aux complexes bornés inférieurement) dont la définition précise est assez technique, mais qui est caractérisé, à isomorphisme unique près, par la propriété *c*).

c) Un isomorphisme bifonctoriel :

$$\Delta_f(F, G) : \mathsf{RHom}(\mathsf{R}\, f_! F, G) \to \mathsf{RHom}(F, f^! G)$$

défini pour tout objet F de $\mathsf{D}(X_A)$ et tout objet G de $\mathsf{D}^+(Y_A)$ (RHom désigne le foncteur dérivé total du foncteur “complexe des homomorphismes”).

Les phénomènes importants sont alors les suivants :

D1) La formation du foncteur $f^!$ est transitive pour f variable.

D2) L'isomorphisme Δ_f est compatible avec la composition des applications.

D3) Lorsque X est lisse sur Y de dimension relative n, *i.e.* lorsque, localement sur X, X est Y-isomorphe au produit d'un ouvert de Y par l'espace topologique $\mathbb{R}^n$ (exemple : Y = un point, X variété topologique), on a pour tout objet G de $\mathsf{D}^+(Y_A)$ un isomorphisme canonique :

$$f^!(G) \simeq f^*(G) \otimes \omega_{X/Y}[n] \quad ,$$

où $f^*(G)$ est l'image inverse usuelle, $\omega_{X/Y}$ un faisceau localement libre de rang 1 : le faisceau d'orientation relative de X sur Y, et où $\omega_{X/Y}[n]$ désigne le complexe obtenu en faisant subir au complexe $\omega_{X/Y}$ un décalage des degrés de n unités.

D4) Lorsque X est un fermé de Y et que f est l'injection canonique, le foncteur $f^!$ est le foncteur dérivé total du foncteur "sections à support dans X".

Ce théorème, et ses variantes dans les autres contextes signalés plus haut, contient les formulations traditionnelles de la dualité : théorème de dualité de Poincaré dans le cas topologique, théorème de dualité de Serre pour les faisceaux algébriques cohérents sur une variété projective et lisse. Mais l'emploi du langage des catégories dérivées ne permet pas seulement de démontrer avec plus de généralité des théorèmes auxquels on pouvait ne s'intéresser que dans des cas particuliers simples. On ne sait par exemple, à l'heure actuelle, démontrer le théorème de dualité sous la forme traditionnelle (type dualité de Serre), pour les faisceaux algébriques cohérents sur une variété propre et lisse non projective sur un corps algébriquement clos, que par l'intermédiaire du théorème de dualité général. Il en est de même pour la dualité en cohomologie étale, pour les variétés projectives non singulières.

8. Les théorèmes de dualité dans les cas 1), 2) et 4) conduisent à des formules de points fixes de Lefschetz, de type non classique, faisant intervenir des faisceaux pouvant présenter des singularités [**10**], [**11**], [**12**]. Soient X un espace topologique compact de dimension cohomologique finie, A un anneau nœthérien, F un faisceau de A-modules sur X possédant les propriétés suivantes :

a) En tout point de X, les fibres du faisceau F sont des A-modules de type fini et de dimension projective finie.

b) Une propriété de régularité au voisinage de tout point de X, analogue aux propriétés décrites par Wilder [**9**].

Soit $\Phi = (\Phi_X, \Phi_F) : (X, F) \to (X, F)$ un endomorphisme de l'espace topologique X muni du faisceau F. L'endomorphisme Φ induit un endomorphisme de complexe de A-modules :

$$\mathsf{RH}(\Phi) : \mathsf{RH}(X, F) \longrightarrow \mathsf{RH}(X, F) \quad .$$

Sous les hypothèses *a*) et *b*), le complexe $\mathsf{RH}(X, F)$ est un *complexe parfait* de A-modules, *i.e.* il est isomorphe, dans la catégorie dérivée, à un complexe fini dont les composants sont des A-modules projectifs de type fini. On peut donc définir le nombre de Lefschetz $\chi(\mathsf{RH}(\Phi))$ comme étant la somme alternée des traces des composants de $\mathsf{RH}(\Phi)$, qui sont des endomorphismes de modules projectifs de type fini. Supposons maintenant, pour fixer les idées, que les points fixes de Φ soient isolés. On a alors l'égalité :

$$\text{(Lef)} \qquad \chi(\mathsf{RH}(\Phi)) = \sum_{P \text{ fixe}} \chi_P(\Phi) \quad ,$$

où les $\chi_P(\Phi)$ sont des *invariants locaux*, que l'on peut déterminer lorsqu'on connaît le faisceau F et l'endomorphisme Φ au voisinage de P. Lorsque X est une variété topologique et lorsque le faisceau F est constant et libre de rang 1, on retrouve la formule de Lefschetz usuelle.

Dans le cadre de la cohomologie des faisceaux cohérents, on a une formule analogue. Il faut prendre, pour X, un schéma de type fini et propre sur un corps k et pour F un faisceau cohérent de tor-dimension finie, ou plus généralement un complexe parfait. L'étude des invariants locaux qui s'introduisent alors n'a été faite que dans certains cas particuliers. Lorsque le corps k est algébriquement clos, le schéma X lisse sur k, le faisceau F localement libre et le point fixe P à croisement normal, on obtient :

$$\chi_P(\Phi) = \frac{\mathsf{Tr}(\Phi_{F,P})}{\mathsf{det}(1 - d\Phi_{X,P})} \quad ,$$

où $\Phi_{F,P}$ désigne l'endomorphisme induit par Φ sur la fibre réduite du faisceau F en P (qui est un k-espace vectoriel de dimension finie) et où $d\Phi_{X,P}$ désigne la différentielle du morphisme Φ_X en P.

Lorsqu'on ne suppose plus que le point fixe P est à croisement normal, *i.e.* lorsqu'on ne suppose plus que l'endomorphisme $1 - d\Phi_{X,P}$ est inversible, les invariants locaux peuvent encore se déterminer par un calcul de résidus au sens de [**4**].

Le théorème de Lefschetz dans le contexte de la Géométrie Algébrique peut d'ailleurs se généraliser aux situations relatives. On se donne un Y-schéma $X \xrightarrow{f} Y$ propre et lisse sur un schéma localement nœthérien Y et un faisceau cohérent F de tor-dimension finie sur X. Le complexe de faisceaux $\mathsf{R}\,f_*(F)$ sur Y est alors un *complexe parfait.* Soit $\Phi : (X,F) \to (X,F)$ un Y-endomorphisme du schéma X muni du faisceau F et supposons que le schéma P des points fixes de Φ soit fini sur Y. L'endomorphisme Φ induit un endomorphisme :

$$\mathsf{R}\,f_*(\Phi) : \mathsf{R}\,f_*(F) \to \mathsf{R}\,f_*(F) \quad ,$$

et comme le complexe $\mathsf{R}\,f_*(F)$ est *parfait*, on peut définir le nombre de Lefschetz $\chi(\mathsf{R}\,f_*(\Phi))$ qui est ici une section du faisceau structural de Y. Cela posé, on a l'égalité :

$$\chi(\mathsf{R}\,f_*(\Phi)) = \chi_P(\Phi) \quad ,$$

où $\chi_P(\Phi)$ est un invariant local, qui peut encore se déterminer par un calcul de résidus.

Dans le cadre de la topologie étale, on a une formule de Lefschetz analogue [**12**]. Cette formule, appliquée à l'endomorphisme de Frobenius d'une courbe algébrique propre et lisse sur un corps fini, munie d'un faisceau constructible pour la topologie étale, a permis la démonstration de la rationalité des fonctions L généralisées [**11**]. Signalons que dans cette démonstration, on utilise une formule de Lefschetz où le faisceau des coefficients possède effectivement des singularités.

9. Dans le cas de la formule de Lefschetz topologique, on a vu que le complexe :

$$\mathsf{RH}(X,F)$$

est parfait, ce qui permet de définir le nombre de Lefschetz de :

$$\mathsf{RH}(\Phi):\mathsf{RH}(X,F)\to\mathsf{RH}(X,F)\quad .$$

On voit là de façon particulièrement frappante pourquoi on ne peut remplacer un complexe par la collection de ses objets de cohomologie. On ne peut en effet définir la trace des endomorphismes :

$$\mathsf{H}^i(\Phi):\mathsf{H}^i(X,F)\to\mathsf{H}^i(X,F)$$

que sous des conditions extrêmement restrictives. Lorsque, par exemple, la dimension cohomologique globale de l'anneau A est finie, *i.e.* lorsque A est régulier, on peut définir la trace de $\mathsf{H}^i(\Phi)$ en prenant des résolutions projectives finies. On a alors :

$$\chi(\mathsf{RH}(\Phi))=\sum_i(-1)^i\,\mathsf{Tr}(\mathsf{H}^i(\Phi))\quad .$$

Mais ainsi qu'on l'a vu, notamment en théorie des faisceaux pour la topologie étale, on a à travailler avec des anneaux du type $\mathbb{Z}/p^\ell\mathbb{Z}$ ($\ell\geq 2$) qui ne sont pas réguliers.

Cette notion de complexe parfait est également utile en géométrie algébrique : K-théorie et théorème de Riemann-Roch [**14**].

10. En conclusion, il semble qu'actuellement, le langage des catégories dérivées soit l'outil indispensable pour permettre de formuler et de démontrer les résultats essentiels des théories qu'on vient de mentionner.

Nous nous sommes limités dans ce travail à l'algèbre homologique additive : catégories abéliennes et foncteurs additifs. Dès qu'on aborde les théorèmes de Riemann-Roch [**14**] ce cadre est insuffisant. Nous n'avons pas non plus abordé l'étude des différents groupes de classes, ou groupes de Grothendieck, que l'on peut former avec les catégories triangulées. Enfin, nous avons laissé de côté les questions d'homologie relative, qui peuvent aussi se traîter dans le cadre des catégories triangulées [**15**].

Remerciements

Cette thèse a été faite sous la direction de A. Grothendieck. Les idées fondamentales qu'elle contient lui sont dues. Sans son impulsion initiale, son aide constante, ses critiques fructueuses, je n'aurais pu la mener à son terme. Qu'il trouve ici l'expression de ma profonde gratitude.

Je remercie C. Chevalley d'avoir bien voulu présider mon Jury de thèse et d'avoir eu la patience de lire ce texte.

Je remercie R. Godement et N. Bourbaki de m'avoir initié aux mathématiques.