Chapitre I

Les catégories de complexes des catégories additives.

1. Catégories graduées.

1.1. Catégories graduées de type G.

1.1.1. À tout groupe G on associe une catégorie, que nous notons $\mathcal{G}$, définie de la manière suivante :

(1.1.1.1)

– $\mathsf{Ob}(\mathcal{G})$ est un ensemble réduit à un élément choisi une fois pour toutes.
– $\mathsf{Fl}(\mathcal{G})$ est l'ensemble sous-jacent à G.
– Les applications source et but sont les uniques applications de $\mathsf{Fl}(\mathcal{G})$ dans $\mathsf{Ob}(\mathcal{G})$. L'application identité envoie l'unique élément de $\mathsf{Ob}(\mathcal{G})$ sur l'élément neutre de G.
– Le composé de deux flèches $\xrightarrow{g}\xrightarrow{h}$ est la flèche hg produit dans le groupe G des éléments h et g.

On appelle *catégorie graduée de type G* une catégorie fibrée sur $\mathcal{G}$ [**18**]. Une catégorie $(\mathcal{C}, G)$ graduée de type G est donc une catégorie $\mathcal{C}$ munie d'un foncteur $\mathsf{deg} : \mathcal{C} \to \mathcal{G}$ faisant de $\mathcal{C}$ une catégorie fibrée au-dessus de $\mathcal{G}$. Le foncteur $\mathsf{deg} : \mathcal{C} \to \mathcal{G}$ est appelé *foncteur degré*. L'image par deg d'un morphisme de $\mathcal{C}$ est appelé le *degré de ce morphisme*. Soit e l'élément neutre de G. On désigne par $\mathcal{C}_e$ la catégorie fibre de $(\mathcal{C}, G)$. La catégorie $\mathcal{C}_e$ est donc la sous-catégorie de $\mathcal{C}$ ayant même ensemble d'objets que $\mathcal{C}$ et dont les morphismes sont les morphismes de $\mathcal{C}$ de degré e.

Soient $(\mathcal{C}, G)$ et $(\mathcal{C}', G)$ deux catégories graduées de type G. On appelle *foncteur gradué* de $(\mathcal{C}, G)$ dans $(\mathcal{C}', G)$ un foncteur cartésien F au-dessus de $\mathcal{G}$. On désigne par $F_e : \mathcal{C}_e \to \mathcal{C}'_e$ le foncteur obtenu par restriction aux catégories fibres. Enfin, un morphisme de foncteurs gradués $m : F \to F'$ est dit *compatible avec la graduation* si c'est un $\mathcal{G}$-morphisme de foncteurs.

1.1.2. Soient $\mathcal{C}$ une catégorie graduée de type G et g un élément de G. Pour tout couple X, Y d'objets de $\mathcal{C}$, on désigne par $\mathsf{Hom}^g(X, Y)$ l'ensemble des morphismes de X dans Y de degré g. On a alors :

(1.1.2.1) $$\mathsf{Hom}(X, Y) = \coprod_{g \in G} \mathsf{Hom}^g(X, Y) \quad .$$

L'ensemble $\mathsf{Hom}(X, Y)$ est donc muni d'une structure d'ensemble gradué de type G. Le degré étant fonctoriel, on a pour tout morphisme $m : X \to Y$ et tout morphisme $n : Y \to Z$:

(1.1.2.2) $$\mathsf{deg}(n)\,\mathsf{deg}(m) = \mathsf{deg}(nm) \quad .$$

Les formules précédentes ne font que traduire le fait que $\mathcal{C}$ est une catégorie au-dessus de $\mathcal{G}$. Exprimons maintenant que la catégorie $\mathcal{C}$ est une catégorie fibrée au-dessus de $\mathcal{G}$. Il suffit pour cela d'exprimer que tout objet de $\mathcal{C}$ est but d'un morphisme hypercartésien de degré donné [**19**]. Or on vérifie immédiatement que les morphismes hypercartésiens de $\mathcal{C}$ sont les isomorphismes de $\mathcal{C}$, et par suite que la catégorie $\mathcal{C}$ est fibrée si et seulement si elle possède la propriété suivante :

(1.1.2.3) *Pour tout élément g de G et tout objet X de $\mathcal{C}$, il existe un isomorphisme de but X et de degré g.*

Soient maintenant $(\mathcal{C}, G)$ et $(\mathcal{C}', G)$ deux catégories graduées de type G et $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ un foncteur gradué. Le foncteur F est d'abord un $\mathcal{G}$-foncteur et, par suite, il conserve le degré des morphismes. Il transforme de plus les morphismes cartésiens de $\mathcal{C}$ en morphismes cartésiens de $\mathcal{C}'$, ce qui est automatique car les morphismes cartésiens de $\mathcal{C}$ sont des isomorphismes. Les foncteurs gradués de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}'$ sont donc simplement *les foncteurs de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}'$ qui conservent le degré.*

Enfin, un morphisme de foncteurs gradués $m : F \to F'$ compatible avec la graduation est simplement un morphisme de foncteurs de degré e, *i.e.* la donnée pour tout objet X de $\mathcal{C}$ d'un morphisme :

$$m(X) : F(X) \to F'(X)$$

de degré e vérifiant les propriétés de compatibilité usuelles.

Définition 1.1.3. Une catégorie graduée de type G est dite *additive* si la catégorie fibre $\mathcal{C}_e$ est additive [**20**]. Un foncteur gradué entre catégories graduées additives est dit *additif* si le foncteur restreint aux fibres est additif.

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie graduée de type G additive. La catégorie $\mathcal{C}$ dépouillée de sa structure fibrée *n'est pas additive* lorsque $G \neq \{e\}$. On peut toutefois associer à $\mathcal{C}$ une catégorie additive en procédant comme suit : pour tout couple X , Y d'objets de $\mathcal{C}$ et tout élément g de G , on vérifie que l'ensemble $\mathsf{Hom}^g(X,Y)$ est muni naturellement d'une structure de groupe commutatif. Définissons alors une nouvelle catégorie $\mathcal{C}_{\mathsf{add}}$ en prenant comme ensemble d'objets l'ensemble des objets de $\mathcal{C}$, et comme ensemble de morphismes entre deux objets X et Y :

$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}_{\mathsf{add}}}(X,Y) = \bigoplus_{g\in G} \mathsf{Hom}^g_{\mathcal{C}}(X,Y) \quad . \tag{1.1.3.1}$$

La composition des morphismes dans $\mathcal{C}_{\mathsf{add}}$ se définit de la manière évidente et on vérifie que $\mathcal{C}_{\mathsf{add}}$ est une catégorie additive. Étant donné de même un foncteur cartésien additif $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ entre deux catégories graduées additives, on construit par la même méthode un foncteur additif $F_{\mathsf{add}} : \mathcal{C}_{\mathsf{add}} \to \mathcal{C}'_{\mathsf{add}}$. Nous n'utiliserons jamais cette construction.

Remarquons que la définition des catégories graduées adoptée ici est plus restrictive que celle qui s'impose naturellement à l'esprit. En plus des structures évidentes (1.1.2.1) et (1.1.2.2), nous imposons la propriété (1.1.2.3).

1.2. Opération à isomorphisme près d'un groupe sur une catégorie.

1.2.1. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie graduée de type G . Choisissons un clivage normalisé de la catégorie fibrée $\mathcal{C} \xrightarrow{\mathsf{deg}} \mathcal{G}$ [**18**], *i.e.* pour tout $g \in G$ choisissons un foncteur changement de base :

$$\begin{cases} T(g) : \mathcal{C}_e \to \mathcal{C}_e \quad , \\ \\ T(e) = \text{identité de } \mathcal{C}_e \quad . \end{cases} \tag{1.2.1.1}$$

Pour tout couple (g,h) d'éléments de G , on a [**18**] un isomorphisme de foncteurs :

$$\begin{cases} c(h,g) : T(hg) \to T(g)T(h) \quad , \\ \\ c(g,e) = c(e,g) = \text{identité de } T(g) \end{cases} \tag{1.2.1.2}$$

et pour tout triplet (g,h,k) d'éléments de G, on a la relation :

$$(T(g)\star c(k,h))c(kh,g) = (c(h,g)\star T(k))c(k,hg) \quad . \tag{1.2.1.3}$$

Définition 1.2.2. Soit G un groupe. On appelle *G°-catégorie* (G° groupe opposé à G) une catégorie $\mathcal{C}_e$ munie d'une famille de foncteurs $T(g)$ ($g \in G$) et d'isomorphismes de foncteurs $c(h,g)$ (g, $h \in G$) vérifiant les propriétés (1.2.1.1), (1.2.1.2) et (1.2.1.3).

Une G°-catégorie est donc une catégorie $\mathcal{C}_e$ munie d'une opération à isomorphisme près d'un groupe G°. On utilise la notation $(\mathcal{C}_e, G^\circ, T, c)$ pour désigner la G°-catégorie ; les isomorphismes $c(h,g)$ sont appelés les *isomorphismes de transition.* Lorsque les isomorphismes de transition sont des isomorphismes identiques, ce qui implique en particulier qu'on a pour tout couple g, $h \in G$ l'égalité $T(hg) = T(g)T(h)$, on dit que la G°-catégorie est *stricte*. Un tel objet est donc défini par une représentation de G° dans le groupe des automorphismes de la catégorie $\mathcal{C}_e$.

1.2.3. Soient maintenant $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux catégories graduées de type G et $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ un foncteur gradué. Choisissons sur $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ des clivages normalisés. Le choix de ces clivages définit des isomorphismes de foncteurs :

$$m(g) : F_eT(g) \to T'(g)F_e\ ,\ g \in G\ , \quad m(e) = \text{ identité de } F_e \tag{1.2.3.1}$$

tels que pour tout couple g, $h \in G$, le diagramme ci-après soit commutatif :

$$\begin{tikzcd}
F_eT(hg) \arrow[rr, "m(hg)"] \arrow[d, "F_e \star c(h,g)"'] & & T'(hg)F_e \arrow[dd, "c'(h,g)\star F_e"] \\
F_eT(g)T(h) \arrow[d, "m(g)\star T(h)"'] & & \\
T'(g)F_eT(h) \arrow[rr, "T'(g)\star m(h)"] & & T'(g)T'(h)F_e
\end{tikzcd} \quad . \tag{1.2.3.2}$$

Définition 1.2.4. Soient $(\mathcal{C}_e, G^\circ, T, c)$ et $(\mathcal{C}'_e, G^\circ, T', c')$ deux G°-catégories. On appelle *G°-foncteur* la donnée d'un foncteur :

$$F_e : \mathcal{C}_e \to \mathcal{C}'_e$$

et d'isomorphismes :

$$m(g) : F_e T(g) \to T'(g) F_e \quad , \qquad g \in G \quad ,$$

tels que les diagrammes (1.2.3.2) soient commutatifs.

Un G°-foncteur est donc un foncteur "commutant à isomorphisme près aux opérations de G°". On utilisera pour le désigner la notation (F_e, m). Lorsque pour tout $g \in G$ les isomorphismes $m(g)$ sont des isomorphismes identiques, ce qui implique en particulier que pour tout $g \in G$ on a les égalités $F_e T(g) = T'(g) F_e$, on dit que le G°-foncteur est *strict*.

1.2.5. Soient $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ et $\mathcal{C}''$ trois catégories graduées et $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{C}' \xrightarrow{F'} \mathcal{C}''$, $F'' = F'F$ trois foncteurs gradués. Choisissons sur $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ et $\mathcal{C}''$ des clivages normalisés. On en déduit, d'après ce qui précède, trois G°-catégories $(\mathcal{C}_e, G^\circ, T, c)$, $(\mathcal{C}'_e, G^\circ, T', c')$ et $(\mathcal{C}''_e, G^\circ, T'', c'')$ et trois G°-foncteurs (F_e, m), (F'_e, m') et (F''_e, m''). On vérifie immédiatement qu'on a les relations :

$$\text{(1.2.5.1)} \qquad \begin{cases} F''_e = F'_e F_e \quad , \\ \\ m''(g) = (m'(g) \star F_e)(F'_e \star m(g)) \, , \quad g \in G \quad . \end{cases}$$

Définition 1.2.6. Soient $(\mathcal{C}_e, G^\circ, T, c)$, $(\mathcal{C}'_e, G^\circ, T', c')$ et $(\mathcal{C}''_e, G^\circ, T'', c'')$ trois G°-catégories et :

$$(\mathcal{C}_e, G^\circ, T, c) \xrightarrow{(F_e, m)} (\mathcal{C}'_e, G^\circ, T', c') \xrightarrow{(F'_e, m')} (\mathcal{C}''_e, G^\circ, T'', c'')$$

deux G°-foncteurs. Les égalités (1.2.5.1) définissent un G°-foncteur qui est appelé le *foncteur composé* des G°-foncteurs (F_e, m) et (F'_e, m').

1.2.7. Soient F et F' deux foncteurs gradués entre deux catégories $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ graduées de type G et soit $u : F \to F'$ un morphisme de foncteurs de degré e. Choisissons sur $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ des clivages normalisés. On en déduit deux G°-catégories $(\mathcal{C}_e, G^\circ, T, c)$ et $(\mathcal{C}'_e, G^\circ, T', c')$ et deux G°-foncteurs (F_e, m), (F'_e, m'). Le morphisme u détermine alors un morphisme de foncteurs :

$$\text{(1.2.7.1)} \qquad u_e : F_e \to F'_e$$

tel que le diagramme ci-après soit commutatif :

$$\text{(1.2.7.2)} \qquad \begin{array}{ccc} F_e T(g) & \xrightarrow{u_e \star T(g)} & F'_e T(g) \\ {\scriptstyle m(g)} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle m'(g)} \\ T'(g) F_e & \xrightarrow[T'(g) \star u_e]{} & T'(g) F'_e \end{array} \quad .$$

Définition 1.2.8. Soient $(\mathcal{C}_e, G^\circ, T, c)$ et $(\mathcal{C}'_e, G^\circ, T', c')$ deux G°-catégories et (F_e, m) et $(F'_e, m') : \mathcal{C}_e \to \mathcal{C}'_e$ deux G°-foncteurs. On dit qu'un morphisme de foncteurs $u_e : F_e \to F'_e$ est *compatible* avec les opérations de G° si pour tout $g \in G$ le diagramme (1.2.7.2) est commutatif.

Enfin, nous dirons qu'une G°-catégorie est *additive* si la catégorie sous-jacente est additive. D'après (1.1.3), la G°-catégorie associée à une catégorie graduée additive est une G°-catégorie additive.

1.3. Équivalence de deux langages.

1.3.1. On se fixe un univers $\mathbf{U}$. Désignons par $\mathsf{Grad}(G)$ la $\mathbf{U}$-catégorie dont les objets sont les catégories graduées de type G, appartenant à $\mathbf{U}$, et dont les morphismes sont les foncteurs gradués. Désignons de même par G°-Cat la $\mathbf{U}$-catégorie dont les objets sont les G°-catégories, appartenant à $\mathbf{U}$, et dont les morphismes sont les G°-foncteurs. On déduit immédiatement de (1.2.1), (1.2.3) et (1.2.5) que le choix, pour toute catégorie graduée de type G d'un clivage normalisé, définit un foncteur :

(1.3.1.1) $$\Psi : \mathsf{Grad}(G) \to G^\circ\text{-}Cat \quad .$$

Le résultat de [**18**] s'interprète comme suit :

Proposition 1.3.2. *Le foncteur Ψ est une équivalence de catégories.*

On trouvera dans [**18**] la description d'un foncteur quasi-inverse de Ψ. Nous nous bornerons ici à décrire rapidement la catégorie graduée $\mathcal{C}[G]$ associée à une G°-catégorie $(\mathcal{C}, G^\circ, T, c)$. Tout d'abord, l'ensemble des objets de $\mathcal{C}[G]$ est l'ensemble des objets de $\mathcal{C}$. Soient X et Y deux objets de $\mathcal{C}$. Posons alors :

(1.3.2.1) $$\mathsf{Hom}^g(X,Y) = \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X, T(g)Y) \ , \qquad g \in G \ ,$$

(1.3.2.2) $$\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}[G]}(X,Y) = \coprod_{g \in G} \mathsf{Hom}^g(X,Y) \quad .$$

Décrivons alors la composition des morphismes de $\mathcal{C}[G]$. Soient X, Y et Z trois objets de $\mathcal{C}$ et $u \in \mathsf{Hom}^g(X,Y)$, $v \in \mathsf{Hom}^{g'}(Y,Z)$, g, $g' \in G$. Le foncteur $T(g)$ définit une application :

(1.3.2.3) $$\mathsf{Hom}^{g'}(Y,Z) \to \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(T(g)Y, T(g)T(g')Z)$$

et l'isomorphisme $c(g',g)^{-1}$ définit une application :

$$(1.3.2.4) \qquad \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(T(g)Y, T(g)T(g')Z) \to \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(T(g)Y, T(g'g)Z) \quad .$$

D'où en prenant l'image de v, un élément $v' \in \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(T(g)Y, T(g'g)Z)$. Le composé dans $\mathcal{C}$ de u et de v' est un élément :

$$(1.3.2.5) \qquad w = v' \circ_{\mathcal{C}} u\,, \quad w \in \mathsf{Hom}^{g'g}(X,Z)$$

qui est, par définition, le composé de u et de v dans $\mathcal{C}[G]$. Le foncteur fibrant $\mathcal{C}[G] \to \mathcal{G}$ est alors le foncteur évident. La catégorie fibrée $\mathcal{C}[G] \to \mathcal{G}$ est munie d'un clivage normalisé canonique.

1.3.3. On a en fait un résultat plus précis. Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux catégories graduées de type G munies de clivages normalisés. Le foncteur Ψ définit une bijection :

$$(1.3.3.1) \qquad \Psi(\mathcal{C},\mathcal{C}') : \mathsf{Hom}_{\mathsf{Grad}(G)}(\mathcal{C},\mathcal{C}') \to \mathsf{Hom}_{G^\circ\text{-}Cat}(\Psi(\mathcal{C}),\Psi(\mathcal{C}')) \quad .$$

Or ces ensembles sont les ensembles d'objets des catégories :

$$(1.3.3.2) \qquad \mathcal{H}om_{\mathsf{Grad}(G)}(\mathcal{C},\mathcal{C}') \quad , \qquad \mathcal{H}om_{G^\circ\text{-}Cat}(\Psi(\mathcal{C}),\Psi(\mathcal{C}'))$$

dont les morphismes sont respectivement les morphismes de foncteurs de degré e et les morphismes de foncteurs compatibles avec les opérations de G°. De plus, il résulte immédiatement de (1.2.7) que l'application $\Psi(\mathcal{C},\mathcal{C}')$ s'étend en un foncteur :

$$(1.3.3.3) \qquad \varPsi(\mathcal{C},\mathcal{C}') : \mathcal{H}om_{\mathsf{Grad}(G)}(\mathcal{C},\mathcal{C}') \to \mathcal{H}om_{G^\circ\text{-}Cat}(\Psi(\mathcal{C}),\Psi(\mathcal{C}'))$$

et on vérifie aisement :

Proposition 1.3.4. *Le foncteur $\varPsi(\mathcal{C},\mathcal{C}')$ est un isomorphisme de catégories.*

1.3.5. Enfin, pour être complet, il conviendrait de noter que le foncteur Ψ (étendu aux morphismes de foncteurs) respecte les convolutions des foncteurs par les morphismes de foncteurs. La vérification en est laissée au lecteur.

1.3.6. Le plus souvent, nous utiliserons des G°-catégories strictes (1.2.2). Soient $(\mathcal{C}, G^\circ, T)$ et $(\mathcal{C}', G^\circ, T')$ deux G°-catégories strictes. Un G°-foncteur (F,m) est alors un foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ muni d'isomorphismes :

$$(1.3.6.1) \qquad m(g) : FT(g) \to T'(g)F \ , \ g \in G \ , \quad m(e) = \text{identité}$$

tels que les diagrammes ci-après soient commutatifs :

$$(1.3.6.2)\qquad \begin{tikzcd}
FT(hg) \arrow[rr, "m(hg)"] \arrow[d, equal] & & T'(hg)F \arrow[d, equal] \\
FT(g)T(h) \arrow[d, "m(g)\star T(h)"'] & & T'(g)T'(h)F \\
T'(g)FT(h) \arrow[urr, "T'(g)\star m(h)"'] & &
\end{tikzcd} \qquad g\,,\, h \in G \quad .$$

Il convient de remarquer que, même dans le cas d'opération stricte de G° sur les catégories, les foncteurs ne commutent pas nécessairement strictement aux opérations de G°. Ainsi, lorsque G° opère trivialement sur les catégories $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ (*i.e.* $T(g) = T'(g) =$ identité), un G°-foncteur n'est alors autre qu'un foncteur muni d'une représentation de G dans son groupe des automorphismes. De plus, il est facile de voir qu'un G°-foncteur n'est pas nécessairement isomorphe à un G°-foncteur strict. On construit facilement un contre-exemple en s'inspirant de [**19**]. En utilisant les résultats de [*loc. cit.*], on peut d'ailleurs montrer que toute G°-catégorie est G°-équivalente à une G°-catégorie stricte. On peut aussi par les mêmes méthodes préciser ce résultat de la façon suivante. Étant données deux G°-catégories $(\mathcal{C}, G^\circ, T, c)$ et $(\mathcal{C}', G^\circ, T', c')$, il existe deux G°-catégories strictes : $(\widetilde{\mathcal{C}}, G^\circ, \widetilde{T})$ et $(\widetilde{\mathcal{C}}', G^\circ, \widetilde{T}')$ et des G°-équivalences :

$$(u, \mu) : (\widetilde{\mathcal{C}}, G^\circ, \widetilde{T}) \to (\mathcal{C}, G^\circ, T, c) \quad ,$$

$$(v, \nu) : (\mathcal{C}', G^\circ, T', c') \to (\widetilde{\mathcal{C}}', G^\circ, \widetilde{T}')$$

telles que pour tout foncteur :

$$(F, m) : (\mathcal{C}, G^\circ, T, c) \to (\mathcal{C}', G^\circ, T', c') \quad ,$$

le foncteur composé :

$$(v, \nu)(F, m)(u, \mu) : (\widetilde{\mathcal{C}}, G^\circ, \widetilde{T}) \to (\widetilde{\mathcal{C}}', G^\circ, \widetilde{T}')$$

soit isomorphe à un foncteur commutant strictement aux opérations de G°. Nous n'utiliserons pas ce résultat.

1.3.7. Nous avons rappelé dans ce numéro l'équivalence de deux langages : le langage des catégories graduées et celui des G°-catégories. Nous emploierons exclusivement dans ce travail le langage des G°-catégories. Cependant, nous n'oublierons pas totalement le point de vue "catégories graduées" en utilisant la terminologie suivante :

Définition 1.3.8. Soient G un groupe et $(\mathcal{C}, G^\circ, T, c)$ une G°-catégorie. Soient g et h deux éléments de G et X et Y deux objets de $\mathcal{C}$. Un morphisme de $\mathcal{C}$:

$$u : T(h)X \to T(gh)Y$$

sera appelé un *morphisme de degré g de X dans Y*.

Montrons que cette terminologie n'apporte pas de confusion. En effet, pour tout couple h, h' d'éléments de G, le foncteur $T(h^{-1}h')$ et les isomorphismes $c(h, h^{-1}h')$ et $c(gh, h^{-1}h')$ définissent un isomorphisme bifonctoriel :

$$\text{(1.3.8.1)} \quad i_g(h,h') : \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(T(h)X, T(gh)Y) \xrightarrow{\sim} \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(T(h')X, T(gh')Y)$$

et les identités de cocycle (1.2.1.3) montrent qu'on a la relation :

$$\text{(1.3.8.2)} \qquad i_g(h,h'') = i_g(h',h'')i_g(h,h') \quad ,$$

pour tout triplet h, h', $h'' \in G$. Si donc, on identifie les différents ensembles :

$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(T(h)X, T(gh)Y)$$

à l'aide des isomorphismes $i_g(h,h')$, la formule (1.3.8.2) montre que ces différentes identifications sont compatibles. De plus, pour tout quadruplet g, g', h, $h' \in G$ et tout triplet X, Y, Z d'objets de $\mathcal{C}$, le diagramme ci-après (1.3.8.3) est commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(T(h)X,T(gh)Y) \times \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(T(gh)Y,T(g'gh)Z) & \longrightarrow & \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(T(h)X,T(g'gh)Z) \\
{\scriptstyle i_g(h,h') \times i_{g'}(gh,gh')}\Big\downarrow \simeq & & {\scriptstyle i_{g'g}(h,h')}\Big\downarrow \simeq \\
\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(T(h')X,T(gh')Y) \times \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(T(gh')Y,T(g'gh')Z) & \rightarrow & \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(T(h')X,T(g'gh')Z)
\end{array}$$

(les flèches horizontales sont définies par la composition dans $\mathcal{C}$). Le diagramme (1.3.8.3) nous permet donc de définir sans ambiguïté, ou plus précisément aux identifications définies par les isomorphismes $i_g(h,h')$ près, le composé de deux morphismes de degré respectif g et g' et on vérifie immédiatement que cette définition de la composition est compatible avec la définition de la composition dans la catégorie graduée $\mathcal{C}[G]$ associée à la G°-catégorie $(\mathcal{C}, G^\circ, T, c)$ (1.3.2.5).

1.3.9. Soit $(\mathcal{C}, G, T, c)$ une G-catégorie. La *catégorie opposée à* $(\mathcal{C}, G, T, c)$ est une G°-catégorie (G° groupe opposé à G) $(\mathcal{C}^\circ, G^\circ, T^\circ, c^\circ)$ définie de la manière suivante. La catégorie $\mathcal{C}^\circ$ est la catégorie opposée à $\mathcal{C}$. Les foncteurs $T^\circ(g)$, $g \in G^\circ$, sont définis par :

(1.3.9.1)
$$T^\circ(g)X = T(g^{-1})X \quad , \qquad X \in \mathsf{Ob}(\mathcal{C}^\circ) = \mathsf{Ob}(\mathcal{C}) \ ,$$
$$T^\circ(g)u = T(g^{-1})u \quad , \qquad u \in \mathsf{Fl}(\mathcal{C}^\circ) = \mathsf{Fl}(\mathcal{C}) \ ,$$

et les isomorphismes $c^\circ(g,h)$ de $\mathcal{C}^\circ$ sont définis par :

(1.3.9.2)
$$c^\circ(g,h) : T^\circ(h \perp g) \to T^\circ(h)T^\circ(g) \quad ,$$
$$c^\circ(g,h) = c^{-1}(g^{-1}, h^{-1}) \quad .$$

(on désigne par $\perp$ la composition dans G°).

Remarque 1.3.10. Soit $\mathcal{C}[G^\circ] \to \mathcal{G}^\circ$ la catégorie graduée de type G° associée à la catégorie $(\mathcal{C}, G, T, c)$. Cette catégorie est munie d'un clivage canonique. Soit alors $\mathcal{C}[G^\circ]^\circ \to \mathcal{G}$ la catégorie cofibrée obtenue en passant aux catégories opposées. Cette catégorie est munie d'un coclivage canonique et, comme G est un groupe, cette catégorie est aussi fibrée sur $\mathcal{G}$. On en déduit un clivage canonique sur $\mathcal{C}[G^\circ]^\circ \to \mathcal{G}$ et par suite une G°-catégorie qui est canoniquement isomorphe à la catégorie opposée à la catégorie $(\mathcal{C}, G, T, c)$, ainsi qu'on le vérifie immédiatement.

1.3.11. Soient $(\mathcal{C}, G, T, c)$ une G-catégorie et $(\mathcal{C}', G', T', c')$ une G'-catégorie. La catégorie $\mathcal{C} \times \mathcal{C}'$ est munie canoniquement d'une structure de $G \times G'$-catégorie de la manière évidente. La $G \times G'$-catégorie obtenue sera appelée le *produit* de la G-catégorie $(\mathcal{C}, G, T, c)$ par la G'-catégorie $(\mathcal{C}', G', T', c')$.

1.3.12. Soit $(\mathcal{C}, G^\circ, T, c)$ une G°-catégorie. On utilisera le plus souvent dans la pratique une notation à droite pour désigner les opérations de G° sur $\mathcal{C}$. On posera pour tout objet X de $\mathcal{C}$:

(1.3.12.1)
$$T(g)X = X[g]$$

et de même pour tout morphisme u de $\mathcal{C}$:

(1.3.12.2)
$$T(g)u = u[g] \quad .$$

Les isomorphismes $c(g,h)$ définissent donc, pour tout objet X, des isomorphismes :

(1.3.12.3)
$$c(g,h)(X) : X[gh] \to X[g][h] \quad .$$

Cette notation a en particulier l'avantage de transformer les opérations de G° sur $\mathcal{C}$ en des opérations *à droite* de G sur $\mathcal{C}$.

1.4. Changement de groupes.

1.4.1. Soit $f : H \to G$ un homomorphisme de groupes. On associe à toute G-catégorie $(\mathcal{C}, G, T, c)$ une H-catégorie $(\mathcal{C}, H, T_f, c_f)$ en faisant opérer H sur $\mathcal{C}$ par l'intermédiaire de f, *i.e.* en posant :

$$\begin{aligned} T_f(h) &= T\big(f(h)\big) \quad , & h \in H \quad , \\ c_f(h, h') &= c\big(f(h), f(h')\big) \quad , & h, h' \in H \quad . \end{aligned} \tag{1.4.1.1}$$

Étant donné de même un G-foncteur :

$$(F, m) : (\mathcal{C}, G, T, c) \to (\mathcal{C}', G, T', c') \quad ,$$

on lui associe un H-foncteur (F, m_f) entre les H-catégories correspondantes en posant :

$$m_f(h) = m\big(f(h)\big) \quad . \tag{1.4.1.2}$$

Enfin, un morphisme de G-foncteurs compatible avec les opérations de G est compatible avec les opérateurs de H.

Ce qui précède définit visiblement un foncteur, qu'on appelle le *foncteur de changement de groupes* :

$$f^* : G\text{-}Cat \to H\text{-}Cat \quad . \tag{1.4.1.3}$$

Plus précisément, soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux G-catégories ; le foncteur f^* définit une application :

$$f^*(\mathcal{C}, \mathcal{C}') : \mathsf{Hom}_{G\text{-}Cat}(\mathcal{C}, \mathcal{C}') \to \mathsf{Hom}_{H\text{-}Cat}\left(f^*(\mathcal{C}), f^*(\mathcal{C}')\right) \quad . \tag{1.4.1.4}$$

Mais les ensembles $\mathsf{Hom}_{G\text{-}Cat}(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$ et $\mathsf{Hom}_{H\text{-}Cat}(f^*(\mathcal{C}), f^*(\mathcal{C}'))$ sont des ensembles d'objets de catégories $\mathcal{H}om_{G\text{-}Cat}(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$ et $\mathcal{H}om_{H\text{-}Cat}(f^*(\mathcal{C}), f^*(\mathcal{C}'))$ dont les morphismes sont les morphismes de foncteurs, compatibles avec les opérations des groupes, et l'application $f^*(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$ s'étend naturellement en un foncteur :

$$\underline{f^*(\mathcal{C}, \mathcal{C}')} : \mathcal{H}om_{G\text{-}Cat}(\mathcal{C}, \mathcal{C}') \to \mathcal{H}om_{H\text{-}Cat}\big(f^*(\mathcal{C}), f^*(\mathcal{C}')\big) \quad . \tag{1.4.1.5}$$

Ce foncteur est fidèle.

1.4.2. Soient $e \to K \xrightarrow{n} H \xrightarrow{f} G \to e$ une suite exacte de groupes, le groupe K étant identifié par n à un sous-groupe distingué de H, et $(\mathcal{C}, G, T, c)$, $(\mathcal{C}', G, T', c')$ deux G-catégories. Soient $(\mathcal{C}, H, T_f, c_f)$, $(\mathcal{C}', H, T'_f, c'_f)$ les H-catégories obtenues par le changement de groupes $H \xrightarrow{f} G$. Soit enfin :

$$(1.4.2.1) \qquad (F, m) : (\mathcal{C}, H, T_f, c_f) \to (\mathcal{C}', H, T'_f, c'_f)$$

un H-foncteur. Les diagrammes (1.2.3.2) fournissent alors pour tout couple d'éléments $k, k' \in K$, un diagramme commutatif :

$$(1.4.2.2) \qquad \begin{tikzcd} F \arrow[rr, "m(kk')"] \arrow[dr, "m(k)"'] & & F \\ & F \arrow[ur, "m(k')"'] & \end{tikzcd} \quad ,$$

d'où une représentation de K° dans le groupe des automorphismes de F. Lorsque le foncteur (F, m) provient d'un G-foncteur, cette représentation est triviale. Réciproquement, lorsque cette représentation est triviale, on déduit immédiatement des diagrammes (1.2.3.2) que, pour tout $h \in H$ et pour tout $k \in K$, on a :

$$(1.4.2.3) \qquad m(hk) = m(kh) = m(h)$$

et, par suite, le H-foncteur (F, m) provient d'un G-foncteur par le changement de groupe f^*. On se propose dans la suite de ce numéro d'étudier, dans un cas très particulier, les H-foncteurs (F, m) qui induisent une représentation donnée à l'avance de K° dans le groupe des automorphismes de F.

1.4.3. On utilise les notations de (1.4.2). On suppose que la catégorie $\mathcal{C}'$ *est additive* et que $K = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Le groupe des signes $\{-1, +1\} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ opère alors sur le foncteur identique de la catégorie $\mathcal{C}'$ en associant à tout objet X de $\mathcal{C}'$ le morphisme :

$$(1.4.3.1) \qquad \varepsilon(X) : X \xrightarrow{\varepsilon \cdot \mathrm{id}_X} X \quad , \qquad \varepsilon \in \{-1, +1\} \quad .$$

Par suite, le groupe des signes opère sur tout foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ en associant à tout objet Y de $\mathcal{C}$ le morphisme :

$$(1.4.3.2) \qquad \varepsilon(Y) : F(Y) \xrightarrow{\varepsilon \cdot \mathrm{id}_{F(Y)}} F(Y) \quad , \qquad \varepsilon \in \{-1, +1\} \quad .$$

Cette opération est appelée *l'opération canonique.* On se propose d'étudier les H-foncteurs :

$$(F, m) : (\mathcal{C}, H, T_f, c_f) \to (\mathcal{C}', H, T'_f, c'_f) \tag{1.4.3.3}$$

qui induisent l'opération canonique du groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sur le foncteur F.

Soit $\dot{\alpha} \in \mathsf{H}^2(G, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ l'élément décrivant l'extension :

$$1 \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{n} H \xrightarrow{f} G \to e \quad . \tag{1.4.3.4}$$

Soit $\alpha_s \in \mathsf{Z}^2(G, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ un cocycle normalisé non homogène dans la classe $\dot{\alpha}$ défini par une section normalisée s de f. On a :

$$\begin{aligned} &\alpha_s(\sigma_1, \sigma_2) = s(\sigma_2)s(\sigma_1\sigma_2)^{-1}s(\sigma_1) \quad , \qquad \sigma_1, \sigma_2 \in G \quad , \\ &s(e) = \text{ unité de } H \quad , \\ &\alpha_s(\sigma_1, e) = \alpha_s(e, \sigma_1) = 1 \quad , \\ &\delta\alpha_s(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \alpha_s(\sigma_2, \sigma_3)\alpha_s(\sigma_1\sigma_2, \sigma_3)^{-1}\alpha_s(\sigma_1, \sigma_2\sigma_3)\alpha_s(\sigma_1, \sigma_2)^{-1} \\ &\qquad\qquad = 1 \quad , \qquad \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \in G \quad . \end{aligned} \tag{1.4.3.5}$$

La section $s : G \to H$ définit un isomorphisme d'ensembles :

$$H \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times G \quad ,$$

et en transportant la loi de groupe de H sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times G$ par cet isomorphisme, on obtient la loi de groupe :

$$(\varepsilon_1, \sigma_1)(\varepsilon_2, \sigma_2) = \big(\varepsilon_1\varepsilon_2\alpha_s(\sigma_1, \sigma_2), \sigma_1\sigma_2\big) \quad . \tag{1.4.3.6}$$

Identifions alors le groupe H et le groupe décrit par (1.4.3.6). On a, pour tout $(\varepsilon_1, \sigma_1), (\varepsilon_2, \sigma_2) \in H$:

$$\begin{aligned} &T_f(\varepsilon_1, \sigma_1) = T(\sigma_1) \quad , \\ &T'_f(\varepsilon_1, \sigma_1) = T'(\sigma_1) \quad , \\ &c_f\big((\varepsilon_1, \sigma_1), (\varepsilon_2, \sigma_2)\big) = c(\sigma_1, \sigma_2) \quad , \\ &c'_f\big((\varepsilon_1, \sigma_1), (\varepsilon_2, \sigma_2)\big) = c'(\sigma_1, \sigma_2) \end{aligned} \tag{1.4.3.7}$$

et, par suite, d'après (1.2.3.2), pour tout couple (ε,σ), le diagramme ci-après est commutatif :

(1.4.3.8)
$$\begin{tikzcd} FT(\sigma) \arrow[rr, "m((\varepsilon,\sigma))"] \arrow[dr, "m((1,\sigma))"'] & & T'(\sigma)F \\ & T'(\sigma)F \arrow[ur, "T'(\sigma)*m(\varepsilon)"'] & \end{tikzcd} \quad ,$$

i.e.

(1.4.3.9) $$m\big((\varepsilon,\sigma)\big) = \varepsilon\, m\big((1,\sigma)\big) \quad .$$

Posons alors :

(1.4.3.10) $$m\big((1,\sigma)\big) = p(\sigma) : FT(\sigma) \to T'(\sigma)F \quad .$$

La famille des isomorphismes $p(\sigma)$, $\sigma \in G$, possède alors la propriété suivante : pour tout couple $\sigma_1, \sigma_2 \in G$, le diagramme ci-après est $\alpha_s(\sigma_1,\sigma_2)$-*commutatif* (*i.e.* commutatif si $\alpha_s(\sigma_1,\sigma_2) = +1$ et anti-commutatif si $\alpha_s(\sigma_1,\sigma_2) = -1$) :

(1.4.3.11)
$$\begin{tikzcd} FT(\sigma_1\sigma_2) \arrow[rr, "p(\sigma_1\sigma_2)"] \arrow[d, "F*c(\sigma_2,\sigma_1)"'] & & T'(\sigma_1\sigma_2)F \arrow[dd, "c'(\sigma_2,\sigma_1)*F"'] \\ FT(\sigma_1)T(\sigma_2) \arrow[d, "p(\sigma_1)*T(\sigma_2)"'] & & \\ T'(\sigma_1)FT(\sigma_2) \arrow[rr, "T'(\sigma_1)*p(\sigma_2)"] & & T'(\sigma_1)T'(\sigma_2)F \end{tikzcd} \quad .$$

Réciproquement, lorsqu'on se donne un foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ et une famille d'isomorphismes $p(\sigma) : FT(\sigma) \to T'(\sigma)F$, $\sigma \in G$, telle que pour tout couple $(\sigma_1,\sigma_2) \in G \times G$ le diagramme (1.4.3.11) soit $\alpha_s(\sigma_1,\sigma_2)$-commutatif, on peut reconstruire d'une manière unique un H-foncteur :

$$(F,m) : (\mathcal{C}, H, T_f, c_f) \to (\mathcal{C}', H, T'_f, c'_f)$$

induisant l'opération canonique du groupe des signes sur F, en posant (via l'identification du groupe H avec le groupe décrit par (1.4.3.6)) :

(1.4.3.12) $$m\big((\varepsilon,\sigma)\big) = \varepsilon\, p(\sigma) \quad .$$

La vérification immédiate est laissée au lecteur.

Définition 1.4.4. Soient $(\mathcal{C}, G, T, c)$ et $(\mathcal{C}', G, T', c')$ deux G-catégories, $\mathcal{C}'$ étant une catégorie additive. Soit $\alpha \in \mathsf{Z}^2(G, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ un cocycle normalisé non homogène. On appelle *G-foncteur tordu par le cocycle α* l'objet (F, p) constitué par un foncteur :

$$F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$$

et des isomorphismes de foncteurs :

$$p(\sigma) : FT(\sigma) \to T'(\sigma)F \quad , \qquad \sigma \in G \quad ,$$

tels que, pour tout couple $\sigma_1, \sigma_2 \in G$, le diagramme (1.4.3.11) soit $\alpha(\sigma_1, \sigma_2)$-commutatif.

Le choix d'une section normalisée s de l'extension (1.4.3.4) permet donc d'établir une correspondance biunivoque entre les H-foncteurs :

$$(F, m) : (\mathcal{C}, H, T_f, c_f) \to (\mathcal{C}', H, T'_f, c'_f)$$

qui induisent l'opération canonique du groupe des signes sur F, et les G-foncteurs tordus par le cocycle α_s défini par la section s.

1.4.5. On utilise les notations de (1.4.3). Soient :

(1.4.5.1) $$(F_1, m_1), (F_2, m_2) : (\mathcal{C}, H, T_f, c_f) \to (\mathcal{C}', H, T'_f, c'_f)$$

deux H-foncteurs induisant l'opération canonique du groupe des signes et :

(1.4.5.2) $$u : (F_1, m_1) \to (F_2, m_2)$$

un morphisme de foncteurs compatible avec les opérations de H. Soient s_1 et s_2 deux sections normalisées de l'application f de la suite exacte (1.4.3.4) $\big(s_1(e) = s_2(e) = e\big)$. Soient $\alpha_{s_1}, \alpha_{s_2} \in \mathsf{Z}^2(G, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ les cocycles normalisés correspondants. Soit $\beta : G \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, l'application :

(1.4.5.3) $$\beta(\sigma) = s_2(\sigma)s_1(\sigma)^{-1} \quad , \qquad \sigma \in G \quad .$$

Les foncteurs (F_1, m_1) et (F_2, m_2) définissent, d'après (1.4.3), des G-foncteurs (F_1, p_1) , (F_2, p_2) tordus respectivement par les cocycles α_{s_1} , α_{s_2} . On vérifie immédiatement que le morphisme $u : F_1 \to F_2$ entre les foncteurs sous-jacents possède la propriété suivante :

Pour tout élément $\sigma \in G$, le diagramme :

$$\begin{tikzcd} F_1T(\sigma) \arrow[r, "p_1(\sigma)"] \arrow[d, "u * T(\sigma)"'] & T'(\sigma)F_1 \arrow[d, "T'(\sigma) * u"] \\ F_2T(\sigma) \arrow[r, "p_2(\sigma)"] & T'(\sigma)F_2 \end{tikzcd} \tag{1.4.5.4}$$

est $\beta(\sigma)$-commutatif.

Définition 1.4.6. Soient $(\mathcal{C}, G, T, c)$ une G-catégorie, $(\mathcal{C}', G, T', c')$ une G-catégorie additive, α_1 et α_2 dans $\mathsf{Z}^2(G, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ deux cocycles non homogènes normalisés, $\beta : G \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ une application telle que :

$$\alpha_2(\sigma_1, \sigma_2)\alpha_1^{-1}(\sigma_1, \sigma_2) = \beta(\sigma_2)\beta(\sigma_1\sigma_2)^{-1}\beta(\sigma_1) \quad . \tag{1.4.6.1}$$

Soient enfin $(F_1, p_1), (F_2, p_2) : (\mathcal{C}, G, T, c) \to (\mathcal{C}', G, T', c')$ deux G-foncteurs tordus respectivement par les cocycles α_1 et α_2. On appelle *β-morphisme du foncteur (F_1, p_1) dans le foncteur (F_2, p_2)* un morphisme $u : F_1 \to F_2$ de foncteurs tel que, pour tout $\sigma \in G$, le diagramme (1.4.5.4) soit $\beta(\sigma)$-commutatif.

1.4.7. On a montré (1.4.5) que le choix de deux sections normalisées permet d'associer à un morphisme de H-foncteurs induisant l'opération canonique du groupe des signes un β-morphisme entre les G-foncteurs tordus correspondants. On vérifie immédiatement que cette correspondance est biunivoque. De plus, lorsqu'on a trois H-foncteurs (F_1, m_1), (F_2, m_2), (F_3, m_3) induisant l'opération canonique du groupe des signes, trois sections normalisées s_1, s_2, s_3 et deux morphismes de H-foncteurs u, v et leur composé vu :

$$\begin{aligned} u &: (F_1, m_1) \to (F_2, m_2) \quad , \\ v &: (F_2, m_2) \to (F_3, m_3) \quad , \\ vu &: (F_1, m_1) \to (F_3, m_3) \quad , \end{aligned} \tag{1.4.7.1}$$

les morphismes :

$$\begin{aligned} u &: (F_1, p_1) \to (F_2, p_2) \quad , \\ v &: (F_2, p_2) \to (F_3, p_3) \quad , \\ vu &: (F_1, p_1) \to (F_3, p_3) \quad , \end{aligned} \tag{1.4.7.2}$$

où les (F_i, p_i) sont les G-foncteurs tordus déterminés respectivement par les foncteurs (F_i, m_i) et les sections s_i, sont des $\beta_{j,i}$-morphismes, où :

$$\beta_{j,i}(\sigma) = s_j(\sigma)s_i(\sigma)^{-1} \ , \quad i,j \in \{1,2,3\} \ , \quad i < j \quad . \tag{1.4.7.3}$$

On a donc la relation :

$$\beta_{3,1} = \beta_{3,2}\beta_{2,1} \quad . \tag{1.4.7.4}$$

Les relations (1.4.7.2) et (1.4.7.4) permettent alors de définir le *composé* du $\beta_{3,2}$-morphisme v avec le $\beta_{2,1}$-morphisme u et cette composition ainsi définie est compatible avec la composition des morphismes de H-foncteurs.

1.4.8. Soient $\mathcal{C}'$ une catégorie additive et :

$$(F,p) : (\mathcal{C}, G, T, c) \to (\mathcal{C}', G, T', c')$$

un G-foncteur tordu par un cocycle normalisé $\alpha \in \mathsf{Z}^2(G, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. On désigne par :

$$(F^\circ, p^\circ) : (\mathcal{C}^\circ, G^\circ, T^\circ, c^\circ) \to (\mathcal{C}'^\circ, G^\circ, T'^\circ, c'^\circ) \tag{1.4.8.1}$$

le *foncteur gradué tordu opposé* au foncteur (F,p). (On utilise les notations de (1.3.9)). Il est défini de la manière suivante :

Le foncteur sous-jacent est F°, le foncteur opposé au foncteur F. Pour tout $g \in G^\circ$ (groupe opposé à G), l'isomorphisme de $\mathcal{C}^\circ$:

$$p^\circ(g) : F^\circ T^\circ(g) = FT(g^{-1}) \xrightarrow{\sim} T'^\circ(g)F^\circ = T'(g^{-1})F$$

est égal à $p^{-1}(g^{-1})$.

Le foncteur (F°, p°) est un G°-foncteur tordu par le cocycle α° dans $\mathsf{Z}^2(G^\circ, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ opposé au cocycle α $\big(\alpha^\circ(g,g') = \alpha^{-1}(g^{-1}, g'^{-1})\big)$.

1.4.9. La seule vertu du groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ qu'on utilise dans ce numéro est qu'il opère canoniquement sur le foncteur identique des catégories additives. On peut donc développer des considérations analogues en remplacant le groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ par un groupe commutatif K opérant sur les foncteurs identiques des catégories considérées, de façon compatible avec les opérations de G.

1.5. $\mathbb{Z}^n$-catégories.

1.5.1. Soient $(\mathcal{C}, \mathbb{Z}^n, T, c)$ une $\mathbb{Z}^n$-catégorie, $(\mathcal{C}', \mathbb{Z}^n, T', c')$ une $\mathbb{Z}^n$-catégorie additive, $(F, p) : (\mathcal{C}, \mathbb{Z}^n, T, c) \to (\mathcal{C}', \mathbb{Z}^n, T', c')$ un $\mathbb{Z}^n$-foncteur tordu par un cocycle normalisé $\alpha \in \mathsf{Z}^2(\mathbb{Z}^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. Désignons par $e_1, \ldots, e_n$ la base canonique de $\mathbb{Z}^n$. On a donc pour tout $i \in [1, n]$ un isomorphisme de foncteurs :

$$p(e_i) : FT(e_i) \to T'(e_i)F \tag{1.5.1.1}$$

et pour tout couple $(i, j), i \neq j$, un diagramme $\alpha(e_i, e_j)\alpha^{-1}(e_j, e_i)$-commutatif :

(1.5.1.2)

$$\begin{tikzcd}
FT(e_i + e_j) \arrow[r, "F * c(e_i, e_j)"] \arrow[d, "F * c(e_j, e_i)"] & FT(e_j)T(e_i) \arrow[r, "p(e_j) * T(e_i)"] & T'(e_j)FT(e_i) \arrow[d, "T'(e_j) * p(e_i)"'] \\
FT(e_i)T(e_j) \arrow[d, "p(e_i) * T(e_j)"] & & T'(e_j)T'(e_i)F \arrow[d, "c'(e_i, e_j)^{-1} * F"'] \\
T'(e_i)FT(e_j) \arrow[r, "T'(e_i) * p(e_j)"'] & T'(e_i)T'(e_j)F \arrow[r, "c'(e_j, e_i)^{-1} * F"'] & T'(e_i + e_j)F
\end{tikzcd} \quad .$$

Proposition 1.5.2. *Soient $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ un foncteur et pour tout $i \in [1, n]$ un isomorphisme de foncteurs :*

$$p_i : FT(e_i) \to T'(e_i)F$$

tel que pour tout couple i, j, $i \neq j$, le diagramme analogue au diagramme (1.5.1.2), où l'on remplace les $p(e_i)$ par les p_i, soit $\alpha(e_i, e_j)\alpha^{-1}(e_j, e_i)$-commutatif. Il existe un et un seul $\mathbb{Z}^n$-foncteur tordu par le cocycle α :

$$(F, p) : (\mathcal{C}, \mathbb{Z}^n, T, c) \to (\mathcal{C}', \mathbb{Z}^n, T', c')$$

tel que :

$$p(e_i) = p_i \quad , \qquad i \in [1, n] \quad .$$

La démonstration de l'unicité se fait en examinant les diagrammes (1.4.3.11). Nous laissons au lecteur le soin de vérifier ce point. Nous nous bornerons à donner quelques indications sur la démonstration de l'existence. Celle-ci se fait par récurrence sur l'entier n.

1.5.3. Existence dans le cas $n = 1$. Posons :

$$p(0) = \text{ identité },\quad p(e_1) = p_1 \quad . \tag{1.5.3.1}$$

Puis :

(1.5.3.2)

$$p(-e_1) = \alpha(e_1, -e_1)\big(T'(-e_1)F * c^{-1}(-e_1, e_1)\big)\big(T'(-e_1) * p^{-1}(e_1) * T(-e_1)\big)\big(c'(e_1, -e_1) * FT(-e_1)\big) \ ,$$

i.e. $p(-e_1)$ est, au signe près (ce signe étant $\alpha(e_1, -e_1)$), le morphisme composé :

$$FT(-e_1) \xrightarrow{c'(e_1,-e_1)*FT(-e_1)} T'(-e_1)T'(e_1)FT(-e_1) \xrightarrow{T'(-e_1)*p^{-1}(e_1)*T(-e_1)}$$

$$\longrightarrow T'(-e_1)FT(e_1)T(-e_1) \xrightarrow{T'(-e_1)F*c^{-1}(-e_1,e_1)} T'(-e_1)F \quad .$$

Nous allons définir les isomorphismes $p(qe_1)$ par récurrence sur $|q|$. Pour cela, considérons les diagrammes $D(q, q')$ du type (1.4.3.11), où les isomorphismes $p(re_1)$ à définir doivent intervenir :

(1.5.3.3)

$$\begin{tikzcd}
FT((q+q')e_1) \arrow[r, "p((q+q')e_1)"] \arrow[d, "F * c(q'e_1, qe_1)"'] & T'((q+q')e_1)F \arrow[dd, "c'(q'e_1, qe_1) * F"'] \\
FT(qe_1)T(q'e_1) \arrow[d, "p(qe_1) * T(q'e_1)"'] & \\
T'(qe_1)FT(q'e_1) \arrow[r, "T'(qe_1) * p(q'e_1)"'] & T'(qe_1)T'(q'e_1)F
\end{tikzcd}$$

et supposons que les isomorphismes $p(qe_1)$ soient définis pour les entiers q tels que $|q| < r$. On définit alors $p(re_1)$ comme étant l'unique isomorphisme rendant le diagramme $D(r-1, 1)$ $\alpha(r-1, 1)$-commutatif et $p(-re_1)$ comme étant l'unique isomorphisme rendant le diagramme $D(-r+1, -1)$ $\alpha(-r+1, -1)$-commutatif. Les isomorphismes $p(qe_1)$ étant maintenant définis, nous pouvons considérer la propriété :

$\big(P(q, q')\big)$ *Le diagramme $D(q, q')$est $\alpha(q, q')$-commutatif .*

Soit par définition, soit par vérification immédiate, la propriété $P(q, q')$ est vraie dans les cas suivants :

$$(1.5.3.4)\qquad \begin{aligned} &q = 0 \quad ,\\ &q' = 0 \quad ,\\ &q \leq 0 \ \text{ et } \ q' = -1 \quad ,\\ &q \geq 0 \ \text{ et } \ q' = 1 \quad ,\\ &q = 1 \ \text{ et } \ q' = -1 \quad ,\\ &q = -1 \ \text{ et } \ q' = 1 \quad . \end{aligned}$$

De plus, l'examen des différents diagrammes $D(q, q')$ qu'on peut former avec trois entiers q , q' , q'' montre immédiatement (1.5.5) :

(1.5.3.5) *Si trois des quatre propriétés $P(q', q'')$, $P(q+q', q'')$, $P(q, q'+q'')$, $P(q, q')$ sont vraies, la quatrième l'est aussi.*

On déduit alors de (1.5.3.4) que la propriété $P(q, q')$ est vraie pour tout couple d'entiers q, q', ce qui achève la démonstration dans le cas $n = 1$.

1.5.4. Existence dans le cas général. Désignons par $\mathbb{Z}^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{Z}^n$ le sous-groupe engendré par les $n-1$ premiers éléments de la base de $\mathbb{Z}^n$; on a alors $\mathbb{Z}^n = \mathbb{Z}^{n-1} \oplus \mathbb{Z}e_n$. Utilisant l'hypothèse de récurrence, il existe des isomorphismes :

$$\begin{aligned} p(\sigma) : FT(\sigma) \to T'(\sigma)F \quad &, \qquad \sigma \in \mathbb{Z}^{n-1} \ , \\ p(\tau) : FT(\tau) \to T'(\tau)F \quad &, \qquad \tau \in \mathbb{Z}e_n \quad , \end{aligned}$$

tels que les diagrammes :

$$(1.5.4.1)_{\lambda,\mu}\qquad \begin{array}{ccc} FT(\lambda+\mu) & \xrightarrow{p(\lambda+\mu)} & T'(\lambda+\mu)F \\ {\scriptstyle F * c(\mu,\lambda)}\downarrow & & \\ FT(\lambda)T(\mu) & & \downarrow {\scriptstyle c'(\mu,\lambda) * F} \\ {\scriptstyle p(\lambda) * T(\mu)}\downarrow & & \\ T'(\lambda)FT(\mu) & \xrightarrow[T'(\lambda) * p(\mu)]{} & T'(\lambda)T'(\mu)F \end{array}$$

soient $\alpha(\lambda,\mu)$-commutatifs lorsque $\lambda,\mu \in \mathbb{Z}^{n-1}$ ou $\lambda,\mu \in \mathbb{Z}e_n$. Désignons alors par $Q(\sigma,\tau)$, $\sigma \in \mathbb{Z}^{n-1}$, $\tau \in \mathbb{Z}e_n$, la propriété :

$\big(Q(\sigma,\tau)\big)$ *Le diagramme ci-après est $\alpha(\sigma,\tau)\alpha^{-1}(\tau,\sigma)$-commutatif :*

$(1.5.4.2)_{\sigma,\tau}$

$$\begin{array}{ccccc}
FT(\sigma+\tau) & \xrightarrow{F * c(\sigma,\tau)} & FT(\tau)T(\sigma) & \xrightarrow{p(\tau) * T(\sigma)} & T'(\tau)FT(\sigma) \\
\big\downarrow{\scriptstyle F * c(\tau,\sigma)} & & & & \big\downarrow{\scriptstyle T'(\tau) * p(\sigma)} \\
FT(\sigma)T(\tau) & & & & T'(\tau)T'(\sigma)F \\
\big\downarrow{\scriptstyle p(\sigma) * T(\tau)} & & & & \big\downarrow{\scriptstyle c'(\sigma,\tau)^{-1} * F} \\
T'(\sigma)FT(\tau) & \xrightarrow[T'(\sigma) * p(\tau)]{} & T'(\sigma)T'(\tau)F & \xrightarrow[c'(\tau,\sigma)^{-1} * F]{} & T'(\sigma+\tau)F
\end{array} \quad .$$

Par hypothèse, les propriétés $Q(e_i,e_n)$, $Q(e_i,0)$, $1 \le i \le n-1$, $Q(0,e_n)$, sont vraies. De plus, en utilisant les diagrammes $\alpha(\lambda,\mu)$-commutatifs $(1.5.4.1)_{\lambda,\mu}$, on vérifie aisément (1.5.6) :

(1.5.4.3) *Si deux des propriétés $Q(\sigma,\tau+\tau')$, $Q(\sigma,\tau)$, $Q(\sigma,\tau')$, $\sigma \in \mathbb{Z}^{n-1}$, τ, $\tau' \in \mathbb{Z}e_n$ sont vérifiées, la troisième l'est aussi.* De même, *si deux des propriétés $Q(\sigma+\sigma',\tau)$, $Q(\sigma,\tau)$, $Q(\sigma',\tau)$, σ, $\sigma' \in \mathbb{Z}^{n-1}$, $\tau \in \mathbb{Z}e_n$ sont vraies, la troisième l'est aussi.*

On en déduit que la propriété $Q(\sigma,\tau)$ est vérifiée pour tout $\sigma \in \mathbb{Z}^{n-1}$ et tout $\tau \in \mathbb{Z}e_n$.

Définissons alors, pour tout $\omega \in \mathbb{Z}^n$, $\omega = \sigma+\tau$, $\sigma \in \mathbb{Z}^{n-1}$, $\tau \in \mathbb{Z}e_n$, l'isomorphisme $p(\omega) : FT(\omega) \longrightarrow T'(\omega)F$, comme étant l'unique isomorphisme rendant le diagramme $(1.5.4.1)_{\sigma,\tau}$ $\alpha(\sigma,\tau)$-commutatif. Ceci nous permet d'écrire pour tout couple $\lambda,\mu \in \mathbb{Z}^n$ le diagramme $(1.5.4.1)_{\lambda,\mu}$ et de considérer la propriété :

$\big(P(\lambda,\mu)\big)$ *Le diagramme $(1.5.4.1)_{\lambda,\mu}$ est $\alpha(\lambda,\mu)$-commutatif.*

D'après ce qui précède, nous savons que la propriété $P(\lambda,\mu)$ est vérifiée dans les cas suivants :

$$
(1.5.4.4) \qquad
\begin{aligned}
&\lambda \text{ et } \mu \in \mathbb{Z}^{n-1} \;, \\
&\lambda \text{ et } \mu \in \mathbb{Z}e_n \quad , \\
&\lambda \in \mathbb{Z}^{n-1} \text{ et } \mu \in \mathbb{Z}e_n \quad , \\
&\lambda \in \mathbb{Z}e_n \text{ et } \mu \in \mathbb{Z}^{n-1} \quad .
\end{aligned}
$$

De plus (1.5.5), on a :

(1.5.4.5) *Si trois des propriétés $P(\mu,\nu)$, $P(\lambda+\mu,\nu)$, $P(\lambda,\mu+\nu)$, $P(\lambda,\mu)$ sont vraies, la quatrième l'est aussi.*

On en déduit que la propriété $P(\lambda,\mu)$ est vraie pour tout couple $\lambda,\mu \in \mathbb{Z}^n$, ce qui achève la démonstration de la proposition (1.5.2).

Diagramme 1.5.5. On se propose de démontrer l'assertion (1.5.4.5). On désigne par $D(\lambda,\mu)$ le diagramme $(1.5.4.1)_{\lambda,\mu}$. La démonstration de (1.5.4.5) repose sur la considération du diagramme que nous écrivons, pour simplifier, dans le cas où les isomorphismes de transition c et c' sont des morphismes identiques, *i.e.* dans le cas où le groupe $\mathbb{Z}^n$ opère strictement sur les catégories $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$:

$$
\begin{tikzcd}
 & FT(\lambda+\mu+\nu) \arrow[dl, "p(\lambda+\mu)*T(\nu)"'] \arrow[dr, "p(\lambda+\mu+\nu)"] \arrow[dd, "p(\lambda)*T(\mu+\nu)"] & \\
T'(\lambda+\mu)FT(\nu) \arrow[rr, "T'(\lambda+\mu)*p(\nu)"'] & & T'(\lambda+\mu+\nu)F \\
 & T'(\lambda)FT(\mu+\nu) \arrow[ul, "T'(\lambda)*p(\mu)*T(\nu)"] \arrow[ur, "T'(\lambda)*p(\mu+\nu)"'] &
\end{tikzcd}
\quad .
$$

Ce diagramme a la forme d'un tétraèdre dont les quatres faces sont respectivement les diagrammes $D(\lambda,\mu+\nu)$, $D(\lambda+\mu,\nu)$, $D(\lambda,\mu)T(\nu)$ et $T'(\lambda)D(\mu,\nu)$. La démonstration de (1.5.4.5) se fait alors en envisageant les quatre cas possibles et en utilisant la relation de cocycle. Dans le cas général, le diagramme qu'il faut introduire est un peu plus compliqué, mais en utilisant les identités (1.2.1.3), l'argument se ramène à l'argument esquissé ci-dessus. Pour obtenir la démonstration de (1.5.3.5), on utilise le même diagramme en posant : $\lambda = qe_1$, $\mu = q'e_1$, $\nu = q''e_1$.

Diagramme 1.5.6. Démontrons maintenant l'assertion (1.5.4.3). La démonstration repose sur la considération du diagramme suivant, que nous écrirons pour simplifier dans le cas où les isomorphismes de transition c et c' sont des morphismes identiques :

1.5.7.

$$\begin{tikzcd}
FT(\sigma+\sigma'+\tau) \arrow[rr, "p(\sigma')*T(\sigma+\tau)"] \arrow[dr, "p(\sigma)*T(\sigma'+\tau)"'] \arrow[drrr, "p(\sigma+\sigma')*T(\tau)"] \arrow[dd, "p(\tau)*T(\sigma+\sigma')"'] & & T'(\sigma')FT(\sigma+\tau) \arrow[dr, "T'(\sigma')*p(\sigma)*T(\tau)"] \arrow[dd, "T'(\sigma')*p(\tau)*T(\sigma)"' near end] & \\
& T'(\sigma)FT(\sigma'+\tau) \arrow[rr, "T'(\sigma)*p(\sigma')*T(\tau)"'] \arrow[dd, "T'(\sigma)*p(\tau)*T(\sigma')"' near start] & & T'(\sigma+\sigma')FT(\tau) \arrow[dd, "T'(\sigma+\sigma')*p(\tau)"] \\
T'(\tau)FT(\sigma+\sigma') \arrow[rr, "T'(\tau)*p(\sigma')*T(\sigma)"] \arrow[dr, "T'(\tau)*p(\sigma)*T(\sigma')"'] \arrow[drrr, "T'(\tau)*p(\sigma+\sigma')"] & & T'(\tau+\sigma')FT(\sigma) \arrow[dr, "T'(\sigma'+\tau)*p(\sigma)"] & \\
& T'(\tau+\sigma)FT(\sigma') \arrow[rr, "T'(\sigma+\tau)*p(\sigma')"'] & & T'(\tau+\sigma+\sigma')F
\end{tikzcd}$$

Désignons par $\Delta(\sigma,\tau)$ le diagramme $(1.5.4.2)_{\sigma,\tau}$. Le diagramme ci-dessus fait apparaître cinq diagrammes verticaux qui sont respectivement les diagrammes :

$$T'(\sigma')\Delta(\sigma,\tau)\,,\ T'(\sigma)\Delta(\sigma',\tau)\,,\ \Delta(\sigma,\tau)T(\sigma')\,,\ \Delta(\sigma',\tau)T(\sigma)\,,\ \Delta(\sigma+\sigma',\tau)\ .$$

Il fait apparaître de même quatre diagrammes horizontaux qui sont respectivement les diagrammes :

$$D(\sigma,\sigma')T(\tau)\,,\ D(\sigma',\sigma)T(\tau)\,,\ T'(\tau)D(\sigma,\sigma')\,,\ T'(\tau)D(\sigma',\sigma)\ .$$

Par hypothèse de récurrence, les diagrammes $D(\sigma,\sigma')$ et $D(\sigma',\sigma)$ sont respectivement $\alpha(\sigma,\sigma')$ et $\alpha(\sigma',\sigma)$-commutatifs. On en déduit la première partie de l'assertion (1.5.4.3) en envisageant les trois cas possibles. La deuxième partie de l'assertion (1.5.4.3) s'obtient en interchangeant les rôles des σ et des τ. Dans le cas général, le diagramme qu'il faut introduire est plus compliqué. Mais, en utilisant les identités (1.2.1.3), l'argument se ramène à celui présenté ci-dessus.

Remarque 1.5.8. La proposition (1.5.2) s'applique en particulier au cas où le cocycle α est trivial. On vérifie alors que la proposition et sa démonstration s'étendent *verbatim* au cas où la catégorie $\mathcal{C}'$ n'est plus nécessairement additive.

1.5.9. Soient :

$$(F_1,p_1),(F_2,p_2):(\mathcal{C},\mathbb{Z}^n,T,c)\to(\mathcal{C}',\mathbb{Z}^n,T',c')$$

deux $\mathbb{Z}^n$-foncteurs tordus respectivement par deux cocycles normalisés $\alpha_1,\alpha_2\in\mathsf{Z}^2(\mathbb{Z}^n,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, $\beta:\mathbb{Z}^n\to\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ une application telle que :

$$(1.5.9.1)\qquad \alpha_2(\sigma_1,\sigma_2)\alpha_1^{-1}(\sigma_1,\sigma_2)=\beta(\sigma_2)\beta(\sigma_1\sigma_2)^{-1}\beta(\sigma_1)\ ,\quad \sigma_1,\sigma_2\in\mathbb{Z}^n\ ,$$

et $u:(F_1,p_1)\to(F_2,p_2)$ un β-morphisme de foncteurs (1.4.6). Soit $e_1,\dots,e_n$ la base canonique de $\mathbb{Z}^n$. Pour tout $i\in[1,n]$ le diagramme ci-après est $\beta(e_i)$-commutatif :

$$(1.5.9.2)\qquad \begin{tikzcd} F_1T(e_i) \arrow[r, "p_1(e_i)"] \arrow[d, "u*T(e_i)"'] & T'(e_i)F_1 \arrow[d, "T'(e_i)*u"] \\ F_2T(e_i) \arrow[r, "p_2(e_i)"] & T'(e_i)F_2 \end{tikzcd}\quad .$$

Réciproquement :

Proposition 1.5.10. *Tout morphisme $u : F_1 \to F_2$ entre les foncteurs sous-jacents, tels que pour tout $i \in [1, n]$ le diagramme* (1.5.9.2) *soit $\beta(e_i)$-commutatif, est un β-morphisme de foncteurs.*

En effet, pour tout $\sigma \in \mathbb{Z}^n$, désignons par $R(\sigma)$ la propriété :

$(R(\sigma))$ *Le diagramme ci-après est $\beta(\sigma)$-commutatif* :

$$(1.5.10.1)_\sigma \qquad \begin{tikzcd} F_1T(\sigma) \arrow[r, "p_1(\sigma)"] \arrow[d, "u * T(\sigma)"'] & T'(\sigma)F_1 \arrow[d, "T'(\sigma) * u"] \\ F_2T(\sigma) \arrow[r, "p_2(\sigma)"] & T'(\sigma)F_2 \end{tikzcd} .$$

L'examen des différents diagrammes $(1.5.10.1)_{\sigma_1}$, $(1.5.10.1)_{\sigma_2}$, $(1.5.10.1)_{\sigma_1+\sigma_2}$ montre immédiatement qu'on a :

Si deux des propriétés $R(\sigma_1)$, $R(\sigma_2)$, $R(\sigma_1 + \sigma_2)$ sont vraies, la troisième l'est aussi.

De plus par hypothèse, on a les propriétés $R(e_i)$, $i \in [1, n]$ et $R(0)$. On en déduit immédiatement que la propriété $R(\sigma)$ est vraie pour tout $\sigma \in \mathbb{Z}^n$.

1.5.11. Une $\mathbb{Z}^n$-catégorie stricte est une catégorie munie d'une représentation de $\mathbb{Z}^n$ dans son groupe des automorphismes. Pour définir une telle représentation, il suffit bien entendu de se donner n automorphismes : $T(e_1), \dots, T(e_n)$ qui commutent deux à deux.

1.5.12. Le problème consistant à déterminer sur une catégorie donnée les structures de $\mathbb{Z}^n$-catégorie (non nécessairement stricte) est beaucoup moins simple. Ainsi, si on se borne à déterminer, sur une catégorie $\mathcal{C}$, les structures de $\mathbb{Z}^n$-catégorie telles que pour tout $\sigma \in \mathbb{Z}^n$ on ait $T(\sigma) =$ identité de $\mathcal{C}$, on a alors à se donner, pour tout couple σ_1, σ_2 d'éléments de $\mathbb{Z}^n$, un élément $c(\sigma_1, \sigma_2)$ du groupe des automorphismes du foncteur identique de $\mathcal{C}$ (ce groupe est commutatif), cette donnée étant soumise à vérifier les identités (1.2.1.3). Par suite, pour se donner une telle structure, il faut se donner un 2-cocycle normalisé non homogène de $\mathbb{Z}^n$ à valeurs dans le groupe des automorphismes du foncteur identique de $\mathcal{C}$. On vérifie d'ailleurs immédiatement que deux telles structures sont isomorphes, par un $\mathbb{Z}^n$-foncteur (F, m) tel que $F =$ identité de $\mathcal{C}$, si et seulement si les cocycles correspondants sont dans la même classe de cohomologie.

1.5.13. Les $\mathbb{Z}^n$-catégories que nous utiliserons dans ce travail seront des catégories strictes. Aussi ne tenterons-nous pas d'aborder le problème signalé en (1.5.12) dans le cas général. Cependant l'exemple présenté en (1.5.12) suggère que la détermination des structures de $\mathbb{Z}$-catégorie sur une catégorie $\mathcal{C}$ est particulièrement simple. C'est en effet le cas. Désignons par $E\text{-}Cat$ la $\mathbf{U}$-catégorie dont les objets sont les catégories appartenant à $\mathbf{U}$ munies d'une équivalence :

$$T : \mathcal{C} \to \mathcal{C} \tag{1.5.13.1}$$

et dont les morphismes sont les foncteurs $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ muni d'un isomorphisme :

$$m : FT \to T'F \quad . \tag{1.5.13.2}$$

On a alors évidemment un foncteur de la $\mathbf{U}$-catégorie $\mathbb{Z}\text{-}Cat$ dans la $\mathbf{U}$-catégorie $E\text{-}Cat$:

$$R : \mathbb{Z}\text{-}Cat \to E\text{-}Cat \quad . \tag{1.5.13.3}$$

Le foncteur R associe à une $\mathbb{Z}$-catégorie $(\mathcal{C}, \mathbb{Z}, T, c)$ la catégorie $\mathcal{C}$ munie de l'équivalence $T(1) : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ et à tout $\mathbb{Z}$-foncteur :

$$(F, m) : (\mathcal{C}, \mathbb{Z}, T, c) \to (\mathcal{C}', \mathbb{Z}, T', c') \quad ,$$

le foncteur F muni de l'isomorphisme $m(1) : FT(1) \to T'(1)F$.

Proposition 1.5.14. *Le foncteur R est une équivalence de catégories.*

Nous nous bornerons à donner des indications sur la démonstration. La proposition (1.5.2) et la remarque (1.5.8) montrent que R est pleinement fidèle. Il suffit donc de montrer que R est essentiellement surjectif. Soit donc $(\mathcal{C}, T : \mathcal{C} \to \mathcal{C})$ une catégorie munie d'une équivalence. Soient $T^{-1} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ un foncteur quasi-inverse de T et :

$$\begin{aligned} u &: \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \to TT^{-1} \quad , \\ v &: \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \to T^{-1}T \end{aligned} \tag{1.5.14.1}$$

les isomorphismes d'adjonction.

Les foncteurs T^n et $(T^{-1})^n$ sont, pour tout entier $n > 0$, adjoints l'un de l'autre, d'où des isomorphismes d'adjonction :

$$\begin{aligned} u^{(n)} &: \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \to T^n(T^{-1})^n \quad , \\ v^{(n)} &: \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \to (T^{-1})^n T^n \quad . \end{aligned} \tag{1.5.14.2}$$

Posons alors :

$$T(0) = \mathsf{id}_{\mathcal{C}} \quad ,$$

$$T(n) = T^n \quad , \qquad n > 0 \quad , \tag{1.5.14.3}$$

$$T(n) = (T^{-1})^{-n} \, , \qquad n < 0 \quad .$$

Puis, pour tout couple (n, n') d'entiers, définissons des isomorphismes :

$$c(n', n) : T(n + n') \to T(n)T(n')$$

par :

$$\begin{aligned}
&n, n' \geq 0 \quad c(n', n) = \text{ identité } \; , \\
&n, n' \leq 0 \quad c(n', n) = \text{ identité } \; , \\
&n' \leq 0 \, , \; n \geq 0 \, , \; n + n' \leq 0 \, , \quad c(n', n) = u^{(n)} * T(n + n') \; , \\
&n' \leq 0 \, , \; n \geq 0 \, , \; n + n' \geq 0 \, , \quad c(n', n) = T(n + n') * u^{(-n')} \; , \\
&n' \geq 0 \, , \; n \leq 0 \, , \; n + n' \leq 0 \, , \quad c(n', n) = T(n + n') * v^{(n')} \; , \\
&n' \geq 0 \, , \; n \leq 0 \, , \; n + n' \geq 0 \, , \quad c(n', n) = v^{(-n)} * T(n + n') \; .
\end{aligned} \tag{1.5.14.4}$$

Pour s'assurer qu'on a bien ainsi défini une $\mathbb{Z}$-catégorie, il reste à vérifier qu'on a bien les identités du type (1.2.1.3). Cette vérification s'appuie sur les identités classiques que vérifient les morphismes $u^{(n)}$ et $v^{(n)}$. Nous laissons au lecteur le soin de l'entreprendre.

1.6. Cocycle de Koszul. Règle des signes.

1.6.1. Soit $e_1, \ldots, e_n$ une base de $\mathbb{Z}^n$. Désignons par $\mathbb{Z}^n_{i,j}$, $i, j \in [1, n]$, $i \neq j$, le sous-groupe de $\mathbb{Z}^n$ engendré par les éléments e_i et e_j . Les homomorphismes de restriction définissent un homomorphisme :

$$\mathsf{H}^2(\mathbb{Z}^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to \bigoplus_{\substack{i,j \in [1,n] \\ i<j}} \mathsf{H}^2(\mathbb{Z}^n_{i,j}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \quad . \tag{1.6.1.1}$$

On a des isomorphismes (canoniques) :

$$\mathsf{H}^2(\mathbb{Z}^n_{i,j}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \quad . \tag{1.6.1.2}$$

L'homomorphisme (1.6.1.1) est un isomorphisme.

Proposition 1.6.2. 1) *Soient* $\alpha \in \mathsf{Z}^2(\mathbb{Z}^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ *un cocycle normalisé non homogène,* $\dot{\alpha} \in \mathsf{H}^2(\mathbb{Z}^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ *sa classe de cohomologie,* $\dot{\alpha}_{i,j} \in \mathsf{H}^2(\mathbb{Z}^n_{i,j}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ *ses composantes. On a* (utilisant (1.6.1.2)) :

$$\dot{\alpha}_{i,j} = \alpha(e_i, e_j)^{-1}\alpha(e_j, e_i) \quad . \tag{1.6.2.1}$$

(On écrit multiplicativement la loi de groupe de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$).

2) *Soient* α_1 *et* α_2 *deux éléments cohomologues de* $\mathsf{Z}^2(\mathbb{Z}^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ *et pour tout* $i \in [1, n]$, β_i *un élément de* $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. *Il existe une et une seule application* $\beta : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ *telle que :*

(1.6.2.2)
$$\alpha_2(\sigma_1, \sigma_2)\alpha_1^{-1}(\sigma_1, \sigma_2) = \beta(\sigma_2)\beta(\sigma_1 + \sigma_2)^{-1}\beta(\sigma_1) \ , \ \text{pour } \sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{Z}^n \ ,$$

$$\beta(e_i) = \beta_i \quad . \tag{1.6.2.3}$$

On se ramène, pour démontrer la première assertion au cas $n = 2$ et on vérifie immédiatement que la quantité $\alpha(e_i, e_j)^{-1}\alpha(e_j, e_i)$ ne change pas lorsqu'on modifie α par un cobord. Lorsque α est un cobord, il est symétrique et par suite la formule (1.6.2.1) est vraie dans ce cas. D'autre part, le cocycle :

$$\alpha_0(p_1 e_i + q_1 e_j, p_2 e_i + q_2 e_j) = (-1)^{q_1 p_2}$$

n'est pas cohomologue à 0 puisqu'on a :

$$\alpha_0(e_i, e_j)^{-1}\alpha_0(e_j, e_i) = -1$$

et tout cocycle non cohomologue à zéro est cohomologue à α_0 .

Pour démontrer la deuxième assertion, on remarque que deux solutions de (1.6.2.2) diffèrent par un homomorphisme de groupes ; par suite, on peut toujours modifier une solution de (1.6.2.2) d'une manière unique par un homomorphisme de groupes de façon à lui faire prendre sur les e_i des valeurs données à l'avance.

Définition 1.6.3. Soit $e_1, \ldots, e_n$ une base de $\mathbb{Z}^n$. On appelle *classe de Koszul relative à la base* $e_1, \ldots, e_n$ l'unique élément de $\mathsf{H}^2(\mathbb{Z}^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ dont les restrictions aux $\mathsf{H}^2(\mathbb{Z}^n_{i,j}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ soient non nulles.

On notera que la définition de la classe de Koszul fait intervenir le choix d'une base de $\mathbb{Z}^n$. Les classes de Koszul associées à deux bases distinctes sont en général distinctes.

Soit $e_1, \ldots, e_n$ une base de $\mathbb{Z}^n$ qu'on ordonne suivant l'ordre naturel de $[1, n]$. Désignons alors par $\mathbb{Z}^n(\leq i)$ (resp. $\mathbb{Z}^n(\geq i)$) le sous-groupe de $\mathbb{Z}^n$ engendré par les e_j , $j \leq i$ (resp. $j \geq i$).

Définition 1.6.4. On appelle *cocycle de Koszul relatif à une base ordonnée* $e_1, \ldots, e_n$ de $\mathbb{Z}^n$ l'unique cocycle α dans la classe de Koszul relative à la base $e_1, \ldots, e_n$ qui vérifie les égalités :

(1.6.4.1) $$\alpha(\sigma_1, \sigma_2) = 1 \quad \forall\, \sigma_1 \in \mathbb{Z}^n(\leq i)\,,\ \forall\, \sigma_2 \in \mathbb{Z}^n(\geq i)\,,\ \forall\, i \in [1, n] \quad .$$

Soient $\sigma_1 = \sum_{i=1}^{n} p_i e_i\,,\ \sigma_2 = \sum_{i=1}^{n} q_i e_i$ deux éléments de $\mathbb{Z}^n$; on a alors :

(1.6.4.2) $$\alpha(\sigma_1, \sigma_2) = (-1)^{\left(\sum_{i<j} q_i p_j\right)} \quad .$$

Cette définition demande une justification. L'existence d'un cocycle dans la classe de Koszul vérifiant (1.6.4.1) est claire : un calcul immédiat montre que le cocycle (1.6.4.2) vérifie (1.6.4.1) et qu'il est dans la classe de Koszul (1.6.2). Pour vérifier l'unicité, il suffit de remarquer que tout cocycle cohomologue au cocycle α est du type :

$$\alpha_1(\sigma_1, \sigma_2) = \alpha(\sigma_1, \sigma_2)\beta(\sigma_2)\beta(\sigma_1 + \sigma_2)^{-1}\beta(\sigma_1)$$

et qu'un tel cocycle possède la propriété (1.6.4.1) si et seulement si :

$$\beta(\sigma_1 + \sigma_2) = \beta(\sigma_1)\beta(\sigma_2) \quad \forall\, i\,,\ \forall\, \sigma_1 \in \mathbb{Z}^n(\leq i)\,,\ \forall\, \sigma_2 \in \mathbb{Z}^n(\geq i) \quad .$$

On en déduit immédiatement que $\beta : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est un homomorphisme de groupes et par suite qu'on a $\alpha_1 = \alpha$.

1.6.5. La définition du cocycle de Koszul fait intervenir de façon essentielle l'ordre total que l'on met sur la base $e_1, \ldots, e_n$ de $\mathbb{Z}^n$. Désignons par $\leq$ l'ordre naturel de $[1, n]$ et par $\leq_s$ un ordre total sur $[1, n]$. Soit s l'unique permutation de $[1, n]$ telle que :

(1.6.5.1) $$i \leq_s j \Longleftrightarrow s(i) \leq s(j) \quad .$$

Soient α et α_s les cocycles de Koszul relatifs respectivement aux ordres $\leq$ et $\leq_s$. On a alors :

(1.6.5.2)
$$\alpha(\sigma_1, \sigma_2) = (-1)^{\left(\sum_{i<j} q_i p_j\right)} \quad ,$$
$$\sigma_1 = \sum_i p_i e_i\,,\ \sigma_2 = \sum_i q_i e_i\,,$$
$$\alpha_s(\sigma_1, \sigma_2) = (-1)^{\left(\sum_{s(i)<s(j)} q_i p_j\right)} \quad ,$$

d'où on déduit immédiatement :

$$\alpha_s(\sigma_1,\sigma_2)\,\alpha(\sigma_1,\sigma_2)^{-1} = \beta_s(\sigma_2)\beta_s(\sigma_1+\sigma_2)^{-1}\beta_s(\sigma_1) \quad ,$$

$$(1.6.5.3) \qquad \beta_s(\sigma_1) = (-1)^{\left(\sum\limits_{\substack{i<j\\ s(i)>s(j)}} p_i p_j\right)} \quad ,$$

$$\beta_s(e_i) = 1 \quad , \qquad \forall\, i \in [1,n] \quad .$$

Par suite, d'après (1.6.2), toute application $\beta : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ telle que

$$(1.6.5.4) \qquad \alpha_s(\sigma_1,\sigma_2)\,\alpha(\sigma_1,\sigma_2)^{-1} = \beta(\sigma_2)\beta(\sigma_1+\sigma_2)^{-1}\beta(\sigma_1)$$

est du type :

$$(1.6.5.5) \qquad \beta = \beta_s\eta \quad ,$$

où $\eta : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est l'unique homomorphisme de groupes qui prend sur les $e_j \in \mathbb{Z}^n$ les valeurs $\beta(e_j)$.

1.6.6. Soient $(\mathcal{C}_i,\mathbb{Z},T_i,c_i)$, $1 \leq i \leq n$, des $\mathbb{Z}$-catégories et $(\mathcal{D},\mathbb{Z},T,c)$ une $\mathbb{Z}$-catégorie additive. Désignons par $(\mathcal{C},\mathbb{Z}^n,T,c)$ la catégorie produit des $(\mathcal{C}_i,\mathbb{Z},T_i,c_i)$. Le groupe $\mathbb{Z}^n$ est muni naturellement d'une base ordonnée $e_1,\ldots,e_n$. Il opère à isomorphisme près sur $\mathcal{C}$ par la formule (on utilise ici la notation à droite introduite en (1.3.12)) :

$$(1.6.6.1) \qquad (X_1,\ldots,X_n)[\sigma] = \big(X_1[l_1],\ldots,X_n[l_n]\big) \ , \quad \sigma = \sum_{i=1}^{n} l_i e_i \quad .$$

Soit $\varphi : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$ l'homomorphisme $\varphi\big(\sum\limits_{i=1}^{n} l_i e_i\big) = \sum\limits_{i=1}^{n} l_i$. Faisons opérer $\mathbb{Z}^n$ sur $\mathcal{D}$ par l'intermédiaire de φ (1.4.1). Dans cette situation, nous utiliserons toujours les conventions suivantes :

Règle des signes I : *Les foncteurs de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{D}$ seront toujours, sauf mention expresse du contraire, des $\mathbb{Z}^n$-foncteurs tordus par le cocycle de Koszul relatif à la base ordonnée $e_1,\ldots,e_n$.*

Règle des signes II : *les morphismes de foncteurs seront, sauf mention expresse du contraire, des morphismes de $\mathbb{Z}^n$-foncteurs relatifs à l'homomorphisme trivial $\beta : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (1.4.6).*

D'après la proposition (1.5.2), se donner un foncteur de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{D}$ revient à se donner un foncteur :

$$(X_1, \ldots, X_n) \longmapsto F(X_1, \ldots, X_n) \tag{1.6.6.2}$$

et des isomorphismes de foncteurs :

$$p_i : F(X_1, \ldots, X_i[1], \ldots, X_n) \xrightarrow{\sim} F(X_1, \ldots, X_n)[1] \tag{1.6.6.3}$$

tels que les diagrammes (1.5.1.2) :

$$\begin{array}{ccc}
F(X_1, \ldots, X_i[1], \ldots, X_j[1], \ldots, X_n) & \xrightarrow{p_i} & F(X_1, \ldots, X_i, \ldots, X_j[1], \ldots, X_n)[1] \\
\downarrow{\scriptstyle p_j} & & \downarrow{\scriptstyle p_j[1]} \\
F(X_1, \ldots, X_i[1], \ldots, X_j, \ldots, X_n)[1] & \xrightarrow{p_i[1]} & F(X_1, \ldots, X_i, \ldots, X_j, \ldots, X_n)[2]
\end{array}$$

soient anticommutatifs (pour $i < j$). (Pour simplifier le diagramme (1.5.1.2), on a supposé, ce qui sera toujours le cas dans ce travail, que les isomorphismes de transition de $\mathcal{D}$ sont des identités).

De même, d'après la proposition (1.5.10), les morphismes de foncteurs $u : F \to F'$ que nous considérons sont soumis aux conditions suivantes : les diagrammes ci-après sont commutatifs :

$$\begin{array}{ccc}
F(X_1, \ldots, X_i[1], \ldots, X_n) & \xrightarrow{\quad u \quad} & F'(X_1, \ldots, X_i[1], \ldots, X_n) \\
\downarrow{\scriptstyle p_i} & & \downarrow{\scriptstyle p'_i} \\
F(X_1, \ldots, X_i, \ldots, X_n)[1] & \xrightarrow{\quad u[1] \quad} & F'(X_1, \ldots, X_i, \ldots, X_n)[1]
\end{array} \quad . \tag{1.6.6.4}$$

Lorsque le contexte ne prêtera à aucune confusion, nous désignerons les $\mathbb{Z}$-catégories par les catégories sous-jacentes et les $\mathbb{Z}^n$-foncteurs tordus par leurs foncteurs sous-jacents.