2. Complexes d'une catégorie additive.

2.1. Complexes n-uples.

2.1.1. Fixons d'abord quelques notations. On désigne par $[n]$ l'ensemble :

$$[n] = \{p \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq p \leq n\} \quad .$$

On désigne par $\mathbb{Z}[n]$ le groupe abélien libre engendré par l'ensemble $[n]$ et pour tout $i \in [n]$ par e_i le générateur de $\mathbb{Z}[n]$ associé à i. Soit $\varphi : [n] \to [m]$ une application ; on désigne encore par $\varphi : \mathbb{Z}[n] \to \mathbb{Z}[m]$ l'homomorphisme de groupes qui lui correspond. Dans ce paragraphe, $\mathcal{C}$ désigne une catégorie additive.

Définition 2.1.2. Un *complexe n-uple d'objets* de $\mathcal{C}$ est un objet constitué par :

1) La donnée, pour tout $\sigma \in \mathbb{Z}[n]$, d'un objet X^σ de $\mathcal{C}$.

2) La donnée, pour tout $\sigma \in \mathbb{Z}[n]$ et tout $i \in [n]$, d'un morphisme :

$$d^{\sigma,i} : X^\sigma \to X^{\sigma+e_i} \quad ,$$

ces morphismes étant soumis aux conditions suivantes :

$$(2.1.2.1) \qquad \begin{aligned} & d^{\sigma+e_i,i} d^{\sigma,i} = 0 \qquad \forall\, \sigma \in \mathbb{Z}[n]\,,\ \forall\, i \in [n] \quad , \\ & d^{\sigma+e_j,i} d^{\sigma,j} = d^{\sigma+e_i,j} d^{\sigma,i} \qquad \forall\, \sigma \in \mathbb{Z}[n]\,,\ \forall\, i\,, j \in [n] \quad . \end{aligned}$$

2.1.3. Un complexe n-uple d'objets de $\mathcal{C}$ sera appelé le plus souvent un *complexe n-uple* de $\mathcal{C}$. Soit $(X^\sigma,\, d^{\sigma,i})$ un complexe n-uple de $\mathcal{C}$. L'objet X^σ est appelé le *composant de degré σ* du complexe $(X^\sigma,\, d^{\sigma,i})$. Le morphisme $d^{\sigma,i}$ est appelé la *différentielle de degré σ dans la direction i* du complexe $(X^\sigma,\, d^{\sigma,i})$. Soit Y un complexe n-uple de $\mathcal{C}$. Le composant de degré σ de Y est noté Y^σ. La différentielle de degré σ dans la direction i de Y est notée $d_Y^{\sigma,i}$.

Définition 2.1.4. Soient Y et Y' deux complexes n-uples de $\mathcal{C}$. Un *morphisme de complexes de Y dans Y'* est une famille de morphismes de $\mathcal{C}$:

$$(f^\sigma : Y^\sigma \to Y'^\sigma)_{\sigma \in \mathbb{Z}[n]}$$

qui commutent aux différentielles, *i.e.* telle que :

$$(2.1.4.1) \qquad f^{\sigma+e_i} d_Y^{\sigma,i} = d_{Y'}^{\sigma,i} f^\sigma \quad .$$

2.1.5. Le morphisme $f^\sigma : Y^\sigma \to Y'^\sigma$ est appelé le *composant de degré* σ du morphisme (f^σ). Soit $f : Y \to Y'$ un morphisme de complexes n-uples. Le composant de degré σ de f est noté f^σ. Les morphismes de complexes n-uples se composent de manière évidente : composant par composant. Les complexes n-uples d'objets de $\mathcal{C}$ forment une catégorie qui est notée $\mathsf{comp}^n(\mathcal{C})$. Lorsque $n = 1$, on utilise la notation simplifiée $\mathsf{comp}^1(\mathcal{C}) = \mathsf{comp}(\mathcal{C})$. Les objets de $\mathsf{comp}(\mathcal{C})$ sont appelés les *complexes simples* de $\mathcal{C}$ ou même, lorsqu'aucune confusion n'en résulte, les *complexes* de $\mathcal{C}$. Les catégories $\mathsf{comp}^n(\mathcal{C})$ sont additives.

2.1.6. Soit Y un complexe n-uple de $\mathcal{C}$. On utilise parfois, pour désigner le composant de degré σ de Y, la notation $Y_{-\sigma}$, et, pour désigner la différentielle de degré σ de Y dans la direction i, la notation $d^Y_{-\sigma,i}$. Cette notation est surtout utilisée lorsque Y est un complexe simple dont tous les composants de degré positif sont nuls sauf un nombre fini d'entre eux. Soit de même $f : Y \to Y'$ un morphisme de complexes n-uples. On utilise parfois la notation $f_{-\sigma}$ pour désigner le composant de degré σ du morphisme f.

2.1.7. Soit $\varphi : [n] \to [m]$ une application. Un complexe n-uple Y de $\mathcal{C}$ est dit *φ-sommable*, si pour tout $\tau \in \mathbb{Z}[m]$, l'ensemble des $\sigma \in \mathbb{Z}[n]$ tels que $\varphi(\sigma) = \tau$ et Y^σ soit différent de 0, est fini. Lorsque φ est l'unique application $[n] \to [1]$, on dit simplement *sommable*. Soient $[n] \xrightarrow{\varphi} [m] \xrightarrow{\psi} [p]$ deux applications. Tout complexe n-uple Y qui est $\psi\varphi$-sommable est aussi φ-sommable. En particulier, tout complexe n-uple sommable est φ-sommable pour toute application $[n] \xrightarrow{\varphi} [m]$. Lorsque φ est une injection, tous les complexes sont φ-sommables. On appelle *catégorie des complexes n-uples φ-sommables*, la sous-catégorie pleine de $\mathsf{comp}^n(\mathcal{C})$ définie par les complexes φ-sommables.

2.2. Complexe simple associé.

2.2.1. Pour tout $\sigma \in \mathbb{Z}[n]$, $\sigma = \sum_{j \in [n]} l_j e_j$, $l_j \in \mathbb{Z}$, et pour tout $i \in [n]$ posons :

$$\varepsilon(\sigma, i) = (-1)^{\left(\sum_{j<i} l_j\right)} \qquad (2.2.1.1)$$

La formule (2.2.1.1) définit une application :

$$(\sigma, i) \longmapsto \varepsilon(\sigma, i)$$

de $\mathbb{Z}[n] \times [n]$ dans le groupe des signes $\{-1, 1\}$. On vérifie immédiatement que pour tout $i \in [n]$, l'application $\sigma \longmapsto \varepsilon(\sigma, i)$ est un homomorphisme de groupes et que $\varepsilon(e_j, i) = -1$ si $j < i$, $\varepsilon(e_j, i) = 1$ si $i \leq j$. L'application $(\sigma, i) \longmapsto \varepsilon(\sigma, i)$ est d'ailleurs uniquement déterminée par ces propriétés. On en déduit immédiatement la relation :

$$\varepsilon(\sigma, i)\varepsilon(\sigma + e_i, j) = -\varepsilon(\sigma, j)\varepsilon(\sigma + e_j, i) \tag{2.2.1.2}$$

valable pour tout $\sigma \in \mathbb{Z}[n]$ et pour tout couple $(i, j) \in [n] \times [n]$, $i \neq j$.

2.2.2. Soit Y un complexe n-uple de $\mathcal{C}$. Posons :

$$\delta_Y^{\sigma,i} = \varepsilon(\sigma, i) d_Y^{\sigma,i} \quad . \tag{2.2.2.1}$$

On déduit alors de (2.2.1.2) que les relations (2.1.2.1) sont équivalentes aux relations :

$$\begin{aligned} &\delta_Y^{\sigma+e_i,i}\delta_Y^{\sigma,i} = 0\ , \quad \forall\, \sigma \in \mathbb{Z}[n]\,, \quad \forall\, i \in [n] \quad , \\ &\delta_Y^{\sigma+e_j,i}\delta_Y^{\sigma,j} + \delta_Y^{\sigma+e_i,j}\delta_Y^{\sigma,i} = 0\ , \quad \forall\, \sigma \in \mathbb{Z}[n]\,, \quad \forall\, i, j \in [n] \quad . \end{aligned} \tag{2.2.2.2}$$

Soit maintenant $\varphi : [n] \to [m]$ une application et supposons que Y soit φ-sommable. On définit alors un complexe m-uple $\int_\varphi Y$ par les formules :

$$\Big(\int_\varphi Y\Big)^\tau = \bigoplus_{\varphi(\sigma)=\tau} Y^\sigma\ , \qquad \forall\, \tau \in \mathbb{Z}[m] \quad , \tag{2.2.2.3}$$

$$\delta_{\int_\varphi Y}^{\tau,i}(y_\sigma) = \sum_{\varphi(j)=i} \delta_Y^{\sigma,j}(y_\sigma)\,,\ \sigma \in \mathbb{Z}[n]\,, i \in [m]\,, y_\sigma \in Y^\sigma,\ \tau = \varphi(\sigma)\,. \tag{2.2.2.4}$$

La formule (2.2.2.4) définit un morphisme de $\big(\int_\varphi Y\big)^\tau = \bigoplus\limits_{\varphi(\sigma)=\tau} Y^\sigma$ dans $\big(\int_\varphi Y\big)^{\tau+e_i} = \bigoplus\limits_{\varphi(\sigma)=\tau+e_i} Y^\sigma$ lorsque $\mathcal{C}$ est la catégorie des groupes abéliens. Elle permet aussi de définir un morphisme de $\big(\int_\varphi Y\big)^\tau$ dans $\big(\int_\varphi Y\big)^{\tau+e_i}$ lorsque $\mathcal{C}$ est une catégorie additive en se plaçant dans la catégorie des foncteurs contravariants sur $\mathcal{C}$ à valeurs dans la catégorie des groupes abéliens, *i.e.* en interprétant y_σ comme un morphisme d'un objet quelconque de $\mathcal{C}$ dans Y^σ. Un calcul immédiat montre que les $\delta_{\int_\varphi Y}^{\tau,i}$ vérifient les relations (2.2.2.2) d'où, en revenant aux différentielles, que les objets définis par (2.2.2.3) munis des morphismes définis par :

$$d_{\int_\varphi Y}^{\tau,i}(y_\sigma) = \varepsilon(\tau, i) \sum_{\varphi(j)=i} \varepsilon(\sigma, j) d_Y^{\sigma,j}(y_\sigma)\,, \quad \begin{array}{l} \tau \in \mathbb{Z}[m]\,, \\ i \in [m]\,, \quad \sigma \in \mathbb{Z}[n]\,, \\ \varphi(\sigma) = \tau \end{array} \tag{2.2.2.5}$$

forment un complexe m-uple de $\mathcal{C}$.

Soit maintenant $f : Y \to Y'$ un morphisme de complexes n-uples de $\mathcal{C}$, φ-sommables. Posons :

$$\left(\int_\varphi f\right)^\tau = \bigoplus_{\varphi(\sigma)=\tau} f^\sigma : \left(\int_\varphi Y\right)^\tau \to \left(\int_\varphi Y'\right)^\tau \quad . \tag{2.2.2.6}$$

Il est clair que les $\left(\int_\varphi f\right)^\tau$ commutent aux différentielles de $\int_\varphi Y$ et de $\int_\varphi Y'$ et que, par suite, une telle famille définit un morphisme de complexes m-uples $\int_\varphi f : \int_\varphi Y \to \int_\varphi Y'$. Il est clair que $\int_\varphi fg = \int_\varphi f \int_\varphi g$ et que $\int_\varphi \mathsf{id}_Y = \mathsf{id}_{\int_\varphi Y}$. Par suite $\int_\varphi$ est un foncteur de la catégorie des complexes n-uples φ-sommables dans la catégorie des complexes m-uples. Ce foncteur est additif.

2.2.3. Soient $\varphi : [n] \to [m]$ une application, τ un élément de $\mathbb{Z}[m]$ et i un élément de $[m]$. Soient E_1 (resp. E_2) les ensembles :

$$E_1 = \{\sigma_1 \in \mathbb{Z}[n] \mid \varphi(\sigma_1) = \tau\}$$
$$\Big(\text{resp. } E_2 = \{\sigma_2 \in \mathbb{Z}[n] \mid \varphi(\sigma_2) = \tau + e_i\}\Big) \quad .$$

Soit enfin Y un complexe n-uple de $\mathcal{C}$. Posons, pour $\sigma_1 \in E_1$, $\sigma_2 \in E_2$:

$$\begin{aligned} u_{\sigma_2,\sigma_1}(Y) &= \varepsilon(\tau,i)\varepsilon(\sigma_1,j)d_Y^{\sigma_1,j} && \text{si} \quad \sigma_2 - \sigma_1 = e_j \ , \\ &= 0 && \text{sinon} \ , \end{aligned} \tag{2.2.3.1}$$

d'où une matrice de type $E_2 \times E_1$:

$$M(\tau,i,Y) = \big(u_{\sigma_2,\sigma_1}(Y)\big)_{\sigma_2\in E_2,\sigma_1\in E_1} \quad . \tag{2.2.3.2}$$

Lorsque Y est φ-sommable, cette matrice est la matrice du morphisme $d^{\tau,i}_{\int_\varphi Y}$. Remarquons que dans le cas général, cette matrice ne possède qu'un nombre fini de termes non nuls sur chaque ligne et sur chaque colonne. Il y a donc *a priori* au moins deux extensions possibles du foncteur $\int_\varphi$ aux complexes quelconques lorsque, dans $\mathcal{C}$, les produits dénombrables et les sommes directes dénombrables sont représentables :

$$(2.2.3.3)\qquad \begin{aligned}
&\left(\int_{\varphi}^{\Pi} Y\right)^{\tau} = \prod_{\varphi(\sigma)=\tau} Y^{\sigma} \quad ,\\
&d^{\tau,i}_{\int_{\varphi}^{\Pi} Y} \quad \text{défini par la matrice } \ M(\tau,i,Y) \ ,\\
&\left(\int_{\varphi}^{\Sigma} Y\right)^{\tau} = \bigoplus_{\varphi(\sigma)=\tau} Y^{\sigma} \quad ,\\
&d^{\tau,i}_{\int_{\varphi}^{\Sigma} Y} \quad \text{défini par la matrice } \ M(\tau,i,Y) \ .
\end{aligned}$$

Le foncteur $\int_{\varphi}^{\Pi}$ est appelé la Π-*extension* du foncteur $\int_{\varphi}$. Le foncteur $\int_{\varphi}^{\Sigma}$ est appelé la Σ-*extension* du foncteur $\int_{\varphi}$. Ces deux extensions seront utilisées par la suite. On a d'ailleurs un morphisme naturel de foncteurs $\int_{\varphi}^{\Sigma} \to \int_{\varphi}^{\Pi}$ correspondant au morphisme fonctoriel de la somme directe dans le produit.

2.2.4. Soient $[n] \xrightarrow{\varphi} [m] \xrightarrow{\psi} [r]$ deux applications et supposons, pour fixer les idées, que les produits dénombrables soient représentables dans $\mathcal{C}$. On a alors les relations :

$$(2.2.4.1)\qquad \int_{\psi}^{\Pi}\int_{\varphi}^{\Pi} = \int_{\psi\varphi}^{\Pi} \quad ,$$

$$(2.2.4.2)\qquad \int_{\mathsf{id}}^{\Pi} = \mathsf{id} \quad .$$

Le rédacteur se voit ici dans la pénible obligation de tirer l'irritant coup de chapeau habituel. Le signe $=$ de la formule (2.2.4.1) n'est valable que lorsqu'on dispose d'un foncteur produit possédant des propriétés d'associativité convenables, ce qui n'est jamais le cas dans la pratique. Dans le cas général, le signe "$=$" doit être remplacé par un isomorphisme canonique qui vérifie les propriétés de compatibilité usuelles du type (1.2.1.3). Des relations analogues aux relations (2.2.4.1) sont valables pour le foncteur $\int_{\varphi}^{\Sigma}$. Lorsque les produits et sommes dénombrables ne sont pas nécessairement représentables, la formule (2.2.4.1) est encore valable lorsqu'on se restreint aux complexes $\psi\varphi$-sommables. Lorsque ψ est l'unique morphisme $[n] \to [1]$, on utilise la notation $\int_n$. Pour tout complexe n-uple sommable Y, le complexe $\int_n Y$ est appelé le *complexe simple associé au complexe* Y.

2.3. Structure graduée sur les catégories de complexes.

2.3.1 Soient Y un complexe n-uple et $i \in [n]$. Posons :

$$(2.3.1.1) \qquad \begin{aligned} &(T_iY)^\sigma = Y^{\sigma+e_i} \quad , \qquad \sigma \in \mathbb{Z}[n] \quad , \\ &d_{T_iY}^{\sigma,j} = \nu(i,j) d_Y^{\sigma+e_i,j} \ , \quad j \in [n] \quad , \end{aligned}$$

où $\nu(i,j) = 1$ si $i \neq j$, $\nu(i,j) = -1$ si $i = j$. Pour tout morphisme de complexes n-uples $f : Y \to Y'$, posons :

$$(2.3.1.2) \qquad (T_if)^\sigma = f^{\sigma+e_i} \quad , \qquad \sigma \in \mathbb{Z}[n] \quad .$$

On définit ainsi un foncteur $T_i : \mathsf{comp}^n(\mathcal{C}) \to \mathsf{comp}^n(\mathcal{C})$ qu'on appelle le *foncteur de translation dans la direction* i. Lorsque $n = 1$, on utilise la notation TY, Tf ou bien $Y[1]$, $f[1]$. Le foncteur de translation dans la direction i est un automorphisme de $\mathsf{comp}^n(\mathcal{C})$. Les foncteurs T_i, $i \in [n]$, commutent deux à deux :

$$(2.3.1.3) \qquad T_iT_j = T_jT_i \quad , \qquad \forall i, j \in [n] \quad .$$

On peut donc définir une opération du groupe $\mathbb{Z}[n]$ sur la catégorie $\mathsf{comp}^n(\mathcal{C})$:

$$(2.3.1.4) \qquad \sigma = \sum_{i\in[n]} l_ie_i \quad , \qquad T(\sigma) = T_1^{l_1} \cdots T_n^{l_n} \quad .$$

La notation $\mathsf{comp}^n(\mathcal{C})$ désignera dorénavant la catégorie $\mathsf{comp}^n(\mathcal{C})$ munie de la structure de $\mathbb{Z}[n]$-catégorie stricte décrite ci-dessus.

2.3.2. Soient $\varphi : [n] \to [m]$ une application, Y un complexe n-uple de $\mathcal{C}$, i un élément de $[n]$. On suppose, pour fixer les idées, que les sommes dénombrables sont représentables dans $\mathcal{C}$. Remarquons tout d'abord que les objets $\left(\int_\varphi^\Sigma T_iY\right)^\tau$ et $\left(T_{\varphi(i)} \int_\varphi^\Sigma Y\right)^\tau$ sont égaux. Ils sont en effet égaux par définition à :

$$\bigoplus_{\varphi(\sigma)=\tau+e_{\varphi(i)}} Y^\sigma \quad .$$

Posons alors :

$$(2.3.2.1) \qquad \begin{aligned} &\big(p_{i,\varphi}(Y)\big)^\tau : \Big(\int_\varphi^\Sigma T_iY\Big)^\tau \to \Big(T_{\varphi(i)} \int_\varphi^\Sigma Y\Big)^\tau , \quad \tau \in \mathbb{Z}[m] \quad , \\ &\big(p_{i,\varphi}(Y)\big)^\tau = \bigoplus_{\varphi(\sigma)=\tau+e_{\varphi(i)}} \varepsilon(\sigma,i)\varepsilon\big(\varphi(\sigma),\varphi(i)\big)\mathsf{id}_{Y^\sigma} \quad . \end{aligned}$$

Un calcul immédiat montre que la famille $\big((p_{i,\varphi}(Y))^\tau,\ \tau\in\mathbb{Z}[m]\big)$ commute aux différentielles de $\int_\varphi^\Sigma T_iY$ et de $T_{\varphi(i)}\int_\varphi^\Sigma Y$ et qu'elle définit par suite un morphisme :

$$p_{i,\varphi}(Y):\int_\varphi^\Sigma T_iY\to T_{\varphi(i)}\int_\varphi^\Sigma Y\quad . \tag{2.3.2.2}$$

Ce morphisme est un isomorphisme fonctoriel en Y, d'où un isomorphisme de foncteurs :

$$p_{i,\varphi}:\int_\varphi^\Sigma T_i\xrightarrow{\sim}T_{\varphi(i)}\int_\varphi^\Sigma\quad . \tag{2.3.2.3}$$

Proposition 2.3.3. 1) *Pour tout couple $i,j\in[n]$, $i\neq j$, le diagramme :*

$$\begin{tikzcd}
\int_\varphi^\Sigma T_iT_j \arrow[r, "p_{i,\varphi}\star T_j"] \arrow[d, "p_{j,\varphi}\star T_i"'] & T_{\varphi(i)}\int_\varphi^\Sigma T_j \arrow[d, "T_{\varphi(i)}\star p_{j,\varphi}"] \\
T_{\varphi(j)}\int_\varphi^\Sigma T_i \arrow[r, "T_{\varphi(j)}\star p_{i,\varphi}"] & T_{\varphi(i)}T_{\varphi(j)}\int_\varphi^\Sigma
\end{tikzcd} \tag{2.3.3.1}$$

est commutatif lorsque $\varphi(i)\neq\varphi(j)$ et anticommutatif lorsque $\varphi(i)=\varphi(j)$.

2) *Soit $\psi:[m]\to[r]$ une application. Le diagramme :*

$$\begin{tikzcd}
\int_\psi^\Sigma\int_\varphi^\Sigma T_i \arrow[rr, "\int_\psi^\Sigma\star p_{i,\varphi}"] \arrow[d, equal] & & \int_\psi^\Sigma T_{\varphi(i)}\int_\varphi^\Sigma \arrow[d, "p_{\varphi(i),\psi}\star\int_\varphi^\Sigma"] \\
\int_{\psi\varphi}^\Sigma T_i \arrow[r, "p_{i,\psi\varphi}"] & T_{\psi\varphi(i)}\int_{\psi\varphi}^\Sigma \arrow[r, phantom, "="] & T_{\psi\varphi(i)}\int_\psi^\Sigma\int_\varphi^\Sigma
\end{tikzcd}$$

est commutatif. (Le lecteur qui ne veut pas tricher remplacera le signe "=" par des isomorphismes canoniques).

La preuve est immédiate et laissée au lecteur. La première assertion résulte de (2.2.1.2).

2.3.4. Prenons pour application φ l'unique application $[n] \xrightarrow{\varphi} [1]$ et faisons opérer le groupe $\mathbb{Z}[n]$ sur $\mathsf{comp}(\mathcal{C})$ par l'intermédiaire de $\varphi : \mathbb{Z}[n] \to \mathbb{Z}$. Il existe alors (1.5.2) un seul $\mathbb{Z}[n]$-foncteur tordu par le cocycle de Koszul :

$$\left(\int_n^{\Sigma}, p_n\right) : \mathsf{comp}^n(\mathcal{C}) \to \mathsf{comp}(\mathcal{C}) \tag{2.3.4.1}$$

tel que :

$$p_n(e_i) = p_{i,\varphi} \quad .$$

Dorénavant, la notation $\int_n^{\Sigma}$ désignera le foncteur $\int_n^{\Sigma}$ muni de la structure de $\mathbb{Z}[n]$-foncteur tordu décrite ci-dessus.

2.3.5. Les considérations développées aux alinéas (2.3.2), (2.3.3) et (2.3.4) s'appliquent, modulo les modifications évidentes, aux foncteurs $\int_{\varphi}^{\Pi}$. Lorsque les sommes et produits dénombrables ne sont pas nécessairement représentables dans $\mathcal{C}$, les résultats ci-dessus s'appliquent aux foncteurs $\int_{\varphi}$ en se restreignant à des complexes possédant des propriétés de sommabilité convenables.

2.4. Extension des foncteurs aux complexes.

2.4.1. Il existe un foncteur canonique :

$$\iota_n : \mathsf{comp}^n(\mathcal{C})^{\circ} \to \mathsf{comp}^n(\mathcal{C}^{\circ}) \tag{2.4.1.1}$$

défini par les formules suivantes :

$$\begin{aligned} \big(\iota_n X\big)^{\sigma} &= X^{-\sigma} \quad , \qquad X \in \mathsf{Ob}(\mathsf{comp}^n(\mathcal{C})) \quad , \\ d_{\iota_n X}^{\sigma,i} &= d_X^{-\sigma-e_i,i} \; , \\ \big(\iota_n f\big)^{\sigma} &= f^{-\sigma} \quad , \qquad f \in \mathsf{Fl}(\mathsf{comp}^n(\mathcal{C})) \quad . \end{aligned} \tag{2.4.1.2}$$

Le foncteur ι_n est un isomorphisme de $\mathbb{Z}[n]$-catégories (la structure de $\mathbb{Z}[n]$-catégorie de $\mathsf{comp}^n(\mathcal{C}^{\circ})$ est définie par (2.3.1) ; la structure graduée de $\mathsf{comp}^n(\mathcal{C})^{\circ}$ est définie par (2.3.1) et (1.3.9)).

Supposons que les sommes directes dénombrables soient représentables dans $\mathcal{C}$ et soit $\varphi : [n] \to [m]$ une application. Désignons par :

$$\left(\int_{\varphi,\mathcal{C}}^{\Sigma}\right)^{\circ} : \mathsf{comp}^n(\mathcal{C})^{\circ} \to \mathsf{comp}^m(\mathcal{C})^{\circ} \quad , \tag{2.4.1.3}$$

le foncteur opposé au foncteur défini en (2.2.3) et (2.2.4). De même, désignons par :

$$\int_{\varphi,\mathcal{C}^\circ}^{\Pi} : \mathsf{comp}^n(\mathcal{C}^\circ) \to \mathsf{comp}^m(\mathcal{C}^\circ) \quad , \tag{2.4.1.4}$$

le foncteur défini en (2.2.3) et (2.2.4). On vérifie immédiatement que le diagramme :

$$\begin{tikzcd} \mathsf{comp}^n(\mathcal{C})^\circ \arrow[r, "\iota_n"] \arrow[d, "\left(\int_{\varphi,\mathcal{C}}^{\Sigma}\right)^\circ"'] & \mathsf{comp}^n(\mathcal{C}^\circ) \arrow[d, "\int_{\varphi,\mathcal{C}^\circ}^{\Pi}"] \\ \mathsf{comp}^m(\mathcal{C})^\circ \arrow[r, "\iota_m"] & \mathsf{comp}^m(\mathcal{C}^\circ) \end{tikzcd} \tag{2.4.1.5}$$

est commutatif. En particulier, lorsque φ est l'unique application $[n] \to [1]$, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathsf{comp}^n(\mathcal{C})^\circ \arrow[r, "\iota_n"] \arrow[d, "\left(\int_{n,\mathcal{C}}^{\Sigma}\right)^\circ"'] & \mathsf{comp}^n(\mathcal{C}^\circ) \arrow[d, "\int_{n,\mathcal{C}^\circ}^{\Pi}"] \\ \mathsf{comp}(\mathcal{C})^\circ \arrow[r, "\iota_1"] & \mathsf{comp}(\mathcal{C}^\circ) \end{tikzcd} \tag{2.4.1.6}$$

et on vérifie immédiatement que le couple d'isomorphismes (ι_1, ι_n) est un isomorphisme du $\mathbb{Z}[n]$-foncteur tordu $\left(\int_{n,\mathcal{C}}^{\Sigma}\right)^\circ$ sur le $\mathbb{Z}[n]$-foncteur tordu $\int_{n,\mathcal{C}^\circ}^{\Pi}$ (la structure graduée de $\int_{n,\mathcal{C}^\circ}^{\Pi}$ est décrite en (2.3.4) ; la structure graduée de $\left(\int_{n,\mathcal{C}}^{\Sigma}\right)^\circ$ est décrite en (2.3.4) et (1.4.8)).

Nous identifierons dorénavant par l'isomorphisme ι_n les catégories $\mathsf{comp}^n(\mathcal{C})^\circ$ et $\mathsf{comp}^n(\mathcal{C}^\circ)$ et les foncteurs $\left(\int_{\varphi,\mathcal{C}}^{\Sigma}\right)^\circ$ et $\int_{\varphi,\mathcal{C}^\circ}^{\Pi}$.

2.4.2. Soient $\mathcal{C}_i$, $i \in [n]$, une famille de catégories additives et $\prod_{i\in[n]} \mathcal{C}_i$ leur produit. On désigne par $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ les objets de $\prod_{i\in[n]} \mathcal{C}_i$ et on utilise la notation $(X_1, X_2, \dots, f_i, \dots, X_n)$ pour désigner le morphisme :

$$(\mathsf{id}_{X_1}, \mathsf{id}_{X_2}, \dots, f_i, \dots, \mathsf{id}_{X_n}) \quad .$$

Ces conventions s'appliquent en particulier à la catégorie $\prod_{i\in[n]} \mathsf{comp}(\mathcal{C}_i)$. Remarquons que la catégorie $\prod_{i\in[n]} \mathsf{comp}(\mathcal{C}_i)$ est munie d'une structure de $\mathbb{Z}[n]$-catégorie (1.3.11). Pour tout $\sigma = \sum_{i\in[n]} l_i e_i$, $\sigma \in \mathbb{Z}[n]$, on a :

$$T(\sigma)(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \big(X_1[l_1], X_2[l_2], \ldots, X_n[l_n]\big) \quad . \tag{2.4.2.1}$$

Un objet $(X_1, \ldots, X_n)$ de $\prod_{i\in[n]} \mathsf{comp}(\mathcal{C}_i)$ est dit *sommable* si pour tout $l \in \mathbb{Z}$, l'ensemble des $\sigma = \sum_{i\in[n]} l_i e_i \in \mathbb{Z}[n]$ tels que $\sum_{i\in[n]} l_i = l$ et $X_i^{l_i} \neq 0$, pour au moins un $i \in [n]$, est fini.

Soit maintenant $F : \prod_{i\in[n]} \mathcal{C}_i \to \mathcal{C}$ un foncteur multiadditif (covariant). Pour tout objet $(X_1, \ldots, X_n)$ de $\prod_{i\in[n]} \mathsf{comp}(\mathcal{C}_i)$, posons :

$$F^{[n]}(X_1, \ldots, X_n)^\sigma = F(X_1^{l_1}, \ldots, X_n^{l_n}) \quad , \tag{2.4.2.2}$$

pour tout $\sigma = \sum_{i\in[n]} l_i e_i \in \mathbb{Z}[n]$,

$$d^{\sigma,i}_{F^{[n]}(X_1,\ldots,X_n)} = F(X_1^{l_1}, \ldots, d^{l_i}_{X_i}, \ldots, X_n^{l_n}) \, , \qquad \forall\, i \in [n] \quad .$$

On a ainsi défini un complexe n-uple de $\mathcal{C}$.

Pour tout morphisme $(f_1, \ldots, f_n)$ de $\prod_{i\in[n]} \mathsf{comp}(\mathcal{C}_i)$, posons :

$$F^{[n]}(f_1, \ldots, f_n)^\sigma = F(f_1^{l_1}, \ldots, f_n^{l_n}) \quad , \tag{2.4.2.3}$$

pour tout $\sigma = \sum_{i\in[n]} l_i e_i \in \mathbb{Z}[n]$. On a ainsi défini un morphisme de complexes n-uples.

Ce qui précède définit visiblement un foncteur :

$$F^{[n]} : \prod_{i\in[n]} \mathsf{comp}(\mathcal{C}_i) \to \mathsf{comp}^n(\mathcal{C}) \quad . \tag{2.4.2.4}$$

Remarquons que pour tout $\sigma \in \mathbb{Z}[n]$, on a :

$$F^{[n]} T(\sigma) = T(\sigma) F^{[n]} \quad . \tag{2.4.2.5}$$

Par suite, le foncteur $F^{[n]}$ est un $\mathbb{Z}[n]$-foncteur strict. Le foncteur $F^{[n]}$ transforme les objets sommables de $\prod_{i\in[n]} \mathsf{comp}(\mathcal{C}_i)$ en objets sommables de $\mathsf{comp}^n(\mathcal{C})$.

Supposons maintenant que les produits (resp. sommes directes) dénombrables soient représentables dans $\mathcal{C}$. On pose alors :

(2.4.2.6)
$$\mathsf{comp}_\Pi F = \int_n^\Pi F^{[n]} \quad ,$$
$$(\text{resp.} \quad \mathsf{comp}_\Sigma F = \int_n^\Sigma F^{[n]} \quad) \quad .$$

Le foncteur $\mathsf{comp}_\Pi F$ (resp. $\mathsf{comp}_\Sigma F$) : $\prod\limits_{i\in[n]} \mathsf{comp}(\mathcal{C}_i) \to \mathsf{comp}(\mathcal{C})$ est appelé la Π-*extension* (resp. la Σ-*extension*) du foncteur F aux complexes. Le foncteur F étant un $\mathbb{Z}[n]$-foncteur strict et le foncteur $\int_n^\Pi$ (resp. $\int_n^\Sigma$) étant un $\mathbb{Z}[n]$-foncteur tordu par le cocycle de Koszul relatif à la base ordonnée $e_1, \ldots, e_n$ de $\mathbb{Z}[n]$, le foncteur $\mathsf{comp}_\Pi F$ (resp. $\mathsf{comp}_\Sigma F$) est un $\mathbb{Z}[n]$-foncteur tordu par le cocycle de Koszul relatif à la base ordonnée $e_1, \ldots, e_n$ de $\mathbb{Z}[n]$, conformément à la règle des signes I (1.6.6). On a donc pour tout $i \in [n]$ des isomorphismes canoniques :

(2.4.2.7)
$$\mathsf{comp}_\Pi F(X_1, \ldots, X_i[1], \ldots, X_n) \xrightarrow{\sim} \mathsf{comp}_\Pi F(X_1, \ldots, X_i, \ldots, X_n)[1]$$

$$(\text{resp.} \quad \mathsf{comp}_\Sigma F(X_1, \ldots, X_i[1], \ldots, X_n) \xrightarrow{\sim} \mathsf{comp}_\Sigma F(X_1, \ldots, X_i, \ldots, X_n)[1] \ )$$

qui seront notés p_i . Ces isomorphismes possèdent les propriétés d'anticommutativité décrites en (1.6.6.3). Les restrictions des foncteurs $\mathsf{comp}_\Pi F$ et $\mathsf{comp}_\Sigma F$ aux objets sommables de $\prod\limits_{i\in[n]} \mathsf{comp}(\mathcal{C}_i)$ sont égales, et cette restriction peut toujours se définir, sans hypothèses sur la catégorie $\mathcal{C}$.

2.4.3. Soient maintenant deux foncteurs multiadditifs F , F' : $\prod\limits_{i\in[n]} \mathcal{C}_i \to \mathcal{C}$ et $h : F \to F'$ un morphisme de foncteurs. On en déduit un morphisme de foncteurs :
$$h^{[n]} : F^{[n]} \to F'^{[n]} \quad ,$$

en posant :

(2.4.3.1)
$$h^{[n]}(X_1, \ldots, X_n)^\sigma = h(X_1^{l_1}, \ldots, X_n^{l_n}) \quad ,$$
$$\sigma = \sum_{i\in[n]} l_i e_i \in \mathbb{Z}[n] \quad , \qquad (X_1, \ldots, X_n) \in \mathsf{Ob}\Big(\prod_{i\in[n]} \mathsf{comp}(\mathcal{C}_i)\Big) \quad .$$

D'où, en passant aux complexes simples, deux morphismes de foncteurs :

$$\text{(2.4.3.2)}\qquad \begin{aligned} \mathsf{comp}_\Pi h : \mathsf{comp}_\Pi F \to \mathsf{comp}_\Pi F' \quad , \\ \mathsf{comp}_\Sigma h : \mathsf{comp}_\Sigma F \to \mathsf{comp}_\Sigma F' \quad . \end{aligned}$$

Si h et h' sont deux morphismes composables de foncteurs multiadditifs, on a :

$$\begin{aligned} \mathsf{comp}_\Pi hh' = \mathsf{comp}_\Pi h \, \mathsf{comp}_\Pi h' \quad , \\ \mathsf{comp}_\Sigma hh' = \mathsf{comp}_\Sigma h \, \mathsf{comp}_\Sigma h' \quad . \end{aligned}$$

Le morphisme $\mathsf{comp}_\Pi h$ (resp. $\mathsf{comp}_\Sigma h$) est un morphisme de $\mathbb{Z}[n]$-foncteurs qui suit la règle des signes II (1.6.6).

2.4.4. Lorsque le foncteur F est contravariant en certaines variables, *i.e.* lorsqu'on a des égalités $\mathcal{C}_i = (\mathcal{C}'_i)^\circ$, pour $i \in J \subset [n]$, les foncteurs $\mathsf{comp}_\Pi F$ et $\mathsf{comp}_\Sigma F$ sont, modulo les identifications faites en (2.4.1), contravariants en les variables correspondantes.

2.5. Homotopies.

2.5.1. Soient X et Y deux complexes n-uples de $\mathcal{C}$ et $f, g : X \rightrightarrows Y$ deux morphismes de complexes. Une *homotopie* reliant f à g est une famille de morphismes $a = (a^{\sigma,i} : X^{\sigma+e_i} \to Y^\sigma \, , \, \sigma \in \mathbb{Z}[n] \, , \, i \in [n])$ telle que :

$$\text{(2.5.1.1)}\qquad \begin{aligned} a^{\sigma+e_i-e_j,j} d_X^{\sigma,i} = d_Y^{\sigma-e_j,i} a^{\sigma-e_j,j} \, , \quad \forall\, \sigma \in \mathbb{Z}[n] \, , \, \forall\, i,j \in [n] \, , \, i \neq j \, , \\ g^\sigma - f^\sigma = \sum_{i \in [n]} a^{\sigma,i} d_X^{\sigma,i} + d_Y^{\sigma-e_i,i} a^{\sigma-e_i,i} , \quad \forall\, \sigma \in \mathbb{Z}[n] \quad . \end{aligned}$$

On utilise la notation $a : f \rightsquigarrow g$ pour désigner les homotopies a reliant f à g.

2.5.2. Soient $f, g, h : X \Rrightarrow Y$ trois morphismes, $a : f \rightsquigarrow g$ et $b : g \rightsquigarrow h$ deux homotopies. On désigne par $b + a : f \rightsquigarrow h$, l'homotopie $\big((b+a)^{\sigma,i} = b^{\sigma,i} + a^{\sigma,i} \, , \, \sigma \in \mathbb{Z}[n] \, , \, i \in [n]\big)$.

2.5.3. Soient $f, g : X \rightrightarrows Y$ deux morphismes de complexes, $a : f \rightsquigarrow g$ une homotopie et $u : Y \to Y'$ (resp. $v : X' \to X$) un morphisme de complexes. On désigne par $u \star a : uf \rightsquigarrow ug$ (resp. $a \star v : fv \rightsquigarrow gv$) l'homotopie $\big((u \star a)^{\sigma,i} = u^\sigma a^{\sigma,i}\big)$ (resp. $\big((a \star v)^{\sigma,i} = a^{\sigma,i} v^{\sigma+e_i}\big)$).

2.5.4. Les opérations $\star$ et "somme des homotopies" possèdent les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} u\star(b+a) &= u\star b + u\star a \quad ,\\ (b+a)\star v &= b\star v + a\star v \quad ,\\ uu'\star a &= u\star(u'\star a) \quad ,\\ a\star vv' &= (a\star v)\star v' \quad . \end{aligned} \tag{2.5.4.1}$$

2.5.5. Deux morphismes $f,g : X \rightrightarrows Y$ sont dits *homotopes* s'il existe une homotopie qui les relie. Deux morphismes f, g sont homotopes si le morphisme $f-g$ est homotope à zéro. Soit $f : X \to Y$ un morphisme homotope à zéro. Pour tout $\sigma \in \mathbb{Z}[n]$, le morphisme $T(\sigma)f$ est homotope à zéro. L'ensemble des morphismes homotopes à zéro forme un idéal de $\mathsf{comp}^n(\mathcal{C})$, *i.e.* le composé dans les deux sens d'un morphisme homotope à zéro avec un morphisme quelconque est homotope à zéro et la somme directe de deux morphismes homotopes à zéro est homotope à zéro.

2.5.6. Soit $\varphi : [n] \to [m]$ une application. Les foncteurs $\int_\varphi^\Sigma$ et $\int_\varphi^\Pi$ transforment les couples de morphismes homotopes de $\mathsf{comp}^n(\mathcal{C})$ en couples de morphismes homotopes de $\mathsf{comp}^m(\mathcal{C})$. Soient de même $F : \prod_{i\in[n]} \mathcal{C}_i \to \mathcal{C}$ un foncteur multiadditif,

$$F^{[n]} : \prod_{i\in[n]} \mathsf{comp}(\mathcal{C}_i) \to \mathsf{comp}^n(\mathcal{C})$$

le foncteur décrit en (2.4.2.4), X_i des objets de $\mathsf{comp}(\mathcal{C}_i)$ $(i \neq j)$ et $f,g : X \rightrightarrows Y$ deux morphismes homotopes de $\mathsf{comp}(\mathcal{C}_j)$. Les morphismes de $\mathsf{comp}^n(\mathcal{C})$:

$$F^{[n]}(X_1,\ldots,f,\ldots,X_n) \quad \text{et} \quad F^{[n]}(X_1,\ldots,g,\ldots,X_n)$$

sont homotopes. Par suite, les morphismes de $\mathsf{comp}(\mathcal{C})$:

$$\mathsf{comp}_\Pi F(X_1,\ldots,f,\ldots,X_n) \quad \text{et} \quad \mathsf{comp}_\Pi F(X_1,\ldots,g,\ldots,X_n)$$

sont homotopes (même résultat pour $\mathsf{comp}_\Sigma F$). Nous laissons au lecteur le soin de vérifier toutes ces assertions ou de se reporter à [**1**].

2.5.7. Désignons par $\mathsf{K}(\mathcal{C})$ la catégorie suivante :

– Les objets de $\mathsf{K}(\mathcal{C})$ sont les objets de $\mathsf{comp}(\mathcal{C})$.

– Soient X et Y deux objets de $\mathsf{K}(\mathcal{C})$, $f,g : X \rightrightarrows Y$ deux morphismes de $\mathsf{comp}(\mathcal{C})$. La relation "$f$ et g sont homotopes" est une relation d'équivalence sur $\mathsf{Hom}_{\mathsf{comp}(\mathcal{C})}(X,Y)$, et on définit $\mathsf{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{C})}(X,Y)$ comme le quotient de $\mathsf{Hom}_{\mathsf{comp}(\mathcal{C})}(X,Y)$ par cette relation d'équivalence.

– Il résulte immédiatement de (2.5.5) que la loi de composition sur les morphismes de $\mathsf{comp}(\mathcal{C})$ passe au quotient et définit une loi de composition sur les morphismes de $\mathsf{K}(\mathcal{C})$.

Il résulte immédiatement de (2.5.5) qu'on a bien défini ainsi une catégorie et que cette catégorie est additive. Le foncteur canonique $\mathsf{comp}(\mathcal{C}) \xrightarrow{Q} \mathsf{K}(\mathcal{C})$ qui est l'identité sur les objets et qui associe à tout morphisme f de $\mathsf{comp}(\mathcal{C})$ sa classe d'équivalence $\dot{f}$ est additif. Le morphisme $\dot{f}$ de $\mathsf{K}(\mathcal{C})$ image du morphisme f de $\mathsf{comp}(\mathcal{C})$ par le foncteur canonique est appelé la *classe de f modulo homotopie*. La catégorie $\mathsf{K}(\mathcal{C})$ est appelé la *catégorie des complexes de $\mathcal{C}$ à homotopie près*.

2.5.8. Le foncteur canonique $\mathsf{comp}(\mathcal{C}) \xrightarrow{Q} \mathsf{K}(\mathcal{C})$ possède la propriété suivante : tout foncteur de $\mathsf{K}(\mathcal{C})$ dans une catégorie $\mathcal{A}$ fournit, par composition avec Q, un foncteur de $\mathsf{comp}(\mathcal{C})$ dans $\mathcal{A}$, d'où, pour toute catégorie $\mathcal{A}$, un foncteur :

$$\mathcal{H}om(Q,\mathcal{A}) : \mathcal{H}om\big(\mathsf{K}(\mathcal{C}),\mathcal{A}\big) \to \mathcal{H}om\big(\mathsf{comp}(\mathcal{C}),\mathcal{A}\big)$$

($\mathcal{H}om$ désigne la catégorie des foncteurs). Ce foncteur est pleinement fidèle, injectif sur les objets et l'image est la sous-catégorie pleine de :

$$\mathcal{H}om\big(\mathsf{comp}(\mathcal{C}),\mathcal{A}\big)$$

définie par les foncteurs de $\mathsf{comp}(\mathcal{C})$ dans $\mathcal{A}$ qui transforment tout couple de morphismes homotopes de $\mathsf{comp}(\mathcal{C})$ en morphismes égaux. La catégorie $\mathsf{K}(\mathcal{C})$ munie du foncteur canonique $\mathsf{comp}(\mathcal{C}) \xrightarrow{Q} \mathsf{K}(\mathcal{C})$ est déterminée à isomorphisme unique près par cette propriété.

2.5.9. Il résulte immédiatement de (2.5.5) et de (2.5.8) qu'il existe un et un seul foncteur de translation sur $\mathsf{K}(\mathcal{C})$ tel que le foncteur canonique :

$$\mathsf{comp}(\mathcal{C}) \to \mathsf{K}(\mathcal{C})$$

commute (strictement) aux translations. Ce foncteur de translation est un automorphisme de $\mathsf{K}(\mathcal{C})$ et par suite définit sur $\mathsf{K}(\mathcal{C})$ une structure de $\mathbb{Z}$-catégorie stricte. Le foncteur canonique $\mathsf{comp}(\mathcal{C}) \to \mathsf{K}(\mathcal{C})$ est un $\mathbb{Z}$-foncteur strict.

2.5.10. Soit $F : \prod_{i\in[n]} \mathcal{C}_i \to \mathcal{C}$ un foncteur multiadditif. Désignons par :

$$Q_i : \mathsf{comp}(\mathcal{C}_i) \to \mathsf{K}(\mathcal{C}_i)$$

les foncteurs canoniques. Il résulte de (2.5.6) et de (2.5.7) qu'il existe, lorsque les produits dénombrables sont représentables dans $\mathcal{C}$, un et un seul foncteur $\mathsf{K}_\Pi(F) : \prod_{i\in[n]} \mathsf{K}(\mathcal{C}_i) \to \mathsf{K}(\mathcal{C})$ tel que le diagramme ci-après soit commutatif :

(2.5.10.1)
$$\begin{tikzcd} \prod_{i\in[n]} \mathsf{comp}(\mathcal{C}_i) \arrow[r, "\mathsf{comp}_\Pi F"] \arrow[d, "\prod_{i\in[n]} Q_i"'] & \mathsf{comp}(\mathcal{C}) \arrow[d, "Q"] \\ \prod_{i\in[n]} \mathsf{K}(\mathcal{C}_i) \arrow[r, "\mathsf{K}_\Pi F"] & \mathsf{K}(\mathcal{C}) \end{tikzcd} \quad .$$

De plus, le foncteur $\prod_{i\in[n]} Q_i$ étant un $\mathbb{Z}[n]$-foncteur strict, il existe sur le foncteur $\mathsf{K}_\Pi\, F$ une et une seule structure de $\mathbb{Z}[n]$-foncteur gradué tordu par le cocycle de Koszul relatif à la base ordonnée $e_1, \ldots, e_n$ de $\mathbb{Z}[n]$, tel qu'on ait l'égalité entre $\mathbb{Z}[n]$-foncteurs tordus :

(2.5.10.2)
$$\mathsf{K}_\Pi\, F \prod_{i\in[n]} Q_i = Q\, \mathsf{comp}_\Pi F \quad .$$

Enfin, soient F et F' deux foncteurs multiadditifs et $m : F \to F'$ un morphisme de foncteurs. Il résulte de (2.5.7) qu'il existe un et un seul morphisme de foncteurs :

(2.5.10.3)
$$\mathsf{K}_\Pi\, m : \mathsf{K}_\Pi\, F \to \mathsf{K}_\Pi\, F'$$

tel que :

(2.5.10.4)
$$\mathsf{K}_\Pi\, m \star \prod_{i\in[n]} Q_i = Q \star \mathsf{comp}_\Pi m \quad .$$

Le foncteur $\mathsf{K}_\Pi F$ est appelé la Π-*extension* du foncteur F aux complexes à homotopie près. Le morphisme $\mathsf{K}_\Pi\, m$ est appelé la Π-*extension* du morphisme m aux complexes à homotopie près.

Lorsque les sommes directes dénombrables sont représentables dans $\mathcal{C}$, on définit de manière analogue le foncteur $\mathsf{K}_\Sigma\, F$: la Σ-*extension* du foncteur F aux complexes à homotopie près, et le morphisme $\mathsf{K}_\Sigma\, m$: la Σ-*extension* du morphisme m aux complexes à homotopie près.

2.5.11. Soient X et Y deux complexes de $\mathcal{C}$. Un morphisme de $\mathsf{comp}(\mathcal{C})$, $f : X \to Y$, est appelé un *homotopisme* si son image $\dot{f}$ dans $\mathsf{K}(\mathcal{C})$ est un isomorphisme. Les complexes X et Y sont dits *homotopes* s'ils sont isomorphes dans $\mathsf{K}(\mathcal{C})$.

2.5.12. Soient X et Y deux complexes de $\mathcal{C}$, $f, g : X \rightrightarrows Y$ deux morphismes de $\mathsf{comp}(\mathcal{C})$, $a, b : f \rightsquigarrow g$ deux homotopies reliant f à g. On appelle *homotopie du deuxième ordre* reliant a à b, notée $\alpha : a \rightsquigarrow b$, une famille de morphismes $\alpha = \big(\alpha^i : X^{i+2} \to Y^i,\ i \in \mathbb{Z}\big)$ telle que :

$$(2.5.12.1) \qquad b^i - a^i = \alpha^i d_X^{i+1} - d_Y^{i-1}\alpha^{i-1} \quad .$$

2.5.13. Remarquons pour terminer que l'isomorphisme (2.4.1) :

$$\iota_1 : \mathsf{comp}(\mathcal{C})^\circ \to \mathsf{comp}(\mathcal{C}^\circ)$$

définit, en vertu de (2.5.7), un unique isomorphisme :

$$\iota_1 : \mathsf{K}(\mathcal{C})^\circ \to \mathsf{K}(\mathcal{C}^\circ)$$

qui est un isomorphisme de $\mathbb{Z}$-catégories. Nous identifierons dorénavant le plus souvent les catégories $\mathsf{K}(\mathcal{C})^\circ$ et $\mathsf{K}(\mathcal{C}^\circ)$ par cet isomorphisme.