# 3. Triangles distingués.

## 3.1. Le cône d'un morphisme.

**3.1.1.** Soit $\mathcal{C}$ une catégorie additive. On désigne par $\mathsf{tr}_1(\mathcal{C})$ la catégorie suivante :

– Les objets de $\mathsf{tr}_1(\mathcal{C})$ sont les morphismes (de degré zéro) $X \xrightarrow{f} Y$ de complexes d'objets de $\mathcal{C}$.

– Soient $X \xrightarrow{f} Y$ et $X' \xrightarrow{f'} Y'$ deux objets de $\mathsf{tr}_1(\mathcal{C})$. Un morphisme de $X \xrightarrow{f} Y$ dans $X' \xrightarrow{f'} Y'$ est un triplet $(g,h,a)$, où $g : X \to X'$ et $h : Y \to Y'$ sont des morphismes de complexes de degré zéro et où $a : f'g \rightsquigarrow hf$ est une homotopie reliant $f'g$ à $hf$.

– Soient :

$$(g,h,a) : (X \xrightarrow{f} Y) \to (X' \xrightarrow{f'} Y') \quad \text{et} \quad (g',h',a') : (X' \xrightarrow{f'} Y') \to (X'' \xrightarrow{f''} Y'')$$

deux morphismes de $\mathsf{tr}_1(\mathcal{C})$. Le morphisme composé :

$$(g'',h'',a'') : (X \xrightarrow{f} Y) \to (X'' \xrightarrow{f''} Y'')$$

est alors défini par les égalités :

$$\begin{aligned} g'' &= g'g \quad , \\ h'' &= h'h \quad , \\ a'' &= a' \star g + h' \star a \quad . \end{aligned} \tag{3.1.1.1}$$

On vérifie aussitôt qu'on a bien ainsi défini une catégorie. On représentera le plus souvent un morphisme $(g,h,a) : (X \xrightarrow{f} Y) \to (X' \xrightarrow{f'} Y')$ de $\mathsf{tr}_1(\mathcal{C})$ par un diagramme :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & Y \arrow[d, "h"] \\ X' \arrow[r, "f'"'] \arrow[ur, phantom, "\nearrow a"] & Y' \end{tikzcd} \quad . \tag{3.1.1.2}$$

La catégorie $\mathsf{tr}_1(\mathcal{C})$ est additive. La somme directe de $X \xrightarrow{f} Y$ et de $X' \xrightarrow{f'} Y'$ est :

$$X \oplus X' \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} f & 0 \\ 0 & f' \end{smallmatrix}\right)} Y \oplus Y' \quad .$$

**3.1.2.** Soit $X \xrightarrow{f} Y$ un objet de $\mathsf{tr}_1(\mathcal{C})$. Posons :

$$(3.1.2.1) \qquad \begin{aligned} & c(f)^i = Y^i \oplus X^{i+1} \quad , \\ & d^i_{c(f)} = \begin{pmatrix} d^i_Y & f^{i+1} \\ 0 & -d^{i+1}_X \end{pmatrix} : Y^i \oplus X^{i+1} \to Y^{i+1} \oplus X^{i+2} \quad . \end{aligned}$$

On vérifie qu'on a ainsi défini un complexe d'objets de $\mathcal{C}$. Ce complexe est noté $c(f)$ et est appelé le *cône du morphisme* $f$. Soit maintenant :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, squiggly, "a"] & Y \arrow[d, "h"] \\ X' \arrow[r, "f'"'] & Y' \end{tikzcd}$$

un morphisme de $\mathsf{tr}_1(\mathcal{C})$. Posons :

$$(3.1.2.2) \qquad c\big((g,h,a)\big)^i = \begin{pmatrix} h^i & a^i \\ 0 & g^{i+1} \end{pmatrix} : Y^i \oplus X^{i+1} \to Y'^i \oplus X'^{i+1} \quad .$$

Ces morphismes commutent avec les différentielles de $c(f)$ et de $c(f')$ et par suite définissent un morphisme de complexes :

$$(3.1.2.3) \qquad c\big((g,h,a)\big) : c(f) \to c(f') \quad .$$

On vérifie qu'on a défini ainsi un foncteur $c : \mathsf{tr}_1(\mathcal{C}) \to \mathsf{comp}(\mathcal{C})$ qu'on appelle le *foncteur cône*.

Désignons par $s : \mathsf{comp}(\mathcal{C}) \to \mathsf{tr}_1(\mathcal{C})$ le foncteur $X \longmapsto (0 \to X)$. Pour tout objet $X \xrightarrow{f} Y$ de $\mathsf{tr}_1(\mathcal{C})$, on désigne par $\Phi(f) : (X \xrightarrow{f} Y) \to sc(f)$ le morphisme suivant de $\mathsf{tr}_1(\mathcal{C})$ :

$$\Phi(f) = \big(0, p(f), a(f)\big) \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d] & Y \arrow[d, "p(f)"] \\ 0 \arrow[r, squiggly] & c(f) \arrow[from=l, phantom, ""] \end{tikzcd} \quad ,$$

(3.1.2.4)

$$p(f)^i = \begin{pmatrix} \mathsf{id}_{Y^i} \\ 0 \end{pmatrix} : Y^i \to Y^i \oplus X^{i+1} \quad ,$$

$$a(f)^i = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathsf{id}_{X^{i+1}} \end{pmatrix} : X^{i+1} \to Y^i \oplus X^{i+1} \quad .$$

Un calcul immédiat montre que $\Phi$ est un morphisme du foncteur identique de la catégorie $\mathsf{tr}_1(\mathcal{C})$ dans le foncteur $sc$.

**Proposition 3.1.3.** *Le morphisme $\Phi$ fait du foncteur cône un adjoint à gauche du foncteur $s$,* i.e. *pour tout objet $X \xrightarrow{f} Y$ de $\mathsf{tr}_1(\mathcal{C})$ et pour tout objet $W$ de $\mathsf{comp}(\mathcal{C})$, l'application canonique définie par le morphisme $\Phi$ :*

$$\mathsf{Hom}_{\mathsf{comp}(\mathcal{C})}\big(c(f), W\big) \to \mathsf{Hom}_{\mathsf{tr}_1(\mathcal{C})}\big((X \xrightarrow{f} Y), sW\big)$$

*est un isomorphisme.*

La vérification est laissée au lecteur. On notera que le foncteur $s$ est pleinement fidèle et que par suite le foncteur $cs$ est canoniquement isomorphe au foncteur identique. En fait, avec la construction choisie du foncteur $c$, le foncteur $cs$ est égal au foncteur identique. La propriété d'adjonction de (3.1.3) peut encore se traduire comme suit : l'application définie par le foncteur :

$$c : \mathsf{Hom}_{\mathsf{tr}_1(\mathcal{C})}\big((X \xrightarrow{f} Y), sW\big) \to \mathsf{Hom}_{\mathsf{comp}(\mathcal{C})}(c(f), W)$$

est un isomorphisme.

**3.1.4.** Nous allons définir dans $\mathsf{tr}_1(\mathcal{C})$ une notion d'homotopie. Soient :

$$(g, h, a)\,,\ (g', h', a') : (X \xrightarrow{f} Y) \rightrightarrows (X' \xrightarrow{f'} Y')$$

deux morphismes de $\mathsf{tr}_1(\mathcal{C})$. Une *homotopie* reliant $(g,h,a)$ à $(g',h',a')$ est un triplet $(b,b',\alpha)$, où $b : g \rightsquigarrow g'$ et $b' : h \rightsquigarrow h'$ sont des homotopies et où $\alpha : f' \star b + a' \rightsquigarrow b' \star f + a$ est une homotopie du deuxième ordre (2.5.12). Deux morphismes de $\mathsf{tr}_1(\mathcal{C})$ seront dits *homotopes* s'il existe une homotopie les reliant. La relation : "$(g,h,a)$ et $(g',h',a')$ sont homotopes" est une relation d'équivalence compatible avec la somme directe et la composition des morphismes. On peut donc introduire la catégorie $\mathsf{Tr}_1(\mathcal{C})$ dont les objets sont les objets de $\mathsf{tr}_1(\mathcal{C})$ et les morphismes les morphismes de $\mathsf{tr}_1(\mathcal{C})$ à homotopie près.

**Proposition 3.1.5.** *Soient $D$, $D' : (X \xrightarrow{f} Y) \rightrightarrows (X' \xrightarrow{f'} Y')$ deux morphismes de $\mathsf{tr}_1(\mathcal{C})$. Si les morphismes $D$ et $D'$ sont homotopes dans $\mathsf{tr}_1(\mathcal{C})$, alors les morphismes $c(D)$ et $c(D')$ sont homotopes dans $\mathsf{comp}(\mathcal{C})$.*

Soient $D = (g,h,a)$ et $D' = (g',h',a')$. Supposons que $D$ et $D'$ soient homotopes dans $\mathsf{tr}_1(\mathcal{C})$. Il existe donc des homotopies $b$ et $b'$ telles que :

$$\begin{aligned} g' - g &= bd + db \quad , \\ h' - h &= b'd + db' \quad . \end{aligned} \tag{3.1.5.1}$$

(Pour alléger la notation, nous avons omis dans ce calcul les exposants indiquant le degré des composants.) Il existe de plus une homotopie du deuxième ordre $\alpha$ telle que :

$$\alpha d - d\alpha = b'f + a - (f'b + a') \quad .$$

Un calcul immédiat montre alors que $\begin{pmatrix} b' & \alpha \\ 0 & -b \end{pmatrix}$ est une homotopie qui relie $c(D)$ à $c(D')$.

**Corollaire 3.1.6.** *Les foncteurs :*

$$c : \mathsf{tr}_1(\mathcal{C}) \to \mathsf{comp}(\mathcal{C}) \quad \textit{et} \quad s : \mathsf{comp}(\mathcal{C}) \to \mathsf{tr}_1(\mathcal{C})$$

*sont compatibles avec les homotopies de $\mathsf{tr}_1(\mathcal{C})$ et de $\mathsf{comp}(\mathcal{C})$ et définissent, en passant au quotient, des foncteurs encore notés $c : \mathsf{Tr}_1(\mathcal{C}) \to \mathsf{K}(\mathcal{C})$ et $s : \mathsf{K}(\mathcal{C}) \to \mathsf{Tr}_1(\mathcal{C})$. Le foncteur $c : \mathsf{Tr}_1(\mathcal{C}) \to \mathsf{K}(\mathcal{C})$ est adjoint à gauche du foncteur $s : \mathsf{K}(\mathcal{C}) \to \mathsf{Tr}_1(\mathcal{C})$.*

Ceci résulte formellement de (3.1.5) et de (3.1.3).

**3.1.7.** Désignons par $s' : \mathsf{comp}(\mathcal{C}) \to \mathsf{tr}_1(\mathcal{C})$ le foncteur $X \longmapsto (X \to 0)$. Le foncteur $cs' : \mathsf{comp}(\mathcal{C}) \to \mathsf{comp}(\mathcal{C})$ est égal au foncteur de translation de $\mathsf{comp}(\mathcal{C})$. Le foncteur $s'$ transforme deux morphismes homotopes de $\mathsf{comp}(\mathcal{C})$ en morphismes homotopes de $\mathsf{tr}_1(\mathcal{C})$ et par suite définit un foncteur que nous noterons encore $s' : \mathsf{K}(\mathcal{C}) \to \mathsf{Tr}_1(\mathcal{C})$. Le foncteur $cs' : \mathsf{K}(\mathcal{C}) \to \mathsf{K}(\mathcal{C})$ est égal au foncteur de translation de $\mathsf{K}(\mathcal{C})$.

### 3.2. Propriétés du foncteur cône.

**3.2.1.** Dans une $\mathbb{Z}$-catégorie, on appelle *triangle* tout diagramme du type :

(3.2.1.1) $$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1] \quad .$$

Pour désigner le triangle (3.2.1.1), on utilise la notation $(X, Y, Z, u, v, w)$, ou bien le diagramme :

(3.2.1.2)
$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "w"'] & \\ X \arrow[rr, "u"] & & Y \arrow[ul, "v"'] \end{tikzcd} \quad ,$$

la flèche munie d'un poussoir désignant le morphisme de degré 1 du triangle. Soient $(X, Y, Z, u, v, w)$ et $(X', Y', Z', u', v', w')$ deux triangles. Un *morphisme de triangles* est un diagramme commutatif :

(3.2.1.3)
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"'] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, "h"'] & X[1] \arrow[d, "f[1]"] \\ X' \arrow[r, "u'"] & Y' \arrow[r, "v'"] & Z' \arrow[r, "w'"] & X'[1] \end{tikzcd} \quad .$$

Les morphismes de triangles se composent de la manière évidente. Les triangles forment une catégorie.

**3.2.2.** Soit $X \xrightarrow{f} Y$ un objet de $\mathsf{tr}_1(\mathcal{C})$. Le morphisme (fonctoriel en $f$) de $\mathsf{tr}_1(\mathcal{C})$ :

(3.2.2.1)
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathsf{id}_X"'] & Y \arrow[d] \\ X \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \quad ,$$

fournit, en appliquant le foncteur cône, un morphisme, fonctoriel en $X \xrightarrow{f} Y$, (3.1.7) de $\mathsf{comp}(\mathcal{C})$ :

(3.2.2.2) $$q(f) : c(f) \to X[1] \quad .$$

De même, le morphisme de $\mathsf{tr}_1(\mathcal{C})$ :

$$(3.2.2.3)\qquad \begin{tikzcd} 0 \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d, "\mathsf{id}_Y"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

fournit, en appliquant le foncteur cône, un morphisme, fonctoriel en $X \xrightarrow{f} Y$, de $\mathsf{comp}(\mathcal{C})$ (3.1.2.4) :

$$(3.2.2.4)\qquad p(f) : Y \to c(f) \quad .$$

On peut donc associer à tout objet $X \xrightarrow{f} Y$ de $\mathsf{tr}_1(\mathcal{C})$ un triangle de $\mathsf{comp}(\mathcal{C})$ :

$$(3.2.2.5)\qquad X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{p(f)} c(f) \xrightarrow{q(f)} X[1] \quad .$$

On notera que ce triangle ne dépend pas fonctoriellement de l'objet $X \xrightarrow{f} Y$ de $\mathsf{tr}_1(\mathcal{C})$. Soit, en effet, $D = (g, h, a) : (X \xrightarrow{f} Y) \to (X' \xrightarrow{f'} Y')$ un morphisme de $\mathsf{tr}_1(\mathcal{C})$. On obtient alors le diagramme :

$$(3.2.2.6)\qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & Y \arrow[r, "p(f)"] \arrow[d, "h"'] & c(f) \arrow[r, "q(f)"] \arrow[d, "c(D)"'] & X[1] \arrow[d, "g[1]"] \\ X' \arrow[r, "f'"'] \arrow[ur, rightsquigarrow, "a"] & Y' \arrow[r, "p(f')"'] & c(f') \arrow[r, "q(f')"'] & X'[1] \end{tikzcd} \quad .$$

Les morphismes $p(f)$ et $q(f)$ étant fonctoriels en $f$, les deux derniers carrés de ce diagramme sont commutatifs, mais le premier carré est commutatif à homotopie près seulement. En passant au quotient par les homotopies, on peut associer à tout objet $X \xrightarrow{f} Y$ de $\mathsf{Tr}_1(\mathcal{C})$ un triangle de $\mathsf{K}(\mathcal{C})$ :

$$(3.2.2.7)\qquad X \xrightarrow{\dot f} Y \xrightarrow{\dot p(f)} c(f) \xrightarrow{\dot q(f)} X[1]$$

qui dépend fonctoriellement de $X \xrightarrow{f} Y$. (On désigne par $\dot f$, $\dot p(f)$, $\dot q(f)$ les classes modulo homotopie des morphismes $f$, $p(f)$, $q(f)$ respectivement.) On a donc ainsi un foncteur de la catégorie $\mathsf{Tr}_1(\mathcal{C})$ dans la catégorie des triangles de $\mathsf{K}(\mathcal{C})$.

**3.2.3.** L'automorphisme de translation de $\mathsf{comp}(\mathcal{C})$ s'étend naturellement en un automorphisme $T : \mathsf{tr}_1(\mathcal{C}) \to \mathsf{tr}_1(\mathcal{C})$ :

$$\text{(3.2.3.1)} \qquad \begin{aligned} &T(X \xrightarrow{f} Y) = X[1] \xrightarrow{f[1]} Y[1] \\ &T\big((g,h,a)\big) = (g[1]\,,\, h[1]\,,\, -a[1]\,) \quad . \end{aligned}$$

On fait alors du foncteur cône un $\mathbb{Z}$-foncteur (1.5.2) en définissant un isomorphisme $\Psi(f) : c(f[1]) \xrightarrow{\cong} c(f)[1]$ :

$$\text{(3.2.3.2)} \qquad \Psi(f)^i = \begin{pmatrix} \mathsf{id}_{Y^{i+1}} & 0 \\ 0 & -\mathsf{id}_{X^{i+2}} \end{pmatrix} : Y^{i+1} \oplus X^{i+2} \to Y^{i+1} \oplus X^{i+2} \ .$$

Le lecteur vérifiera que (3.2.3.2) définit bien un isomorphisme de complexes et démontrera la proposition suivante :

**Proposition 3.2.4.** *Lorsque $f = 0 \to Y$, l'isomorphisme canonique :*

$$c(f[n]) \xrightarrow{\sim} c(f)[n]$$

*n'est autre que l'application identique de $Y[n]$. Lorsque $f = X \to 0$, l'isomorphisme canonique :*

$$c(f[n]) \xrightarrow{\sim} c(f)[n]$$

*n'est autre que l'isomorphisme :*

$$X[n+1] \xrightarrow{(-1)^n \mathsf{id}_{X[n+1]}} X[n+1] \quad .$$

**3.2.5.** Soit $X \xrightarrow{f} Y$ un objet de $\mathsf{tr}_1(\mathcal{C})$. On peut lui associer un triangle de $\mathsf{comp}(\mathcal{C})$ :

$$\text{(3.2.5.1)} \qquad Y \xrightarrow{p(f)} c(f) \xrightarrow{q(f)} X[1] \xrightarrow{f[1]} Y[1] \quad .$$

Or le morphisme $q(f)p(f) : Y \to X[1]$ est le transformé par le foncteur cône du morphisme :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\ X \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \quad .$$

Il est donc nul. Il existe donc, d'après les propriétés d'adjonction du foncteur cône (3.1.3), un unique morphisme :

$$J : c\big(p(f)\big) \to X[1] \quad , \tag{3.2.5.2}$$

tel que le diagramme :

$$\begin{tikzcd} c(f) \arrow[r, "p(p(f))"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{c(f)}"'] & c(p(f)) \arrow[d, "J"] \\ c(f) \arrow[r, "q(f)"] & X[1] \end{tikzcd} \tag{3.2.5.3}$$

soit commutatif et que l'on ait $Ja(p(f)) = 0$ (3.1.2.4).

**Proposition 3.2.6.** a) *Le morphisme $J$ est un homotopisme,* i.e. *est un isomorphisme à homotopie près.*

b) *Le diagramme :*

$$\begin{tikzcd} c(p(f)) \arrow[r, "q(p(f))"] \arrow[d, "J"'] & Y[1] \arrow[d, "\mathrm{id}_{Y[1]}"] \\ X[1] \arrow[r, "f[1]"] & Y[1] \end{tikzcd} \tag{3.2.6.1}$$

*est anticommutatif à homotopie près.*

**3.2.7. Démonstration.** Nous allons d'abord construire un morphisme $H : X[1] \to c\big(p(f)\big)$. Il suffit pour cela de construire un morphisme entre les deux foncteurs que ces objets représentent. Soit $W$ un objet de $\mathsf{comp}(\mathcal{C})$. Un morphisme de $c\big(p(f)\big)$ dans $W$ n'est autre que, tenant compte des propriétés d'adjonction du foncteur cône (3.1.3), un couple $(u, a)$, où $u : c(f) \to W$ est un morphisme de complexes et $a : 0 \rightsquigarrow up(f)$ est une homotopie. Utilisant encore une fois (3.1.3), on voit qu'un morphisme de $c\big(p(f)\big)$ dans $W$ est un triplet $(m : Y \longrightarrow W\,,\ a : 0 \rightsquigarrow m\,,\ b : 0 \rightsquigarrow mf)$. Associons à ce triplet le diagramme :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\alpha"] & W \end{tikzcd} \qquad \alpha = b - a \star f \ , \tag{3.2.7.1}$$

*i.e.* ((3.1.3) et (3.1.7)) un morphisme de $X[1]$ dans $W$. On a donc associé, fonctoriellement en $W$, à tout morphisme de $c\big(p(f)\big)$ dans $W$ un morphisme de $X[1]$ dans $W$, et par suite on a défini un morphisme $H : X[1] \to c\big(p(f)\big)$. Pour prouver la partie $a$) de la proposition (3.2.6), il suffit de montrer que :

(3.2.7.2) *Le morphisme* $JH : X[1] \to X[1]$ *est l'identité.*

(3.2.7.3) *Le morphisme* $HJ : c\big(p(f)\big) \to c\big(p(f)\big)$ *est homotope à l'identité.*

Pour prouver la partie $b$) de la proposition (3.2.6), il suffit de montrer de plus que :

(3.2.7.4) *Le diagramme :*

$$\begin{tikzcd} X[1] \arrow[r, "{f[1]}"] \arrow[d, "H"'] & Y[1] \arrow[d, "\mathsf{id}_{Y[1]}"] \\ c(p(f)) \arrow[r, "q(p(f))"] & Y[1] \end{tikzcd}$$

*est anticommutatif.*

**3.2.8. Démonstration de l'assertion (3.2.7.2).**

Montrons que le morphisme $JH : X[1] \to X[1]$ est l'identité. Il suffit pour cela de voir que le morphisme $JH$ induit l'endomorphisme identique du foncteur représenté par $X[1]$. D'après (3.1.3) et (3.1.7), le foncteur :

$$W \longmapsto \mathsf{Hom}_{\mathsf{comp}(\mathcal{C})}(X[1], W)$$

n'est autre que le foncteur :

$$W \longmapsto \left\{ \begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\alpha"] & W \end{tikzcd} \right\} \qquad (3.2.8.1)$$

D'autre part, d'après (3.2.7), l'objet $c\big(p(f)\big)$ de $\mathsf{comp}(\mathcal{C})$ représente le foncteur :

$$W \longmapsto \Big\{\big(m : Y \longrightarrow W\,,\ a : 0 \rightsquigarrow m\,,\ b : 0 \rightsquigarrow mf\big)\Big\} \qquad (3.2.8.2)$$

L'homomorphisme $J : c\big(p(f)\big) \to X[1]$ correspond, ainsi qu'on le vérifie immédiatement, au morphisme fonctoriel :

(3.2.8.3)

$$D = \begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\alpha"] & 0 \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] & W \end{tikzcd} \mapsto JD = (0 : Y \to W,\ 0 : 0 \rightsquigarrow 0\,,\ \alpha : 0 \rightsquigarrow 0)\,.$$

Le morphisme $H : X[1] \to c\big(p(f)\big)$ correspond par définition (3.2.7) au morphisme fonctoriel :

(3.2.8.4)

$$t = (m : Y \to W, a : 0 \rightsquigarrow m, b : 0 \rightsquigarrow mf) \mapsto Ht = \begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\alpha"] & 0 \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] & W \end{tikzcd}, \alpha = b - a \star f.$$

Le composé de ces deux morphismes fonctoriels est bien l'identité, ce qui démontre l'assertion (3.2.7.2).

**3.2.9. Démonstration de l'assertion (3.2.7.3).**

D'après (3.2.8), le morphisme $HJ : c\big(p(f)\big) \to c\big(p(f)\big)$ correspond au morphisme fonctoriel :

$$\begin{aligned} t = (m : Y \longrightarrow W\,,\ a : 0 \rightsquigarrow m\,,\ b : 0 \rightsquigarrow mf) &\longmapsto HJt = \\ &= (0 : Y \longrightarrow W\,,\ 0 : 0 \rightsquigarrow 0\,,\ b - a \star f : 0 \rightsquigarrow 0) \end{aligned} \tag{3.2.9.1}$$

et par suite :

$$t - HJt = (m : Y \longrightarrow W\,,\ a : 0 \rightsquigarrow m\,,\ a \star f : 0 \rightsquigarrow mf) \quad . \tag{3.2.9.2}$$

Pour prouver l'assertion (3.2.7.3), il suffit de montrer que tout triplet de la forme $(m : Y \longrightarrow W\,,\ a : 0 \rightsquigarrow m\,,\ a \star f : 0 \rightsquigarrow mf)$ correspond à un morphisme homotope à zéro de $c\big(p(f)\big)$ dans $W$. Or un tel triplet définit, en utilisant (3.1.3), un morphisme :

$$v : c(f) \to W \qquad v = (m : Y \longrightarrow W\,,\ a \star f : 0 \rightsquigarrow mf) \tag{3.2.9.3}$$

et une homotopie :

$$a : 0 \rightsquigarrow vp(f) = m \quad , \tag{3.2.9.4}$$

d'où un diagramme :

(3.2.9.5)
$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "p(f)"] \arrow[d] & c(f) \arrow[d, "v"] \\ 0 \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "a"] & W \end{tikzcd}$$

définissant par (3.1.3) le morphisme $n : c(p(f)) \to W$ associé au triplet $(m : Y \longrightarrow W\,,\ a : 0 \rightsquigarrow m\,,\ a \star f : 0 \rightsquigarrow mf)$. Pour montrer que le morphisme $n$ est homotope à zéro, il suffit (3.1.5) de montrer que le diagramme (3.2.9.5) est un morphisme homotope à zéro de $\mathsf{tr}_1(\mathcal{C})$ et, pour cela, il suffit de montrer qu'il existe une homotopie $\beta : 0 \rightsquigarrow v$ telle que $\beta \star p(f) = a$. Or le morphisme $v : c(f) \to W$ a pour composants :

(3.2.9.6)
$$v^i = (m^i,\, a^i f^{i+1}) : Y^i \oplus X^{i+1} \to W^i$$

et on vérifie immédiatement que l'homotopie $\beta$ de composants :

(3.2.9.7)
$$\beta^i = (a^i, 0) : Y^{i+1} \oplus X^{i+2} \to W^i$$

relie 0 à $v$ et que $\beta \star p(f) = a$, ce qui achève la démonstration de l'assertion (3.2.7.3).

**3.2.10. Démonstration de l'assertion (3.2.7.4).**

L'objet $Y[1]$ représente le foncteur :

(3.2.10.1)
$$W \longmapsto \left\{ \begin{tikzcd} Y \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\alpha"] & W \end{tikzcd} \right\}$$

et le morphisme $f[1] : X[1] \to Y[1]$ représente le morphisme fonctoriel :

(3.2.10.2)
$$D = \begin{tikzcd} Y \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\alpha"] & W \end{tikzcd} \longmapsto f[1]D = \begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\alpha \star f"] & W \end{tikzcd}\ .$$

De même, le morphisme $q\big(p(f)\big) : c\big(p(f)\big) \to Y[1]$ représente le morphisme fonctoriel :

(3.2.10.3)

$$D = \begin{tikzcd} Y \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] \arrow[ur, squiggly, "\alpha"] & W \end{tikzcd} \longmapsto q(p(f))D = (0 : Y \to W \,,\, \alpha : 0 \rightsquigarrow 0 \,,\, 0 : 0 \rightsquigarrow 0) \,.$$

Par suite, en utilisant (3.2.8.4), pour démontrer (3.2.7.4), il suffit de remarquer que pour tout diagramme :

$$D = \begin{tikzcd} Y \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] \arrow[ur, squiggly, "\alpha"] & W \end{tikzcd} \quad ,$$

on a $Hq\big(p(f)\big)D + f[1]D = 0$.

**3.2.11.** Soient $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ deux morphismes de $\mathsf{comp}(\mathcal{C})$. Posons $gf = h$. On peut construire, avec ces données, deux diagrammes commutatifs :

(3.2.11.1)
$$D = \begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathsf{id}_X"] & Y \arrow[d, "g"] \\ X \arrow[r, "h"] & Z \end{tikzcd} \quad , \qquad D' = \begin{tikzcd} X \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f"] & Z \arrow[d, "\mathsf{id}_Z"] \\ Y \arrow[r, "g"] & Z \end{tikzcd}$$

que nous interpréterons comme des morphismes de $\mathsf{tr}_1(\mathcal{C})$. D'où, en appliquant le foncteur cône, deux diagrammes :

$$c(f) \xrightarrow{c(D)} c(h) \xrightarrow{c(D')} c(g)$$

(3.2.11.2)
$$I = \begin{tikzcd} Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "p(f)"'] & Z \arrow[d, "p(h)"] \\ c(f) \arrow[r, "c(D)"] & c(h) \end{tikzcd} \quad .$$

Ce dernier diagramme est un carré commutatif (3.2.2.4) et peut donc être interprété comme un morphisme de $\mathsf{tr}_1(\mathcal{C})$, d'où en appliquant encore une fois le foncteur cône, un morphisme :

(3.2.11.3)
$$c(I) : c(g) \longrightarrow c\big(c(D)\big) \quad .$$

**Proposition 3.2.12.** a) *Le morphisme $c(I) : c(g) \to c\big(c(D)\big)$ est un homotopisme.*
b) *Le diagramme :*

$$\begin{tikzcd} & & c(g) \arrow[d, "c(I)"] \\ c(h) \arrow[urr, "c(D')"] \arrow[rr, "p(c(D))"'] & & c(c(D)) \end{tikzcd} \tag{3.2.12.1}$$

*est commutatif à homotopie près.*
c) *Le diagramme :*

$$\begin{tikzcd} c(g) \arrow[r, "q(g)"] \arrow[d, "c(I)"'] & Y[1] \arrow[d, "p(f)[1]"] \\ c(c(D)) \arrow[r, "q(c(D))"] & c(f)[1] \end{tikzcd} \tag{3.2.12.2}$$

*est commutatif.*

En effet, un calcul immédiat montre que le $i$-ème composant du morphisme $c(I)$ est :

$$c(I)^i = \begin{pmatrix} \mathsf{id} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \mathsf{id} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : Z^i \oplus Y^{i+1} \to Z^i \oplus X^{i+1} \oplus Y^{i+1} \oplus X^{i+2} \quad . \tag{3.2.12.3}$$

Le morphisme $u : c\big(c(D)\big) \to c(g)$ de composants :

$$u^i = \begin{pmatrix} \mathsf{id} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f^{i+1} & \mathsf{id} & 0 \end{pmatrix} : Z^i \oplus X^{i+1} \oplus Y^{i+1} \oplus X^{i+2} \to Z^i \oplus Y^{i+1} \tag{3.2.12.4}$$

est un inverse de $c(I)$ à homotopie près, ce qui démontre la première assertion. Pour démontrer la deuxième assertion, il suffit de vérifier que le diagramme :

$$\begin{tikzcd} & & c(g) \\ c(h) \arrow[urr, "c(D')"] \arrow[rr, "p(c(D))"'] & & c(c(D)) \arrow[u, "u"'] \end{tikzcd} \tag{3.2.12.5}$$

est commutatif, ce qui se fait en exhibant les composants. Enfin, d'après (3.2.2), les propriétés fonctorielles du morphisme $q(f)$ (3.2.2.2) impliquent que le carré (3.2.12.2) soit commutatif.

## 3.3. Propriétés des triangles distingués.

**Définition 3.3.1.** Un triangle $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$ de $\mathsf{K}(\mathcal{C})$ sera dit *distingué* s'il existe un objet $X' \xrightarrow{f'} Y'$ de $\mathsf{Tr}_1(\mathcal{C})$ et un isomorphisme de triangles ((3.2.1.3) et (3.2.2.7)) :

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"', "\wr"] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"', "\wr"] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, "h"', "\wr"] & X[1] \arrow[d, "f[1]", "\wr"'] \\
X' \arrow[r, "\dot{f}'"] & Y' \arrow[r, "\dot{p}(f')"] & c(f') \arrow[r, "\dot{q}(f')"] & X'[1]
\end{tikzcd} .$$

**Proposition 3.3.2.** (TRI) *Tout triangle de* $\mathsf{K}(\mathcal{C})$ *isomorphe à un triangle distingué est un triangle distingué. Pour tout objet* $X$ *de* $\mathsf{K}(\mathcal{C})$, *le triangle* $X \xrightarrow{\mathsf{id}_X} X \to 0 \to X[1]$ *est distingué. Tout morphisme* $u : X \to Y$ *de* $\mathsf{K}(\mathcal{C})$ *est contenu dans un triangle distingué* $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$.

La première assertion est triviale. Pour démontrer la deuxième assertion, il suffit de montrer que le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\mathsf{id}_X"] \arrow[d, "\mathsf{id}_X"'] & X \arrow[r] \arrow[d, "\mathsf{id}_X"'] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & X[1] \arrow[d, "\mathsf{id}_{X[1]}"] \\
X \arrow[r, "\mathsf{id}_X"] & X \arrow[r, "\dot{p}(\mathsf{id}_X)"] & c(\mathsf{id}_X) \arrow[r, "\dot{q}(\mathsf{id}_X)"] & X[1]
\end{tikzcd}$$

est un isomorphisme de triangles de $\mathsf{K}(\mathcal{C})$. Il suffit donc de montrer que $c(\mathsf{id}_X)$ est homotope à zéro. Or il résulte immédiatement de la définition des homotopies dans $\mathsf{tr}_1(\mathcal{C})$ (3.1.4) que tout morphisme de $\mathsf{tr}_1(\mathcal{C})$ du type :

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\mathsf{id}_X"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "a"] & X \arrow[d, "g"] \\
0 \arrow[r] & W
\end{tikzcd}$$

est homotope à zéro. Les propriétés d'adjonction du foncteur cône (3.1.6) montrent alors que $c(\mathsf{id}_X)$ est homotope à zéro. Soit $f : X \to Y$ un morphisme de $\mathsf{comp}(\mathcal{C})$ dans la classe modulo homotopie de $u : X \to Y$. On a alors un objet de $\mathsf{Tr}_1(\mathcal{C})$ : $X \xrightarrow{f} Y$. Le triangle distingué :

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{\dot{p}(f)} c(f) \xrightarrow{\dot{q}(f)} X[1]$$

contient le morphisme $u$.

**Proposition 3.3.3.** (TRII) *Un triangle* $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$ *de* $\mathsf{K}(\mathcal{C})$ *est distingué si et seulement si le triangle* $Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1] \xrightarrow{-u[1]} Y[1]$ *est distingué.*

Supposons que le triangle $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$ soit distingué. Il est alors isomorphe à un triangle du type :

$$X' \xrightarrow{\dot{f}} Y' \xrightarrow{\dot{p}(f)} c(f) \xrightarrow{\dot{q}(f)} X'[1] \quad ,$$

où $X' \xrightarrow{f} Y'$ est un objet de $\mathsf{Tr}_1(\mathcal{C})$. Il suffit donc de montrer que le triangle :

$$Y' \xrightarrow{\dot{p}(f)} c(f) \xrightarrow{\dot{q}(f)} X'[1] \xrightarrow{-\dot{f}[1]} Y'[1] \quad ,$$

est distingué. Or d'après (3.2.6), le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
Y' \arrow[r, "\dot{p}(f)"] \arrow[d, "\mathsf{id}_{Y'}"'] & c(f) \arrow[r, "\dot{p}(p(f))"] \arrow[d, "\mathsf{id}_{c(f)}"'] & c(p(f)) \arrow[r, "\dot{q}(p(f))"] \arrow[d, "\dot{j}"'] & Y'[1] \arrow[d, "\mathsf{id}_{Y'[1]}"] \\
Y' \arrow[r, "\dot{p}(f)"] & c(f) \arrow[r, "\dot{q}(f)"] & X'[1] \arrow[r, "-\dot{f}[1]"] & Y'[1]
\end{tikzcd}$$

est un isomorphisme de triangles dans $\mathsf{K}(\mathcal{C})$. Supposons maintenant que le triangle $Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1] \xrightarrow{-u[1]} Y[1]$ soit distingué. On en déduit par (3.2.4) que le triangle :

$$Y[-1] \xrightarrow{v[-1]} Z[-1] \xrightarrow{w[-1]} X \xrightarrow{u} Y$$

est distingué et, en appliquant deux fois l'argument précédant, que le triangle :

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$$

est distingué, ce qui achève la démonstration.

**Proposition 3.3.4.** (TRIII) *Soient :*

$$X \overset{u}{\to} Y \overset{v}{\to} Z \overset{w}{\to} X[1]\,, \quad X' \overset{u'}{\to} Y' \overset{v'}{\to} Z' \overset{w'}{\to} X'[1]$$

*deux triangles distingués de* $\mathsf{K}(\mathcal{C})$ *et :*

(3.3.4.1)
$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "u'"] \arrow[d, "m"'] & Y' \arrow[d, "n"] \\ X \arrow[r, "u"] & Y \end{tikzcd}$$

*un carré commutatif de* $\mathsf{K}(\mathcal{C})$ *. Il existe un morphisme* $r : Z' \to Z$ *tel que le diagramme :*

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "u'"] \arrow[d, "m"'] & Y' \arrow[r, "v'"] \arrow[d, "n"'] & Z' \arrow[r, "w'"] \arrow[d, "r"'] & X'[1] \arrow[d, "m[1]"] \\ X \arrow[r, "u"] & Y \arrow[r, "v"] & Z \arrow[r, "w"] & X[1] \end{tikzcd}$$

*soit un morphisme de triangles.*

Par définition, les triangles proposés sont isomorphes à des triangles :

$$V \xrightarrow{\dot f} W \xrightarrow{\dot p(f)} c(f) \xrightarrow{\dot q(f)} V[1] \quad ,$$

$$V' \xrightarrow{\dot f'} W' \xrightarrow{\dot p(f')} c(f') \xrightarrow{\dot q(f')} V'[1]$$

et, par suite, le carré (3.3.4.1) est isomorphe à un carré :

$$\begin{tikzcd} V' \arrow[r, "\dot f'"] \arrow[d, "\dot g"'] & W' \arrow[d, "\dot g'"] \\ V \arrow[r, "\dot f"] & W \end{tikzcd} \quad ,$$

où $g : V' \to V$ et $g' : W' \to W$ sont des morphismes de $\mathsf{comp}(\mathcal{C})$. Le carré de $\mathsf{comp}(\mathcal{C})$ :

$$\begin{tikzcd} V' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g"'] & W' \arrow[d, "g'"] \\ V \arrow[r, "f"] & W \end{tikzcd}$$

est commutatif à homotopie près. Soit donc $a : fg \rightsquigarrow g'f'$ une homotopie. Le diagramme :

$$D = \begin{tikzcd} V' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g"] & W' \arrow[d, "g'"] \\ V \arrow[r, "f"] \arrow[ur, phantom, "\overset{a}{\nearrow}"] & W \end{tikzcd}$$

est un morphisme de $\mathsf{tr}_1(\mathcal{C})$. On en déduit par (3.2.2.7) que le diagramme :

$$\begin{tikzcd} V' \arrow[r, "\dot{f}'"] \arrow[d, "\dot{g}"] & W' \arrow[r, "\dot{p}(f')"] \arrow[d, "\dot{g}'"] & c(f') \arrow[r, "\dot{q}(f')"] \arrow[d, "\dot{c}(D)"] & V'[1] \arrow[d, "\dot{g}[1]"] \\ V \arrow[r, "\dot{f}"] & W \arrow[r, "\dot{p}(f)"] & c(f) \arrow[r, "\dot{q}(f)"] & V[1] \end{tikzcd}$$

est un morphisme de triangles dans $\mathsf{K}(\mathcal{C})$, d'où l'existence du morphisme $r : Z' \to Z$.

**Proposition 3.3.5.** (TRIV) *Soit :*

$$\begin{tikzcd} & X_2 \arrow[dr, "u_1"] & \\ X_1 \arrow[ur, "u_3"] \arrow[rr, "u_2"] & & X_3 \end{tikzcd}$$

*un diagramme commutatif de* $\mathsf{K}(\mathcal{C})$. *Il existe trois triangles distingués :*

$$X_1 \xrightarrow{u_3} X_2 \xrightarrow{v_3} Z_3 \xrightarrow{w_3} X_1[1] \quad ,$$

$$X_2 \xrightarrow{u_1} X_3 \xrightarrow{v_1} Z_1 \xrightarrow{w_1} X_2[1] \quad ,$$

$$X_1 \xrightarrow{u_2} X_3 \xrightarrow{v_2} Z_2 \xrightarrow{w_2} X_1[1]$$

*et deux morphismes :*

$$m_1 : Z_3 \to Z_2 \quad ,$$

$$m_3 : Z_2 \to Z_1 \quad ,$$

*tels que :*

a) *Les diagrammes :*

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[r, "u_3"] \arrow[d, "\mathsf{id}"'] & X_2 \arrow[r, "v_3"] \arrow[d, "u_1"'] & Z_3 \arrow[r, "w_3"] \arrow[d, "m_1"'] & X_1[1] \arrow[d, "\mathsf{id}"] \\ X_1 \arrow[r, "u_2"] & X_3 \arrow[r, "v_2"] & Z_2 \arrow[r, "w_2"] & X_1[1] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[r, "u_2"] \arrow[d, "u_3"'] & X_3 \arrow[r, "v_2"] \arrow[d, "\mathsf{id}"'] & Z_2 \arrow[r, "w_2"] \arrow[d, "m_3"'] & X_1[1] \arrow[d, "u_3[1]"] \\ X_2 \arrow[r, "u_1"] & X_3 \arrow[r, "v_1"] & Z_1 \arrow[r, "w_1"] & X_2[1] \end{tikzcd}$$

*soient des morphismes de triangles.*

b) *Le triangle :*

$$Z_3 \xrightarrow{m_1} Z_2 \xrightarrow{m_3} Z_1 \xrightarrow{v_3[1]w_1} Z_3[1]$$

*soit distingué.*

Soient $f : X_1 \to X_2$ (resp. $g : X_2 \to X_3$ ) un morphisme de $\mathsf{comp}(\mathcal{C})$ qui soit dans la classe $u_3$ (resp. $u_1$ ). Posons $h = gf : X_1 \to X_3$ . Le morphisme $h$ est dans la classe $u_3$ . Pour démontrer la proposition, il suffit de prendre pour triangles distingués les triangles (3.2.2) :

$$X_1 \xrightarrow{\dot{f}} X_2 \xrightarrow{\dot{p}(f)} c(f) \xrightarrow{\dot{q}(f)} X_1[1] \quad ,$$

$$X_2 \xrightarrow{\dot{g}} X_3 \xrightarrow{\dot{p}(g)} c(g) \xrightarrow{\dot{q}(g)} X_2[1] \quad ,$$

$$X_1 \xrightarrow{\dot{h}} X_3 \xrightarrow{\dot{p}(h)} c(h) \xrightarrow{\dot{q}(h)} X_1[1]$$

et pour morphismes, les morphismes :

$$c(D) : c(f) \longrightarrow c(h) \quad , \qquad c(D') : c(h) \longrightarrow c(g) \quad ,$$

où $D$ et $D'$ sont les diagrammes :

$$D = \begin{tikzcd} X_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathsf{id}"] & X_2 \arrow[d, "g"] \\ X_1 \arrow[r, "h"] & X_3 \end{tikzcd} \quad , \qquad D' = \begin{tikzcd} X_1 \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f"] & X_3 \arrow[d, "\mathsf{id}"] \\ X_2 \arrow[r, "g"] & X_3 \end{tikzcd} \quad .$$

En effet, la première assertion est une conséquence immédiate de (3.2.2) et, d'après la proposition (3.2.12), il existe un morphisme $c(I) : c(g) \to c(c(D))$ tel que le diagramme :

$$\begin{array}{ccccccc}
c(f) & \xrightarrow{\dot{c}(D)} & c(h) & \xrightarrow{\dot{c}(D')} & c(g) & \xrightarrow{\dot{p}(f)[1]\dot{q}(g)} & c(f)[1] \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \mathsf{id}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathsf{id}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \dot{c}(I)} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathsf{id}} \\
c(f) & \xrightarrow{\dot{c}(D)} & c(h) & \xrightarrow{\dot{p}(c(D))} & c(c(D)) & \xrightarrow{\dot{q}(c(D))} & c(f)[1]
\end{array}$$

soit un isomorphisme de triangles.

**3.3.6.** Soit $F : \mathcal{J} \to \mathsf{comp}(\mathcal{C})$ un foncteur. Désignons par $\mathcal{F}\ell_n(\mathcal{J})$ la catégorie des suites de $n$ morphismes composables de $\mathcal{J}$ : les objets de $\mathcal{F}\ell_n(\mathcal{J})$ sont les diagrammes de $\mathcal{J}$ :

$$i_1 \xrightarrow{f_1} i_2 \xrightarrow{f_2} i_3 \quad \cdots \quad \xrightarrow{f_n} i_{n+1} \quad .$$

Soient $(i_p, f_p)$ et $(j_p, g_p)$ deux suites de $n$ morphismes composables de $\mathcal{J}$. Un morphisme, dans $\mathcal{F}\ell_n(\mathcal{J})$, de $(i_p, f_p)$ dans $(j_p, g_p)$ est un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccccc}
i_1 & \xrightarrow{f_1} & i_2 & \xrightarrow{f_2} & i_3 & \xrightarrow{f_3} & \cdots & \xrightarrow{f_n} & i_{n+1} \\
\Big\downarrow{\scriptstyle h_1} & & \Big\downarrow{\scriptstyle h_2} & & \Big\downarrow{\scriptstyle h_3} & & & & \Big\downarrow{\scriptstyle h_{n+1}} \\
j_1 & \xrightarrow{g_1} & j_2 & \xrightarrow{g_2} & j_3 & \xrightarrow{g_3} & \cdots & \xrightarrow{g_n} & j_{n+1}
\end{array} \quad .$$

La composition des morphismes se définit de la manière évidente. On désigne par $\mathsf{Fl}_n(\mathcal{J})$ l'ensemble des objets de $\mathcal{F}\ell_n(\mathcal{J})$. Soit $i \xrightarrow{f} j$ un objet de $\mathcal{F}\ell_1(\mathcal{J})$. En appliquant le foncteur $F$, on obtient un morphisme de $\mathsf{comp}(\mathcal{C})$ :

$$F(i) \xrightarrow{F(f)} F(j) \quad ,$$

qu'on peut interpréter comme un objet de $\mathsf{Tr}_1(\mathcal{C})$, d'où, en appliquant le foncteur cône, un foncteur $S : \mathcal{F}\ell_1(\mathcal{J}) \to \mathsf{K}(\mathcal{C})$ :

(3.3.6.1) $$S(f) = S\big(i \xrightarrow{f} j\big) = c\big(F(i) \xrightarrow{F(f)} F(j)\big) \quad .$$

Soit maintenant $i \xrightarrow{f} j \xrightarrow{g} k$ un objet de $\mathcal{F}\ell_2(\mathcal{J})$. On peut lui faire correspondre le diagramme suivant de $\mathsf{Tr}_1(\mathcal{C})$ :

(3.3.6.2)
$$\begin{array}{ccc} F(i) & \xrightarrow{F(f)} & F(j) \\ {\scriptstyle \mathsf{id}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F(g)} \\ F(i) & \xrightarrow{F(gf)} & F(k) \\ {\scriptstyle F(f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathsf{id}} \\ F(j) & \xrightarrow{F(g)} & F(k) \end{array} \quad .$$

Posons :

(3.3.6.3)
$$\delta(f,g) : S(g) \to S(f)[1] \quad ,$$
$$\delta(f,g) = \dot{p}\big(F(f)\big)[1]\dot{q}\big(F(g)\big) \quad .$$

On obtient, en appliquant le foncteur cône au diagramme (3.3.6.2), un foncteur de $\mathcal{F}\ell_2(\mathcal{J})$ dans la catégorie des triangles de $\mathsf{K}(\mathcal{C})$ :

(3.3.6.4)
$$(i \xrightarrow{f} j \xrightarrow{g} k) \quad \longmapsto \quad S(f) \to S(gf) \to S(g) \xrightarrow{\delta(f,g)} S(f)[1] \quad .$$

La fin de la démonstration de (3.3.5) montre que le triangle :

$$S(f) \to S(gf) \to S(g) \xrightarrow{\delta(f,g)} S(f)[1]$$

est un triangle distingué.

### 3.4. Propriétés fonctorielles des triangles distingués.

**Proposition 3.4.1.** *Soient $\iota_1 : \mathsf{K}(\mathcal{C})^\circ \to \mathsf{K}(\mathcal{C}^\circ)$ l'isomorphisme canonique* (2.5.13) *et $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$ un triangle distingué de $\mathsf{K}(\mathcal{C})$. Le triangle de $\mathsf{K}(\mathcal{C}^\circ)$ :*

$$(\iota_1 X)[-1] \xrightarrow{\iota_1 w} \iota_1 Z \xrightarrow{\iota_1 v} \iota_1 Y \xrightarrow{-\iota_1 u} \iota_1 X$$

*est distingué.*

On peut toujours supposer (3.3.1) que le triangle proposé est de la forme :

$$X \xrightarrow{\dot{f}} Y \xrightarrow{\dot{p}(f)} c(f) \xrightarrow{\dot{q}(f)} X[1] \quad ,$$

où $f : X \to Y$ est un morphisme de $\mathsf{comp}(\mathcal{C})$. Il s'agit alors de montrer que le triangle :

$$(\iota_1 X)[-1] \xrightarrow{\iota_1 \dot{q}(f)} \iota_1 c(f) \xrightarrow{\iota_1 \dot{p}(f)} \iota_1 Y \xrightarrow{-(\dot{\iota_1 f})} \iota_1 X$$

est distingué ($\iota_1 f$ est l'image par $\iota_1 : \mathsf{comp}(\mathcal{C})^\circ \to \mathsf{comp}(\mathcal{C}^\circ)$ du morphisme $f$). Il résulte immédiatement des définitions de $\iota_1$ (2.4.1) et du foncteur cône (3.1.2) que les composants et les différentielles du complexe $\iota_1 c(f)$ sont :

$$\iota_1 c(f)^i = (\iota_1 X)^{i-1} \oplus (\iota_1 Y)^i \quad ,$$

(3.4.1.1)
$$d^i_{\iota_1 c(f)} = \begin{pmatrix} -d^{i-1}_{\iota_1 X} & (\iota_1 f)^i \\ & \\ 0 & d^i_{\iota_1 Y} \end{pmatrix} \quad .$$

Par suite, on a l'égalité :

$$\iota_1 c(f) = c(-\iota_1 f)[-1]$$

et on vérifie que le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
(\iota_1 X)[-1] \arrow[r, "\iota_1 \dot{q}(f)"] \arrow[d, equal] & \iota_1 c(f) \arrow[r, "\iota_1 \dot{p}(f)"] \arrow[d, equal] & \iota_1 Y \arrow[r, "-\dot{\iota_1 f}"] \arrow[d, equal] & \iota_1 X \arrow[d, equal] \\
(\iota_1 X)[-1] \arrow[r, "\dot{p}(-\iota_1 f)[-1]"] & c(-\iota_1 f)[-1] \arrow[r, "\dot{q}(-\iota_1 f)[-1]"] & \iota_1 Y \arrow[r, "-\dot{\iota_1 f}"] & \iota_1 X
\end{tikzcd}$$

est commutatif. Il suffit alors d'appliquer (3.3.3) pour achever la démonstration.

**3.4.2.** Soit $F : \prod_{i \in [n]} \mathcal{C}_i \to \mathcal{C}$ un foncteur multiadditif. Supposons, pour fixer les idées, que les produits dénombrables soient représentables dans $\mathcal{C}$. Soient alors :

$$\mathsf{K}_\Pi\, F : \prod_{i \in [n]} \mathsf{K}(\mathcal{C}_i) \to \mathsf{K}(\mathcal{C})$$

la $\Pi$-extension de $F$ aux complexes à homotopie près et :

$$p_i : \mathsf{K}_\Pi\, F(X_1, \ldots, X_i[1], \ldots, X_n) \to \mathsf{K}_\Pi\, F(X_1, \ldots, X_i, \ldots, X_n)[1]$$

les isomorphismes fonctoriels canoniques.

Soient $j \in [n]$ et pour tout $i \neq j$, $X_i$ un objet de $\mathsf{K}(\mathcal{C}_i)$. Désignons par $G : \mathsf{K}(\mathcal{C}_j) \to \mathsf{K}(\mathcal{C})$ le foncteur :

(3.4.2.1) $$X \longmapsto G(X) = \mathsf{K}_\Pi\, F(X_1, \ldots, X, \ldots, X_n) \quad ,$$

et par $m : G(X[1]) \xrightarrow{\sim} G(X)[1]$ l'isomorphisme fonctoriel déduit de $p_j$.

**Proposition 3.4.3.** *Pour tout triangle distingué :*

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$$

*de* $\mathsf{K}(\mathcal{C}_j)$*, le triangle de* $\mathsf{K}(\mathcal{C})$ *:*

$$G(X) \xrightarrow{G(u)} G(Y) \xrightarrow{G(v)} G(Z) \xrightarrow{mG(w)} G(X)[1]$$

*est distingué.*

On peut, tout d'abord, supposer que le triangle distingué de $\mathsf{K}(\mathcal{C}_j)$ est de la forme (3.3.1) :

$$X \xrightarrow{\dot{f}} Y \xrightarrow{\dot{p}(f)} c(f) \xrightarrow{\dot{q}(f)} X[1] \quad ,$$

où $f : X \to Y$ est un morphisme de $\mathsf{comp}(\mathcal{C}_j)$. Désignons par :

$$H : \mathsf{comp}(\mathcal{C}_j) \longrightarrow \mathsf{comp}(\mathcal{C})$$

le foncteur :

$$X \longmapsto H(X) = \mathsf{comp}_\Pi F(X_1, \ldots, X, \ldots, X_n) \quad ,$$

et par $m : H(X[1]) \xrightarrow{\sim} H(X)[1]$ l'isomorphisme fonctoriel de commutation aux translations dans la direction $j$. Le foncteur $(G, m)$ s'obtient à partir du foncteur $(H, m)$ en passant aux complexes à homotopie près. Pour démontrer la proposition, il suffit de montrer qu'il existe un isomorphisme de complexes dans $\mathsf{comp}(\mathcal{C})$ :

$$J : H\big(c(f)\big) \xrightarrow{\sim} c\big(H(f)\big)$$

tel que le diagramme ci-après soit commutatif :

(3.4.3.1)
$$\begin{array}{ccccccc}
H(X) & \xrightarrow{H(f)} & H(Y) & \xrightarrow{H(p(f))} & H(c(f)) & \xrightarrow{H(q(f))} & H(X[1]) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \mathsf{id}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathsf{id}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle J} & & \Big\downarrow{\scriptstyle m} \\
H(X) & \xrightarrow{H(f)} & H(Y) & \xrightarrow{p(H(f))} & c(H(f)) & \xrightarrow{q(H(f))} & H(X)[1]
\end{array} \quad .$$

Pour tout complexe $X$, désignons par $\overline{X}$ le complexe obtenu en gardant les composants de $X$ et en annulant les différentielles. Il résulte immédiatement de la définition de $H$ qu'on a l'égalité $\overline{H(X)} = H(\overline{X})$. De même, pour tout morphisme de complexes $f : X \to Y$, désignons par $\overline{f} : \overline{X} \to \overline{Y}$ le morphisme obtenu en conservant les composants de $f$. Il résulte alors de la définition du foncteur cône que $\overline{c(f)} = \overline{Y} \oplus \overline{X[1]}$, que le morphisme $\overline{p(f)} : \overline{Y} \to \overline{c(f)}$ est la première injection et que le morphisme $\overline{q(f)} : \overline{c(f)} \to \overline{X[1]}$ est la deuxième projection. Le foncteur $H$ et le foncteur "$\overline{\phantom{x}}$" étant additifs, on en déduit que $\overline{H(c(f))} = \overline{H(Y)} \oplus \overline{H(X[1])}$, que $\overline{H(p(f))} : \overline{H(Y)} \to \overline{H(c(f))}$ est la première injection et que $\overline{H(q(f))} : \overline{H(c(f))} \to \overline{H(X[1])}$ est la deuxième projection. Il en résulte que :

$$H(c(f))^l = H(Y)^l \oplus H(X[1])^l \quad ,$$

$$\text{(3.4.3.2)} \qquad d^l_{H(c(f))} = \begin{pmatrix} d^l_{H(Y)} & \Phi^l \\ 0 & d^l_{H(X[1])} \end{pmatrix} \quad ,$$

$$\Phi^l : H(X[1])^l \to H(Y)^{l+1} \quad .$$

La différentielle de $H(c(f))$ s'obtient sous cette forme en exprimant simplement que $H(p(f))$ et $H(q(f))$ sont des morphismes de complexes. Pour calculer $\Phi^l$, il faut revenir à la définition du foncteur $H$ et, par suite, à la définition du foncteur complexe simple associé (2.2.2.5). On a :

$$H(X[1])^l = \prod_{\substack{\sigma = \sum l_i e_i \\ \sum_i l_i = l}} F(X_1^{l_1}, \dots, X^{l_j+1}, \dots, X_n^{l_n}) \quad ,$$

$$\text{(3.4.3.3)} \qquad H(Y)^{l+1} = \prod_{\substack{\sigma = \sum l_i e_i \\ \sum_i l_i = l}} F(X_1^{l_1}, \dots, Y^{l_j+1}, \dots, X_n^{l_n}) \quad ,$$

$$\Phi^l = \prod_{\substack{\sigma = \sum l_i e_i \\ \sum_i l_i = l}} \varepsilon(\sigma, j) F(X_1^{l_1}, \dots, f^{l_j+1}, \dots, X_n^{l_n}) \quad .$$

Par ailleurs, on a (définition du foncteur cône) :

$$(3.4.3.4)\qquad \begin{aligned} c\big(H(f)\big)^l &= H(Y)^l \oplus \big(H(X)[1]\big)^l \quad, \\ d^l_{c(H(f))} &= \begin{pmatrix} d^l_{H(Y)} & H(f)^{l+1} \\ 0 & d^l_{H(X)[1]} \end{pmatrix} \quad, \end{aligned}$$

où le morphisme $H(f)$ est défini par (2.4.2.6), (2.4.2.3) et (2.2.2.6) :

$$(3.4.3.5)\qquad H(f)^{l+1} = \prod_{\substack{\sigma=\sum l_i e_i \\ \sum l_i = l}} F(X_1^{l_1}, \ldots, f^{l_j+1}, \ldots, X_n^{l_n}) \quad .$$

Posons alors :

$$(3.4.3.6)\qquad \begin{aligned} &J^l : H(Y)^l \oplus H\big(X[1]\big)^l \longrightarrow H(Y)^l \oplus \big(H(X)[1]\big)^l, \\ &J^l = \begin{pmatrix} \mathsf{id}_{H(Y)^l} & 0 \\ 0 & \Psi^l \end{pmatrix} \quad, \\ &\Psi^l = \prod_{\substack{\sigma=\sum l_i e_i \\ \sum l_i = l}} \varepsilon(\sigma, j)\mathsf{id}_{F(X_1^{l_1}, \ldots, X^{l_j+1}, \ldots, X_n^{l_n})} \quad . \end{aligned}$$

Pour vérifier que les $J^l$ sont les composants d'un morphisme de complexes, il suffit de vérifier que :

$$(3.4.3.7)\qquad \begin{aligned} \Phi^l &= H(f)^{l+1}\Psi^l \quad, \\ \Psi^{l+1} d^l_{H(X[1])} &= d^l_{H(X)[1]}\Psi^l \quad . \end{aligned}$$

Pour vérifier que le diagramme (3.4.3.1) est commutatif, il suffit de vérifier que :

$$(3.4.3.8)\qquad \Psi^l = m^l \quad .$$

La première égalité de (3.4.3.7) est évidente ((3.4.3.3) et (3.4.3.5)). La deuxième égalité de (3.4.3.7) résulte de (3.4.3.8). Pour vérifier (3.4.3.8), il suffit de se reporter à la définition du morphisme $m$ (2.3.2.1).

**3.4.4.** Lorsque les sommes directes dénombrables sont représentables dans $\mathcal{C}$, on a une proposition analogue à la proposition (3.4.3) pour le foncteur $K_{\Sigma}F$. La démonstration s'obtient en remplaçant dans la démonstration de la proposition (3.4.3) les produits par des sommes.

# Appendice : Commentaires sur le choix des signes.

Le foncteur cône est déterminé à isomorphisme unique près par ses propriétés d'adjonction (3.1.3). Pour pouvoir associer facilement à un morphisme de $\mathsf{tr}_1(\mathcal{C})$ un triangle de $\mathsf{comp}(\mathcal{C})$, nous avons choisi pour foncteur de translation le foncteur "cône du morphisme $X \to 0$" ((3.1.7) et (3.2.2.7)), *i.e.* décalage des degrés et changement de signe de la différentielle.

Soit $F : \prod_{i\in[n]} \mathcal{C}_i \to \mathcal{C}$ un foncteur multiadditif. La catégorie $\prod_{i\in[n]} \mathsf{comp}(\mathcal{C}_i)$ est munie naturellement d'une structure de $\mathbb{Z}[n]$-catégorie. Si on veut que le foncteur $F^{[n]} : \prod_{i\in[n]} \mathsf{comp}(\mathcal{C}_i) \to \mathsf{comp}^n(\mathcal{C})$ soit un $\mathbb{Z}[n]$-foncteur strict, on est conduit au choix des conventions que nous avons fait pour les translations : décalage des degrés dans une direction et changement de signe de la différentielle correspondante.

Nous avons pris les conventions de [**1**] pour le choix du foncteur complexe simple associé (à ceci près que, dans nos complexes multiples, les différentielles commutent entre elles). Ceci permet de définir le foncteur $\mathsf{K}_\Pi F : \prod_i \mathsf{K}(\mathcal{C}_i) \to \mathsf{K}(\mathcal{C})$. Il se trouve alors que $\mathsf{K}_\Pi F(X_1,\ldots,X_i[1],\ldots,X_n)$ est différent de $\mathsf{K}_\Pi F(X_1,\ldots,X_i,\ldots,X_n)[1]$. Pour pouvoir néanmoins affirmer que le foncteur $\mathsf{K}_\Pi F$ transforme les triangles distingués en triangles distingués, on est amené à définir les isomorphismes :

$$p_i : \mathsf{K}_\Pi F(X_1,\ldots,X_i[1],\ldots,X_n) \xrightarrow{\sim} \mathsf{K}_\Pi F(X_1,\ldots,X_i,\ldots,X_n)[1]$$

(démonstration de (3.4.3)).

Il se trouve alors que, pour $i \neq j$, on a des diagrammes anticommutatifs :

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{K}_\Pi F(X_1,\ldots,X_i[1],\ldots,X_j[1],\ldots) \arrow[r, "p_j"] \arrow[d, "p_i"'] & \mathsf{K}_\Pi F(X_1,\ldots,X_i[1],\ldots,X_j,\ldots)[1] \arrow[d, "p_i"] \\
\mathsf{K}_\Pi F(X_1,\ldots,X_i,\ldots,X_j[1],\ldots)[1] \arrow[r, "p_j"] & \mathsf{K}_\Pi F(X_1,\ldots,X_i,\ldots,X_j,\ldots)[2]
\end{tikzcd} .$$

On a alors montré (1.5.2) comment prolonger de façon cohérente ces isomorphismes en isomorphismes $p(\sigma)$ définis pour tout $\sigma \in \mathbb{Z}[n]$. Il intervient ici un choix arbitraire. Il consiste à choisir un cocycle dans une classe de cohomologie qui elle est bien déterminée : la classe de Koszul (1.6.3). Pour nous conformer aux règles communément admises (par exemple [**1**]), nous avons choisi de prendre dans tous les cas le cocycle de Koszul (1.6.6).