Chapitre II

Catégories triangulées.

1. Définitions et premières propriétés.

1.1. Définition des catégories triangulées.

Définition 1.1.1. Une *catégorie triangulée* $\mathcal{D}$ est une $\mathbb{Z}$-catégorie additive stricte (chap. I, 1.5.11) munie d'un ensemble de triangles (chap. I, 3.2.1), appelés *triangles distingués*, possédant les propriétés suivantes :

TRI : Tout triangle de $\mathcal{D}$ isomorphe à un triangle distingué est un triangle distingué. Pour tout objet X de $\mathcal{D}$, le triangle $X \xrightarrow{\mathsf{id}_X} X \to 0 \to X[1]$ est distingué. Tout morphisme $u : X \to Y$ de $\mathcal{D}$ est contenu dans un triangle distingué $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$.

TRII : Un triangle de $\mathcal{D}$: $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$ est distingué si et seulement si le triangle $Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1] \xrightarrow{-u[1]} Y[1]$ est distingué.

TRIII : Pour tout couple de triangles distingués :

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1] \quad ,$$

$$X' \xrightarrow{u'} Y' \xrightarrow{v'} Z' \xrightarrow{w'} X'[1]$$

et tout diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ X' \arrow[r, "u'"] & Y' \end{tikzcd} \quad ,$$

il existe un morphisme $h : Z \to Z'$ tel que (f, g, h) soit un morphisme de triangle, *i.e.* tel que le diagramme ci-après soit commutatif :

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"'] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, "h"'] & X[1] \arrow[d, "f[1]"] \\
X' \arrow[r, "u'"] & Y' \arrow[r, "v'"] & Z' \arrow[r, "w'"] & X'[1]
\end{tikzcd} \quad .$$

TRIV : Pour tout diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
& X_2 \arrow[dr, "u_1"] & \\
X_1 \arrow[ur, "u_3"] \arrow[rr, "u_2"] & & X_3
\end{tikzcd}$$

et tout triplet de triangles distingués :

$$X_1 \xrightarrow{u_3} X_2 \xrightarrow{v_3} Z_3 \xrightarrow{w_3} X_1[1] \quad ,$$

$$X_2 \xrightarrow{u_1} X_3 \xrightarrow{v_1} Z_1 \xrightarrow{w_1} X_2[1] \quad ,$$

$$X_1 \xrightarrow{u_2} X_3 \xrightarrow{v_2} Z_2 \xrightarrow{w_2} X_1[1] \quad ,$$

il existe deux morphismes :

$$m_1 : Z_3 \longrightarrow Z_2 \ ,$$

$$m_3 : Z_2 \longrightarrow Z_1 \ ,$$

tels que $(\mathsf{id}_{X_1}, u_1, m_1)$ et $(u_3, \mathsf{id}_{X_3}, m_3)$ soient des morphismes de triangles, et tels que le triangle :

$$Z_3 \xrightarrow{m_1} Z_2 \xrightarrow{m_3} Z_1 \xrightarrow{v_3[1]w_1} Z_3[1]$$

soit distingué.

Remarque 1.1.2. Soit (X, Y, Z, u, v, w) un triangle distingué. Il résulte de TRII que dans la suite illimitée :

$$\cdots \longrightarrow X[n] \xrightarrow{(-1)^n u[n]} Y[n] \xrightarrow{(-1)^n v[n]} Z[n] \xrightarrow{(-1)^n w[n]} X[n+1] \longrightarrow \cdots$$

trois morphismes consécutifs forment un triangle distingué. Les automorphismes de $\mathcal{D} : X \longmapsto X[n]$ sont appelés *automorphismes de translation.*

Définition 1.1.3. Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux catégories triangulées. Un *foncteur exact* de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{D}'$ est un $\mathbb{Z}$-foncteur (non nécessairement strict) (chap. I, 1.2.4) $(F,p) : \mathcal{D} \to \mathcal{D}'$ tel que, pour tout triangle distingué :

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$$

de $\mathcal{D}$, le triangle :

$$FX \xrightarrow{Fu} FY \xrightarrow{Fv} FZ \xrightarrow{p(X)Fw} (FX)[1]$$

soit distingué (1.1.4.2).

Définition 1.1.4. Soient $\mathcal{D}_i$, $1 \leq i \leq n$ et $\mathcal{D}$, $n+1$ catégories triangulées. Un *foncteur multi-exact* de $\prod_i \mathcal{D}_i$ dans $\mathcal{D}$ est un $\mathbb{Z}^n$-foncteur tordu (chap. I, 1.4.4) $(F,p) : \prod_i \mathcal{D}_i \to \mathcal{D}$ tel que, pour toute famille d'objets X_i appartenant respectivement aux catégories $\mathcal{D}_i$, $i \neq j$, le $\mathbb{Z}$-foncteur :

$$X \longmapsto F(X_1, \ldots, X, \ldots, X_n) : \mathcal{D}_j \to \mathcal{D}$$

soit un foncteur exact.

1.1.4.1. Dans la définition (1.1.4), la catégorie $\prod_i \mathcal{D}_i$ est munie de sa $\mathbb{Z}^n$-structure canonique et le groupe $\mathbb{Z}^n$ opère sur la catégorie $\mathcal{D}$ par l'intermédiaire de l'homomorphisme $\mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$, somme des coordonnées (chap. I, 1.6.6).

1.1.4.2. Conformément à la règle des signes I (chap. I, 1.6.6), les foncteurs multi-exacts seront, sauf mention expresse du contraire, tordus par le cocycle de Koszul relatif à la base canonique $e_1, \ldots, e_n$ de $\mathbb{Z}^n$ (chap. I, 1.6.4). Ceci implique en particulier que les foncteurs exacts de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{D}'$ sont tordus par le cocycle trivial.

Définition 1.1.5. Soient $\mathcal{D}$ une catégorie triangulée et $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne. Un foncteur $H : \mathcal{D} \to \mathcal{A}$ est appelé *foncteur cohomologique* si pour tout triangle distingué :

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$$

le diagramme :

$$HX \xrightarrow{Hu} HY \xrightarrow{Hv} HZ \xrightarrow{Hw} H\bigl(X[1]\bigr)$$

est une suite exacte de $\mathcal{A}$.

On montrera (1.2.7) que les foncteurs cohomologiques sont additifs et que les foncteurs multi-exacts sont multi-additifs.

Soit $H : \mathcal{D} \to \mathcal{A}$ un foncteur cohomologique. On utilise le plus souvent la notation $H^0(X) = H(X)$, $H^n(X) = H\big(X[n]\big)$. En utilisant l'axiome TRII, on voit qu'un foncteur cohomologique associe à tout triangle distingué $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$ une suite exacte longue :

(1.1.5.1)
$$\cdots \to H^{-1}(Z) \xrightarrow{H^{-1}(-w)} H^0(X) \xrightarrow{H^0(u)} H^0(Y) \xrightarrow{H^0(v)} H^0(Z) \xrightarrow{H^0(w)} \cdots$$

1.1.6. Soit $\mathcal{D}$ une catégorie triangulée. On emploie le plus souvent la terminologie suivante : un triangle $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$ de $\mathcal{D}$ est dit *antidistingué* si le triangle $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{-w} X[1]$ est distingué. Un $\mathbb{Z}$-foncteur d'une catégorie triangulée $\mathcal{D}'$ dans $\mathcal{D}$ est dit *antiexact* s'il transforme les triangles distingués de $\mathcal{D}'$ en triangles antidistingués de $\mathcal{D}$. Le plus souvent, pour désigner un foncteur exact de $\mathcal{D}'$ dans $\mathcal{D}$, on omet de faire figurer dans la notation les isomorphismes de commutation aux translations.

1.1.7. Soient $\mathcal{C}$ une $\mathbb{Z}$-catégorie stricte (chap. I, 1.2.2) et :
$$X \longmapsto X[n]\ , \quad n \in \mathbb{Z}\ ,$$
les foncteurs de translation de $\mathcal{C}$. Soit $\mathcal{C}^\circ$ la $\mathbb{Z}$-catégorie opposée (chap. I, 1.3.9). Pour tout morphisme u de $\mathcal{C}$, notons $((u))$ le morphisme correspondant de $\mathcal{C}^\circ$. Cette notation est abusive car l'ensemble des objets et l'ensemble des morphismes de $\mathcal{C}^\circ$ sont égaux respectivement à l'ensemble des objets et l'ensemble des morphismes de $\mathcal{C}$. Désignons par :
$$X \longmapsto X\big[[n]\big]\ , \quad n \in \mathbb{Z}\ ,$$
les foncteurs de translations de $\mathcal{C}^\circ$. Rappelons qu'on a, pour tout objet X de $\mathcal{C}$ et tout entier $n \in \mathbb{Z}$ (chap. I, 1.3.9) :
$$X[-n] = X\big[[n]\big] \quad .$$

On appelle *catégorie triangulée opposée* à une catégorie triangulée $\mathcal{D}$ la $\mathbb{Z}$-catégorie stricte $\mathcal{D}^\circ$ opposée à la catégorie $\mathcal{D}$ (chap. I, 1.3.9) munie de l'ensemble de triangles distingués suivant. Un triangle de $\mathcal{D}^\circ$:
$$X\big[[-1]\big] \xrightarrow{((w))} Z \xrightarrow{((v))} Y \xrightarrow{((u))} X$$
est distingué si et seulement si le triangle correspondant de la catégorie $\mathcal{D}$:
$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1] \quad ,$$
est *antidistingué*. On démontre aisément que la famille de triangles de $\mathcal{D}^\circ$ ainsi définie vérifie les axiomes des catégories triangulées.

1.2. Premières propriétés des catégories triangulées.

Proposition 1.2.1. *Soit $\mathcal{D}$ une catégorie triangulée. Pour tout objet X de $\mathcal{D}$, les foncteurs $\mathsf{Hom}_{\mathcal{D}}(X,\,.\,)$ et $\mathsf{Hom}_{\mathcal{D}}(\,.\,,X)$ sont des foncteurs cohomologiques à valeurs dans la catégorie des groupes abéliens.*

Il suffit tout d'abord de montrer que le foncteur $\mathsf{Hom}_{\mathcal{D}}(X,\,.\,)$ est un foncteur cohomologique. L'autre assertion s'obtiendra alors en passant à la catégorie opposée $\mathcal{D}^{\circ}$ (1.1.7). Soit donc $X' \xrightarrow{u'} Y' \xrightarrow{v'} Z' \xrightarrow{w'} X'[1]$ un triangle distingué. Il suffit de montrer que dans le diagramme :

(1.2.1.1)
$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{D}}(X,X') \xrightarrow{\mathsf{Hom}_{\mathcal{D}}(X,u')} \mathsf{Hom}_{\mathcal{D}}(X,Y') \xrightarrow{\mathsf{Hom}_{\mathcal{D}}(X,v')} \mathsf{Hom}_{\mathcal{D}}(X,Z') \xrightarrow{\mathsf{Hom}_{\mathcal{D}}(X,w')} \mathsf{Hom}_{\mathcal{D}}(X,X'[1])$$

on a : $\mathsf{Hom}_{\mathcal{D}}(X,v')\ \mathsf{Hom}_{\mathcal{D}}(X,u') = 0$ et que ce diagramme est exact en $\mathsf{Hom}_{\mathcal{D}}(X,Y')$. En effet, l'axiome TRII permettra alors d'obtenir le même résultat en $\mathsf{Hom}_{\mathcal{D}}(X,Z')$. Soit donc $f : X \to X'$. D'après TRI, le triangle $X \xrightarrow{\mathsf{id}_X} X \to 0 \to X[1]$ est distingué et d'après TRII et TRIII, il existe un morphisme $g : X \to Y'$ tel que le diagramme ci-après soit commutatif :

(1.2.1.2)
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\mathsf{id}_X"] \arrow[d, "f"'] & X \arrow[r] \arrow[d, "g"'] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & X[1] \arrow[d, "f[1]"] \\ X' \arrow[r, "u'"] & Y' \arrow[r, "v'"] & Z' \arrow[r, "w'"] & X'[1] \end{tikzcd} .$$

On en déduit que $u'f = g$ et que $v'u'f = v'g = 0$, ce qui démontre que $\mathsf{Hom}_{\mathcal{D}}(X,v')\ \mathsf{Hom}_{\mathcal{D}}(X,u') = 0$. Soit maintenant $g : X \to Y'$ un morphisme tel que $v'g = 0$. D'après TRII et TRIII, il existe un morphisme $f : X \to X'$ tel que le diagramme (1.2.1.2) soit commutatif. On en déduit que $g = u'f$ et que par conséquent la suite (1.2.1.1) est exacte en $\mathsf{Hom}_{\mathcal{D}}(X,Y')$.

Corollaire 1.2.2. *Dans un triangle distingué $X' \xrightarrow{u'} Y' \xrightarrow{v'} Z' \xrightarrow{w'} X'[1]$, le composé de deux morphismes consécutifs est nul.*

En vertu de TRII, il suffit de montrer que $v'u' = 0$. Pour cela, il suffit de prendre $X = X'$ dans la suite exacte (1.2.1.1) et de considérer les images successives de $\mathsf{id}_{X'} \in \mathsf{Hom}_{\mathcal{D}}(X',X')$.

Corollaire 1.2.3. *Soient (X,Y,Z,u,v,w) et (X',Y',Z',u',v',w') deux triangles distingués de $\mathcal{D}$ et (f_1,f_2,f_3) un morphisme de triangles. Si deux des f_i, $1 \leq i \leq 3$, sont des isomorphismes, le troisième l'est aussi.*

Supposons, pour fixer les idées, que $f_1 : X \to X'$ et $f_2 : Y \to Y'$ soient des isomorphismes. Pour tout objet W de $\mathcal{D}$, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \mathsf{Hom}_{\mathcal{D}}(W,X) \arrow[r] \arrow[d, "\mathsf{Hom}_{\mathcal{D}}(W,f_1)"] & \mathsf{Hom}_{\mathcal{D}}(W,Y) \arrow[r] \arrow[d, "\mathsf{Hom}_{\mathcal{D}}(W,f_2)"] & \mathsf{Hom}_{\mathcal{D}}(W,Z) \arrow[r] \arrow[d, "\mathsf{Hom}_{\mathcal{D}}(W,f_3)"] & \mathsf{Hom}_{\mathcal{D}}(W,X[1]) \arrow[r] \arrow[d, "\mathsf{Hom}_{\mathcal{D}}(W,f_1[1])"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & \mathsf{Hom}_{\mathcal{D}}(W,X') \arrow[r] & \mathsf{Hom}_{\mathcal{D}}(W,Y') \arrow[r] & \mathsf{Hom}_{\mathcal{D}}(W,Z') \arrow[r] & \mathsf{Hom}_{\mathcal{D}}(W,X'[1]) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd} ,$$

où les lignes sont exactes. On en déduit, par le lemme des cinq, que $\mathsf{Hom}_{\mathcal{D}}(W, f_3)$ est un isomorphisme pour tout W, et par suite que f_3 est un isomorphisme. Les deux autres assertions du corollaire se déduisent de celle-ci en utilisant l'axiome TRII.

Corollaire 1.2.4. *Soient $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$ et $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v'} Z' \xrightarrow{w'} X[1]$ deux triangles distingués. Il existe un isomorphisme $f : Z \xrightarrow{\sim} Z'$ tel que le diagramme ci-après soit commutatif :*

(1.2.4.1)
$$\begin{tikzcd}
 & & Z \arrow[dd, "f", "\wr"'] \arrow[dr, "w"] & \\
X \arrow[r, "u"] & Y \arrow[ur, "v"] \arrow[dr, "v'"'] & & X[1] \\
 & & Z' \arrow[ur, "w'"'] &
\end{tikzcd} .$$

En effet, d'après l'axiome TRIII, il existe un morphisme $f : Z \to Z'$ tel que le diagramme (1.2.4.1) soit commutatif. D'après (1.2.3), ce morphisme est un isomorphisme.

Le corollaire (1.2.4) montre donc que les triangles distingués contenant un morphisme donné sont essentiellement uniques : ils sont déterminés à isomorphisme près. Mais il convient de noter que cet isomorphisme n'est pas unique. Nous préciserons ce point en (1.2.12).

Corollaire 1.2.5. *La somme directe de deux triangles distingués est un triangle distingué.*

Soient :

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1] \quad ,$$

$$X' \xrightarrow{u'} Y' \xrightarrow{v'} Z' \xrightarrow{w'} X'[1]$$

deux triangles distingués et soit de plus :

$$X \oplus X' \xrightarrow{u \oplus u'} Y \oplus Y' \xrightarrow{m} L \xrightarrow{n} (X \oplus X')[1]$$

un triangle distingué contenant le morphisme $u \oplus u'$ (TRI). Les diagrammes :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\begin{pmatrix} \mathsf{id}_X \\ 0 \end{pmatrix}"'] & Y \arrow[d, "\begin{pmatrix} \mathsf{id}_Y \\ 0 \end{pmatrix}"] \\ X \oplus X' \arrow[r, "u \oplus u'"] & Y \oplus Y' \end{tikzcd} \quad ,$$

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "u'"] \arrow[d, "\begin{pmatrix} 0 \\ \mathsf{id}_{X'} \end{pmatrix}"'] & Y' \arrow[d, "\begin{pmatrix} 0 \\ \mathsf{id}_{Y'} \end{pmatrix}"] \\ X \oplus X' \arrow[r, "u \oplus u'"] & Y \oplus Y' \end{tikzcd}$$

sont commutatifs et, par suite, s'insèrent en vertu de (TRIII) dans des diagrammes commutatifs :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\begin{pmatrix} \mathsf{id}_X \\ 0 \end{pmatrix}"] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "\begin{pmatrix} \mathsf{id}_Y \\ 0 \end{pmatrix}"] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, "f"] & X[1] \arrow[d, "\begin{pmatrix} \mathsf{id}_{X[1]} \\ 0 \end{pmatrix}"] \\ X \oplus X' \arrow[r, "u \oplus u'"] & Y \oplus Y' \arrow[r, "m"] & L \arrow[r, "n"] & (X \oplus X')[1] \end{tikzcd} \quad ,$$

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "u'"] \arrow[d, "\begin{pmatrix} 0 \\ \mathsf{id}_{X'} \end{pmatrix}"] & Y' \arrow[r, "v'"] \arrow[d, "\begin{pmatrix} 0 \\ \mathsf{id}_{Y'} \end{pmatrix}"] & Z' \arrow[r, "w'"] \arrow[d, "f'"] & X'[1] \arrow[d, "\begin{pmatrix} 0 \\ \mathsf{id}_{X'[1]} \end{pmatrix}"] \\ X \oplus X' \arrow[r, "u \oplus u'"] & Y \oplus Y' \arrow[r, "m"] & L \arrow[r, "n"] & (X \oplus X')[1] \end{tikzcd} \quad .$$

On en déduit que le diagramme ci-après est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
X \oplus X' \arrow[r, "u \oplus u'"] \arrow[d, "\mathsf{id}"] & Y \oplus Y' \arrow[r, "v \oplus v'"] \arrow[d, "\mathsf{id}"] & Z \oplus Z' \arrow[r, "w \oplus w'"] \arrow[d, "(f, f')"] & (X \oplus X')[1] \arrow[d, "\mathsf{id}"] \\
X \oplus X' \arrow[r, "u \oplus u'"] & Y \oplus Y' \arrow[r, "m"] & L \arrow[r, "n"] & (X \oplus X')[1]
\end{tikzcd} \quad .$$

Pour démontrer le corollaire, il suffit de montrer que le morphisme :

$$(f, f') : Z \oplus Z' \longrightarrow L$$

est un isomorphisme. Il suffit donc de montrer que, pour tout objet M, le morphisme :

$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{D}}\big(M, (f, f')\big)$$

est un isomorphisme de groupes abeliens; ceci résulte immédiatement de (1.2.1) et du lemme des cinq.

Corollaire 1.2.6. *Soit $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$ un triangle distingué de $\mathcal{D}$ tel que $w = 0$. Il existe alors une section $s : Z \to Y$ du morphisme v. Toute section $s : Z \to Y$ définit un isomorphisme :*

$$X \oplus Z \xrightarrow[\sim]{(u,s)} Y \quad .$$

Réciproquement, tout triangle du type :

(1.2.6.1) $$X \xrightarrow{\begin{pmatrix} \mathsf{id} \\ 0 \end{pmatrix}} X \oplus Z \xrightarrow{(0\,,\,\mathsf{id})} Z \xrightarrow{0} X[1]$$

est distingué.

La troisième assertion résulte immédiatement de TRI, de TRII et de (1.2.5). Démontrons la première assertion. Il résulte de (1.2.1) que, pour tout W, la suite :

(1.2.6.2) $$0 \to \mathsf{Hom}_{\mathcal{D}}(W, X) \to \mathsf{Hom}_{\mathcal{D}}(W, Y) \to \mathsf{Hom}_{\mathcal{D}}(W, Z) \to 0$$

est exacte. En prenant $W = Z$, on voit que l'application identique $\mathsf{id}_Z \in \mathsf{Hom}_{\mathcal{D}}(Z, Z)$ provient d'une application $s : Z \to Y$, d'où l'existence de la section. Cette section permet de construire un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\begin{pmatrix} \mathsf{id} \\ 0 \end{pmatrix}"] \arrow[d, "\mathsf{id}"'] & X \oplus Z \arrow[r, "(0, \mathsf{id})"] \arrow[d, "(u,s)"'] & Z \arrow[d, "\mathsf{id}"] \\ X \arrow[r, "u"] & Y \arrow[r, "v"] & Z \end{tikzcd} .$$

En appliquant le foncteur $\mathsf{Hom}_{\mathcal{D}}(W, .)$, l'exactitude de la suite (1.2.6.2) et le lemme des cinq entraînent que le morphisme :

$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{D}}\big(W, (u, s)\big) : \mathsf{Hom}_{\mathcal{D}}(W, X \oplus Z) \to \mathsf{Hom}_{\mathcal{D}}(W, Y)$$

est un isomorphisme. Par suite, le morphisme (u, s) est un isomorphisme.

Remarque 1.2.7. Le corollaire (1.2.6) permet de montrer que tout foncteur exact $\mathcal{D}' \overset{F}{\to} \mathcal{D}$ est additif. Tout d'abord, le triangle $0 \to 0 \to 0 \to 0$ est distingué dans $\mathcal{D}'$; par suite, le triangle :

$$F(0) \xrightarrow{\mathsf{id}_{F(0)}} F(0) \xrightarrow{\mathsf{id}_{F(0)}} F(0) \to F(0)[1]$$

est distingué dans $\mathcal{D}$. On déduit alors de (1.2.2) que $F(0) = 0$. En appliquant le foncteur F à des triangles distingués du type (1.2.6.1) et en appliquant (1.2.6), on en déduit que F est additif. Un raisonnement analogue montre que tout foncteur cohomologique est additif.

Définition 1.2.8. Une *décomposition* d'un morphisme $f : X \to Y$ d'une catégorie additive est un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\wr"'] & Y \arrow[d, "\wr"] \\ Z \oplus W \arrow[r, "\begin{pmatrix} 0 & \mathsf{id}_W \\ 0 & 0 \end{pmatrix}"] & W \oplus Z' \end{tikzcd} .$$

Un morphisme est dit *décomposable* s'il admet une décomposition. Un *scindage* d'un morphisme $f : X \to Y$ est un morphisme $g : Y \to X$ tel que

$fgf = f$ et $gfg = g$. Un morphisme est dit *scindable* s'il possède un scindage. Les morphismes décomposables sont scindables. La réciproque n'est pas nécessairement vraie (exemple : catégorie des modules libres sur un anneau de Dedekind non principal). Une catégorie additive est dite *décomposable* si tous les morphismes de cette catégorie sont décomposables. Une catégorie décomposable est abélienne.

Soit $X \xrightarrow{f} Y$ un morphisme d'une catégorie triangulée $\mathcal{D}$ et soit :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\wr"'] & Y \arrow[d, "\wr"] \\ Z \oplus W \arrow[r, "\begin{pmatrix} 0 & \mathsf{id}_W \\ 0 & 0 \end{pmatrix}"] & W \oplus Z' \end{tikzcd}$$

une décomposition de f. Tout triangle distingué contenant f est isomorphe au triangle :

$$Z \oplus W \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & \mathsf{id}_W \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} W \oplus Z' \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & \mathsf{id}_{Z'} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} Z' \oplus Z[1] \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & \mathsf{id}_{Z[1]} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} Z[1] \oplus W[1] \quad .$$

Ceci résulte immédiatement de (1.2.4), de (1.2.5) et des axiomes TRI et TRII.

Proposition 1.2.9. *Soient $\mathcal{D}$ une catégorie triangulée et $f : X \to Y$ un morphisme de $\mathcal{D}$. Considérons les propriétés suivantes du morphisme f :*

i) *Le morphisme f admet un noyau.*

ii) *Le morphisme f admet un conoyau.*

iii) *Le morphisme f est décomposable.*

iv) *Le morphisme f est scindable.*

On a alors les implications :

$$\text{i)} \Longleftrightarrow \text{ii)} \Longleftrightarrow \text{iii)} \Longrightarrow \text{iv)} \quad .$$

Lorsque les produits dénombrables ou bien lorsque les sommes dénombrables sont représentables dans $\mathcal{D}$, les propriétés i), ii), iii) *et* iv) *sont équivalentes.*

Tout d'abord, on a évidemment les implications $iii) \Longrightarrow i)$, $iii) \Longrightarrow ii)$, $iii) \Longrightarrow iv)$. L'implication $i) \Longrightarrow iii)$ est équivalente à l'implication

$ii) \Longrightarrow iii)$ pour la catégorie opposée à $\mathcal{D}$. L'implication $i) \Longrightarrow iii)$ pour toute catégorie triangulée est donc équivalente à l'implication $ii) \Longrightarrow iii)$ pour toute catégorie triangulée. Pour démontrer les implications :

$$i) \Longleftrightarrow ii) \Longleftrightarrow iii) \Longrightarrow iv) \quad ,$$

il suffit donc de démontrer l'implication $i) \Longrightarrow iii)$.

1.2.10. Démonstration de la proposition 1.2.9. (suite). Démontrons d'abord qu'un monomorphisme est décomposable. Soient $f : X \to Y$ un monomorphisme et $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$ un triangle distingué contenant f (TRI). Le morphisme f étant un monomorphisme, il en est de même de $f[1]$. Il résulte alors de TRII et de (1.2.2) que $w = 0$. Il résulte alors de (1.2.6) que le morphisme f est décomposable. Démontrons maintenant que $i) \Longrightarrow iii)$ dans le cas général. Supposons que le morphisme $f : X \to Y$ admette un noyau $\mathsf{Ker}(f) \to X$. Le morphisme $\mathsf{Ker}(f) \to X$ est un monomorphisme, donc il est décomposable. Le morphisme f est donc isomorphe à un morphisme du type :

$$\mathsf{Ker}(f) \oplus X' \xrightarrow{(0,g)} Y \quad ,$$

dont le noyau est $\mathsf{Ker}(f) \xrightarrow{\begin{pmatrix} \mathsf{id} \\ 0 \end{pmatrix}} \mathsf{Ker}(f) \oplus X'$. On en déduit immédiatement que le morphisme g est un monomorphisme; par suite, il est décomposable. Le morphisme $f : X \to Y$ est donc isomorphe à un morphisme du type :

$$\mathsf{Ker}(f) \oplus X' \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & \mathsf{id} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} X' \oplus Y' \quad .$$

Il est donc décomposable.

1.2.11. Démonstration de la proposition 1.2.9. (fin)[1]. Il reste à démontrer l'implication $iv) \Longrightarrow iii)$ sous les hypothèses supplémentaires. Remarquons tout d'abord que les sommes directes dénombrables sont représentables dans $\mathcal{D}$ si et seulement si les produits directs dénombrables sont représentables dans $\mathcal{D}^\circ$. De plus, l'implication $iv) \Longrightarrow iii)$ pour la catégorie $\mathcal{D}$ est équivalente à l'implication $iv) \Longrightarrow iii)$ pour la catégorie opposée à $\mathcal{D}$. Il suffit donc de démontrer l'implication $iv) \Longrightarrow iii)$ lorsque les produits dénombrables sont représentables dans $\mathcal{D}$, *i.e.* compte tenu de ce qui précède, de

[1]Nous utilisons ici un argument dû à Freyd.

démontrer l'implication $iv) \Longrightarrow i)$. Soit donc $f : X \to Y$ un morphisme muni d'un scindage $g : Y \to X$. Le foncteur noyau du morphisme $f : X \to Y$ est alors égal au foncteur noyau du morphisme $gf : X \to X$ qui est un projecteur de X (*i.e.* $gfgf = gf$). On est donc ramené à démontrer que, dans une catégorie triangulée, où les produits dénombrables sont représentables, les projecteurs admettent des noyaux. Soit donc $e : X \to X$ un projecteur de X. Posons $X_i = X$, $i \in \mathbb{N}$, soient :

$$\Phi : \prod_{i \in \mathbb{N}} X_i \to \prod_{i \in \mathbb{N}} X_i \quad ,$$

le morphisme défini par :

$$(1.2.11.1) \qquad \Phi(x_0, x_1, x_2, \dots) = \big(ex_0 + (1-e)x_1, ex_1 + (1-e)x_2, \dots\big) \quad .$$

La formule (1.2.11.1) définit un morphisme en interprétant les symboles $x_0, x_1, \dots$ comme des morphismes d'un objet quelconque de $\mathcal{D}$ dans les X_i. De même, soit :

$$\Psi : \prod_{i \in \mathbb{N}} X_i \to \prod_{i \in \mathbb{N}} X_i \quad ,$$

le morphisme défini par :

$$(1.2.11.2) \quad \Psi(x_0, x_1, x_2, \dots) = \big(x_0, (1-e)x_0 + ex_1, (1-e)x_1 + ex_2, \dots\big) \quad .$$

Il est clair que $\Phi\Psi = \mathsf{id}$ et, par suite, le morphisme Φ est un épimorphisme. Il admet donc, d'après les implications déjà démontrées, un noyau représentable. D'autre part, le foncteur noyau de Φ est canoniquement isomorphe au foncteur noyau de $e : X \to X$. Ce foncteur est donc représentable et, par suite, le projecteur e admet un noyau. Ceci achève la démonstration de la proposition (1.2.9).

1.2.12. Le corollaire (1.2.4) montre que les triangles distingués contenant un morphisme donné sont uniques à isomorphisme non unique près. De plus, l'axiome TRIII impose que tout morphisme de morphismes se prolonge en un morphisme de triangles. On peut donc se demander s'il est possible de définir la structure triangulée en associant fonctoriellement à tout morphisme de la catégorie un triangle distingué. Nous allons montrer que dans l'affirmative la catégorie est, sous certaines hypothèses supplémentaires, décomposable.

Proposition 1.2.13. *Soient $\mathcal{D}$ une catégorie triangulée et Tr un foncteur de $\mathcal{F}\ell_1(\mathcal{D})$* (chap. I, 3.3.6), *catégorie des morphismes de $\mathcal{D}$, dans la catégorie des triangles distingués (sous-catégorie pleine de la catégorie des triangles de $\mathcal{D}$ définie par les triangles distingués) :*

$$Tr(X \xrightarrow{f} Y) = X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{a(f)} \tau(f) \xrightarrow{b(f)} X[1] \quad .$$

Si les produits dénombrables ou les sommes directes dénombrables sont représentables dans $\mathcal{D}$, la catégorie $\mathcal{D}$ est décomposable.

En effet, soit $v : W \to X$ un morphisme tel que $fv = 0$. On a alors un morphisme de morphismes :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \\ W \arrow[u, "v"] \arrow[r] & 0 \arrow[u] \end{tikzcd} \quad .$$

D'où, en appliquant le foncteur Tr, un diagramme commutatif :

$$(1.2.13.1) \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "a(f)"] & \tau(f) \arrow[r, "b(f)"] & X[1] \\ W \arrow[u, "v"] \arrow[r] & 0 \arrow[u] \arrow[r] & \tau(W \to 0) \arrow[u, "Tr(v,0)"] \arrow[r, "b(W \to 0)"] & W[1] \arrow[u, "v[1]"'] \end{tikzcd} \quad .$$

Remarquons tout d'abord que la ligne du bas du diagramme (1.2.13.1) est un triangle distingué. Par suite, le morphisme $b(W \to 0)$ est un isomorphisme (1.2.1). Posons alors :

$$\alpha(v) = Tr(v,0)[-1]\, b(W \to 0)^{-1}[-1] \quad ,$$

de sorte que le diagramme :

$$\begin{tikzcd} \tau(f)[-1] \arrow[rr, "b(f)[-1]"] & & X \arrow[r, "f"] & Y \\ & & W \arrow[ull, "\alpha(v)"] \arrow[u, "v"] \arrow[ur, "0"'] & \end{tikzcd}$$

soit commutatif. On vérifie aussitôt qu'on a ainsi défini une section :

$$\alpha : \mathsf{Ker}(f) \longrightarrow \tau(f)[-1]$$

du morphisme canonique $\tau(f)[-1] \to \mathsf{Ker}(f)$ du foncteur représenté par $\tau(f)[-1]$ dans le foncteur noyau du morphisme f. Le foncteur noyau de f est donc isomorphe au foncteur noyau d'un projecteur de $\tau(f)[-1]$. Il est donc représentable (1.2.9). On en déduit par (1.2.9) que le morphisme f est décomposable, ce qui achève la démonstration.

Remarque 1.2.14. Les propriétés étudiées au numéro 1.2 n'ont fait à aucun moment intervenir l'axiome TRIV. Elles sont donc valables pour toutes les $\mathbb{Z}$-catégories additives strictes munies d'un ensemble de triangles vérifiant les axiomes TRI, TRII et TRIII.

1.3. Exemples de catégories triangulées.

1.3.1. Soient $\mathcal{C}$ une catégorie additive, $\mathsf{K}(\mathcal{C})$ la catégorie des complexes de $\mathcal{C}$ à homotopie près (chap. I, 2.5.7). La catégorie $\mathsf{K}(\mathcal{C})$ est une $\mathbb{Z}$-catégorie stricte munie d'une famille de triangles, les triangles distingués (chap. I, 3.3.1), qui possède les propriétés TRI, TRII et TRIII (chap. I, 3.3).

Proposition 1.3.2. *La catégorie $\mathsf{K}(\mathcal{C})$, munie de la famille des triangles distingués, est une catégorie triangulée.*

Il reste à démontrer que la famille des triangles distingués de $\mathsf{K}(\mathcal{C})$ possède la propriété TRIV. Soient donc :

$$\begin{tikzcd} & X_2 \arrow[dr, "u_1"] & \\ X_1 \arrow[ur, "u_3"] \arrow[rr, "u_2"'] & & X_3 \end{tikzcd}$$

un diagrammme commutatif et :

$$X_1 \xrightarrow{u_3} X_2 \xrightarrow{v_3} Z_3 \xrightarrow{w_3} X_1[1] \quad ,$$

$$X_2 \xrightarrow{u_1} X_3 \xrightarrow{v_1} Z_1 \xrightarrow{w_1} X_2[1] \quad ,$$

$$X_1 \xrightarrow{u_2} X_3 \xrightarrow{v_2} Z_2 \xrightarrow{w_2} X_1[1]$$

trois triangles distingués. D'après (chap. I, 3.3.5), il existe trois triangles distingués :

$$(X_1, X_2, Z'_3, u_3, v'_3, w'_3)\ , \quad (X_2, X_3, Z'_1, u_1, v'_1, w'_1)\ , \quad (X_1, X_3, Z'_2, u_2, v'_2, w'_2)$$

et deux morphismes :

$$m'_1 : Z'_3 \longrightarrow Z'_2 \quad , \qquad m'_3 : Z'_2 \longrightarrow Z'_1 \quad ,$$

tels que $(\mathsf{id}_{X_1}, u_1, m'_1)$ et $(u_3, \mathsf{id}_{X_3}, m'_3)$ soient des morphismes de triangles et tels que le triangle :

$$Z'_3 \xrightarrow{m'_1} Z'_2 \xrightarrow{m'_3} Z'_1 \xrightarrow{v'_3[1]w'_1} Z'_3[1]$$

soit distingué. De plus ((1.2.4) et (1.2.14)), il existe des isomorphismes $i_j : Z'_j \to Z_j$, $1 \leq j \leq 3$, tels que $(\mathsf{id}, \mathsf{id}, i_j)$ soient des isomorphismes de triangles. Il suffit alors de poser :

$$m_1 = i_2 m'_1 i_3^{-1} : Z_3 \longrightarrow Z_2 \quad , \qquad m_3 = i_1 m'_3 i_2^{-1} : Z_2 \longrightarrow Z_1 \quad .$$

Les morphismes m_1 et m_3 possèdent les propriétés demandées par l'axiome TRIV.

1.3.3. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie *additive.* À tout objet X de $\mathcal{C}$, on associe le complexe de $\mathcal{C}$ dont tous les composants sont nuls sauf le composant de degré zéro qui est égal à X. On définit ainsi un foncteur de $\mathcal{C}$ dans $\mathsf{comp}(\mathcal{C})$, et en composant avec le foncteur canonique $\mathsf{comp}(\mathcal{C}) \to \mathsf{K}(\mathcal{C})$, un foncteur de $\mathcal{C}$ dans $\mathsf{K}(\mathcal{C})$.

Ces foncteurs sont pleinement fidèles et injectifs sur les ensembles d'objets, et réalisent donc $\mathcal{C}$ comme sous-catégorie pleine de $\mathsf{comp}(\mathcal{C})$ et $\mathsf{K}(\mathcal{C})$. Par la suite, la catégorie $\mathcal{C}$ sera toujours considérée comme sous-catégorie pleine de $\mathsf{comp}(\mathcal{C})$ et $\mathsf{K}(\mathcal{C})$ par l'intermédiaire de ces foncteurs.

1.3.4. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie *abélienne.* Pour tout complexe X de $\mathcal{C}$, on désigne par $\mathsf{H}^0(X)$ l'objet de $\mathcal{C}$:

$$\mathsf{H}^0(X) = \mathsf{Ker}(d_X^0)/\mathsf{Im}(d_X^{-1}) \quad . \tag{1.3.4.1}$$

Pour tout morphisme de complexes $X \xrightarrow{f} Y$, on désigne par :

$$\mathsf{H}^0(f) : \mathsf{H}^0(X) \longrightarrow \mathsf{H}^0(Y)$$

le morphisme induit par f . On définit ainsi un foncteur :

$$\mathsf{H}^0 : \mathsf{comp}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{C}$$

qu'on appelle le *zéro-ième objet de cohomologie.* Ce foncteur transforme les morphismes homotopes en morphismes égaux et, par suite, fournit un foncteur encore noté :

$$\mathsf{H}^0 : \mathsf{K}(\mathcal{C}) \to \mathcal{C} \quad .$$

Proposition 1.3.5. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie abélienne. Le foncteur :*

$$\mathsf{H}^0 : \mathsf{K}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{C}$$

est un foncteur cohomologique.

En effet, d'après (chap. I, 3.3.1), il suffit de montrer que, pour tout objet $X \xrightarrow{f} Y$ de $\mathsf{tr}_1(\mathcal{C})$ (chap. I, 3.1.1), la suite :

$$\mathsf{H}^0(X) \xrightarrow{\mathsf{H}^0(f)} \mathsf{H}^0(Y) \xrightarrow{\mathsf{H}^0(p(f))} \mathsf{H}^0\big(c(f)\big) \xrightarrow{\mathsf{H}^0(q(f))} \mathsf{H}^0\big(X[1]\big)$$

est exacte. En utilisant la propriété TRII (1.1.1), on voit qu'il suffit de montrer que la suite :

$$\mathsf{H}^0(Y) \xrightarrow{\mathsf{H}^0(p(f))} \mathsf{H}^0\big(c(f)\big) \xrightarrow{\mathsf{H}^0(q(f))} \mathsf{H}^0\big(X[1]\big)$$

est exacte, ce qui résulte immédiatement des définitions (chap. I, 3.1.2 et 3.2.2).

Le foncteur $\mathsf{H}^0 : \mathsf{K}(\mathcal{C}) \to \mathcal{C}$ est appelé le *foncteur cohomologique canonique.* On pose $\mathsf{H}^n(X) = \mathsf{H}^0\big(X[n]\big)$ conformément à l'usage.

Proposition 1.3.6. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie abélienne. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) *La catégorie $\mathsf{K}(\mathcal{C})$ est abélienne.*

ii) *La catégorie $\mathsf{K}(\mathcal{C})$ est décomposable* (1.2.8).

iii) *La catégorie $\mathcal{C}$ est décomposable.*

L'équivalence $i) \Longleftrightarrow ii)$ résulte de (1.2.9). L'implication $ii) \Longrightarrow iii)$ est évidente car $\mathcal{C}$ est une sous-catégorie pleine de $\mathsf{K}(\mathcal{C})$. Pour tout complexe X de $\mathcal{C}$, désignons par $\mathsf{H}^*(X)$ le complexe :

$$\mathsf{H}^*(X)^l = \mathsf{H}^l(X) \quad , \qquad l \in \mathbb{Z} \quad ,$$

$$d^l_{\mathsf{H}^*(X)} = 0 \quad , \qquad l \in \mathbb{Z} \ .$$

On vérifie que le foncteur $\mathsf{H}^* : \mathsf{K}(\mathcal{C}) \to \mathsf{K}(\mathcal{C})$ est une équivalence de catégories lorsque $\mathcal{C}$ est décomposable. On en déduit l'implication $iii) \Longrightarrow ii)$.

1.3.7. Soit $F : \prod_{i \in [n]} \mathcal{C}_i \to \mathcal{C}$ un foncteur multi-additif. Supposons que les produits dénombrables soient représentables dans $\mathcal{C}$. Il résulte immédiatement de (chap. I, 3.4.3 et 3.4.4) que la Π-extension du foncteur F aux complexes à homotopie près :

$$\mathsf{K}_\Pi F : \prod_{i \in [n]} \mathsf{K}(\mathcal{C}_i) \to \mathsf{K}(\mathcal{C})$$

est un foncteur multi-exact. Ce foncteur est un $\mathbb{Z}^n$-foncteur tordu par le cocycle de Koszul conformément à la règle des signes (chap. I, 1.6.6). Résultats analogues pour le foncteur $\mathsf{K}_\Sigma F$.

1.3.8. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie additive et $\iota : \mathsf{K}(\mathcal{C})^\circ \to \mathsf{K}(\mathcal{C}^\circ)$ l'isomorphisme canonique $\iota = \iota_1$ (chap. I, 2.5.13). Munissons la catégorie $\mathsf{K}(\mathcal{C})^\circ$ de la structure triangulée décrite en (1.1.7). Il résulte de (chap. I, 3.4.1) que ι est un foncteur exact entre catégories triangulées. Par suite, ι est un isomorphisme de catégories triangulées. Nous identifierons dorénavant, sauf mention du contraire, les catégories triangulées $\mathsf{K}(\mathcal{C})^\circ$ et $\mathsf{K}(\mathcal{C}^\circ)$ à l'aide de l'isomorphisme ι.