2. Localisation dans les catégories triangulées.

2.1. Systèmes multiplicatifs de morphismes [16].

2.1.1. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie (non nécessairement additive). Un ensemble S de morphismes de $\mathcal{C}$ est appelé un *système multiplicatif* si il possède les propriétés suivantes :

SM1) Le composé de deux morphismes composables de S est un élément de S. Pour tout objet X de $\mathcal{C}$, le morphisme identique de X est un élément de S.

SM2) Tout diagramme :

$$\begin{tikzcd} & {} \arrow[d, "s \in S"] \\ {} \arrow[r, "f"'] & {} \end{tikzcd}$$

peut se compléter en un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[r, dashed, "g"] \arrow[d, dashed, "t \in S"'] & {} \arrow[d, "s \in S"] \\ {} \arrow[r, "f"'] & {} \end{tikzcd} \qquad .$$

Tout diagramme :

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "t \in S"'] & {} \\ {} & \end{tikzcd}$$

peut se compléter en un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "t \in S"'] & {} \arrow[d, dashed, "s \in S"] \\ {} \arrow[r, dashed, "f"'] & {} \end{tikzcd} \qquad .$$

SM3) Pour tout couple de morphismes $f, g : X \rightrightarrows Y$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) Il existe un morphisme s de S, de source Y, tel que $sf = sg$.

ii) Il existe un morphisme t de S, de but X, tel que $ft = gt$.

Un système multiplicatif est dit *saturé* s'il possède la propriété suivante :

SM4) Si f, g et h sont trois morphismes composables et si les morphismes fg et gh appartiennent à S, alors le morphisme g appartient à S.

2.1.2. Soit $\mathcal{D}$ une catégorie triangulée. Un système multiplicatif S de $\mathcal{D}$ est dit *compatible avec la triangulation* s'il possède les propriétés suivantes :

SM5) Pour tout élément s de S et tout entier $n \in \mathbb{Z}$, le morphisme $s[n]$ appartient à S. Autrement dit, S est *stable par les automorphismes de translation.*

SM6) Pour tout couple de triangles distingués :

$$(X, Y, Z, u, v, w) \quad , \quad (X', Y', Z', u', v', w')$$

et tout diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "s"'] & Y \arrow[d, "s'"] \\ X' \arrow[r, "u'"] & Y' \end{tikzcd} \quad ,$$

où s et s' sont des éléments de S, il existe un morphisme appartenant à S : $s'' : Z \to Z'$ tel que (s, s', s'') soit un morphisme de triangles.

Remarque 2.1.3. 1) Soient $\mathcal{D}$ une catégorie triangulée, S un système multiplicatif de $\mathcal{D}$ compatible avec la triangulation et $\mathcal{D}^\circ$ la catégorie triangulée opposée à $\mathcal{D}$. L'ensemble S de morphismes de $\mathcal{D}^\circ$ est un système multiplicatif de $\mathcal{D}^\circ$ compatible avec la triangulation de $\mathcal{D}^\circ$ (1.1.7).

2) Soient $\mathcal{D}$ une catégorie triangulée et S un ensemble de morphismes de $\mathcal{D}$ possédant les propriétés SM1), SM5) et SM6). Alors l'ensemble S possède aussi la propriété SM2). En effet, il suffit de montrer que tout diagramme :

$$\begin{tikzcd} & X' \arrow[d, "s \in S"] \\ Z \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd}$$

se complète en un diagramme commutatif :

$$t \in S \qquad \begin{tikzcd} Z' \arrow[r, dashed, "g"] \arrow[d, dashed, "t"'] & X' \arrow[d, "s"] \\ Z \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd} \quad ,$$

car alors la deuxième assertion de SM2) s'obtiendra en passant à la catégorie opposée. Par TRI) et TRII), on sait qu'il existe un triangle distingué $(X, Y, Z[1], u, v, f[1])$ et, par TRI), on sait qu'il existe un triangle distingué (X', Y, Z', us, v', w'). On a alors un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "us"] \arrow[d, "s"'] & Y \arrow[d, "\mathsf{id}_Y"] \\ X \arrow[r, "u"] & Y \end{tikzcd} \quad .$$

Le morphisme id_Y appartient à S (SM1) et, par SM6), on obtient un morphisme $s' : Z' \to Z[1]$ appartenant à S tel que (s, id_Y, s') soit un morphisme de triangles. En particulier, le diagramme ci-après est commutatif :

$$\begin{tikzcd} Z' \arrow[r, "w'"] \arrow[d, "s'"'] & X'[1] \arrow[d, "s[1]"] \\ Z[1] \arrow[r, "f[1]"] & X[1] \end{tikzcd} \quad ,$$

d'où, en utilisant SM5), la première assertion de SM2).

2.1.4. *Les systèmes multiplicatifs des catégories triangulées seront, sauf mention expresse du contraire, compatibles avec la triangulation. Ils seront donc appelés simplement et par abus de langage, systèmes multiplicatifs.*

2.1.5. Soit $\mathcal{D}$ une catégorie triangulée. Une *sous-catégorie triangulée pleine* de $\mathcal{D}$ est une sous-catégorie pleine de $\mathcal{D}$ stable par translations, munie d'une structure triangulée telle que le foncteur d'inclusion soit un foncteur exact (pour la commutation stricte aux translations). Une sous-catégorie triangulée pleine de $\mathcal{D}$ est une sous-catégorie additive de $\mathcal{D}$ (1.2.7). Une sous-catégorie pleine de $\mathcal{D}$ admet au plus une structure triangulée compatible avec le foncteur d'inclusion. Soit $\mathcal{D}'$ une sous-catégorie pleine de $\mathcal{D}$ stable par translations. Pour que $\mathcal{D}'$ admette une structure triangulée faisant de $\mathcal{D}'$ une sous-catégorie triangulée pleine de $\mathcal{D}$, il faut et il suffit que pour tout couple X, Y d'objets de $\mathcal{D}'$ et tout morphisme $f : X \to Y$, il existe un triangle distingué de $\mathcal{D}$: (X, Y, Z, f, g, h), où Z est un objet de $\mathcal{D}'$.

2.1.6. Soit $\mathcal{D}$ une catégorie triangulée. Une sous-catégorie triangulée pleine $\mathcal{D}'$ de $\mathcal{D}$ est dite *saturée* si elle possède la propriété suivante :

(2.1.6.1) *Tout facteur direct dans $\mathcal{D}$ d'un objet de $\mathcal{D}'$ est isomorphe à un objet de $\mathcal{D}'$.*

(Un facteur direct d'un objet Y est un objet X tel qu'il existe un objet Z et un isomorphisme $X \oplus Z \xrightarrow{\sim} Y$).

2.1.7. Soit $\mathcal{D}'$ une sous-catégorie triangulée pleine d'une catégorie triangulée $\mathcal{D}$. Désignons par $S(\mathcal{D}')$ l'ensemble de morphismes de $\mathcal{D}$ défini de la manière suivante :

(2.1.7.1)
Un morphisme $f : X \to Y$ appartient à $S(\mathcal{D}')$ si et seulement s'il existe un triangle distingué de $\mathcal{D}$: (X, Y, Z, f, g, h), où Z est un objet de $\mathcal{D}'$.

Proposition 2.1.8. *L'ensemble $S(\mathcal{D}')$* (2.1.7.1) *est un système multiplicatif* (2.1.4) *de $\mathcal{D}$. Il est saturé si et seulement si la sous-catégorie $\mathcal{D}'$ est saturée.*

Pour prouver la première assertion, il suffit en vertu de (2.1.3), de montrer que l'ensemble $S(\mathcal{D}')$ possède les propriétés SM1), SM3), SM5) et SM6). Nous allons montrer successivement que l'ensemble $S(\mathcal{D}')$ possède ces propriétés, et nous démontrerons ensuite la dernière assertion.

2.1.9. *L'ensemble $S(\mathcal{D}')$ possède la propriété* SM1). Tout d'abord, il est clair que pour tout objet X de $\mathcal{D}$, le morphisme id_X est un élément de $S(\mathcal{D}')$. Ceci résulte immédiatement de TRI) et du fait que les objets nuls de $\mathcal{D}'$ sont des objets nuls de $\mathcal{D}$. Le fait que l'ensemble $S(\mathcal{D}')$ est stable par composition résulte immédiatement de l'axiome TRIV) et de (1.2.4). Nous laissons au lecteur le soin de faire les vérifications.

2.1.10. *L'ensemble $S(\mathcal{D}')$ possède la propriété* SM3). Il suffit tout d'abord de montrer que lorsqu'on a un diagramme $X \xrightarrow{s} Y \xrightarrow{f} Z$, avec $s \in S(\mathcal{D}')$, $fs = 0$, il existe un diagramme $Y \xrightarrow{f} Z \xrightarrow{t} W$, avec $t \in S(\mathcal{D}')$, $tf = 0$. Car alors, en passant aux catégories opposées, on obtiendra la réciproque et, par suite, SM3). Par hypothèse, il existe un triangle distingué (X, Y, N, s, h, u), où N est un objet de $\mathcal{D}'$. Comme on a $fs = 0$, il résulte de (1.2.1) qu'il existe un morphisme $g : N \to Z$ tel que $f = gh$. Soit alors (N, Z, W, g, t, v) un triangle distingué contenant g (TRI). On a alors $tg = 0$ (1.2.2) et, par suite, $tf = tgh = 0$. Tout revient donc à montrer que t est un élément de $S(\mathcal{D}')$, ce qui résulte immédiatement de TRII).

2.1.11. *L'ensemble* $S(\mathcal{D}')$ *possède la propriété* SM5). Résulte immédiatement de TRII) et du fait que la sous-catégorie $\mathcal{D}'$ est stable par translation.

2.1.12. *L'ensemble* $S(\mathcal{D}')$ *possède la propriété* SM6). Soient (X, Y, Z, u, v, w) et (X', Y', Z', u', v', w') deux triangles distingués de $\mathcal{D}$ et :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "s"'] & Y \arrow[d, "s'"] \\ X' \arrow[r, "u'"] & Y' \end{tikzcd}$$

un diagramme commutatif, où s et s' appartiennent à $S(\mathcal{D}')$. Il s'agit de trouver un morphisme $s'' : Z \to Z'$ de $S(\mathcal{D}')$ tel que (s, s', s'') soit un morphisme de triangles. On peut tout d'abord supposer qu'on est dans l'un des deux cas suivants :

a) On a $X = X'$ et $s = \mathsf{id}_X$.

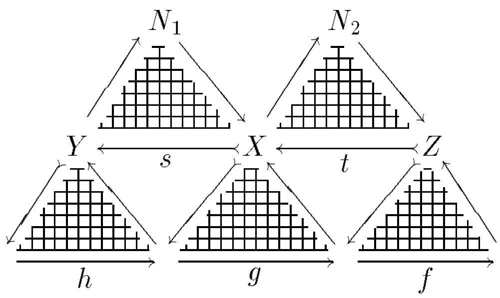
b) On a $Y = Y'$ et $s' = \mathsf{id}_Y$.

En effet, tout morphisme de morphismes se factorise :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\mathsf{id}_X"'] & Y \arrow[d, "s'"] \\ X \arrow[r, "s'u"] \arrow[d, "s"'] & Y' \arrow[d, "\mathsf{id}_{Y'}"] \\ X' \arrow[r, "u'"] & Y' \end{tikzcd} ,$$

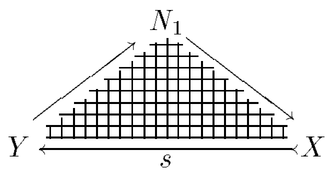
et on obtiendra le morphisme s'' en composant (on a déjà montré que l'ensemble $S(\mathcal{D}')$ est stable par composition). Ensuite, le cas *b*) se déduit du cas *a*) en passant aux catégories opposées. Il suffit donc de traiter le cas *a*), qui est alors une conséquence immédiate de TRIV).

2.1.13. *Si la catégorie $\mathcal{D}'$ est saturée, l'ensemble $S(\mathcal{D}')$ est saturé.* Soient f, g, h trois morphismes composables tels que fg et gh soient des éléments de $S(\mathcal{D}')$. Utilisant l'axiome TRIV, on peut construire un diagramme :



,

où N_1 et N_2 sont des objets de $\mathcal{D}'$, où les cinq triangles hachurés sont des triangles distingués et où les deux triangles non hachurés sont commutatifs. On en déduit que $s[1]t = 0$ (1.2.2). De plus, en vertu de SM1) et SM5), le morphisme $s[1]t$ est un élément de $S(\mathcal{D}')$. Il existe donc un triangle distingué du type $(Z, Y[2], N, 0, u, v)$, où N est un objet de $\mathcal{D}'$. On en déduit, en utilisant (1.2.6) et TRII, que Y est facteur direct d'un objet de $\mathcal{D}'$. Par suite, Y est isomorphe à un objet de $\mathcal{D}'$. On en déduit, en utilisant (1.2.4), le fait que $\mathcal{D}'$ soit une sous-catégorie triangulée de $\mathcal{D}$ et le triangle distingué :



que X est isomorphe à un objet de $\mathcal{D}'$. Par suite, le morphisme g est un élément de $S(\mathcal{D}')$.

2.1.14. *Si l'ensemble $S(\mathcal{D}')$ est saturé, la sous-catégorie $\mathcal{D}'$ est saturée.* Soit X un facteur direct d'un objet de $\mathcal{D}'$. En utilisant (1.2.6) et TRII, on voit qu'il existe un triangle distingué $(X, Y, N, 0, u, v)$, où N est un objet de $\mathcal{D}'$. Par suite, le morphisme nul $X \to Y$ est un morphisme de $S(\mathcal{D}')$. Appliquons alors la propriété SM4) aux trois morphismes $0 \to X \to 0 \to Y$. On en déduit que le morphisme $X \to 0$ est un élément de $S(\mathcal{D}')$. Il existe donc un triangle distingué $(X, 0, N, 0, 0, i)$, où N est un objet de $\mathcal{D}'$. Par suite, le morphisme $N \xrightarrow{i} X[1]$ est un isomorphisme. On en déduit que X est isomorphe à $N[-1]$, qui est un objet de $\mathcal{D}'$. Ceci achève la preuve de la proposition (2.1.8).

2.1.15. Soit $\mathcal{D}'$ une sous-catégorie triangulée pleine d'une catégorie triangulée $\mathcal{D}$. Le système multiplicatif $S(\mathcal{D}')$ (2.1.7) est appelé le *système multiplicatif associé à la sous-catégorie* $\mathcal{D}'$.

Proposition 2.1.16. *Soit $F : \mathcal{D}_1 \to \mathcal{D}_2$ un foncteur exact entre deux catégories triangulées* (1.1.3). *Soit $S(F)$ l'ensemble des morphismes de $\mathcal{D}_1$ qui sont transformés par F en isomorphismes de $\mathcal{D}_2$. Soit $\mathcal{D}'(F)$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{D}_1$ définie par les objets de $\mathcal{D}_1$ qui sont transformés par F en objets nuls de $\mathcal{D}_2$.*

a) *La sous-catégorie $\mathcal{D}'(F)$ est une sous-catégorie triangulée strictement pleine* (*tout objet de $\mathcal{D}_1$ isomorphe à un objet de $\mathcal{D}'(F)$ est un objet de $\mathcal{D}'(F)$*) *et saturée.*

b) *L'ensemble $S(F)$ est un système multiplicatif saturé de $\mathcal{D}_1$.*

c) *L'ensemble $S(F)$ est le système multiplicatif associé à la sous-catégorie* $\mathcal{D}'(F)$ (2.1.15).

La preuve est facile et laissée au lecteur qui pourra démontrer de même la proposition ci-après :

Proposition 2.1.17. *Soit $H : \mathcal{D} \to \mathcal{A}$ un foncteur cohomologique d'une catégorie triangulée dans une catégorie abélienne. Soit $S(H)$ l'ensemble des morphismes de $\mathcal{D}$ qui sont transformés, ainsi que leurs translatés, en des isomorphismes de $\mathcal{A}$. Soit $\mathcal{D}'(H)$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{D}$ définie par les objets de $\mathcal{D}$ qui sont transformés, ainsi que leurs translatés, en des objets nuls de $\mathcal{A}$.*

a) *La sous-catégorie $\mathcal{D}'(H)$ est une sous-catégorie triangulée strictement pleine et saturée.*

b) *L'ensemble $S(H)$ est un système multiplicatif saturé de $\mathcal{D}$.*

c) *L'ensemble $S(H)$ est le système multiplicatif associé à la sous-catégorie* $\mathcal{D}'(H)$ (2.1.15).

2.2. Construction de la catégorie localisée.

2.2.1. Soient $\mathcal{C}$ une catégorie (non nécessairement additive) et S un système multiplicatif de $\mathcal{C}$. Désignons, pour tout objet X de $\mathcal{C}$, par S/X (resp. $X\backslash S$) la catégorie dont les objets sont les morphismes de S de but X (resp. de source X) et dont les morphismes sont les diagrammes commutatifs :

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "s"'] & & Y' \arrow[dl, "t"] \\ & X & \end{tikzcd} \qquad s, t \in S \qquad ,$$

(resp.

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "t"] & \\ Y \arrow[rr, "u"] & & Y' \end{tikzcd} \qquad s, t \in S \qquad) \quad .$$

Pour tout couple X, Y d'objets de $\mathcal{C}$, posons :

$$(2.2.1.1) \qquad \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}(S^{-1})}(X,Y) = \varinjlim_{(S/X)^\circ} \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(\,.\,,Y) \quad .$$

(Le "point" dans la formule (2.2.1.1) désigne la source d'un objet variable de S/X).

Il résulte immédiatement des propriétés SM1), SM2) et SM3) que la catégorie $(S/X)^\circ$ est filtrante [**6**]. Il en résulte qu'un élément de $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}(S^{-1})}(X,Y)$ est une classe de diagrammes du type :

$$D = X \xleftarrow{s} X' \xrightarrow{m} Y \ , \quad s \in S \quad ,$$

deux diagrammes $D_1 = X \xleftarrow{s_1} X_1 \xrightarrow{m_1} Y$ et $D_2 = X \xleftarrow{s_2} X_2 \xrightarrow{m_2} Y$ appartenant à la même classe si et seulement s'il existe un diagramme :

$$D_3 = X \xleftarrow{s_3} X_3 \xrightarrow{m_3} Y \quad , \qquad s_3 \in S \quad ,$$

et un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} & X_1 \arrow[dl, "s_1"'] \arrow[dr, "m_1"] & \\ X & X_3 \arrow[l, "s_3"'] \arrow[r, "m_3"] \arrow[u, "u"'] \arrow[d, "v"] & Y \\ & X_2 \arrow[ul, "s_2"] \arrow[ur, "m_2"'] & \end{tikzcd} \quad .$$

Pour tout élément $f \in \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$, on désigne par $Q(f)$ la classe du diagramme $X \xleftarrow{\mathsf{id}_X} X \xrightarrow{f} Y$. Pour tout morphisme $s : Y \to X$, $s \in S$, on désigne par $Q(s)^{-1}$ la classe du diagramme $X \xleftarrow{s} Y \xrightarrow{\mathsf{id}_Y} Y$.

Désignons alors par $\mathsf{Fl}(\mathcal{C}(S^{-1}))$ l'ensemble :

$$\coprod_{(X,Y)\in \mathsf{Ob}(\mathcal{C})\times\mathsf{Ob}(\mathcal{C})} \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}(S^{-1})}(X,Y),$$

par s et $\mathsf{b} : \mathsf{Fl}(\mathcal{C}(S^{-1})) \rightrightarrows \mathsf{Ob}(\mathcal{C})$ les applications :

$$m \in \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}(S^{-1})}(X,Y)\ , \quad \mathsf{s}(m) = X\ , \quad \mathsf{b}(m) = Y \quad ,$$

et par $\mathsf{id} : \mathsf{Ob}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathsf{Fl}(\mathcal{C}(S^{-1}))$ l'application $X \longmapsto Q(\mathsf{id}_X)$. On définit ainsi un diagramme $\mathcal{C}(S^{-1}) = (\mathsf{Ob}(\mathcal{C}),\, \mathsf{Fl}(\mathcal{C}(S^{-1})),\, \mathsf{s}, \mathsf{b}, \mathsf{id})$. On a de plus un couple d'applications noté abusivement :

$$Q = \big(\mathsf{id}_{\mathsf{Ob}(\mathcal{C})} : \mathsf{Ob}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathsf{Ob}(\mathcal{C})\,,\, Q : \mathsf{Fl}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathsf{Fl}(\mathcal{C}(S^{-1}))\big) \quad .$$

Théorème 2.2.2. a) *Il existe une et une seule loi de composition partiellement définie sur* $\mathsf{Fl}(\mathcal{C}(S^{-1}))$ *telle que :*

1) $\mathcal{C}(S^{-1})$ *soit une catégorie.*

2) $Q(s)$ *soit un isomorphisme et* $Q(s)^{-1}$ *son inverse (* $s \in S$ *).*

3) *Pour tout diagramme* $D = X \xleftarrow{s} X' \xrightarrow{m} Y$ *,* $s \in S$*, on ait* $\overline{D} = Q(m)Q(s)^{-1}$ ($\overline{D} \in \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}(S^{-1})}(X,Y)$ est la classe de D).

4) Q *soit un foncteur.*

b) *Tout morphisme de* $\mathcal{C}(S^{-1})$ *peut s'écrire comme un composé* $Q(t)^{-1}Q(m)$*,* $m \in \mathsf{Fl}(\mathcal{C})$*,* $t \in S$*,* (resp. $Q(p)Q(s)^{-1}$*,* $p \in \mathsf{Fl}(\mathcal{C})$*,* $s \in S$).

c) *Le foncteur* Q *commute aux limites projectives finies et aux limites inductives finies.*

d) *Pour toute catégorie* $\mathcal{A}$*, la composition avec le foncteur* Q *définit un foncteur :*

$$\mathcal{H}om(Q,\mathcal{A}) : \mathcal{H}om(\mathcal{C}(S^{-1}),\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{H}om(\mathcal{C},\mathcal{A})$$

($\mathcal{H}om$ désigne la catégorie des foncteurs). *Le foncteur* $\mathcal{H}om(Q,\mathcal{A})$ *est injectif sur les objets, pleinement fidèle, et l'image de* $\mathcal{H}om(\mathcal{C}(S^{-1}),\mathcal{A})$ *est la sous-catégorie strictement pleine de* $\mathcal{H}om(Q,\mathcal{A})$ *définie par les foncteurs de* $\mathcal{C}$ *dans* $\mathcal{A}$ *qui transforment les morphismes de* S *en isomorphismes.*

La démonstration de ce théorème est laissée au lecteur, qui pourra consulter [**16**]. Nous nous bornerons à décrire la composition des morphismes dans $\mathcal{C}(S^{-1})$. Soient $\overline{D}_1 \in \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}(S^{-1})}(X,Y)$ et $\overline{D}_2 \in \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}(S^{-1})}(Y,Z)$ deux morphismes composables de $\mathcal{C}(S^{-1})$. Soient $D_1 = X \xleftarrow{s} X' \xrightarrow{m} Y$ et $D_2 = Y \xleftarrow{t} Y' \xrightarrow{p} Z$ deux diagrammes de $\mathcal{C}$ dans les classes $\overline{D}_1$ et $\overline{D}_2$. En utilisant SM2), complétons le diagramme :

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[dr, "m"'] & & Y' \arrow[dl, "t"] \\ & Y & \end{tikzcd} \qquad t \in S$$

en un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} & Z'' \arrow[dl, "t' \in S"'] \arrow[dr, "m'"] & \\ X' \arrow[dr, "m"'] & & Y' \arrow[dl, "t \in S"] \\ & Y & \end{tikzcd} \quad .$$

On obtient alors un diagramme $D_3 = X \xleftarrow{st'} Z'' \xrightarrow{pm'} Z$, où le composé st' appartient à S (SM1). On vérifie que la classe $\overline{D}_3$ de D_3 dans $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}(S^{-1})}(X, Z)$ ne dépend que des classes $\overline{D}_1$ et $\overline{D}_2$. Le morphisme $\overline{D}_3$ est le composé dans $\mathcal{C}(S^{-1})$ des morphismes $\overline{D}_1$ et $\overline{D}_2$.

Remarque 2.2.3. *a*) Il résulte de la quatrième assertion du théorème (2.2.2) que la catégorie $\mathcal{C}(S^{-1})$ munie du foncteur $Q : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}(S^{-1})$ est solution d'un problème universel : le foncteur Q transforme les morphismes de S en isomorphismes, et tout foncteur de $\mathcal{C}$ dans une catégorie $\mathcal{A}$ qui transforme les morphismes de S en isomorphismes se factorise d'une manière unique par Q. La catégorie $\mathcal{C}(S^{-1})$ munie du foncteur Q est donc déterminée à isomorphisme unique près par cette propriété.

b) Soient $\mathcal{C}$ une catégorie et S un ensemble de morphismes de $\mathcal{C}$ qui ne soit pas nécessairement un système multiplicatif de $\mathcal{C}$. Il existe toujours une catégorie $\mathcal{C}(S^{-1})$ et un foncteur $Q : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}(S^{-1})$ qui transforme les morphismes de S en isomorphismes, tel que tout foncteur de $\mathcal{C}$ dans une catégorie $\mathcal{A}$ transformant les morphismes de S en isomorphismes se factorise d'une manière unique par Q. Lorsque S est un système multiplicatif de $\mathcal{C}$, le théorème (2.2.2) donne une description simple de la catégorie $\mathcal{C}(S^{-1})$; il donne de plus des propriétés supplémentaires du foncteur Q (assertions *b*) et *c*)) qui ne sont pas vraies en général.

Corollaire 2.2.4. *Soient $\mathcal{C}$ une catégorie et S un système multiplicatif de $\mathcal{C}$.*

a) *L'ensemble S est un système multiplicatif de $\mathcal{C}^\circ$, la catégorie opposée à $\mathcal{C}$. On a un isomorphisme canonique de catégories :*

$$(\mathcal{C}^\circ(S^{-1}))^\circ \longrightarrow \mathcal{C}(S^{-1}) \quad .$$

Cet isomorphisme induit en particulier des isomorphismes :

$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}(S^{-1})}(X, Y) \longrightarrow \varinjlim_{Y \backslash S} \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X, .) \quad .$$

b) *Lorsque la catégorie* $\mathcal{C}$ *est additive, la catégorie* $\mathcal{C}(S^{-1})$ *est additive et le foncteur* Q *est additif.*

c) *Soit* $\hat{S}$ *l'ensemble des morphismes de* $\mathcal{C}$ *qui sont transformés par* Q *en isomorphismes de* $\mathcal{C}(S^{-1})$ *. L'ensemble* $\hat{S}$ *est un système multiplicatif saturé de* $\mathcal{C}$ *. Tout système multiplicatif saturé de* $\mathcal{C}$ *qui contient* S *contient* $\hat{S}$ *.*

La première assertion résulte immédiatement de la propriété universelle de $\mathcal{C}(S^{-1})$: la catégorie $(\mathcal{C}^\circ(S^{-1}))^\circ$ est une solution de ce problème. La deuxième assertion résulte immédiatement des assertions b) et c) du théorème (2.2.2). Il résulte immédiatement de la description des morphismes de $\mathcal{C}(S^{-1})$ qu'un morphisme f de $\mathcal{C}$ est transformé par Q en isomorphisme si et seulement s'il existe deux morphismes de $\mathcal{C}$, g et h , tels que gf et fh soient définis et appartiennent à S . On en déduit immédiatement que l'ensemble $\hat{S}$ possède les propriétés SM2) et SM3). De plus, il résulte de la définition de $\hat{S}$ que cet ensemble possède les propriétés SM1) et SM4). L'ensemble $\hat{S}$ est donc un système multiplicatif saturé de $\mathcal{C}$. La dernière assertion de (2.2.4) est triviale.

2.2.5. Soient $\mathcal{C}$ une catégorie et S un système multiplicatif de $\mathcal{C}$. La catégorie $\mathcal{C}(S^{-1})$ est appelée la *catégorie localisée* de $\mathcal{C}$ par rapport au système S . Le foncteur $Q : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}(S^{-1})$ est appelé le *foncteur de localisation.* Le système multiplicatif $\hat{S}$ est appelé le *saturé* du système S .

Théorème 2.2.6. *Soient* $\mathcal{D}$ *une catégorie triangulée et* S *un système multiplicatif de* $\mathcal{D}$ (2.1.4). *Désignons par* $\mathcal{D}(S^{-1})$ *la catégorie localisée de* $\mathcal{D}$ *et* $Q : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}(S^{-1})$ *le foncteur de localisation.*

a) *Il existe sur* $\mathcal{D}(S^{-1})$ *une et une seule structure de* $\mathbb{Z}$*-catégorie stricte telle que* Q *soit un* $\mathbb{Z}$*-foncteur strict.*

b) *Il existe sur* $\mathcal{D}(S^{-1})$ *une et une seule structure triangulée telle que* Q *soit un foncteur exact. Les triangles distingués pour cette structure sont les triangles isomorphes aux images par* Q *des triangles distingués de* $\mathcal{D}$ *.*

c) *Tout foncteur exact* (resp. *cohomologique*) $F : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}'$ *dans une catégorie triangulée* (resp. *abélienne*) *qui transforme les morphismes de* S *en isomorphismes se factorise d'une manière unique par* $Q : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}(S^{-1})$ *en un foncteur exact* (resp. *cohomologique*) $G : \mathcal{D}(S^{-1}) \longrightarrow \mathcal{D}'$. *Soient* $F_1, F_2 : \mathcal{D} \rightrightarrows \mathcal{D}'$ *deux foncteurs exacts* (resp. *cohomologiques*) *qui transforment les morphismes de* S *en isomorphismes;* $G_1, G_2 : \mathcal{D}(S^{-1}) \rightrightarrows \mathcal{D}'$ *leurs factorisations respectives et* $m : F_1 \longrightarrow F_2$ *un morphisme de foncteurs exacts* (resp. *cohomologiques*). *Il existe un et un seul morphisme de foncteurs* $p : G_1 \longrightarrow G_2$ *tel que* $m = p \star Q$ *.*

La première assertion est une conséquence immédiate du théorème (2.2.2) et de SM5). La troisième assertion est une conséquence immédiate de la deuxième assertion et du théorème (2.2.2). Il reste donc à démontrer la deuxième assertion. Soit $\mathcal{T}$ l'ensemble des triangles de $\mathcal{D}(S^{-1})$ qui sont isomorphes aux images par Q des triangles distingués de $\mathcal{D}$. On vérifie sans difficulté que l'ensemble $\mathcal{T}$ possède les propriétés TRI et TRII. Pour démontrer qu'il possède la propriété TRIII, nous aurons besoin d'un lemme :

Lemme 2.2.7. *Soient $u : X \longrightarrow Y$ et $u' : X' \longrightarrow Y'$ deux morphismes de $\mathcal{D}$ et :*

$$\begin{tikzcd} Q(X) \arrow[r, "Q(u)"] \arrow[d, "m"'] & Q(Y) \arrow[d, "p"] \\ Q(X') \arrow[r, "Q(u')"] & Q(Y') \end{tikzcd}$$

un diagramme commutatif de $\mathcal{D}(S^{-1})$. Il existe un morphisme $u'' : X'' \to Y''$ et deux diagrammes commutatifs de $\mathcal{D}$:

$$\begin{tikzcd} X'' \arrow[r, "u''"] \arrow[d, "s"'] & Y'' \arrow[d, "t"] \\ X \arrow[r, "u"] & Y \end{tikzcd} \qquad s, t \in S \qquad ,$$

$$\begin{tikzcd} X'' \arrow[r, "u''"] \arrow[d, "f"'] & Y'' \arrow[d, "g"] \\ X' \arrow[r, "u'"] & Y' \end{tikzcd} \qquad ,$$

tels que $m = Q(f)Q(s)^{-1}$ et $p = Q(g)Q(t)^{-1}$.

Supposons le lemme démontré et montrons que l'ensemble $\mathcal{T}$ possède la propriété TRIII. En utilisant la définition de l'ensemble $\mathcal{T}$, on est ramené à démontrer : étant donné deux triangles distingués de $\mathcal{D}$:

$$(X, Y, Z, u, v, w) \quad , \quad (X', Y', Z', u', v', w')$$

et un diagramme commutatif de $\mathcal{D}(S^{-1})$:

$$\begin{tikzcd} Q(X) \arrow[r, "Q(u)"] \arrow[d, "m"'] & Q(Y) \arrow[d, "p"] \\ Q(X') \arrow[r, "Q(u')"] & Q(Y') \end{tikzcd} \qquad ,$$

il existe un morphisme $r : Q(Z) \longrightarrow Q(Z')$ tel que (m, p, r) soit un morphisme de triangles. En utilisant le lemme (2.2.7), on est ramené à envisager les deux cas suivants :

a) $m = Q(s)^{-1}$, $p = Q(t)^{-1}$, $s, t \in S$ et le diagramme :

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "u'"] \arrow[d, "s"'] & Y' \arrow[d, "t"] \\ X \arrow[r, "u"] & Y \end{tikzcd}$$

est commutatif.

b) $m = Q(f)$, $p = Q(g)$ et le diagramme :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ X' \arrow[r, "u'"] & Y' \end{tikzcd}$$

est commutatif.

Dans le cas *a*), la propriété résulte alors de la propriété SM6) (2.1.2). Dans le cas *b*), la propriété résulte de la propriété TRIII pour les triangles distingués de $\mathcal{D}$.

2.2.8. Démonstration du lemme 2.2.7. En vertu du théorème (2.2.2), il existe un morphisme $t : Y'' \longrightarrow Y$, $t \in S$, tel que $pQ(t) = Q(g)$, où $g : Y'' \longrightarrow Y'$. On construit alors pas à pas le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} X'' \arrow[d, "s_3"'] \arrow[ddr, "u''"] & \\ X''_2 \arrow[d, "s_2"'] \arrow[dr, "u''_2"] & \\ X''_1 \arrow[r, "u''_1"'] \arrow[d, "s_1"'] & Y'' \arrow[d, "t"] \\ X \arrow[r, "u"] & Y \end{tikzcd} \quad ,$$

tel que :

1) On ait l'égalité $us_1 = tu''_1$ et $s_1 \in S$. Ceci se fait en utilisant SM2).

2) On ait les égalités $mQ(s_1s_2) = Q(f')$, où $f' : X''_2 \longrightarrow X'$ est un morphisme de $\mathcal{D}$, $u''_2 = u''_1 s_2$ et $s_2 \in S$. Ceci se fait en utilisant le théorème (2.2.2).

3) On ait l'égalité $u'f's_3 = gu''_2 s_3$, $u'' = u''_2 s_3$, et $s_3 \in S$. En effet, le diagramme de $\mathcal{D}$:

$$\begin{tikzcd} X''_2 \arrow[r, "u''_2"] \arrow[d, "f'"'] & Y'' \arrow[d, "g"] \\ X' \arrow[r, "u'"] & Y' \end{tikzcd}$$

n'est pas nécessairement commutatif. Mais le diagramme de $\mathcal{D}(S^{-1})$ obtenu en appliquant le foncteur Q au diagramme précédent est commutatif. On a donc $Q(u'f') = Q(gu''_2) : Q(X''_2) \longrightarrow Q(Y')$. Il en résulte, par définition des morphismes de $\mathcal{D}(S^{-1})$, qu'il existe un morphisme $s_3 \in S : X'' \longrightarrow X''_2$ tel que $u'f's_3 = gu''_2 s_3$.

Pour achever la démonstration du lemme, il suffit de poser $f = f's_3$, $s = s_1s_2s_3$.

2.2.9. Fin de la démonstration du théorème 2.2.6. Il reste à démontrer que l'ensemble $\mathcal{T}$ possède la propriété TRIV. Nous savons maintenant que cet ensemble possède les propriétés TRI, TRII et TRIII. On peut donc utiliser les résultats du numéro 1.2 (1.2.14). En particulier, il résulte de (1.2.4) que tous les triangles de $\mathcal{T}$ contenant un morphisme donné sont isomorphes. On peut donc, par des réductions analogues à celles utilisées dans la démonstration de la proposition (1.3.2), se ramener, pour démontrer la propriété TRIV, à des diagrammes de $\mathcal{D}(S^{-1})$ qui sont images par Q de diagrammes analogues de $\mathcal{D}$. La vérification est alors facile. Nous laissons au lecteur le soin d'en mettre au point les détails.

2.2.10. Soient $\mathcal{D}$ une catégorie triangulée, $\mathcal{B} \subset \mathcal{D}$ une sous-catégorie triangulée pleine et $S(\mathcal{B})$ le système multiplicatif associé à $\mathcal{B}$ (2.1.15). On notera $\mathcal{D}/\mathcal{B}$ la catégorie $\mathcal{D}(S(\mathcal{B})^{-1})$. La catégorie $\mathcal{D}/\mathcal{B}$ est appelée la *catégorie quotient de la catégorie $\mathcal{D}$ par la catégorie $\mathcal{B}$*. Le foncteur canonique $Q : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}/\mathcal{B}$ est appelé le *foncteur de passage au quotient.* Soit $F : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}'$ un foncteur exact (resp. cohomologique) dans une catégorie triangulée (resp. abélienne). On désigne par $\mathcal{K}er(F)$ et on appelle *noyau de F* la sous-catégorie triangulée strictement pleine saturée définie par les objets qui sont annulés par F (resp. dont tous les translatés sont annulés par F) ((2.1.16) et (2.1.17)).

Corollaire 2.2.11. *Soient $\mathcal{D}$ une catégorie triangulée et $\mathcal{B} \subset \mathcal{D}$ une sous-catégorie triangulée pleine.*

a) *Le noyau du foncteur de passage au quotient $Q : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}/\mathcal{B}$ est la plus petite sous-catégorie triangulée strictement pleine saturée qui contienne $\mathcal{B}$.*

b) *L'application $\mathcal{B} \mapsto S(\mathcal{B})$ qui à toute sous-catégorie triangulée strictement pleine saturée associe son système multiplicatif saturé* (2.1.8) *est un isomorphisme d'ensembles ordonnés de l'ensemble des sous-catégories triangulées strictement pleines saturées, ordonné par inclusion, dans l'ensemble des systèmes multiplicatifs saturés de $\mathcal{D}$, ordonné par inclusion. L'application inverse associe à tout système multiplicatif saturé le noyau du foncteur de localisation correspondant.*

c) *Un foncteur exact* (resp. *cohomologique*) *$F : \mathcal{D} \to \mathcal{D}'$ dont le noyau contient la sous-catégorie $\mathcal{B}$ se factorise d'une manière unique par $Q : \mathcal{D} \to \mathcal{D}/\mathcal{B}$ en un foncteur $G : \mathcal{D}/\mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{D}'$ qui est exact* (resp. *cohomologique*)*. Un morphisme de foncteurs exacts* (resp. *cohomologiques*) *dont les noyaux contiennent la sous-catégorie $\mathcal{B}$ provient d'une manière unique d'un morphisme entre les factorisations.*

Ce sont des conséquences faciles du théorème (2.2.6).

2.2.12. Commentaires sur la propriété TRIV. Appelons *catégorie pré-triangulée* une $\mathbb{Z}$-catégorie stricte munie d'une famille de triangles possédant les propriétés TRI, TRII et TRIII. On définit de la même façon que pour les catégories triangulées les notions de *foncteurs exacts, foncteurs cohomologiques, systèmes multiplicatifs.*

Soit S un système multiplicatif (2.1.4) d'une catégorie pré-triangulée $\mathcal{D}$. La catégorie localisée $\mathcal{D}(S^{-1})$ admet une et une seule structure de catégorie pré-triangulée telle que le foncteur de localisation soit exact. La sous-catégorie pleine des objets de $\mathcal{D}$ qui sont annulés par le foncteur de localisation est une sous-catégorie pré-triangulée pleine. On a besoin dans la pratique de savoir, inversement, associer à une sous-catégorie pré-triangulée un système multiplicatif saturé convenable. Le rédacteur ne sait le faire qu'en utilisant la propriété TRIV. Cette propriété, de nature assez technique, a donc surtout servi, pour l'instant, à obtenir le corollaire (2.2.11) à partir du théorème (2.2.6).

2.3. Propriétés du foncteur de localisation.

Proposition 2.3.1. *Soient $\mathcal{D}$ une catégorie triangulée, $\mathcal{B}$ une sous-catégorie triangulée pleine.*

Pour toute sous-catégorie triangulée pleine $\mathcal{A}$ telle que $\mathcal{B} \subset \mathcal{A} \subset \mathcal{D}$, désignons par $S_{\mathcal{D}}(\mathcal{B})$ (resp. $S_{\mathcal{A}}(\mathcal{B})$) *le système multiplicatif de $\mathcal{D}$* (resp. $\mathcal{A}$) *associé à $\mathcal{B}$* (2.1.7).

a) *On a $S_{\mathcal{D}}(\mathcal{B}) \cap \mathsf{Fl}(\mathcal{A}) = S_{\mathcal{A}}(\mathcal{B})$.*

b) *Le foncteur canonique $\mathcal{A}/\mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{D}/\mathcal{B}$ est pleinement fidèle et injectif sur les objets. L'image de ce foncteur est $Q(\mathcal{A})$, où $Q : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}/\mathcal{B}$ est le foncteur canonique.*

c) *Le foncteur canonique $\mathcal{D}/\mathcal{A} \longrightarrow (\mathcal{D}/\mathcal{B})/(\mathcal{A}/\mathcal{B})$ est un isomorphisme de catégories.*

d) *Si la catégorie $\mathcal{A}$ est saturée* (2.1.6), *la sous-catégorie $Q(\mathcal{A})$ est saturée.*

Pour toute sous-catégorie triangulée pleine $\mathcal{C}$ de $\mathcal{D}/\mathcal{B}$, désignons par $Q^{-1}(\mathcal{C})$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{D}$ définie par les objets X de $\mathcal{D}$ tels que $Q(X)$ soit isomorphe à un objet de la catégorie $\mathcal{C}$.

a)$^{\text{bis}}$ *La catégorie $Q^{-1}(\mathcal{C})$ est une sous-catégorie triangulée strictement pleine de $\mathcal{D}$.*

b)$^{\text{bis}}$ *Le système multiplicatif $S_{\mathcal{D}}(Q^{-1}(\mathcal{C}))$ est composé des morphismes de $\mathcal{D}$ dont l'image par Q est un morphisme de $S_{\mathcal{D}/\mathcal{B}}(\mathcal{C})$.*

c)$^{\text{bis}}$ *La sous-catégorie $Q^{-1}(\mathcal{C})$ est saturée si et seulement si la sous-catégorie $\mathcal{C}$ est saturée.*

d)$^{\text{bis}}$ *L'application $\mathcal{A} \mapsto Q(\mathcal{A})$ est un isomorphisme d'ensembles ordonnés de l'ensemble des sous-catégories triangulées strictement pleines de $\mathcal{D}$ contenant $\widehat{\mathcal{B}}$ (le noyau du foncteur Q), ordonné par inclusion, dans l'ensemble des sous-catégories triangulées strictement pleines de $\mathcal{D}/\mathcal{B}$, ordonné par inclusion. L'application inverse est l'application $\mathcal{C} \mapsto Q^{-1}(\mathcal{C})$.*

La première assertion est évidente. La deuxième résulte immédiatement de la description des morphismes dans les catégories $\mathcal{A}/\mathcal{B}$ et $\mathcal{D}/\mathcal{B}$ (2.2.1). Pour démontrer c), il suffit de se reporter aux propriétés universelles des catégories quotients (2.2.11). Démontrons d). Quitte à remplacer $\mathcal{A}$ par sa clôture strictement pleine, ce qui modifie $Q(\mathcal{A})$ par une équivalence, on peut supposer que $\mathcal{A}$ est strictement pleine. Le noyau du foncteur $\mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}/\mathcal{A}$ est alors la catégorie $\mathcal{A}$ (2.2.11). Ce foncteur se factorise en $\mathcal{D} \to \mathcal{D}/\mathcal{B} \to \mathcal{D}/\mathcal{A}$. On en déduit que le noyau du foncteur canonique $\mathcal{D}/\mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{D}/\mathcal{A}$ est $Q(\mathcal{A})$. Par suite, $Q(\mathcal{A})$ est saturée (2.1.16). L'assertion $a)^{\text{bis}}$ est évidente, de même que l'assertion $b)^{\text{bis}}$. Supposons que $\mathcal{C}$ soit saturée. On peut supposer de plus que $\mathcal{C}$ est strictement pleine, car si l'on désigne par $\widehat{\mathcal{C}}$ la clôture strictement pleine de $\mathcal{C}$, la catégorie $\widehat{\mathcal{C}}$ est strictement pleine saturée et $Q^{-1}(\widehat{\mathcal{C}}) = Q^{-1}(\mathcal{C})$. La catégorie $\mathcal{C}$ est alors noyau d'un foncteur exact (2.2.11). Par suite, $Q^{-1}(\mathcal{C})$ est noyau d'un foncteur exact, donc saturée (2.1.16). Supposons que $Q^{-1}(\mathcal{C})$ soit saturée. La sous-catégorie $Q(Q^{-1}(\mathcal{C}))$ est strictement pleine saturée d'après la démonstration de d). Or la catégorie $Q(Q^{-1}(\mathcal{C}))$ est la clôture strictement pleine de $\mathcal{C}$. Par suite, $\mathcal{C}$ est saturée. Ceci démontre l'assertion $c)^{\text{bis}}$. Il reste à démontrer la dernière assertion. Il est clair que lorsque $\mathcal{C}$ est strictement pleine, on a $Q(Q^{-1}(\mathcal{C})) = \mathcal{C}$. Soit $\mathcal{A}$ une catégorie triangulée strictement pleine contenant $\widehat{\mathcal{B}}$. Il nous faut montrer que $\mathcal{A} = Q^{-1}(Q(\mathcal{A}))$. Quitte à remplacer $\mathcal{B}$ par $\widehat{\mathcal{B}}$, ce qui ne change pas la catégorie $\mathcal{D}/\mathcal{B}$ (2.2.11), on peut supposer que $\mathcal{B}$ est saturée, et par suite que $\mathcal{B} = \widehat{\mathcal{B}}$. Comme on a évidemment l'inclusion $\mathcal{A} \subset Q^{-1}(Q(\mathcal{A}))$, il suffit de montrer que tout objet de $\mathcal{D}$ qui devient isomorphe dans $\mathcal{D}/\mathcal{B}$ à un objet de $\mathcal{A}$ est un objet de $\mathcal{A}$. Soient donc X un objet de $\mathcal{A}$, Y un objet de $\mathcal{D}$ et $m : Q(X) \xrightarrow{\sim} Q(Y)$ un isomorphisme. Le morphisme m se décompose en $m = Q(f)Q(s)^{-1}$, où $s \in S_{\mathcal{D}}(\mathcal{B})$ (2.2.2), et où Q(f) est un isomorphisme. Donc $f \in S_{\mathcal{D}}(\mathcal{B})$ car $\mathcal{B}$ est saturée ((2.1.8) et (2.2.4)). On a donc un diagramme dans $\mathcal{D}$:

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X & & Y \end{tikzcd} \qquad s, f \in S_{\mathcal{D}}(B) \quad .$$

Le morphisme s étant un élément de $S_{\mathcal{D}}(\mathcal{B})$, il existe un triangle distingué (Z, X, W, s, u, v), où W est un objet de $\mathcal{B}$ (2.1.7). Par suite, W est un objet de $\mathcal{A}$, et comme $\mathcal{A}$ est strictement pleine, l'objet Z appartient aussi à $\mathcal{A}$ (1.2.4). Le même argument montre alors que Y est un objet de $\mathcal{A}$, ce qui achève la démonstration de la proposition.

2.3.2. Soient $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ un foncteur et X un objet de $\mathcal{C}'$. Rappelons qu'un objet Y de $\mathcal{C}$ est dit *F-libre à droite sur X*, ou simplement *libre à droite sur X*, s'il existe un morphisme $u : F(Y) \longrightarrow X$ tel que pour tout morphisme $F(Z) \xrightarrow{v} X$, il existe un et un seul morphisme $w : Z \longrightarrow Y$ tel que le diagramme ci-après soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} F(Y) \arrow[rr, "u"] & & X \\ & F(Z) \arrow[ul, "F(w)"] \arrow[ur, "v"'] & \end{tikzcd} \quad .$$

La flèche $u : F(Y) \longrightarrow X$ s'appelle *flèche de liberté* pour le couple (X, Y) (relativement au foncteur F). Celà peut encore s'interpréter, en prenant un univers dont $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ soient des éléments, en disant que Y est libre à droite sur X s'il existe un isomorphisme entre les foncteurs $Z \mapsto \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(Z,Y)$ et $Z \mapsto \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}'}(F(Z),X)$. Nous dirons qu'un objet Y de $\mathcal{C}$ est *F-libre à droite* s'il existe un objet X de $\mathcal{C}'$ tel que Y soit libre à droite sur X. Nous dirons qu'un objet X de $\mathcal{C}'$ est *F-libérable à droite* s'il existe un objet Y de $\mathcal{C}$ libre à droite sur X. On définit de façon analogue, par passage aux catégories opposées, les notions d'objet libre ou libérable *à gauche*.

Proposition 2.3.3. *Soient $\mathcal{D}$ une catégorie triangulée, $\mathcal{B}$ une sous-catégorie triangulée pleine, $Q\ :\mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}/\mathcal{B}$ le foncteur de passage au quotient* (2.2.10), *$S_{\mathcal{D}}(\mathcal{B})$ le système multiplicatif de $\mathcal{D}$ associé à $\mathcal{B}$* (2.1.8).

a) *Pour tout objet Y de $\mathcal{D}$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) *L'objet Y est Q-libre à droite.*

ii) *Pour tout morphisme $s \in S_{\mathcal{D}}(\mathcal{B})$, $s : S \longrightarrow T$, l'application :*

$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{D}}(s,Y) : \mathsf{Hom}_{\mathcal{D}}(T,Y) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{D}}(S,Y)$$

est une bijection.

iii) *Pour tout objet B de $\mathcal{B}$, $\mathsf{Hom}_{\mathcal{D}}(B,Y) = 0$.*

iv) *Tout morphisme $Y \xrightarrow{s} Z$, avec $s \in S_{\mathcal{D}}(\mathcal{B})$, admet une rétraction.*

v) *Pour tout objet X de $\mathcal{D}$, l'application :*

$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{D}}(X,Y) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{D}/\mathcal{B}}(Q(X),Q(Y))$$

est bijective.

b) *Soit $L_R(Q)$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{D}$ définie par les objets Q-libres à droite. La catégorie $L_R(Q)$ est triangulée, strictement pleine, saturée.*

c) *La restriction du foncteur de passage au quotient à $L_R(Q)$:*

$$Q|L_R(Q) : L_R(Q) \longrightarrow \mathcal{D}/\mathcal{B}$$

est pleinement fidèle et injective sur les objets.

d) *Soit $Lib_R(Q) \subset \mathcal{D}/\mathcal{B}$ la sous-catégorie pleine définie par les objets Q-libérables à droite de $\mathcal{D}/\mathcal{B}$. La sous-catégorie $Lib_R(Q)$ est triangulée strictement pleine. Si les produits ou les sommes directes dénombrables sont représentables dans $\mathcal{D}$, la catégorie $Lib_R(Q)$ est saturée.*

e) *Le foncteur Q envoie $L_R(Q)$ dans $Lib_R(Q)$. La catégorie $Lib_R(Q)$ est la clôture strictement pleine de l'image de $L_R(Q)$. Les flèches de liberté sont des isomorphismes.*

f) *Un objet* Z *de* $\mathcal{D}$ *appartient à* $Q^{-1}(Lib_R(Q))$ *si et seulement s'il existe un objet libre à droite* Y *et un morphisme* $s : Z \longrightarrow Y$ *, où* s *appartient à* $\widehat{S}_{\mathcal{D}}(\mathcal{B})$ *, le saturé du système* $S_{\mathcal{D}}(\mathcal{B})$ (2.2.4, (c)).

g) *Le foncteur d'inclusion* $L_R(Q) \subset Q^{-1}(Lib_R(Q))$ *admet un adjoint à gauche* $\mathcal{R} : Q^{-1}(Lib_R(Q)) \longrightarrow L_R(Q)$.

$$\begin{tikzcd}
L_R(Q) \arrow[r, hook, shift right] \arrow[dr, "Q|L_R(Q)"', shift right] & Q^{-1}(Lib_R(Q)) \arrow[l, dashed, shift right, "\mathcal{R}"'] \arrow[r, hook] \arrow[d, "Q_1"] & \mathcal{D} \arrow[d, "Q"] \\
 & Lib_R(Q) \arrow[ul, dashed, shift right, "\Psi"'] \arrow[r, hook] & \mathcal{D}/\mathcal{B}
\end{tikzcd} \quad .$$

Soit $\Psi : Lib_R(Q) \longrightarrow L_R(Q)$ *un foncteur quasi-inverse à* $Q|L_R(Q)$ (cf. c) et e)). *On peut prendre pour foncteur* $\mathcal{R}$ *le foncteur* ΨQ_1 *, où on désigne par* $Q_1 : Q^{-1}(Lib_R(Q)) \longrightarrow Lib_R(Q)$ *le foncteur induit par* Q *. Le foncteur* Ψ *est adjoint à droite au foncteur* Q_1 *.*

2.3.4. Démonstration de la proposition 2.3.3 : Démontrons a). Tout d'abord, si Y est Q-libre à droite, le foncteur $X \mapsto \mathsf{Hom}_{\mathcal{D}}(X,Y)$ est isomorphe au foncteur $X \mapsto \mathsf{Hom}_{\mathcal{D}/\mathcal{B}}(Q(X),Z)$, pour un objet Z convenable de $\mathcal{D}/\mathcal{B}$. Par suite, le foncteur $X \mapsto \mathsf{Hom}_{\mathcal{D}}(X,Y)$ transforme les morphismes de $S_{\mathcal{D}}(\mathcal{B})$ en isomorphismes. Ceci démontre l'implication $i) \Rightarrow ii)$. L'implication $ii) \Rightarrow iii)$ résulte de ce que le morphisme $B \longrightarrow 0$ est un morphisme de $S_{\mathcal{D}}(\mathcal{B})$. L'implication $iii) \Rightarrow iv)$ résulte de la définition de $S_{\mathcal{D}}(\mathcal{B})$ et de (1.2.6). L'implication $iv) \Rightarrow v)$ résulte de l'isomorphisme (2.2.4) :

$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{D}/\mathcal{B}}(Q(X),Q(Y)) \xrightarrow{\sim} \varinjlim_{Y\backslash S_{\mathcal{D}}(\mathcal{B})} \mathsf{Hom}_{\mathcal{D}}(X,\,.\,) \quad .$$

Enfin, l'implication $v) \Rightarrow i)$ est évidente : Y est libre à droite sur $Q(Y)$.

L'assertion b) résulte de a), iii). L'assertion c) résulte de a), v). Il résulte aussi de a), v) que les objets de $\mathcal{D}/\mathcal{B}$ qui sont libérables à droite sont les objets de $\mathcal{D}/\mathcal{B}$ qui sont isomorphes dans $\mathcal{D}/\mathcal{B}$ aux images par Q des objets Q-libres à droite. Les flèches de liberté sont des isomorphismes. Ceci démontre e). Il est alors clair que $Lib_R(Q)$ est une sous-catégorie triangulée strictement pleine. Soit $Z = Z_1 \oplus Z_2$ un objet de $Lib_R(Q)$. Il existe donc un objet Q-libre à droite Y et un isomorphisme $Q(Y) \xrightarrow{\sim} Z_1 \oplus Z_2$. Le foncteur $X \mapsto \mathsf{Hom}_{\mathcal{D}}(X,Y)$ admet donc un projecteur, et par suite la décomposition de Z en somme directe définit sur Y un projecteur. Les facteurs de Z seront dans $Lib_R(Q)$ si et seulement si ce projecteur est décomposable, ce qui est le cas lorsque dans $\mathcal{D}$ les sommes ou produits dénombrables sont représentables (1.2.9).

Ceci démontre d) ; démontrons maintenant f). Un objet Z de $\mathcal{D}$ appartient à $Q^{-1}(Lib_R(Q))$ si et seulement s'il existe un objet Q-libre à droite Y et un isomorphisme dans $\mathcal{D}/\mathcal{B}$: $Q(Z) \xrightarrow[\sim]{m} Q(Y)$. Un tel isomorphisme est de la forme $m = Q(s)^{-1}Q(t)$, où $s \in S_{\mathcal{D}}(\mathcal{B})$ et $t \in \widehat{S}_{\mathcal{D}}(\mathcal{B})$ ((2.2.2) et (2.2.4)). On a par suite dans $\mathcal{D}$ un diagramme :

$$\begin{tikzcd} & X \\ Z \arrow[ur, "t"] & Y \arrow[u, "s"'] \end{tikzcd} \quad .$$

D'après a), iv), le morphisme s admet une rétraction s' : $X \longrightarrow Y$ qui est un élément de $S_{\mathcal{D}}(\mathcal{B})$ (1.2.6). Par suite, il existe un morphisme $t' : Z \longrightarrow Y$, $t' \in \widehat{S}_{\mathcal{D}}(\mathcal{B})$. Réciproquement, s'il existe un tel morphisme, le morphisme $Q(t') : Q(Z) \longrightarrow Q(Y)$ est un isomorphisme. Il reste à démontrer g). On a, d'après a), v), un isomorphisme bifonctoriel :

$$\mathsf{Hom}_{Q^{-1}(Lib_R(Q))}(Z, \Psi(W)) \xrightarrow{\sim} \mathsf{Hom}_{Lib_R(Q)}(Q_1(Z), W) \quad ,$$

ce qui montre que Ψ est adjoint à droite à Q_1. On en déduit immédiatement que si on note $i : L_R(Q) \hookrightarrow Q^{-1}(Lib_R(Q))$ le foncteur d'inclusion, on a un isomorphisme bifonctoriel :

$$\mathsf{Hom}_{Q^{-1}(Lib_R(Q))}(Z, i(Y)) \xrightarrow{\sim} \mathsf{Hom}_{L_R(Q)}(\Psi Q_1(Z), Y) \quad .$$

Ceci montre que le foncteur $\mathcal{R} = \Psi Q_1$ est adjoint à gauche au foncteur d'inclusion et achève la démonstration de la proposition (2.3.3).

Proposition 2.3.5. *Soient $\mathcal{D}$ une catégorie triangulée, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux sous-catégories triangulées pleines ($\mathcal{B}$ strictement pleine), $S_{\mathcal{D}}(\mathcal{B})$ et $S_{\mathcal{A}}(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$ les systèmes multiplicatifs de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{A}$ associés respectivement aux catégories $\mathcal{B}$ et $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$.*

a) *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) *Tout morphisme $X \xrightarrow{s} X'$, avec $X \in \mathsf{Ob}(\mathcal{A})$, $s \in S_{\mathcal{D}}(\mathcal{B})$, s'insère dans un diagramme commutatif :*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "s"] \arrow[dr, "s'"'] & X' \arrow[d] \\ & X'' \end{tikzcd} \qquad s' \in S_{\mathcal{A}}(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) \quad .$$

ii) *Tout morphisme* $B \longrightarrow X$, *avec* $B \in \mathsf{Ob}(\mathcal{B})$, $X \in \mathsf{Ob}(\mathcal{A})$, *s'insère dans un diagramme commutatif :*

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr] \arrow[dr] & & X \\ & B' \arrow[ur] & \end{tikzcd} \qquad B' \in \mathsf{Ob}(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) \quad .$$

Les sous-catégories triangulées pleines $\mathcal{A}$ de $\mathcal{D}$ qui possèdent les deux propriétés équivalentes ci-dessus sont appelées *sous-catégories* $\mathcal{B}$*-localisantes à droite.*

b) *Si* $\mathcal{A}$ *est* $\mathcal{B}$*-localisante à droite, le foncteur canonique :*

$$\mathcal{A}/\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{D}/\mathcal{B}$$

est pleinement fidèle et injectif sur les objets.

c) *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) $\mathcal{A}$ *est* $\mathcal{B}$*-localisante à droite.*

ii) *Soit* $Q : \mathcal{D}/\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{D}/\mathcal{B}$ *le foncteur canonique. La sous-catégorie* $\mathcal{A}/\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{D}/\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ *est formée d'objets* Q*-libres à droite.*

L'équivalence de a) résulte immédiatement de TRIII et des définitions des systèmes $S_{\mathcal{D}}(\mathcal{B})$ et $S_{\mathcal{A}}(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$ (2.1.7). Démontrons b). Soient X et Y deux objets de $\mathcal{A}$ (donc de $\mathcal{A}/\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$).

Montrons d'abord que l'homomorphisme :

$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{A}/\mathcal{A}\cap\mathcal{B}}(X,Y) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{D}/\mathcal{B}}(X,Y)$$

est injectif. Désignons par $Q_1 : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}/\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ et $Q_2 : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}/\mathcal{B}$ les foncteurs canoniques de passage au quotient. Un élément $m \in \mathsf{Hom}_{\mathcal{A}/\mathcal{A}\cap\mathcal{B}}(X,Y)$ peut toujours s'écrire sous la forme $m = Q_1(s)^{-1}Q_1(f)$, $s \in S_{\mathcal{A}}(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$ (2.2.2). Son image dans $\mathsf{Hom}_{\mathcal{D}/\mathcal{B}}(X,Y)$ est alors $Q_2(s)^{-1}Q_2(f)$. D'après (2.2.4, a)), cette image est nulle si et seulement s'il existe un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} & & {} \\ & {} \arrow[ur, "u"] & \\ X \arrow[ur, "f"] & & Y \arrow[ul, "s"'] \arrow[uu, "t"'] \end{tikzcd} \qquad t \in S_{\mathcal{D}}(\mathcal{B})$$

tel que $uf = 0$. En utilisant alors a), i), on voit qu'il existe un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} & {} \arrow[r, "v"] & {} \\ X \arrow[ur, "f"] & & Y \arrow[ul, "s"] \arrow[u, "t'"'] \end{tikzcd} \qquad t' \in S_{\mathcal{A}}(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$$

tel que $vf = 0$. Il en résulte alors que $m = Q_1(t')^{-1}Q_1(vf) = 0$.

Montrons maintenant que l'homomorphisme :

$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{A}/\mathcal{A}\cap\mathcal{B}}(X, Y) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{D}/\mathcal{B}}(X, Y)$$

est surjectif. Un élément $p \in \mathsf{Hom}_{\mathcal{D}/\mathcal{B}}(X, Y)$ se met sous la forme :

$$p = Q_2(t)^{-1}Q_2(g) \quad , \quad t \in S_{\mathcal{D}}(\mathcal{B}) \quad .$$

En utilisant a), i), on voit qu'un tel élément s'écrit toujours sous la forme :

$$p = Q_2(s)^{-1}Q_2(g') \quad , \quad s \in S_{\mathcal{A}}(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) \quad ,$$

et, par suite, qu'il provient d'un élément de $\mathsf{Hom}_{\mathcal{A}/\mathcal{A}\cap\mathcal{B}}(X, Y)$.

Il reste à démontrer l'équivalence de c). Démontrons tout d'abord que $i) \Rightarrow ii)$. D'après (2.3.1), la catégorie $\mathcal{D}/\mathcal{B}$ est canoniquement isomorphe à la catégorie $(\mathcal{D}/\mathcal{A} \cap \mathcal{B})/(\mathcal{B}/\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$ et le foncteur canonique :

$$Q : \mathcal{D}/\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{D}/\mathcal{B}$$

est le foncteur de passage au quotient. Par suite, d'après la proposition (2.3.3, a)), pour démontrer l'implication $i) \Rightarrow ii)$, il suffit de montrer que pour tout objet X de $\mathcal{A}$ et tout objet B de $\mathcal{B}$, $\mathsf{Hom}_{\mathcal{D}/\mathcal{A}\cap\mathcal{B}}(B, X) = 0$. Un élément m de $\mathsf{Hom}_{\mathcal{D}/\mathcal{A}\cap\mathcal{B}}(B, X)$ se met sous la forme $Q_3(f)Q_3(s)^{-1}$, où :

$$Q_3 : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}/\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$$

est le foncteur canonique, et où s est un élément de $S_{\mathcal{D}}(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$, le système multiplicatif de $\mathcal{D}$ associé à $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ (2.2.2). On a alors un diagramme de $\mathcal{D}$:

$$\begin{tikzcd} & W \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"] & \\ B & & X \end{tikzcd} \quad ,$$

et comme B est un objet de $\mathcal{B}$ et s un élément de $S_{\mathcal{D}}(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$, l'objet W est isomorphe à un objet de $\mathcal{B}$ (1.2.4). Par suite, d'après la première assertion, le morphisme f se factorise à travers un objet de $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$. Le morphisme $Q_3(f)$ est donc nul, et par suite $m = 0$. Démontrons maintenant l'implication $ii) \Rightarrow i)$. Il suffit de montrer, d'après a), que tout morphisme dans $\mathcal{D}$, $g : B \longrightarrow X$, où B est un objet de $\mathcal{B}$ et X un objet de $\mathcal{A}$, se factorise à travers un objet de $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$. On sait par hypothèse que $Q_3(g) \in \mathsf{Hom}_{\mathcal{D}/\mathcal{A}\cap\mathcal{B}}(B, X)$ est nul. Par suite (2.2.4), il existe un morphisme $t : X \longrightarrow X'$, $t \in S_{\mathcal{D}}(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$, tel que $tg = 0$. Par définition de l'ensemble $S_{\mathcal{D}}(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$, il existe un triangle distingué de $\mathcal{D}$ de la forme (B', X, X', l, t, w), où B' est un objet de $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$. D'après (1.2.1), l'égalité $tg = 0$ implique que le morphisme g se factorise à travers B', ce qu'il fallait démontrer. Ceci achève la démonstration de la proposition (2.3.5).

On dit qu'une sous-catégorie triangulée pleine $\mathcal{A}$ de $\mathcal{D}$ est *$\mathcal{B}$-localisante à gauche* si la sous-catégorie $\mathcal{A}^\circ$ de $\mathcal{D}^\circ$ est $\mathcal{B}^\circ$-localisante à droite.