3. Abélianisation des catégories triangulées.

3.1. Construction de la catégorie $\mathsf{A}(\mathcal{D})$.

3.1.1. Soient $\mathcal{D}$ une catégorie additive et $\mathcal{F}\ell_1(\mathcal{D})$ la catégorie des morphismes de $\mathcal{D}$ (chap. I, 3.3.6). Un morphisme :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & Y \arrow[d, "h"] \\ X' \arrow[r, "f'"] & Y' \end{tikzcd}$$

de $\mathcal{F}\ell_1(\mathcal{D})$ est dit *négligeable* si $f'g = hf = 0$. Le composé dans les deux sens d'un morphisme négligeable et d'un morphisme quelconque est un morphisme négligeable ; la somme directe de deux morphismes négligeables est un morphisme négligeable. Désignons par $\mathsf{A}(\mathcal{D})$ la catégorie dont les objets sont les objets de $\mathcal{F}\ell_1(\mathcal{D})$ et les morphismes, les morphismes de $\mathcal{F}\ell_1(\mathcal{D})$ à morphismes négligeables près, *i.e.* pour tout couple U et V d'objets de $\mathsf{A}(\mathcal{D})$, le groupe $\mathsf{Hom}_{\mathsf{A}(\mathcal{D})}(U,V)$ est le quotient du groupe $\mathsf{Hom}_{\mathcal{F}\ell_1(\mathcal{D})}(U,V)$ par le sous-groupe des morphismes négligeables. La catégorie $\mathsf{A}(\mathcal{D})$ est additive.

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie ; la composition avec le foncteur canonique :

$$\mathcal{F}\ell_1(\mathcal{D}) \longrightarrow \mathsf{A}(\mathcal{D})$$

fournit un foncteur :

$$\mathcal{H}om(\mathsf{A}(\mathcal{D}),\mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{H}om(\mathcal{F}\ell_1(\mathcal{D}),\mathcal{C}) \quad . \tag{3.1.1.1}$$

Ce foncteur est pleinement fidèle et injectif sur les objets. Son image est la sous-catégorie pleine définie par les foncteurs de $\mathcal{F}\ell_1(\mathcal{D})$ dans $\mathcal{C}$ qui transforment les morphismes qui diffèrent par un morphisme négligeable, en morphismes égaux.

3.1.2. Le foncteur canonique de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{F}\ell_1(\mathcal{D}) : X \mapsto \left(X \xrightarrow{\mathsf{id}_X} X\right)$ composé avec le foncteur canonique $\mathcal{F}\ell_1(\mathcal{D}) \longrightarrow \mathsf{A}(\mathcal{D})$ est un foncteur qu'on note :

$$\mathcal{H} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathsf{A}(\mathcal{D}) \quad . \tag{3.1.2.1}$$

Le foncteur $\mathcal{H}$ est additif. Il est pleinement fidèle et injectif sur les objets. Il réalise donc $\mathcal{D}$ comme sous-catégorie pleine de $\mathsf{A}(\mathcal{D})$.

3.1.3. Supposons que la catégorie $\mathcal{D}$ soit une $\mathbb{Z}$-catégorie stricte. Les foncteurs de translations de $\mathcal{D} : X \mapsto X[n]$, $n \in \mathbb{Z}$, s'étendent en automorphismes de $\mathcal{F}\ell_1(\mathcal{D})$:

$$\left(X \xrightarrow{f} Y\right) \mapsto \left(X[n] \xrightarrow{f[n]} Y[n]\right) \quad .$$

Il résulte immédiatement de la propriété universelle de $\mathsf{A}(\mathcal{D})$ (3.1.1.1) que ces automorphismes passent au quotient et définissent sur $\mathsf{A}(\mathcal{D})$ une structure de $\mathbb{Z}$-catégorie stricte. Le foncteur $\mathcal{H} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathsf{A}(\mathcal{D})$ est un $\mathbb{Z}$-foncteur strict.

3.1.4. Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux $\mathbb{Z}$-catégories strictes additives et $F : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}'$ un $\mathbb{Z}$-foncteur additif (tordu par le cocycle trivial). Soit $\mathcal{F}\ell_1(F)$ l'extension de F aux catégories de morphismes :

$$\mathcal{F}\ell_1(F)\left(X \xrightarrow{f} Y\right) = \left(FX \xrightarrow{Ff} FY\right) \quad .$$

Le foncteur $\mathcal{F}\ell_1(F)$ transforme les morphismes négligeables de $\mathcal{F}\ell_1(\mathcal{D})$ en morphismes négligeables de $\mathcal{F}\ell_1(\mathcal{D}')$. Il définit par suite un foncteur :

(3.1.4.1) $$\mathsf{A}(F) : \mathsf{A}(\mathcal{D}) \longrightarrow \mathsf{A}(\mathcal{D}') \quad .$$

Le foncteur $\mathsf{A}(F)$ est additif. Il résulte immédiatement des propriétés universelles des catégories $\mathsf{A}(\mathcal{D})$ et $\mathsf{A}(\mathcal{D}')$ que le foncteur $\mathsf{A}(F)$ est muni canoniquement d'une structure de $\mathbb{Z}$-foncteur.

Soit $F' : \mathcal{D}' \longrightarrow \mathcal{D}''$ un $\mathbb{Z}$-foncteur additif entre $\mathbb{Z}$-catégories strictes additives. On a alors :

(3.1.4.2) $$\mathsf{A}(F')\,\mathsf{A}(F) = \mathsf{A}(F'F) \quad .$$

Le diagramme ci-après est commutatif :

(3.1.4.3) $$\begin{tikzcd} \mathcal{D} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\mathcal{H}"'] & \mathcal{D}' \arrow[d, "\mathcal{H}'"] \\ \mathsf{A}(\mathcal{D}) \arrow[r, "\mathsf{A}(F)"] & \mathsf{A}(\mathcal{D}') \end{tikzcd}$$

(les foncteurs $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$ sont définis en (3.1.2)).

Soit de même $m : F \longrightarrow F''$ un morphisme de $\mathbb{Z}$-foncteurs additifs entre $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$. On en déduit, par les mêmes arguments que précédemment, un morphisme de $\mathbb{Z}$-foncteurs :

(3.1.4.4) $$\mathsf{A}(m) : \mathsf{A}(F) \longrightarrow \mathsf{A}(F'') \quad .$$

Si m et m' sont deux morphismes composables de $\mathbb{Z}$-foncteurs additifs, on a :

(3.1.4.5) $$\mathsf{A}(m')\,\mathsf{A}(m) = \mathsf{A}(m'm) \quad .$$

3.2. Propriétés de la catégorie $\mathsf{A}(\mathcal{D})$ ($\mathcal{D}$ catégorie triangulée).

3.2.0. Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux catégories triangulées. Désignons par $\mathcal{E}x(\mathcal{D},\mathcal{D}')$ la catégorie dont les objets sont les foncteurs exacts de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{D}'$ et dont les morphismes sont les morphismes de foncteurs exacts. Désignons de même par $\mathbb{Z}\text{-}\mathcal{A}dd(\mathsf{A}(\mathcal{D}),\mathsf{A}(\mathcal{D}'))$ la catégorie dont les objets sont les $\mathbb{Z}$-foncteurs additifs de $\mathsf{A}(\mathcal{D})$ dans $\mathsf{A}(\mathcal{D}')$ et dont les morphismes sont les morphismes de $\mathbb{Z}$-foncteurs. Il résulte de ce qui précède qu'on a défini un foncteur :

(3.2.0.1) $$\mathsf{A}_{\mathcal{D},\mathcal{D}'} : \mathcal{E}x(\mathcal{D},\mathcal{D}') \longrightarrow \mathbb{Z}\text{-}\mathcal{A}dd(\mathsf{A}(\mathcal{D}),\mathsf{A}(\mathcal{D}')) \quad .$$

Ce foncteur associe à un foncteur exact F le foncteur $\mathsf{A}(F)$.

Théorème 3.2.1. (*) a) *Si $\mathcal{D}$ est une catégorie triangulée, la catégorie $\mathsf{A}(\mathcal{D})$ est abélienne. Si $F : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}'$ est un foncteur exact entre deux catégories triangulées, le foncteur $\mathsf{A}(F)$* (3.1.4.1) *est exact. Le foncteur $\mathsf{A}_{\mathcal{D},\mathcal{D}'}$* (3.2.0.1) *est pleinement fidèle et injectif sur les objets.*

b) *Les objets de $\mathcal{D}$ sont injectifs et projectifs dans $\mathsf{A}(\mathcal{D})$. Tout objet de $\mathsf{A}(\mathcal{D})$ est isomorphe à un objet quotient* (resp. *à un sous-objet*) *d'un objet de $\mathcal{D}$.*

c) *Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne. Désignons par $\mathcal{E}x(\mathsf{A}(\mathcal{D}),\mathcal{A})$ la catégorie dont les objets sont les foncteurs exacts de $\mathsf{A}(\mathcal{D})$ dans $\mathcal{A}$ et les morphismes, les morphismes de foncteurs. De même, désignons par $\mathcal{H}om(\mathcal{D},\mathcal{A})$ la catégorie dont les objets sont les foncteurs de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{A}$ et les morphismes, les morphismes de foncteurs. La composition avec le foncteur $\mathcal{H} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathsf{A}(\mathcal{D})$ définit un foncteur :*

$$\mathcal{E}x(\mathsf{A}(\mathcal{D}),\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{H}om(\mathcal{D},\mathcal{A}) \quad .$$

Ce foncteur est pleinement fidèle. Son image essentielle est constituée par les foncteurs cohomologiques *de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{A}$* (1.1.5). *En particulier, le foncteur $\mathcal{H} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathsf{A}(\mathcal{D})$ est un foncteur cohomologique.*

La démonstration de ce théorème nous occupera jusqu'à l'alinéa (3.2.9). Nous démontrerons d'abord trois propositions intermédiaires.

3.2.2. Soit $\mathbf{U}$ un univers tel que la catégorie $\mathcal{D}$ soit $\mathbf{U}$-petite, *i.e.* tel que $\mathcal{D}$ soit un élément de $\mathbf{U}$. Soit $\mathcal{D}^\wedge$ la catégorie des foncteurs *additifs* contravariants sur $\mathcal{D}$ à valeurs dans la catégorie des groupes abéliens $\mathbf{U}$-petits. La catégorie $\mathcal{D}^\wedge$ est abélienne et le foncteur canonique $h : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}^\wedge$, qui associe à tout objet de $\mathcal{D}$ le foncteur qu'il représente, est pleinement fidèle. Le foncteur h transforme tout objet de $\mathcal{D}$ en objet projectif de $\mathcal{D}^\wedge$.

(*) Ce théorème m'a été communiqué par Freyd [**17**].

Un objet de $\mathcal{D}^\wedge$ est dit *admissible* s'il est image d'un morphisme entre foncteurs représentables. Soit $\mathcal{I}m : \mathcal{F}\ell_1(\mathcal{D}) \longrightarrow \mathcal{D}^\wedge$ le foncteur :

(3.2.2.1) $$\mathcal{I}m\left(X \xrightarrow{f} Y\right) = \text{ image du morphisme } h(f) \ .$$

Le foncteur $\mathcal{I}m$ est additif et transforme les morphismes négligeables en morphismes nuls. Il se factorise donc d'une manière unique par un foncteur additif noté abusivement :

(3.2.2.2) $$\mathcal{I}m : \mathsf{A}(\mathcal{D}) \longrightarrow \mathcal{D}^\wedge \quad .$$

Le foncteur composé $\mathcal{I}m \circ \mathcal{H} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathsf{A}(\mathcal{D}) \longrightarrow \mathcal{D}^\wedge$ n'est autre que le foncteur h. Un objet de $\mathcal{D}^\wedge$ est isomorphe à l'image par $\mathcal{I}m$ d'un objet de $\mathsf{A}(\mathcal{D})$ si et seulement s'il est admissible.

Proposition 3.2.3. *Le foncteur $\mathcal{I}m : \mathsf{A}(\mathcal{D}) \longrightarrow \mathcal{D}^\wedge$ est pleinement fidèle.*

Soit :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & Y \arrow[d, "g'"] \\ X' \arrow[r, "f'"] & Y' \end{tikzcd} \qquad = \qquad (g\,;g')$$

un morphisme de $\mathcal{F}\ell_1(\mathcal{D})$. Nous désignerons par $\mathcal{I}m((g\,;g'))$ l'image par $\mathcal{I}m$ du morphisme $(g\,;g')$. Le diagramme de $\mathcal{F}\ell_1(\mathcal{D})$:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\mathsf{id}_X"] \arrow[d, "\mathsf{id}_X"'] & X \arrow[d, "f"] \\ X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[d, "\mathsf{id}_Y"] \\ Y \arrow[r, "\mathsf{id}_Y"] & Y \end{tikzcd}$$

fournit, en appliquant le foncteur $\mathcal{I}m$, le diagramme :

$$h(X) \xrightarrow{\mathcal{I}m((\mathsf{id}_X\,;f))} \mathcal{I}m(f) \xrightarrow{\mathcal{I}m((f;\mathsf{id}_Y))} h(Y) \quad .$$

On a l'égalité :

(3.2.3.1) $$\mathcal{I}m((f;\mathsf{id}_Y)) \circ \mathcal{I}m((\mathsf{id}_X\,;f)) = h(f) \quad .$$

Soient (X,Y,f) et (X',Y',f') deux objets de $\mathsf{A}(\mathcal{D})$. Pour démontrer la proposition (3.2.3), il suffit de montrer que l'homomorphisme défini par le foncteur $\mathcal{I}m$:

$$\mathsf{Hom}_{\mathsf{A}(\mathcal{D})}\big((X,Y,f),(X',Y',f')\big) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{D}^\wedge}\big(\mathcal{I}m(f),\mathcal{I}m(f')\big) \tag{3.2.3.2}$$

est un isomorphisme. Montrons d'abord qu'il est injectif. Soit donc :

$$(g\,;g') : (X,Y,f) \longrightarrow (X',Y',f')$$

un morphisme de $\mathcal{F}\ell_1(\mathcal{D})$ tel que $\mathcal{I}m((g\,;g')) = 0$. Le morphisme composé :

$$\mathcal{I}m((f';\mathsf{id}_{Y'}))\circ\mathcal{I}m((g\,;g'))\circ\mathcal{I}m(\mathsf{id}_X;f)$$

est égal au morphisme $h(g'f)$. Par suite, $h(g'f) = 0$. Le foncteur h étant pleinement fidèle, on a $g'f = 0$. Par suite, le morphisme $(g\,;g')$ est négligeable. Pour démontrer que l'homomorphisme (3.2.3.2) est surjectif, il suffit de démontrer le lemme :

Lemme 3.2.4. *Soit $\mathcal{I}m(f) \xrightarrow{\alpha} \mathcal{I}m(f')$ un morphisme de $\mathcal{D}^\wedge$. Il existe deux morphismes de $\mathcal{D}$, $g : X \longrightarrow X'$ et $g' : Y \longrightarrow Y'$, tels que les diagrammes ci-après soient commutatifs :*

$$\begin{tikzcd} h(X) \arrow[r, "\mathcal{I}m((\mathsf{id}_X;f))"] \arrow[d, "h(g)"'] & \mathcal{I}m(f) \arrow[d, "\alpha"] \\ h(X') \arrow[r, "\mathcal{I}m((\mathsf{id}_{X'};f'))"] & \mathcal{I}m(f') \end{tikzcd} \tag{3.2.4.1}$$

$$\begin{tikzcd} h(X) \arrow[r, "h(f)"] \arrow[d, "h(g)"'] & h(Y) \arrow[d, "h(g')"] \\ h(X') \arrow[r, "h(f')"] & h(Y') \end{tikzcd} \tag{3.2.4.2}$$

En effet, on déduit immédiatement du lemme que le morphisme α est égal au morphisme $\mathcal{I}m((g\,;g'))$. Ceci résulte de l'égalité (3.2.3.1) et du fait que $\mathcal{I}m((\mathsf{id}_X;f))$ est un épimorphisme de $\mathcal{D}^\wedge$.

Pour démontrer le lemme (3.2.4), remarquons que le morphisme :

$$h(X') \xrightarrow{\mathcal{I}m((\mathsf{id}_{X'};f'))} \mathcal{I}m(f')$$

est un épimorphisme de $\mathcal{D}^\wedge$. Les foncteurs représentables étant des objets projectifs de $\mathcal{D}^\wedge$, il existe un morphisme $g : X \longrightarrow X'$ tel que le diagramme (3.2.4.1) soit commutatif.

Passons maintenant à la construction du morphisme $g' : Y \longrightarrow Y'$. Il résulte des axiomes TRI et TRII des catégories triangulées qu'il existe deux triangles distingués de la forme (Z, X, Y, u, f, v) et (Z', X', Y', u', f', v'). Comme pour tout objet W de $\mathcal{D}$, le foncteur $\mathsf{Hom}_{\mathcal{D}}(W, \cdot\,)$ est un foncteur cohomologique (1.2.1), les suites :

$$h(Z) \xrightarrow{h(u)} h(X) \xrightarrow{\mathcal{I}m((\mathsf{id}_X;f))} \mathcal{I}m(f) \longrightarrow 0$$

$$h(Z') \xrightarrow{h(u')} h(X') \xrightarrow{\mathcal{I}m((\mathsf{id}_{X'};f'))} \mathcal{I}m(f') \longrightarrow 0$$

sont exactes. Comme $h(Z)$ est un objet projectif de $\mathcal{D}^\wedge$, il existe un morphisme $g'' : Z \longrightarrow Z'$ tel que le diagramme :

$$\begin{tikzcd} h(Z) \arrow[r, "h(u)"] \arrow[d, "h(g'')"'] & h(X) \arrow[d, "h(g)"] \\ h(Z') \arrow[r, "h(u')"] & h(X') \end{tikzcd}$$

soit commutatif. Il résulte alors de l'axiome TRIII qu'il existe un morphisme g' tel que (g'', g, g') soit un morphisme de triangle. En particulier, le diagramme (3.2.4.2) est commutatif. Ceci achève la démonstration du lemme (3.2.4) et de la proposition (3.2.3).

Proposition 3.2.5. *Soient V et V' deux objets admissibles de $\mathcal{D}^\wedge$ et $\alpha : V \longrightarrow V'$ un morphisme de $\mathcal{D}^\wedge$. Le noyau de α dans $\mathcal{D}^\wedge$* (resp. *le conoyau de α dans $\mathcal{D}^\wedge$*) *est un objet admissible de $\mathcal{D}^\wedge$.*

D'après (3.2.3), on peut supposer que $V = \mathcal{I}m(f)$ et $V' = \mathcal{I}m(f')$ et que α est le morphisme induit sur les images des morphismes $h(f)$ et $h(f')$ par un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} h(X) \arrow[r, "h(f)"] \arrow[d, "h(g)"'] & h(Y) \arrow[d, "h(g')"] \\ h(X') \arrow[r, "h(f')"] & h(Y') \end{tikzcd}$$

Soit alors $(Z, X, Y', u, f'g, v)$ un triangle distingué de $\mathcal{D}$. Le diagramme :

$$\begin{tikzcd} h(Z) \arrow[r, "h(fu)"] \arrow[d, "h(u)"'] & h(Y) \arrow[d, "\mathrm{id}_{h(Y)}"] \\ h(X) \arrow[r, "h(f)"] \arrow[d, "h(g)"'] & h(Y) \arrow[d, "h(g')"] \\ h(X') \arrow[r, "h(f')"] & h(Y') \end{tikzcd}$$

fournit, en prenant les images des morphismes horizontaux, un diagramme :

(3.2.5.1) $$\mathcal{I}m(fu) \xrightarrow{\beta} V \xrightarrow{\alpha} V' \quad .$$

Montrons que le morphisme $\mathcal{I}m(fu) \xrightarrow{\beta} V$ est le noyau de α. Tout d'abord, il est clair que β est un monomorphisme : en effet, $\mathcal{I}m(fu)$ et V sont des sous-objets de $h(Y)$. Ensuite, le composé $\alpha\beta$ est nul : en effet, le morphisme canonique $h(Z) \longrightarrow \mathcal{I}m(fu)$ est un épimorphisme ; le morphisme canonique $V' \longrightarrow h(Y')$ est un monomorphisme, et le composé $h(f'gu)$ est l'image par h du composé de deux morphismes consécutifs d'un triangle distingué ; ce morphisme est donc nul (1.2.2). Il reste à montrer que la suite (3.2.5.1) est exacte en V. Soit W un objet de $\mathcal{D}$. Un morphisme σ de $h(W)$ dans V provient toujours d'un morphisme de $h(W)$ dans $h(X)$ ($h(W)$ est projectif dans $\mathcal{D}^\wedge$), *i.e.* d'un morphisme $m : W \longrightarrow X$. Ce morphisme composé avec α est nul si et seulement si $f'gm = 0$ (V' est un sous-objet de $h(Y')$). Par suite (1.2.1), il existe un morphisme $n : W \longrightarrow Z$ tel que $un = m$. Le morphisme σ se factorise donc par $\mathcal{I}m(fu)$.

Montrons maintenant que le conoyau de α dans $\mathcal{D}^\wedge$ est un objet admissible de $\mathcal{D}^\wedge$. Soit $(X, Y', Z', g'f, u', v')$ un triangle distingué de $\mathcal{D}$. Le diagramme :

$$\begin{tikzcd} h(X) \arrow[r, "h(f)"] \arrow[d, "h(g)"'] & h(Y) \arrow[d, "h(g')"] \\ h(X') \arrow[r, "h(f')"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{h(X')}"'] & h(Y') \arrow[d, "h(u')"] \\ h(X') \arrow[r, "h(u'f')"] & h(Z') \end{tikzcd}$$

fournit, en prenant les images des morphismes horizontaux, le diagramme :

(3.2.5.2) $$V \xrightarrow{\alpha} V' \xrightarrow{\gamma} \mathcal{I}m(u'f') \quad .$$

Tout d'abord, γ est un épimorphisme : en effet, V' et $\mathcal{I}m(u'f)$ sont des quotients de $h(X')$. Ensuite, le composé $\gamma\alpha$ est nul : en effet, le morphisme canonique $h(X) \longrightarrow V$ est un épimorphisme, le morphisme canonique :

$$\mathcal{I}m(u'f') \longrightarrow h(Z')$$

est un monomorphisme et le composé $h(u'g'f)$ est le transformé par h du composé de deux morphismes consécutifs d'un triangle distingué ; ce morphisme est donc nul (1.2.2). Il reste à montrer que la suite (3.2.5.2) est exacte en V'. Pour cela, d'après les propriétés des suites exactes dans $\mathcal{D}^\wedge$, il suffit de montrer que pour tout objet W de $\mathcal{D}$, la suite de groupes commutatifs :

$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{D}^\wedge}\big(h(W), V\big) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{D}^\wedge}\big(h(W), V'\big) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{D}^\wedge}\big(h(W), \mathcal{I}m(u'f')\big)$$

est exacte. Soit donc σ un morphisme de $h(W)$ dans V'. Ce morphisme σ composé avec le morphisme canonique de V' dans $h(Y')$ fournit un morphisme de $h(W)$ dans $h(Y')$, *i.e.* un morphisme $m : W \longrightarrow Y'$. Le composé $\gamma\sigma$ est nul si et seulement si $u'm = 0$ ($\mathcal{I}m(u'f')$ est un sous-objet de $h(Z')$). Il existe donc (1.2.1) un morphisme $n : W \longrightarrow X$ tel que $g'fn = m$. D'où, en composant avec le morphisme canonique $h(X) \longrightarrow V$, un morphisme $\sigma' : h(W) \longrightarrow V$. Comme V' est un sous-objet de $h(Y')$, on a $\alpha\sigma' = \sigma$. Ceci achève la démonstration de la proposition (3.2.5).

3.2.6. Il résulte de la proposition (3.2.3) que la catégorie $\mathsf{A}(\mathcal{D})$ est équivalente à la sous-catégorie pleine des objets admissibles de $\mathcal{D}^\wedge$. Il résulte de la proposition (3.2.5) que la sous-catégorie pleine des objets admissibles de $\mathcal{D}^\wedge$ est une sous-catégorie abélienne de $\mathcal{D}^\wedge$. La catégorie $\mathsf{A}(\mathcal{D})$ est par suite abélienne.

Proposition 3.2.7. *Toute suite exacte de* $\mathsf{A}(\mathcal{D})$:

$$0 \longrightarrow V_1 \longrightarrow V_2 \longrightarrow V_3$$

est isomorphe à une suite de $\mathsf{A}(\mathcal{D})$ *déterminée par un diagramme commutatif de* $\mathcal{D}$:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] \arrow[d] & X_1 \arrow[r, "u_1"] \arrow[d, "f_1"'] & X_2 \arrow[r, "u_2"] \arrow[d, "f_2"'] & X_3 \arrow[d, "f_3"'] \\ 0 \arrow[r] & Y_1 \arrow[r, "\mathsf{id}_{Y_1}"] & Y_2 = Y_1 \arrow[r] & Y_3 \end{tikzcd} \qquad \begin{array}{c} (X_i \xrightarrow{f_i} Y_i) \simeq V_i \\ 1 \leq i \leq 3 \end{array}$$

tel que le diagramme :

$$X_1 \xrightarrow{u_1} X_2 \xrightarrow{f_3 u_2} Y_3$$

puisse s'insérer dans un triangle distingué $(X_1, X_2, Y_3, u_1, f_3u_2, u_3)$.

Ceci résulte immédiatement de la démonstration de la proposition (3.2.5).

3.2.8. Démonstration des assertions a) et b) du théorème 3.2.1. Nous avons déjà montré (3.2.6) que la catégorie $\mathsf{A}(\mathcal{D})$ est abélienne. Soit $F : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}'$ un foncteur exact. Il résulte immédiatement de la proposition (3.2.7) que le foncteur $\mathsf{A}(F)$ est exact à gauche. Par ailleurs, il est clair d'après la construction de la catégorie $\mathsf{A}(\mathcal{D})$, que la catégorie $\mathsf{A}(\mathcal{D}^\circ)^\circ$ est canoniquement isomorphe à la catégorie $\mathsf{A}(\mathcal{D})$ et que le foncteur $\mathsf{A}(F^\circ)^\circ$ est canoniquement isomorphe au foncteur $\mathsf{A}(F)$. Le foncteur F° étant exact (1.1.7), on en déduit que $\mathsf{A}(F^\circ)$ est un foncteur exact à gauche et, par suite, que le foncteur $\mathsf{A}(F)$ est aussi exact à droite, donc exact. Les objets admissibles de $\mathcal{D}^\wedge$ sont isomorphes à des sous-objets et des objets quotients de foncteurs représentables. Par suite (3.2.3), tout objet de $\mathsf{A}(\mathcal{D})$ est isomorphe à un sous-objet et à un objet quotient d'un objet de $\mathcal{D}$. Les foncteurs représentables sont des objets projectifs dans $\mathcal{D}^\wedge$. Ils sont donc (3.2.5) projectifs dans la sous-catégorie pleine des objets admissibles de $\mathcal{D}^\wedge$. Par suite (3.2.3), les objets de $\mathcal{D}$ sont des projectifs de $\mathsf{A}(\mathcal{D})$. On en déduit que les objets de $\mathcal{D}^\circ$ sont des objets projectifs de $\mathsf{A}(\mathcal{D}^\circ)$ et par suite, en passant aux catégories opposées, que les objets de $\mathcal{D}$ sont des objets injectifs de $\mathsf{A}(\mathcal{D})$. La démonstration en forme du fait que $\mathsf{A}_{\mathcal{D},\mathcal{D}'}$ est pleinement fidèle peut être sans danger laissée au lecteur : un morphisme entre foncteurs exacts est uniquement déterminé lorsqu'on connait ses valeurs sur suffisamment d'objets projectifs.

3.2.9. Fin de la démonstration du théorème 3.2.1. Montrons d'abord que le foncteur $\mathcal{H} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathsf{A}(\mathcal{D})$ est un foncteur cohomologique. Soit :

$$(X, Y, Z, f, g, h)$$

un triangle distingué de $\mathcal{D}$. Il faut démontrer que la suite :

$$\mathcal{H}(X) \xrightarrow{\mathcal{H}(f)} \mathcal{H}(Y) \xrightarrow{\mathcal{H}(g)} \mathcal{H}(Z)$$

est exacte. Pour cela ((3.2.3) et (3.2.5)), il suffit de montrer que la suite :

(3.2.9.1) $$h(X) \xrightarrow{h(f)} h(Y) \xrightarrow{h(g)} h(Z)$$

est exacte dans $\mathcal{D}^\wedge$. La suite (3.2.9.1) est exacte si et seulement si pour tout objet W de $\mathcal{D}$, la suite :

$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{D}^\wedge}\big(h(W),h(X)\big) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{D}^\wedge}\big(h(W),h(Y)\big) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{D}^\wedge}\big(h(W),h(Z)\big)$$

est exacte. Or ceci résulte de ce que h est pleinement fidèle et de (1.2.1).

Soit alors $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne et :

$$\mathcal{E}x(\mathsf{A}(\mathcal{D}),\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{H}om(\mathcal{D},\mathcal{A})$$

le foncteur "composition avec $\mathcal{H}$". Il est clair que ce foncteur est pleinement fidèle : un morphisme entre foncteurs exacts est uniquement déterminé lorsqu'on connait ses valeurs sur suffisamment d'objets projectifs. Il reste à démontrer que tout foncteur cohomologique $\Psi : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{A}$ se factorise à travers $\mathsf{A}(\mathcal{D})$:

(3.2.9.2)
$$\begin{tikzcd} \mathcal{D} \arrow[r, "\mathcal{H}"] \arrow[dr, "\Psi"'] & \mathsf{A}(\mathcal{D}) \arrow[d, "\Phi"] \\ & \mathcal{A} \end{tikzcd} ,$$

le foncteur Φ étant exact. Pour tout objet $X \xrightarrow{f} Y$ de $\mathsf{A}(\mathcal{D})$ posons :

$$\Phi\Big(X \xrightarrow{f} Y\Big) = \text{Image dans } \mathcal{A} \text{ de } \Psi(X) \xrightarrow{\Psi(f)} \Psi(Y) \quad (*)\,.$$

On détermine ainsi un foncteur de $\mathsf{A}(\mathcal{D})$ dans $\mathcal{A}$ tel que le diagramme (3.2.9.2) soit commutatif. Montrons que Φ est un foncteur exact. Il résulte immédiatement de (3.2.7) que Φ est exact à gauche. En passant aux catégories opposées, on montre de même que Φ est exact à droite. Ceci achève la démonstration du théorème (3.2.1).

Remarque 3.2.10. 1) La propriété universelle décrite dans le théorème (3.2.1, c)) détermine la catégorie $\mathsf{A}(\mathcal{D})$ à équivalence près.

2) Lorsque dans $\mathcal{D}$ les sommes dénombrables ou bien les produits dénombrables sont représentables, tous les objets projectifs (resp. injectifs) de $\mathsf{A}(\mathcal{D})$ sont isomorphes à des objets de $\mathcal{D}$. En effet, un tel objet est facteur direct dans $\mathsf{A}(\mathcal{D})$ d'un objet de $\mathcal{D}$. Il est donc noyau d'un projecteur d'un objet de $\mathcal{D}$. Or sous les hypothèses faites, les projecteurs sont décomposables dans $\mathcal{D}$ (1.2.9).

(*) On remarquera que la construction du foncteur Φ fait intervenir le choix d'un foncteur "image" dans $\mathcal{A}$. Ce choix est bien entendu unique à isomorphisme unique près. On peut toujours imposer, ce que nous ferons désormais, que le foncteur "image" associe à tout morphisme identique id_T dans $\mathcal{A}$, l'objet T muni du morphisme $T \xrightarrow{\mathsf{id}_T} T$.

4. Objets spectraux.

Nous reprenons, pour l'adapter aux catégories triangulées, l'exposition des suites spectrales de [**1**], chap. XV, §7.

4.1. Définition des objets spectraux.

4.1.1. Soit $\mathcal{J}$ une catégorie et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{F}\ell_n(\mathcal{J})$ la catégorie des suites de n morphismes composables de $\mathcal{J}$ (chap. I, 3.3.6). Nous utiliserons trois foncteurs notés $s_i : \mathcal{F}\ell_2(\mathcal{J}) \longrightarrow \mathcal{F}\ell_1(\mathcal{J})$, $1 \leq i \leq 3$:

$$
\text{(4.1.1.1)} \qquad \begin{cases} \xrightarrow{f} \xrightarrow{g} \in \mathsf{Ob}\ \mathcal{F}\ell_2(\mathcal{J}) & , \\ s_1\left(\xrightarrow{f} \xrightarrow{g}\right) = \xrightarrow{f} & , \\ s_2\left(\xrightarrow{f} \xrightarrow{g}\right) = \xrightarrow{gf} & , \\ s_3\left(\xrightarrow{f} \xrightarrow{g}\right) = \xrightarrow{g} & , \end{cases}
$$

et deux morphismes de foncteurs :

$$
\text{(4.1.1.2)} \qquad \begin{cases} u_1 : s_1 \longrightarrow s_2 \text{ défini par :} \\ u_1\left(\xrightarrow{f} \xrightarrow{g}\right) = \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \mathsf{id}\downarrow \qquad \downarrow g \\ \xrightarrow[gf]{} \end{array} \quad ; \\ u_2 : s_2 \longrightarrow s_3 \text{ défini par :} \\ u_2\left(\xrightarrow{f} \xrightarrow{g}\right) = \begin{array}{c} \xrightarrow{gf} \\ f\downarrow \qquad \downarrow \mathsf{id} \\ \xrightarrow[g]{} \end{array} \quad . \end{cases}
$$

4.1.2. Soient $\mathcal{D}$ une catégorie triangulée et $\mathcal{J}$ une catégorie. Un *objet spectral de type* $\mathcal{J}$ *à valeurs dans* $\mathcal{D}$ est un objet constitué par deux foncteurs :

a) Un foncteur $X : \mathcal{F}\ell_1(\mathcal{J}) \longrightarrow \mathcal{D}$:

$$
\left(\xrightarrow{f}\right) \longmapsto X_f \quad .
$$

b) Un foncteur de $\mathcal{F}\ell_2(\mathcal{J})$ dans la catégorie des triangles distingués de $\mathcal{D}$ de la forme :

$$\omega_2 = \left(\xrightarrow{f}\ \xrightarrow{g}\right) \longmapsto X_f \xrightarrow{X*u_1(\omega_2)} X_{gf} \xrightarrow{X*u_2(\omega_2)} X_g \xrightarrow{\delta(\omega_2)} X_f[1] \quad .$$

Pour désigner les objets spectraux de type $\mathcal{J}$, nous utiliserons la notation $\big(X_f,\, f \in \mathsf{Ob}\,\mathcal{F}\ell_1(\mathcal{J}),\, \delta(\omega_2),\, \omega_2 \in \mathsf{Ob}\,\mathcal{F}\ell_2(\mathcal{J})\big)$, ou plus simplement (X_f, δ) quand aucune confusion n'en résulte.

4.1.3. Soient $\mathcal{C}$ une catégorie additive et $F : \mathcal{J} \longrightarrow \mathsf{comp}(\mathcal{C})$ un foncteur. On a montré au chapitre I, (3.3.6) comment associer à F un objet spectral de type $\mathcal{J}$ à valeurs dans $\mathsf{K}(\mathcal{C})$. L'objet spectral décrit au chapitre I, (3.3.6) est appelé l'*objet spectral associé au foncteur* F.

4.1.4. Soient $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne et $\mathcal{J}$ une catégorie. Un *objet spectral de type* $\mathcal{J}$ *à valeurs dans* $\mathcal{A}$ est constitué par :

a) Une suite de foncteurs $H^n : \mathcal{F}\ell_1(\mathcal{J}) \longrightarrow \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{Z}$.

b) La donnée pour tout objet $\omega_2 = \xrightarrow{f}\ \xrightarrow{g}$ de $\mathcal{F}\ell_2(\mathcal{J})$ et tout entier n, d'un morphisme $\delta^n(\omega_2) : H^n(g) \longrightarrow H^{n+1}(f)$, fonctoriel en ω_2, tel que le diagramme :

$$\cdots \longrightarrow H^n(f) \xrightarrow{H^n*u_1(\omega_2)} H^n(gf) \xrightarrow{H^n*u_2(\omega_2)} H^n(g) \xrightarrow{\delta^n(\omega_2)} H^{n+1}(f) \longrightarrow \cdots$$

soit une suite exacte illimitée de $\mathcal{A}$.

Nous utiliserons la notation :

$$\big(H^n(f),\, f \in \mathsf{Ob}\,\mathcal{F}\ell_1(\mathcal{J}),\, \delta^n(\omega_2),\, \omega_2 \in \mathsf{Ob}\,\mathcal{F}\ell_2(\mathcal{J})\big)$$

pour désigner les objets spectraux de type $\mathcal{J}$, ou plus simplement $(H^n(f), \delta)$ quand aucune confusion n'en résulte.

4.1.5. Soit $F : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}'$ un foncteur exact entre deux catégories triangulées. Soit (X_f, δ) un objet spectral de type $\mathcal{J}$ à valeurs dans $\mathcal{D}$. Le couple des foncteurs $(FX_f, F\delta)$ est un objet spectral de type $\mathcal{J}$ à valeurs dans $\mathcal{D}'$. De même, un foncteur cohomologique $H : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{A}$ d'une catégorie triangulée dans une catégorie abélienne transforme les objets spectraux à valeurs dans $\mathcal{D}$ en objets spectraux à valeurs dans $\mathcal{A}$.

4.1.6. Soient $\mathcal{D}$ une catégorie triangulée et (X_f, δ), (Y_f, δ') deux objets spectraux de type $\mathcal{J}$ à valeurs dans $\mathcal{D}$. Un *morphisme d'objets spectraux* est un morphisme de foncteurs :

$$m_f : X_f \longrightarrow Y_f \quad , \quad f \in \mathsf{Ob}\,\mathcal{F}\ell_1(\mathcal{J}) \quad ,$$

tel que pour tout objet $\omega_2 = \xrightarrow{f} \xrightarrow{g}$ de $\mathcal{F}\ell_2(\mathcal{J})$, le diagramme ci-après soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} X_g \arrow[r, "\delta(\omega_2)"] \arrow[d, "m_g"'] & X_f[1] \arrow[d, "m_f[1]"] \\ Y_g \arrow[r, "\delta'(\omega_2)"] & Y_f[1] \end{tikzcd} \quad .$$

Soient $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne et $(H^n(f), \delta)$, $(H'^n(f), \delta')$ deux objets spectraux de type $\mathcal{J}$ à valeurs dans $\mathcal{A}$. Un *morphisme d'objets spectraux* est une suite de morphismes de foncteurs :

$$m^n(f) : H^n(f) \longrightarrow H'^n(f) \quad , \quad f \in \operatorname{Ob} \mathcal{F}\ell_1(\mathcal{J}) \quad , \quad n \in \mathbb{Z} \quad ,$$

telle que pour tout objet $\omega_2 = \xrightarrow{f} \xrightarrow{g}$ de $\mathcal{F}\ell_2(\mathcal{J})$ et tout entier n, le diagramme ci-après soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} H^n(g) \arrow[r, "\delta^n(\omega_2)"] \arrow[d, "m^n(g)"'] & H^{n+1}(f) \arrow[d, "m^{n+1}(f)"] \\ H'^n(g) \arrow[r, "\delta'^n(\omega_2)"] & H'^{n+1}(f) \end{tikzcd} \quad .$$

Les objets spectraux de type $\mathcal{J}$ à valeurs dans $\mathcal{D}$ (resp. $\mathcal{A}$) forment une catégorie.

4.2. Mécanisme des suites spectrales.

4.2.1. Soient $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne et $(H^n(f), \delta)$ un objet spectral de type $\mathcal{J}$. Pour tout objet $\omega_2 = \xrightarrow{f} \xrightarrow{g}$ de $\mathcal{F}\ell_2(\mathcal{J})$, posons :

$$(4.2.1.1) \qquad \left\{ \begin{aligned} B\begin{bmatrix} n \\ \omega_2 \end{bmatrix} = B\begin{bmatrix} n \\ f, g \end{bmatrix} &= \operatorname{Im}\big(H^{n-1}(g) \xrightarrow{\delta^{n-1}(\omega_2)} H^n(f)\big) \\ &\simeq \operatorname{Ker}\big(H^n(f) \xrightarrow{H^n * u_1(\omega_2)} H^n(gf)\big) \quad , \\ Z\begin{bmatrix} n \\ \omega_2 \end{bmatrix} = Z\begin{bmatrix} n \\ f, g \end{bmatrix} &= \operatorname{Ker}\big(H^n(g) \xrightarrow{\delta^n(\omega_2)} H^{n+1}(f)\big) \\ &\simeq \operatorname{Im}\big(H^n(gf) \xrightarrow{H^n * u_2(\omega_2)} H^n(g)\big) \quad . \end{aligned} \right.$$

On a ainsi défini deux foncteurs de $\mathcal{F}\ell_2(\mathcal{J})$ dans $\mathcal{A}$. On a par définition des inclusions :

$$B\begin{bmatrix} n \\ f,g \end{bmatrix} \subset H^n(f) \quad , \quad Z\begin{bmatrix} n \\ f,g \end{bmatrix} \subset H^n(g) \quad .$$

Soit $\omega_3 = \xrightarrow{f}\xrightarrow{g}\xrightarrow{h}$ un objet de $\mathcal{F}\ell_3(\mathcal{J})$.

Proposition 4.2.2. *On a les inclusions :*

$$B\begin{bmatrix} n \\ g,h \end{bmatrix} \subset Z\begin{bmatrix} n \\ f,g \end{bmatrix} \subset H^n(g) \quad .$$

La deuxième inclusion est mise pour mémoire. Pour démontrer la première inclusion, il suffit de montrer que le composé des deux morphismes de la suite :

$$H^{n-1}(h) \xrightarrow{\delta_1} H^n(g) \xrightarrow{\delta_2} H^{n+1}(f)$$

est nul. Or l'objet $\xrightarrow{g}\xrightarrow{h}$ de $\mathcal{F}\ell_2(\mathcal{J})$ fournit la suite exacte :

$$H^{n-1}(h) \xrightarrow{\delta_1} H^n(g) \xrightarrow{u} H^n(hg) \quad ,$$

et le morphisme de $\mathcal{F}\ell_2(\mathcal{J})$:

$$\begin{array}{ccccc} & \xrightarrow{f} & & \xrightarrow{g} & \\ \mathrm{id}\downarrow & & \mathrm{id}\downarrow & & \downarrow h \\ & \xrightarrow{f} & & \xrightarrow{hg} & \end{array}$$

fournit le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} H^n(g) \arrow[r, "\delta_2"] \arrow[d, "u"'] & H^{n+1}(f) \\ H^n(hg) \arrow[ur, "\delta_3"'] & \end{tikzcd} \quad .$$

D'où la proposition.

4.2.3. Posons alors :

$$E\begin{bmatrix} n \\ \omega_3 \end{bmatrix} = E\begin{bmatrix} n \\ f,g,h \end{bmatrix} = Z\begin{bmatrix} n \\ f,g \end{bmatrix} \Big/ B\begin{bmatrix} n \\ g,h \end{bmatrix} \quad . \tag{4.2.3.1}$$

On a ainsi défini un foncteur de $\mathcal{F}\ell_3(\mathcal{J})$ dans $\mathcal{A}$.

Soit maintenant $\omega_3 = \xrightarrow{f_2} \xrightarrow{f_3} \xrightarrow{f_4}$ un objet de $\mathcal{F}\ell_3(\mathcal{J})$. L'objet $\xrightarrow{f_3} \xrightarrow{f_4}$ de $\mathcal{F}\ell_2(\mathcal{J})$ fournit la suite exacte :

$$H^n(f_3) \xrightarrow{u} H^n(f_4 f_3) \longrightarrow H^n(f_4) \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(f_3) \quad .$$

De plus, le morphisme dans $\mathcal{F}\ell_2(\mathcal{J})$:

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & \bullet \arrow[r, "f_3"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & \bullet \arrow[d, "f_4"] \\ \bullet \arrow[r, "f_2"'] & \bullet \arrow[r, "f_4 f_3"'] & \bullet \end{tikzcd}$$

fournit le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} H^n(f_4 f_3) \arrow[r, "\delta"] & H^{n+1}(f_2) \\ H^n(f_3) \arrow[u, "u"] \arrow[ur, "\delta"'] & \end{tikzcd} \quad .$$

Par suite, le diagramme :

$$\begin{tikzcd} H^n(f_4 f_3) \arrow[r] \arrow[dr, "\delta"] & H^n(f_4) \arrow[r, "\delta"] & H^{n+1}(f_3) \\ H^n(f_3) \arrow[u, "u"] \arrow[r, "\delta"] & H^{n+1}(f_2) & \end{tikzcd}$$

définit un morphisme :

$$\Psi^n(\omega_3) : Z\begin{bmatrix} n \\ f_3, f_4 \end{bmatrix} \longrightarrow H^{n+1}(f_2) \Big/ B\begin{bmatrix} n+1 \\ f_2, f_3 \end{bmatrix} \quad .$$

On vérifie que :

$$\mathsf{Ker}\,(\Psi^n(\omega_3)) = Z\begin{bmatrix} n \\ f_3 f_2, f_4 \end{bmatrix} \quad ,$$

$$\mathsf{Im}\,(\Psi^n(\omega_3)) = B\begin{bmatrix} n+1 \\ f_2, f_4 f_3 \end{bmatrix} \Big/ B\begin{bmatrix} n+1 \\ f_2, f_3 \end{bmatrix} \quad .$$

Le morphisme $\Psi^n(\omega_3)$ définit par suite un isomorphisme :

$$\Phi^n(\omega_3) : Z\begin{bmatrix} n \\ f_3, f_4 \end{bmatrix} \Big/ Z\begin{bmatrix} n \\ f_3 f_2, f_4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\sim} B\begin{bmatrix} n+1 \\ f_2, f_4 f_3 \end{bmatrix} \Big/ B\begin{bmatrix} n+1 \\ f_2, f_3 \end{bmatrix} \quad .$$

Soit alors $\omega_5 = \xrightarrow{f_1}\xrightarrow{f_2}\xrightarrow{f_3}\xrightarrow{f_4}\xrightarrow{f_5}$ un objet de $\mathcal{F}\ell_5(\mathcal{J})$. Les morphismes canoniques :

$$E\begin{bmatrix} n \\ f_3, f_4, f_5 \end{bmatrix} \longrightarrow Z\begin{bmatrix} n \\ f_3, f_4 \end{bmatrix} \Big/ Z\begin{bmatrix} n \\ f_3 f_2, f_4 \end{bmatrix} \longrightarrow 0 \quad ,$$

$$0 \longrightarrow B\begin{bmatrix} n+1 \\ f_2, f_4 f_3 \end{bmatrix} \Big/ B\begin{bmatrix} n+1 \\ f_2, f_3 \end{bmatrix} \longrightarrow E\begin{bmatrix} n+1 \\ f_1, f_2, f_3 \end{bmatrix} \quad ,$$

composés avec l'isomorphisme $\Phi^n(f_2, f_3, f_4)$, définissent un morphisme :

(4.2.3.2)

$$d^n(\omega_5) = d^n(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5) : E\begin{bmatrix} n \\ f_3, f_4, f_5 \end{bmatrix} \longrightarrow E\begin{bmatrix} n+1 \\ f_1, f_2, f_3 \end{bmatrix} \quad .$$

On a :

$$(4.2.3.3) \qquad \left\{ \begin{aligned} \mathsf{Im}\,(d^n(\omega_5)) &= B\begin{bmatrix} n+1 \\ f_2, f_4 f_3 \end{bmatrix} \Big/ B\begin{bmatrix} n+1 \\ f_2, f_3 \end{bmatrix} \quad , \\ \mathsf{Ker}\,(d^n(\omega_5)) &= Z\begin{bmatrix} n \\ f_3 f_2, f_4 \end{bmatrix} \Big/ B\begin{bmatrix} n \\ f_4, f_5 \end{bmatrix} \quad . \end{aligned} \right.$$

Le morphisme $d^n(\omega_5)$ dépend fonctoriellement, en un sens évident, de ω_5.

Proposition 4.2.4. *Soit $\omega_7 = \xrightarrow{f_1}\xrightarrow{f_2}\xrightarrow{f_3}\xrightarrow{f_4}\xrightarrow{f_5}\xrightarrow{f_6}\xrightarrow{f_7}$ un objet de $\mathcal{F}\ell_7(\mathcal{J})$. Posons :*

$$d_1 = d^{n-1}(f_3, f_4, f_5, f_6, f_7) \quad ,$$

$$d_2 = d^n(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5) \quad .$$

Le composé des morphismes :

$$E\begin{bmatrix} n-1 \\ f_5, f_6, f_7 \end{bmatrix} \xrightarrow{d_1} E\begin{bmatrix} n \\ f_3, f_4, f_5 \end{bmatrix} \xrightarrow{d_2} E\begin{bmatrix} n+1 \\ f_1, f_2, f_3 \end{bmatrix}$$

est nul. On a un isomorphisme canonique :

$$\mathsf{Ker}(d_2)/\,\mathsf{Im}(d_1) \simeq E\begin{bmatrix} n \\ f_3 f_2, f_4, f_6 f_5 \end{bmatrix} \quad . \tag{4.2.4.1}$$

Résulte immédiatement de (4.2.3.3) et (4.2.3.1).

4.2.5. Les morphismes $d^n(\omega_5)$, $\omega_5 \in \mathsf{Ob}\,\mathcal{F}\ell_5(\mathcal{J})$, sont appelés les *différentielles* (relatives à l'objet spectral considéré). La famille des foncteurs (4.2.3.1) $\omega_3 \mapsto E\left[\begin{smallmatrix} n \\ \omega_3 \end{smallmatrix}\right]$, $\omega_3 \in \mathsf{Ob}\,\mathcal{F}\ell_3(\mathcal{J})$, munis des différentielles (4.2.3.2) $d^n(\omega_5)$, $\omega_5 \in \mathsf{Ob}\,\mathcal{F}\ell_5(\mathcal{J})$, est appelée la *famille spectrale* associée à l'objet spectral $(H^n(f), \delta)$.

4.2.6. Soit $\omega_4 = \xrightarrow{f_1}\xrightarrow{f_2}\xrightarrow{f_3}\xrightarrow{f_4}$ un objet de $\mathcal{F}\ell_4(\mathcal{J})$. On en déduit un diagramme dans $\mathcal{F}\ell_3(\mathcal{J})$:

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[d, "f_1"'] & {} \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[d, "f_1"] & {} \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[d, "f_1"] & {} \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "f_2 f_1"] & {} \arrow[d, "f_2"] \\
{} \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[d, "f_2"'] & {} \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[d, "f_2"] & {} \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "f_3 f_2"] & {} \arrow[r, "\mathsf{id}"'] \arrow[d, "f_3"] & {} \arrow[d, "f_3"] \\
{} \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[d, "f_3"'] & {} \arrow[r, "f_3"] \arrow[d, "f_4 f_3"] & {} \arrow[r, "\mathsf{id}"'] \arrow[d, "f_4"] & {} \arrow[r, "\mathsf{id}"'] \arrow[d, "f_4"] & {} \arrow[d, "f_4"] \\
{} \arrow[r, "f_4"'] & {} \arrow[r, "\mathsf{id}"'] & {} \arrow[r, "\mathsf{id}"'] & {} \arrow[r, "\mathsf{id}"'] & {}
\end{tikzcd} \quad .$$

D'où, en appliquant le foncteur $E\left[\begin{smallmatrix} n \\ \omega_3 \end{smallmatrix}\right]$, trois suites exactes de $\mathcal{A}$:

$$0 \to B\begin{bmatrix} n \\ f_2, f_4 f_3 \end{bmatrix} \Big/ B\begin{bmatrix} n \\ f_2, f_3 \end{bmatrix} \longrightarrow E\begin{bmatrix} n \\ f_1, f_2, f_3 \end{bmatrix} \longrightarrow E\begin{bmatrix} n \\ f_1, f_2, f_4 f_3 \end{bmatrix} \to 0\,,$$

$$0 \longrightarrow E\begin{bmatrix} n \\ f_1, f_2, f_4 f_3 \end{bmatrix} \longrightarrow E\begin{bmatrix} n \\ f_1, f_3 f_2, f_4 \end{bmatrix} \longrightarrow E\begin{bmatrix} n \\ f_2 f_1, f_3, f_4 \end{bmatrix} \longrightarrow 0\,,$$

$$0 \to E\begin{bmatrix} n \\ f_2f_1, f_3, f_4 \end{bmatrix} \longrightarrow E\begin{bmatrix} n \\ f_2, f_3, f_4 \end{bmatrix} \longrightarrow Z\begin{bmatrix} n \\ f_2, f_3 \end{bmatrix} \Big/ Z\begin{bmatrix} n \\ f_2f_1, f_3 \end{bmatrix} \to 0\,.$$

Soit alors f_i, $i \in \mathbb{Z}$, une suite illimitée de morphismes composables de $\mathcal{J}$. On déduit de ce qui précède et de la définition des différentielles, une suite exacte illimitée :

$$\cdots \to E\begin{bmatrix} n-1 \\ f_{i+3}, f_{i+4}, f_{i+5} \end{bmatrix} \xrightarrow{d^{n-1}} E\begin{bmatrix} n \\ f_{i+1}, f_{i+2}, f_{i+3} \end{bmatrix} \to E\begin{bmatrix} n \\ f_{i+1}, f_{i+3}f_{i+2}, f_{i+4} \end{bmatrix} \to$$

$$\longrightarrow E\begin{bmatrix} n \\ f_{i+2}, f_{i+3}, f_{i+4} \end{bmatrix} \xrightarrow{d^{n}} E\begin{bmatrix} n+1 \\ f_i, f_{i+1}, f_{i+2} \end{bmatrix} \longrightarrow \cdots \quad .$$

Le lecteur curieux élucidera les rapports de cette suite exacte avec la suite exacte à 5 termes de bas degré des suites spectrales classiques.

4.2.7. Tout diagramme commutatif de $\mathcal{A}$:

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[d, "\varphi"] \arrow[dr, "\psi"] & \\ X' \arrow[ur] \arrow[r, "\varphi'"'] & X \arrow[r, "\eta"'] & X'' \end{tikzcd} \quad ,$$

dans lequel la ligne est exacte, définit par l'intermédiaire de η un isomorphisme ([**1**] p.316, Lemme 1.1) :

$$\mathsf{Im}(\varphi)/\,\mathsf{Im}(\varphi') \simeq \mathsf{Im}(\psi) \quad .$$

Soit $\omega_3 = \xrightarrow{f_1}\ \xrightarrow{f_2}\ \xrightarrow{f_3}$ un objet de $\mathcal{F}\ell_3(\mathcal{J})$. En appliquant la remarque précédente au diagramme :

$$\begin{tikzcd} & H^n(f_2f_1) \arrow[d] \arrow[dr] & \\ H^{n-1}(f_3) \arrow[ur, "\delta"] \arrow[r, "\delta"] & H^n(f_2) \arrow[r] & H^n(f_3f_2) \end{tikzcd} \quad ,$$

on obtient un isomorphisme :

$$E\begin{bmatrix} n \\ f_1, f_2, f_3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\sim} \mathsf{Im}\big(H^n(f_2f_1) \longrightarrow H^n(f_3f_2)\big) \quad . \tag{4.2.7.1}$$

En appliquant la même remarque au diagramme :

$$\begin{tikzcd}
 & H^n(f_2 f_1) \arrow[d] \arrow[dr] & \\
H^n(f_1) \arrow[ur] \arrow[r] & H^n(f_3 f_2 f_1) \arrow[r] & H^n(f_3 f_2)
\end{tikzcd} \quad ,$$

on obtient un isomorphisme :

(4.2.7.2)

$$E\begin{bmatrix} n \\ f_1, f_2, f_3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\sim} \mathsf{Im}\big(H^n(f_2 f_1) \to H^n(f_3 f_2 f_1)\big) \;/\; \mathsf{Im}\big(H^n(f_1) \to H^n(f_3 f_2 f_1)\big).$$

4.3. Les termes $E\begin{bmatrix} n \\ -\infty, p, q, +\infty \end{bmatrix}$.

4.3.1. Soit $\widetilde{\mathbb{Z}}$ l'ensemble ordonné $\mathbb{Z}$ complété par un élément initial $-\infty$ et un élément final $+\infty$. Par abus de notation, nous désignerons également par $\widetilde{\mathbb{Z}}$ la catégorie associée à l'ensemble ordonné $\widetilde{\mathbb{Z}}$. Un morphisme de $\widetilde{\mathbb{Z}}$ est donc un couple $p \leq q$, où p et q sont des éléments de $\widetilde{\mathbb{Z}}$. Une suite ordonnée $p_1 \leq p_2 \leq \cdots \leq p_n$ définit un objet de $\mathcal{F}\ell_{n-1}(\widetilde{\mathbb{Z}})$ noté $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$. Un morphisme de $\widetilde{\mathbb{Z}}$ est dit *fini* si sa source et son but appartiennent à $\mathbb{Z}$. Un objet $\mathcal{F}\ell_n(\widetilde{\mathbb{Z}})$ est dit *fini* si les morphismes qui le composent sont finis.

4.3.2. *Nous n'utiliserons dans ce travail que les objets spectraux de type* $\widetilde{\mathbb{Z}}$*, qui seront appelés dorénavant objets spectraux.* On retrouve ainsi la notion du chapitre XV, §7 de [**1**]. Soit $\big(H^n(p,q)\,,\,\delta\,,\,p \leq q \in \widetilde{\mathbb{Z}}\big)$ un objet spectral à valeurs dans une catégorie abélienne $\mathcal{A}$. Posons :

$$(4.3.2.1) \qquad F^p H^n(-\infty,+\infty) = \mathsf{Im}\big(H^n(-\infty,p) \longrightarrow H^n(-\infty,+\infty)\big) \quad .$$

On a $F^{+\infty}H^n(-\infty,+\infty) = H^n(-\infty,+\infty)$ et $F^{-\infty}H^n(-\infty,+\infty) = 0$. Les $F^pH^n(-\infty,+\infty)$ forment une filtration croissante de type $\widetilde{\mathbb{Z}}$ de $H^n(-\infty,+\infty)$. De plus, pour tout couple $p \leq q$ on a un isomorphisme (4.2.7.2) :

$$E\begin{bmatrix} n \\ -\infty, p, q, +\infty \end{bmatrix} \simeq F^q H^n(-\infty,+\infty) \;/\; F^p H^n(-\infty,+\infty) \quad .$$

4.3.3. On s'intéresse plus particulièrement aux termes $E\left[{}^{\quad n}_{p-r+1,p,p+1,p+r}\right]$, $p \in \mathbb{Z}$, $r \in \mathbb{Z}$, $r > 0$, car ceux-ci permettront, sous des hypothèses convenables, de déterminer le gradué associé à $H^n(-\infty,+\infty)$. Pour nous ramener aux notations de *loc. cit.*, nous poserons :

$$(4.3.3.1)\qquad \begin{cases} E\left[{}^{\quad n}_{p-r,p-1,p,p+r-1}\right] = \mathrm{I}_r^{-p,n+p}\ , \\ \textit{i.e.}\ : \\ \mathrm{I}_r^{p,q} = E\left[{}^{\quad p+q}_{-p-r,-p-1,-p,-p+r-1}\right]\ ,\ p,q \in \mathbb{Z}\ ,\ 1 \leq r \leq +\infty\ . \\ \text{Les différentielles correspondantes seront notées :} \\ d_r : \mathrm{I}_r^{p,q} \longrightarrow \mathrm{I}_r^{p+r,q-r+1}\quad . \end{cases}$$

Il nous arrivera très souvent d'utiliser la notation :

$$(4.3.3.2)\qquad \begin{cases} E\left[{}^{\quad n}_{p-r+1,p,p+1,p+r}\right] = \mathrm{II}_{r+1}^{n-p,p}\ , \\ \textit{i.e.}\ : \\ \mathrm{II}_r^{p,q} = E\left[{}^{\quad p+q}_{q-r+2,q,q+1,q+r-1}\right]\ ,\ p,q \in \mathbb{Z}\ ,\ 2 \leq r \leq +\infty\ . \\ \text{Les différentielles correspondantes seront notées :} \\ d_r : \mathrm{II}_r^{p,q} \longrightarrow \mathrm{II}_r^{p+r,q-r+1}\ . \end{cases}$$

Nous préciserons dans chaque cas la notation utilisée. Remarquons que lorsqu'on utilise la notation (4.3.3.1), les termes $\mathrm{I}_r^{p,q}$ sont définis pour $r \geq 1$, alors que lorsqu'on utilise la notation (4.3.3.2), les termes $\mathrm{II}_r^{p,q}$ ne sont définis que pour $r \geq 2$.

L'ensemble des termes $E\left[{}^{\quad n}_{p-r+1,p,p+1,p+r}\right]$, $n,p \in \mathbb{Z}$, $1 \leq r \leq +\infty$, munis des différentielles correspondantes, est appelé *la suite spectrale* associée à l'objet spectral $(H^n(p,q),\delta(p,q,r))$.

4.4. Convergence.

4.4.1. Pour une étude détaillée de la convergence des suites spectrales, nous renvoyons à *loc. cit.* Nous n'utiliserons que le critère suivant :

Définition 4.4.2. On dit qu'un objet spectral $(H^n(p,q),\delta)$ à valeurs dans une catégorie abélienne $\mathcal{A}$ est *stationnaire*, si pour tout entier n, il existe deux entiers $u(n)$, $v(n) \in \mathbb{Z}$ tels que :

$$H^n(p,q) = 0 \ , \quad u(n) \leq p \leq q \leq +\infty \quad ,$$

$$H^n(p,q) = 0 \ , \quad -\infty \leq p \leq q \leq v(n) \quad .$$

Théorème 4.4.3. *Soit* $(H^n(p,q),\delta)$ *un objet spectral stationnaire.*

a) *Pour tout* n, *la filtration* $F^pH^n(-\infty,+\infty)$, $p \in \widetilde{\mathbb{Z}}$, *est stationnaire,* i.e. *il existe deux entiers* $n_1 \leq n_2 \in \mathbb{Z}$ *tels que :*

$$F^{n_1}H^n(-\infty,+\infty) = 0 \quad et \quad F^{n_2}H^n(-\infty,+\infty) = H^n(-\infty,+\infty) \quad .$$

b) *Les différentielles partant de* (resp. *aboutissant à*) $E\begin{bmatrix} n \\ r,p,q,s \end{bmatrix}$ *sont nulles si* $r \leq v(n+1)$ (resp. $u(n-1) \leq s$ *), et de plus :*

c) *Pour tout* n *et tout couple* $p \leq q$, *les objets* $E\begin{bmatrix} n \\ r,p,q,s \end{bmatrix}$ *tels que :*

$$-\infty \leq r \leq v(n+1) \quad et \quad u(n-1) \leq s \leq +\infty$$

sont canoniquement isomorphes.

Ce théorème résulte immédiatement des définitions.

Un objet spectral stationnaire fournit une suite spectrale fortement convergente au sens de *loc. cit.* Nous dirons qu'une suite spectrale associée à un objet spectral est *stationnaire*, ou encore, abusivement, *convergente*, lorsque cet objet spectral est stationnaire. En utilisant l'une ou l'autre des notations de (4.3.3), nous écrirons :

$$\mathrm{I}_r^{p,q} \Rightarrow H^{p+q}(-\infty,+\infty)$$

$$\mathrm{II}_r^{p,q} \Rightarrow H^{p+q}(-\infty,+\infty)$$

pour indiquer qu'une suite spectrale converge. L'ensemble des termes $H^{p+q}(-\infty,+\infty)$ sera alors appelé *l'aboutissement* de la suite spectrale.

4.4.4. Soient $(H^n(p,q),\delta)$, $(H'^n(p,q),\delta')$ deux objets spectraux à valeurs dans $\mathcal{A}$ et $m^n(p,q) = H^n(p,q) \longrightarrow H'^n(p,q)$ un morphisme d'objets spectraux. Un tel morphisme induit un morphisme des familles spectrales correspondantes, *i.e.* une famille de morphismes :

$$m\begin{bmatrix} n \\ p,q,r,s \end{bmatrix} : E\begin{bmatrix} n \\ p,q,r,s \end{bmatrix} \longrightarrow E'\begin{bmatrix} n \\ p,q,r,s \end{bmatrix}$$

qui commutent aux différentielles. En particulier, le morphisme $m(p,q)$ induit un morphisme des suites spectrales correspondantes :

$$m_r^{p,q} : E_r^{p,q} \longrightarrow E'^{p,q}_r \quad .$$

(On pose ici $E_r^{p,q} = \mathrm{I}_r^{p,q}$ ou bien $E_r^{p,q} = \mathrm{II}_r^{p,q}$ en prenant l'une ou l'autre des notations de (4.3.3)).

Proposition 4.4.5. *On suppose que les objets spectraux :*

$$(H^n(p,q),\delta) \quad et \quad (H'^n(p,q),\delta')$$

sont stationnaires et que pour un entier r convenable, le morphisme :

$$m_r^{p,q} : E_r^{p,q} \longrightarrow E'^{p,q}_r$$

est un isomorphisme pour tout couple p,q. Alors pour tout $r' \geq r$, le morphisme :

$$m_{r'}^{p,q} : E_{r'}^{p,q} \longrightarrow E'^{p,q}_{r'}$$

est un isomorphisme. Le morphisme :

$$m^n(-\infty,+\infty) : H^n(-\infty,+\infty) \longrightarrow H'^n(-\infty,+\infty)$$

est un isomorphisme d'objets filtrés.

En effet, les $m_r^{p,q}$ définissent un isomorphisme entre les objets différentiels gradués $(E_r^{p,q},d_r)$ et $\left(E'^{p,q}_r,d_r\right)$. Ils induisent donc un isomorphisme sur les objets de cohomologie $E_{r+1}^{p,q}$ et $E'^{p,q}_{r+1}$, d'où la première assertion par récurrence sur r'. Les objets spectraux étant stationnaires, le morphisme :

$$m_\infty^{p,q} : E_\infty^{p,q} \longrightarrow E'^{p,q}_\infty$$

est un isomorphisme. Les $E_\infty^{p,q}$ (resp. $E'^{p,q}_\infty$) sont les gradués associés aux objets filtrés $H^n(-\infty,+\infty)$ (resp. $H'^n(-\infty,+\infty)$). Comme les filtrations de ces objets sont stationnaires, on en déduit que :

$$m^n(-\infty,+\infty) : H^n(-\infty,+\infty) \longrightarrow H'^n(-\infty,+\infty)$$

est un isomorphisme d'objets filtrés.