Chapitre III

Les catégories dérivées.

1. Définitions des catégories dérivées.

Dans ce paragraphe, $\mathcal{A}$ désigne, sauf mention du contraire, une catégorie abélienne.

1.1. Notations et terminologie.

1.1.1. Soit $\mathcal{A}$ une catégorie additive (non nécessairement abélienne). On désigne par $\mathsf{comp}^b(\mathcal{A})$ (resp. $\mathsf{comp}^+(\mathcal{A})$, resp. $\mathsf{comp}^-(\mathcal{A})$) la sous-catégorie pleine de $\mathsf{comp}(\mathcal{A})$ définie par les complexes X tels que $X^i = 0$, pour $|i|$ assez grand (resp. i assez petit, resp. i assez grand). On désigne par $\mathsf{K}^b(\mathcal{A})$ (resp. $\mathsf{K}^+(\mathcal{A})$, resp. $\mathsf{K}^-(\mathcal{A})$) la sous-catégorie pleine de $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ définie par les objets de $\mathsf{comp}^b(\mathcal{A})$ (resp. $\mathsf{comp}^+(\mathcal{A})$, resp. $\mathsf{comp}^-(\mathcal{A})$).

1.1.2. Soient maintenant $\mathcal{A}$ une catégorie (abélienne) et $*$ l'un des signes typographiques : b, $+$, $-$, "vide". On désigne par $\mathsf{comp}^{*,b}(\mathcal{A})$ (resp. $\mathsf{comp}^{*,+}(\mathcal{A})$, resp. $\mathsf{comp}^{*,-}(\mathcal{A})$) la sous-catégorie pleine de $\mathsf{comp}^*(\mathcal{A})$ définie par les complexes X objets de $\mathsf{comp}^*(\mathcal{A})$ tels que $\mathsf{H}^i(X) = 0$, pour $|i|$ grand (resp. pour i petit, resp. pour i grand). De même, on désigne par $\mathsf{K}^{*,b}(\mathcal{A})$ (resp. $\mathsf{K}^{*,+}(\mathcal{A})$, resp. $\mathsf{K}^{*,-}(\mathcal{A})$) la sous-catégorie pleine de $\mathsf{K}^*(\mathcal{A})$ définie par les complexes X objets de $\mathsf{K}^*(\mathcal{A})$ tels que $\mathsf{H}^i(X) = 0$, pour $|i|$ grand (resp. i petit, resp. i grand). On introduit ainsi huit sous-catégories de $\mathsf{K}(\mathcal{A})$:

(1.1.2.1)
$$\begin{tikzcd}
 & & K^+(\mathcal{A}) \arrow[dr, hook] & & \\
 & K^{+,b}(\mathcal{A}) \arrow[ur, hook] \arrow[dr, hook] & & K^{\ ,+}(\mathcal{A}) \arrow[dr, hook] & \\
K^b(\mathcal{A}) \arrow[ur, hook] \arrow[dr, hook] & & K^{\ ,b}(\mathcal{A}) \arrow[ur, hook] \arrow[dr, hook] & & K(\mathcal{A}) \\
 & K^{-,b}(\mathcal{A}) \arrow[ur, hook] \arrow[dr, hook] & & K^{\ ,-}(\mathcal{A}) \arrow[ur, hook] & \\
 & & K^-(\mathcal{A}) \arrow[ur, hook] & &
\end{tikzcd}$$

Il résulte immédiatement de la définition des triangles distingués dans $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ (chap. I, 3.3.1) et des propriétés du foncteur cohomologique canonique $\mathsf{H} : \mathsf{K}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{A}$ que les catégories $\mathsf{K}^{*,*'}(\mathcal{A}) \subset \mathsf{K}(\mathcal{A})$ sont des sous-catégories *triangulées* (chap. II, 2.1.5) pleines (strictement si $*$ = "vide") et *saturées* (chap. II, 2.1.6) de $\mathsf{K}(\mathcal{A})$.

1.1.3. Un complexe X de $\mathcal{A}$ est dit *acyclique* si pour tout entier i, $\mathsf{H}^i(X) = 0$. On désigne par $\mathsf{Ac}^*(\mathcal{A})$ la sous-catégorie pleine de $\mathsf{K}^*(\mathcal{A})$ définie par les complexes acycliques qui sont des objets de $\mathsf{K}^*(\mathcal{A})$. Un morphisme $X \xrightarrow{u} Y$ de $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ (resp. de $\mathsf{comp}(\mathcal{A})$) est appelé un *quasi-isomorphisme* si pour tout entier i, le morphisme $\mathsf{H}^i(X) \xrightarrow{\mathsf{H}^i(u)} \mathsf{H}^i(Y)$ est un isomorphisme. On désigne par $\mathsf{Qis}^*(\mathcal{A})$ (ou par Qis^* lorsqu'aucune confusion n'en résulte) l'ensemble des quasi-isomorphismes de $\mathsf{K}^*(\mathcal{A})$. La sous-catégorie $\mathsf{Ac}^*(\mathcal{A})$ de $\mathsf{K}^*(\mathcal{A})$ est une sous-catégorie triangulée strictement pleine et saturée de $\mathsf{K}^*(\mathcal{A})$. L'ensemble $\mathsf{Qis}^*(\mathcal{A})$ est un système multiplicatif saturé de morphismes de $\mathsf{K}^*(\mathcal{A})$ (chap. II, 2.1.4). Dans un triangle distingué (X, Y, Z, u, v, w) de $\mathsf{K}^*(\mathcal{A})$, le morphisme u est un quasi-isomorphisme si et seulement si le complexe Z est acyclique. Autrement dit (chap. II, 2.1.15), $\mathsf{Qis}^*(\mathcal{A})$ est le système multiplicatif de $\mathsf{K}^*(\mathcal{A})$ associé à la sous-catégorie triangulée pleine $\mathsf{Ac}^*(\mathcal{A})$.

1.1.4. Soit M un ensemble d'objets de $\mathcal{A}$. Un complexe de $\mathcal{A}$ est dit *de type* M si tous ses composants sont des éléments de M. Un morphisme $u : X \longrightarrow Y$ de $\mathsf{K}^*(\mathcal{A})$ ou de $\mathsf{comp}^*(\mathcal{A})$ est appelé une *résolution à droite* (resp. *à gauche*) de X (resp. Y) *de type* M si u est un quasi-isomorphisme et si Y (resp. X) est un complexe de type M. Le plus souvent, par abus de langage et quand le contexte ne prête à aucune confusion, on supprime la mention "à droite" (resp. "à gauche"). De même le plus souvent, par abus de langage et quand le contexte ne prête à aucune confusion, on désigne par résolution à droite (resp. à gauche) d'un objet Y, le but (resp. la source) d'une résolution à droite (resp. à gauche) de Y. On désigne par $\mathsf{comp}^*_{\mathcal{A}}(M)$, ou simplement $\mathsf{comp}^*(M)$ (resp. $\mathsf{K}^*_{\mathcal{A}}(M)$, ou simplement $\mathsf{K}^*(M)$), la sous-catégorie pleine de $\mathsf{comp}^*(\mathcal{A})$ (resp. $\mathsf{K}^*(\mathcal{A})$) définie par les complexes de type M.

1.1.5. Lorsque M est l'ensemble des objets projectifs (resp. injectifs) de la catégorie $\mathcal{A}$, les complexes dont les composants sont projectifs (resp. injectifs) sont appelés, conformément aux conventions ci-dessus, les *complexes de type projectif* (resp. *injectif*). Le lecteur prendra soin de ne pas confondre les complexes de type projectif (resp. injectif) avec les objets projectifs (resp. injectifs) de la catégorie $\mathsf{comp}(\mathcal{A})$. On constate aisément qu'un objet de $\mathsf{comp}(\mathcal{A})$ est projectif (resp. injectif) si et seulement s'il est de type projectif (resp. injectif) et homotope à zéro.

1.2. Les sous-catégories remarquables des catégories dérivées.

Proposition 1.2.1. a) *Les sous-catégories* $\mathsf{K}^{\,,*}(\mathcal{A}) \subset \mathsf{K}(\mathcal{A})$ *sont* $\mathsf{Ac}(\mathcal{A})$*-localisantes à droite et à gauche* (chap. II, 2.3.5).

b) *Les sous-catégories* $\mathsf{K}^{+,*}(\mathcal{A}) \subset \mathsf{K}(\mathcal{A})$ *sont* $\mathsf{Ac}(\mathcal{A})$*-localisantes à droite.*

b)$^{\mathrm{bis}}$ *Les sous-catégories* $\mathsf{K}^{-,*}(\mathcal{A}) \subset \mathsf{K}(\mathcal{A})$ *sont* $\mathsf{Ac}(\mathcal{A})$*-localisantes à gauche.*

c) *La sous-catégorie* $\mathsf{K}^{b}(\mathcal{A}) \subset \mathsf{K}^{+}(\mathcal{A})$ *est* $\mathsf{Ac}^{+}(\mathcal{A})$*-localisante à gauche.*

c)$^{\mathrm{bis}}$ *La sous-catégorie* $\mathsf{K}^{b}(\mathcal{A}) \subset \mathsf{K}^{-}(\mathcal{A})$ *est* $\mathsf{Ac}^{-}(\mathcal{A})$*-localisante à droite.*

d) *Tout objet de* $\mathsf{K}^{\,,+}(\mathcal{A})$ *s'envoie par un quasi-isomorphisme dans un objet de* $\mathsf{K}^{+}(\mathcal{A})$ *.*

d)$^{\mathrm{bis}}$ *Tout objet de* $\mathsf{K}^{\,,-}(\mathcal{A})$ *reçoit par un quasi-isomorphisme un objet de* $\mathsf{K}^{-}(\mathcal{A})$ *.*

e) *Tout objet de* $\mathsf{K}^{\,,b}(\mathcal{A})$ *s'envoie par un quasi-isomorphisme dans un objet de* $\mathsf{K}^{+,b}(\mathcal{A})$ *.*

e)$^{\mathrm{bis}}$ *Tout objet de* $\mathsf{K}^{\,,b}(\mathcal{A})$ *reçoit par un quasi-isomorphisme un objet de* $\mathsf{K}^{-,b}(\mathcal{A})$ *.*

f) *Tout objet de* $\mathsf{K}^{+,b}(\mathcal{A})$ *reçoit par un quasi-isomorphisme un objet de* $\mathsf{K}^{b}(\mathcal{A})$ *.*

f)$^{\mathrm{bis}}$ *Tout objet de* $\mathsf{K}^{-,b}(\mathcal{A})$ *s'envoie par un quasi-isomorphisme dans un objet de* $\mathsf{K}^{b}(\mathcal{A})$ *.*

Pour tout complexe X, on désigne par $X(n,+\infty)$ (resp. $X(-\infty,n)$) le complexe :

$$X(n,+\infty) = \ \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow X^{n}/\,\mathsf{Im}\left(d_X^{n-1}\right) \longrightarrow X^{n+1} \longrightarrow \cdots$$

(resp.

$$X(-\infty,n) = \ \cdots \longrightarrow X^{n-3} \longrightarrow X^{n-2} \longrightarrow \mathsf{Ker}\left(d_X^{n-1}\right) \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \cdots \quad)$$

et par $p : X \longrightarrow X(n,+\infty)$ (resp. $i : X(-\infty,n) \longrightarrow X$) le morphisme de complexes :

$$p^{q} = \text{identité}\,,\ \ q > n\ ,$$

$$p^{n} = X^{n} \longrightarrow X^{n}/\,\mathsf{Im}\left(d_X^{n-1}\right) \qquad\qquad \text{(morphisme canonique)}\,,$$

$$p^{q} = 0\ \ ,\ \ q \leq n-1$$

(resp.

$$\begin{aligned} i^q &= \text{ identité}\,, \quad q < n-1\,, \\ i^{n-1} &= \ \mathsf{Ker}\left(d_X^{n-1}\right) \longrightarrow X^{n-1} \qquad\qquad \text{(morphisme canonique)}\,, \\ i^q &= \ 0 \quad , \quad q \geq n \end{aligned}$$

).

Remarquons que le morphisme p (resp. i) induit un isomorphisme sur les objets de cohomologie en degré $j \geq n$ (resp. $j < n$) et que $\mathsf{H}^j(X(n,+\infty)) = 0$ pour $j < n$ (resp. $\mathsf{H}^j(X(-\infty,n)) = 0$ pour $j \geq n$). Toutes les assertions de la proposition (1.2.1) se démontrent alors immédiatement en utilisant cette construction. Nous laissons au lecteur le soin de faire la démonstration en détail.

Définition 1.2.2. On appelle *catégorie dérivée* de $\mathcal{A}$ et on note $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ la catégorie triangulée :

$$\mathsf{D}(\mathcal{A}) = \mathsf{K}(\mathcal{A})/\mathsf{Ac}(\mathcal{A}) = \mathsf{K}(\mathcal{A})\left[\mathsf{Qis}(\mathcal{A})^{-1}\right]$$

(chap. II, 2.2.6 et 2.2.10).

Il résulte du théorème (2.2.6) que le foncteur cohomologique canonique $\mathsf{H} : \mathsf{K}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{A}$ se factorise d'une manière unique en un foncteur cohomologique encore noté :

(1.2.2.1) $$\mathsf{H} : \mathsf{D}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{A}$$

et encore appelé *foncteur cohomologique canonique.* Le foncteur canonique de passage au quotient est noté $Q : \mathsf{K}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathsf{D}(\mathcal{A})$.

Théorème 1.2.3. a) *Les foncteurs naturels qui figurent dans le diagramme :*

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & K^{\cdot,+}(\mathcal{A})/\,\mathsf{Ac}(\mathcal{A}) \arrow[dr] & \\ K^{\cdot,b}(\mathcal{A})/\,\mathsf{Ac}(\mathcal{A}) \arrow[ur] \arrow[dr] & & \mathsf{D}(\mathcal{A}) \\ & K^{\cdot,-}(\mathcal{A})/\,\mathsf{Ac}(\mathcal{A}) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

sont strictement pleinement fidèles. Ils sont injectifs sur les objets et réalisent donc les catégories $\mathsf{K}^{\;,*}(\mathcal{A})/\mathsf{Ac}(\mathcal{A})$ *comme sous-catégories triangulées strictement pleines de* $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ *. Un objet* X *de* $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ *est un objet de* $\mathsf{K}^{\;,b}(\mathcal{A})/\mathsf{Ac}(\mathcal{A})$ (resp. $\mathsf{K}^{\;,+}(\mathcal{A})/\mathsf{Ac}(\mathcal{A})$, resp. $\mathsf{K}^{\;,-}(\mathcal{A})/\mathsf{Ac}(\mathcal{A})$) *si et seulement si* $\mathsf{H}^i(X) = 0$ *, pour* $|i|$ *grand* (resp. *i petit,* resp. *i grand*).

b) *Les foncteurs naturels qui figurent en traits pleins dans les diagrammes :*

$$
\begin{tikzcd}
K^+(\mathcal{A})/\,\mathsf{Ac}^+(\mathcal{A}) \arrow[r] & K^{\;,+}(\mathcal{A})/\,\mathsf{Ac}(\mathcal{A}) \arrow[dr, dashed] & \\
& & \mathsf{D}(\mathcal{A}) \\
K^-(\mathcal{A})/\,\mathsf{Ac}^-(\mathcal{A}) \arrow[r] & K^{\;,-}(\mathcal{A})/\,\mathsf{Ac}(\mathcal{A}) \arrow[ur, dashed] &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
& K^{+,b}(\mathcal{A})/\,\mathsf{Ac}^+(\mathcal{A}) \arrow[dr] & & \\
K^b(\mathcal{A})/\,\mathsf{Ac}^b(\mathcal{A}) \arrow[ur] \arrow[dr] & & K^{\;,b}(\mathcal{A})/\,\mathsf{Ac}(\mathcal{A}) \arrow[r, dashed] & \mathsf{D}(\mathcal{A}) \\
& K^{-,b}(\mathcal{A})/\,\mathsf{Ac}^-(\mathcal{A}) \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}
$$

sont des équivalences de catégories. Il sont injectifs sur les ensembles d'objets.

c) *Les foncteurs naturels qui figurent en traits pleins dans le diagramme :*

$$
\begin{tikzcd}
K^{+,b}(\mathcal{A})/\,\mathsf{Ac}^+(\mathcal{A}) \arrow[r] & K^+(\mathcal{A})/\,\mathsf{Ac}^+(\mathcal{A}) \arrow[dr, dashed] & \\
& & \mathsf{D}(\mathcal{A}) \\
K^{-,b}(\mathcal{A})/\,\mathsf{Ac}^-(\mathcal{A}) \arrow[r] & K^-(\mathcal{A})/\,\mathsf{Ac}^-(\mathcal{A}) \arrow[ur, dashed] &
\end{tikzcd}
$$

sont strictement pleinement fidèles et injectifs sur les ensembles d'objets.

Résulte immédiatement de (1.2.1) et de (chap. II, 2.3.5).

1.2.4. La sous-catégorie $\mathsf{K}^{\cdot,b}(\mathcal{A})/\mathsf{Ac}(\mathcal{A})$ (resp. $\mathsf{K}^{\cdot,+}(\mathcal{A})/\mathsf{Ac}(\mathcal{A})$, resp. $\mathsf{K}^{\cdot,-}(\mathcal{A})/\mathsf{Ac}(\mathcal{A})$) de $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ est notée $\mathsf{D}^b(\mathcal{A})$ (resp. $\mathsf{D}^+(\mathcal{A})$, resp. $\mathsf{D}^-(\mathcal{A})$) et est appelée la *sous-catégorie des objets bornés* (resp. *bornés inférieurement,* resp. *bornés supérieurement*). Il convient de noter que ces limitations ne s'appliquent qu'aux objets de cohomologie des complexes considérés.

1.2.5. Soient X et Y deux objets de $\mathsf{D}(\mathcal{A})$. On désigne par $\mathsf{Ext}^0_{\mathcal{A}}(X,Y)$ le groupe $\mathsf{Hom}_{\mathsf{D}(\mathcal{A})}(X,Y)$. De même, on désigne par $\mathsf{Ext}^i_{\mathcal{A}}(X,Y)$ les groupes $\mathsf{Ext}^0_{\mathcal{A}}(X,Y[i]) \simeq \mathsf{Ext}^0_{\mathcal{A}}(X[-i],Y)$ (chap. I, 1.3.8). Cette notation sera justifiée ultérieurement. Rappelons cependant que tout triangle distingué (X,X',X'',u,v,w) (resp. (Y,Y',Y'',u,v,w)) de $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ fournit une suite exacte illimitée :

$$\cdots \to \mathsf{Ext}^0_{\mathcal{A}}(X'',Y) \longrightarrow \mathsf{Ext}^0_{\mathcal{A}}(X',Y) \longrightarrow \mathsf{Ext}^0_{\mathcal{A}}(X,Y) \longrightarrow \mathsf{Ext}^1_{\mathcal{A}}(X'',Y) \to \cdots$$

(resp.

$$\cdots \to \mathsf{Ext}^0_{\mathcal{A}}(X,Y) \longrightarrow \mathsf{Ext}^0_{\mathcal{A}}(X,Y') \longrightarrow \mathsf{Ext}^0_{\mathcal{A}}(X,Y'') \longrightarrow \mathsf{Ext}^1_{\mathcal{A}}(X,Y) \to \cdots)$$

(chap. II, 1.2.1).

1.2.6. Soit M un ensemble d'objets de $\mathcal{A}$. On désigne par $\mathsf{D}_M(\mathcal{A})$ la sous-catégorie pleine de $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ définie par les complexes dont les objets de cohomologie appartiennent à M en tout degré. On désigne par $\mathsf{D}^*_M(\mathcal{A})$ la sous-catégorie pleine $\mathsf{D}_M(\mathcal{A}) \cap \mathsf{D}^*(\mathcal{A})$. Si la sous-catégorie pleine de $\mathcal{A}$ définie par les objets de M est une sous-catégorie épaisse de $\mathcal{A}$ (*i.e.* si elle est abélienne, si le foncteur d'inclusion est exact et si l'ensemble des objets de M est stable par extension), les sous-catégories $\mathsf{D}^*_M(\mathcal{A})$ sont des sous-catégories triangulées pleines de $\mathsf{D}(\mathcal{A})$.

1.2.7. Soient $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ un foncteur exact entre deux catégories abéliennes et $\mathsf{K}(F) : \mathsf{K}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathsf{K}(\mathcal{B})$ l'extension du foncteur F aux complexes à homotopie près (chap. I, 2.5.10). Le foncteur $\mathsf{K}(F)$ transforme les complexes acycliques de $\mathcal{A}$ en complexes acycliques de $\mathcal{B}$, est exact (chap. II, 1.3.7) et, par suite, (chap. II, 2.2.6) définit un foncteur exact $\mathsf{D}(F) : \mathsf{D}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathsf{D}(\mathcal{B})$. Le foncteur $\mathsf{D}(F)$ transforme les objets bornés (resp. bornés inférieurement, resp. bornés supérieurement) de $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ en objets de même nature de $\mathsf{D}(\mathcal{B})$. Le plus souvent, on utilisera la notation abusive $F : \mathsf{D}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathsf{D}(\mathcal{B})$ pour désigner le foncteur $\mathsf{D}(F)$.

1.2.8. L'isomorphisme canonique (chap. II, 1.3.8) $\iota : \mathsf{K}(\mathcal{A})^\circ \longrightarrow \mathsf{K}(\mathcal{A}^\circ)$ transforme les objets de $\mathsf{Ac}(\mathcal{A})^\circ$ en objets de $\mathsf{Ac}(\mathcal{A}^\circ)$ et, par suite, définit un isomorphisme de catégories triangulées encore noté $\iota : \mathsf{D}(\mathcal{A})^\circ \longrightarrow \mathsf{D}(\mathcal{A}^\circ)$.

On identifiera dorénavant, sauf mention du contraire, les catégories $\mathsf{D}(\mathcal{A})^\circ$ et $\mathsf{D}(\mathcal{A}^\circ)$ à l'aide de l'isomorphisme ι. Notons que cette identification identifie la catégorie $\mathsf{D}^b(\mathcal{A})^\circ$ avec la catégorie $\mathsf{D}^b(\mathcal{A}^\circ)$, la catégorie $\mathsf{D}^+(\mathcal{A})^\circ$ avec la catégorie $\mathsf{D}^-(\mathcal{A}^\circ)$ et la catégorie $\mathsf{D}^-(\mathcal{A})^\circ$ avec la catégorie $\mathsf{D}^+(\mathcal{A}^\circ)$.

1.2.9. Le foncteur canonique $\mathcal{A} \longrightarrow \mathsf{K}(\mathcal{A})$ (chap. II, 1.3.3), composé avec le foncteur $Q : \mathsf{K}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathsf{D}(\mathcal{A})$, fournit un foncteur $\mathcal{A} \longrightarrow \mathsf{D}(\mathcal{A})$ qui est *pleinement fidèle* : en effet, soient X et Y deux objets de $\mathcal{A}$. Un morphisme dans $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ de X dans Y est (chap. II, 2.2.2) la classe $\overline{D}$ d'un diagramme de $\mathsf{K}(\mathcal{A})$:

$$D = X \xleftarrow{\ s\ } Z^\bullet \xrightarrow{\ m\ } Y \quad ,$$

où s est un quasi-isomorphisme de $\mathsf{K}(\mathcal{A})$. Par suite, $s : Z^\bullet \longrightarrow X$ induit un isomorphisme $\mathsf{H}^0(s) : \mathsf{H}^0(Z^\bullet) \xrightarrow{\sim} \mathsf{H}(X) = X$ et on vérifie aussitôt que $\overline{D} = Q\left(\mathsf{H}^0(m)\,\mathsf{H}^0(s)^{-1}\right)$. Ceci montre que l'homomorphisme :

$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{A}}(X,Y) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathsf{D}(\mathcal{A})}(X,Y)$$

est surjectif. Montrons qu'il est injectif. Un morphisme $f : X \longrightarrow Y$ dans $\mathcal{A}$ définit un morphisme nul dans la catégorie $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ si et seulement s'il existe un quasi-isomorphisme $s : Z^\bullet \longrightarrow X$ dans $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ tel que $fs = 0$. On en déduit que $\mathsf{H}^0(f)\,\mathsf{H}^0(s) = 0$. Comme $\mathsf{H}^0(s)$ est un isomorphisme, on en déduit que $\mathsf{H}^0(f) = f = 0$.

Notons que le foncteur $\mathcal{A} \longrightarrow \mathsf{D}(\mathcal{A})$ est de plus injectif sur les ensembles d'objets et réalise par suite $\mathcal{A}$ comme sous-catégorie pleine de $\mathsf{D}(\mathcal{A})$. Dorénavant, la catégorie $\mathcal{A}$ sera toujours considérée comme une sous-catégorie de sa catégorie dérivée par l'intermédiaire de ce foncteur. Le foncteur cohomologique canonique $\mathsf{D}(\mathcal{A}) \xrightarrow{\mathsf{H}} \mathcal{A}$, restreint à la sous-catégorie $\mathcal{A}$, est le foncteur identique.

Proposition 1.2.10. a) *Un objet X de $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ est isomorphe à un objet de $\mathcal{A}$ si et seulement si $\mathsf{H}^i(X) = 0$, pour tout $i \neq 0$. Il est alors canoniquement isomorphe à $\mathsf{H}^0(X)$.*

b) *Soient X et Y deux objets de $\mathcal{A}$. On a :*

$$\mathsf{Ext}^n_{\mathcal{A}}(X,Y) = 0 \ , \quad \text{pour} \quad n < 0 \ ,$$

$$\mathsf{Ext}^0_{\mathcal{A}}(X,Y) = \mathsf{Hom}_{\mathcal{A}}(X,Y) \quad .$$

Démontrons *a*). Il est clair que $\mathsf{H}^i(X) = 0$, pour $i \neq 0$, lorsque X est un objet de $\mathcal{A}$. Soit X un objet de $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ tel que $\mathsf{H}^i(X)$ soit nul, pour $i \neq 0$.

Le complexe $X(0,+\infty)$ (démonstration de (1.2.1)) est alors quasi-isomorphe à X, et le morphisme canoniqe $\mathsf{H}^0(X(0,+\infty)) \longrightarrow X(0,+\infty)$ est un quasi-isomorphisme. Ce qui montre que X est isomorphe dans $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ à $\mathsf{H}^0(X)$.

Démontrons b). La deuxième égalité est mise pour mémoire et résulte de ce que $\mathcal{A}$ est une sous-catégorie pleine de $\mathsf{D}(\mathcal{A})$. Un morphisme dans $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ de $X[-n]$ dans Y est de la forme $Q(m)Q(s)^{-1}$, où $m : Z^\bullet \longrightarrow Y$ est un morphisme de $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ et $s : Z^\bullet \longrightarrow X[-n]$ est un quasi-isomorphisme de $\mathsf{K}(\mathcal{A})$. Le morphisme $i : Z^\bullet(-\infty, n+1) \longrightarrow Z^\bullet$ (démonstration de (1.2.1)) est alors un quasi-isomorphisme. Par suite, on a :

$$Q(m)Q(s)^{-1} = Q(m)Q(i)Q(i)^{-1}Q(s)^{-1} = Q(mi)Q(si)^{-1} \quad .$$

Lorsque n est strictement négatif, $mi = 0$. Par suite, $Q(m)Q(s)^{-1} = 0$.

Définition 1.2.11. On désigne par $\mathcal{A}^{\mathsf{Ext}}$ la sous-catégorie pleine de $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ définie par les translatés des objets de $\mathcal{A}$.

La catégorie $\mathcal{A}^{\mathsf{Ext}}$ est donc (contrairement à la sous-catégorie $\mathcal{A}$) une sous-$\mathbb{Z}$-catégorie de $\mathsf{D}(\mathcal{A})$. Un objet de $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ est isomorphe à un objet de $\mathcal{A}^{\mathsf{Ext}}$ si et seulement s'il ne possède qu'un seul objet de cohomologie non nul.

1.3. Le δ-foncteur canonique.

1.3.1. Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne et $\mathcal{D}$ une catégorie triangulée. Un *δ-foncteur* de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{D}$ est un objet constitué par :

1) Un foncteur $G : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{D}$.

2) La donnée, pour toute suite exacte $S = 0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow 0$ de $\mathcal{A}$, d'un morphisme de $\mathcal{D}$:

$$\delta(S) : G(Z) \longrightarrow G(X)[1] \quad .$$

Ces données étant soumises aux axiomes suivants :

a) Pour tout morphisme de suites exactes :

$$\begin{array}{ccccccccccc} S & = & 0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \downarrow u & & \downarrow v & & \downarrow w & & \\ S' & = & 0 & \longrightarrow & X' & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & Z' & \longrightarrow & 0 \end{array} \quad ,$$

le diagramme ci-après est commutatif :

$$\begin{tikzcd} G(Z) \arrow[r, "\delta(S)"] \arrow[d, "G(w)"'] & G(X)[1] \arrow[d, "G(u)[1]"] \\ G(Z') \arrow[r, "\delta(S')"] & G(X')[1] \end{tikzcd} \quad .$$

$b)$ Pour toute suite exacte de $\mathcal{A}$, $S = 0 \longrightarrow X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \longrightarrow 0$, le triangle $(G(X), G(Y), G(Z), G(u), G(v), \delta(S))$ est distingué.

1.3.2. Soient $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne et u un morphisme de $\mathsf{comp}(\mathcal{A})$. On désigne par $[u]$ l'image de u dans $\mathsf{D}(\mathcal{A})$. Soit $S = 0 \longrightarrow X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \longrightarrow 0$ une suite exacte de $\mathsf{comp}(\mathcal{A})$. Les propriétés d'adjonction du foncteur cône (chap. I, 3.1.3), définissent un morphisme $\mu(S) : c(u) \longrightarrow Z$. Le diagramme ci-après est commutatif (chap. I, 3.2.2.4) :

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "p(u)"] \arrow[dr, "v"'] & c(u) \arrow[d, "\mu(S)"] \\ & Z \end{tikzcd} \quad .$$

Un calcul simple montre que les composants du morphisme $\mu(S)$ sont :

(1.3.2.1)
$$\mu(S)^i : Y^i \oplus X^{i+1} \longrightarrow Z^i$$
$$\mu(S)^i = (v^i, 0) \quad .$$

On en déduit que le morphisme $\mu(S) : c(u) \longrightarrow Z$ est un épimorphisme et qu'on a une suite exacte :

$$0 \longrightarrow c(\mathsf{id}_X) \longrightarrow c(u) \longrightarrow Z \longrightarrow 0 \quad .$$

Introduisons alors le complexe $c(\mu(S))$ et soit $m : c(\mathsf{id}_X) \longrightarrow c(\mu(S))[-1]$ le morphisme de composants :

(1.3.2.2)
$$m^i : X^i \oplus X^{i+1} \longrightarrow Z^{i-1} \oplus Y^i \oplus X^{i+1}$$
$$m^i = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ u^i & 0 \\ 0 & \mathsf{id} \end{pmatrix} \quad .$$

Le morphisme m est un monomorphisme et on a la suite exacte :

$$(1.3.2.3) \qquad 0 \longrightarrow c(\mathsf{id}_X) \xrightarrow{m} c(\mu(S))[-1] \longrightarrow c(\mathsf{id}_Z)[-1] \longrightarrow 0 \quad .$$

Les complexes $c(\mathsf{id}_X)$ et $c(\mathsf{id}_Z)$ sont homotopes à zéro. Par suite, le complexe $c(\mu(S))$ est acyclique. Le morphisme $\mu(S)$ est donc un quasi-isomorphisme.

En passant dans la catégorie $\mathsf{K}(\mathcal{A})$, on obtient un diagramme (chap. I, 3.2.2.7) :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\dot{u}"] & Y \arrow[r, "\dot{p}(u)"] \arrow[dr, "\dot{v}"'] & c(u) \arrow[r, "\dot{q}(u)"] \arrow[d, "\dot{\mu}(S)"] & X[1] \\ & & Z & \end{tikzcd} \quad .$$

Posons alors :

$$(1.3.2.4) \qquad \delta(S) = [q(u)]\,[\mu(S)]^{-1} \quad .$$

Il résulte des définitions des structures triangulées de $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ (chap. I, 3.3.1) et de $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ (chap. II, 2.2.6) que le triangle $(X, Y, Z, [u], [v], \delta(S))$ est distingué dans $\mathsf{D}(\mathcal{A})$. De plus, on vérifie immédiatement que le morphisme $\delta(S)$ est fonctoriel par rapport à S ((1.3.1), propriété a)). On a donc muni le foncteur canonique $\mathsf{comp}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathsf{D}(\mathcal{A})$ d'une structure de δ-foncteur. Le δ-foncteur ainsi obtenu est appelé le *δ-foncteur canonique*. Le morphisme $\delta(S)$ est appelé le *morphisme de liaison* associé à la suite exacte S.

1.3.3. Soit $\mathcal{A}^\circ$ la catégorie opposée à $\mathcal{A}$. Pour toute suite exacte S de $\mathsf{comp}(\mathcal{A}^\circ)$, désignons par $\delta^\circ(S)$ le morphisme de liaison associé. Soient $\mathcal{C}$ une catégorie, X un objet de $\mathcal{C}$ et u un morphisme de $\mathcal{C}$. Dans la proposition ci-après, nous désignerons abusivement par X° et u° l'objet et le morphisme correspondant de la catégorie opposée à $\mathcal{C}$ (rappelons que la catégorie opposée à $\mathcal{C}$ a même ensemble d'objets et de morphismes que la catégorie $\mathcal{C}$).

Proposition 1.3.4. a) *Pour toute suite exacte S de* $\mathsf{comp}(\mathcal{A})$*, on a :*

$$\delta(S[1]) = -\delta(S)[1] \quad .$$

b) *Pour toute suite exacte S de* $\mathsf{comp}(\mathcal{A})$*, compte tenu de l'identification* (1.2.8)*, on a :*

$$\delta^\circ(S^\circ) = \delta(S)^\circ[1] \quad .$$

c) *Tout triangle distingué de* $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ *est isomorphe à un triangle distingué du type* $\big(X,Y,Z,\,[u],[v],\delta(S)\big)$, *où* $S = 0 \longrightarrow X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \longrightarrow 0$ *est une suite exacte de* $\mathcal{A}$.

La démonstration de a) et b) est laissée au lecteur. Démontrons c). D'après (chap. II, 2.2.6), tout triangle distingué de $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ est isomorphe à l'image par $Q : \mathsf{K}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathsf{D}(\mathcal{A})$ d'un triangle distingué de $\mathsf{K}(\mathcal{A})$. D'après (chap. I, 3.3.1) et l'axiome TRII, tout triangle distingué de $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ est isomorphe à un triangle de la forme :

$$Y \xrightarrow{\dot p(u)} c(u) \xrightarrow{\dot q(u)} X[1] \xrightarrow{-\dot u[1]} Y[1] \quad .$$

Par suite, tout triangle distingué de $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ est isomorphe à un triangle du type :

$$\big(Y, c(u), X[1], [p(u)], [q(u)], -[u][1]\big) \quad .$$

Remarquons alors que :

$$S = 0 \longrightarrow Y \xrightarrow{p(u)} c(u) \xrightarrow{q(u)} X[1] \longrightarrow 0$$

est une suite exacte de $\mathsf{comp}(\mathcal{A})$. Il résulte alors de (chap. II, 1.2.4) qu'il existe un isomorphisme du triangle :

$$\big(Y, c(u), X[1], [p(u)], [q(u)], -[u][1]\big)$$

sur le triangle :

$$\big(Y, c(u), X[1], [p(u)], [q(u)], \delta(S)\big) \quad .$$

Proposition 1.3.5. a) *Tout foncteur* $F : \mathsf{comp}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{C}$ *qui transforme les quasi-isomorphismes en isomorphismes de* $\mathcal{C}$, *se factorise de manière unique par le foncteur* $\mathsf{comp}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathsf{D}(\mathcal{A})$.

b) *Tout foncteur semi-exact de* $\mathsf{comp}(\mathcal{A})$ *dans une catégorie abélienne* $\mathcal{B}$ *qui transforme les quasi-isomorphismes en isomorphismes se factorise d'une manière unique à travers le* δ*-foncteur canonique* $\mathsf{comp}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathsf{D}(\mathcal{A})$ *et un foncteur cohomologique de* $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ *dans* $\mathcal{B}$.

L'assertion b) résulte de l'assertion a) et de la description des triangles distingués de $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ donnée par (1.3.4). L'assertion a) résulte de la définition de $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ (chap. II, 2.2.6) et du lemme ci-après.

Lemme 1.3.6. *Soient* $\mathcal{A}$ *une catégorie additive (non nécessairement abélienne) et* F *un foncteur de* $\mathsf{comp}(\mathcal{A})$ *dans une catégorie* $\mathcal{C}$. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) *F se factorise par* $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ *.*

ii) *F transforme les homotopismes en isomorphismes de* $\mathcal{C}$ *.*

Il est clair que $i) \Rightarrow ii)$. Pour montrer que $ii) \Rightarrow i)$, il suffit de montrer que F transforme les couples de morphismes homotopes en morphismes égaux. Soit X un objet de $\mathsf{comp}(\mathcal{A})$. Le foncteur sur $\mathsf{comp}(\mathcal{A})$:

$Y \mapsto$ {*couple de morphismes de X dans Y muni d'une homotopie qui les relie*}

est représentable par un complexe Z :

$$Z^i = X^i \oplus X^i \oplus X^{i+1}$$

(1.3.6.1)
$$d^i_Z = \begin{pmatrix} d^i_X & 0 & \mathsf{id}_{X^{i+1}} \\ 0 & d^i_X & -\mathsf{id}_{X^{i+1}} \\ 0 & 0 & -d^{i+1}_X \end{pmatrix} \quad .$$

Il existe donc deux morphismes homotopes $p_1,\, p_2 : X \longrightarrow Z$:

(1.3.6.2)
$$p^i_1 = \begin{pmatrix} \mathsf{id}_{X^i} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ,$$
$$p^i_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathsf{id}_{X^i} \\ 0 \end{pmatrix} \quad ,$$

et il suffit de montrer que $F(p_1) = F(p_2)$. Or le couple de morphismes $(\mathsf{id}_X, \mathsf{id}_X)$ muni de l'homotopie triviale définit un morphisme $\pi : Z \longrightarrow X$:

(1.3.6.3)
$$\pi^i = (\mathsf{id}_{X^i}, \mathsf{id}_{X^i}, 0)$$

et on a $\pi p_1 = \pi p_2 = \mathsf{id}_X$. De plus, on vérifie immédiatement que les morphismes π , p_1 et p_2 sont des homotopismes. Il en résulte que $F(p_1)$, $F(p_2)$, $F(\pi)$ sont des isomorphismes et que $F(\pi)F(p_1) = F(\pi)F(p_2) = \mathsf{id}_{F(X)}$. Par suite, $F(p_1) = F(p_2)$, ce qui achève la démonstration du lemme.

Remarque 1.3.7. Il résulte de la proposition (1.3.5) que la catégorie dérivée de $\mathcal{A}$ est la solution du problème universel consistant à inverser les quasi-isomorphismes de $\mathsf{comp}(\mathcal{A})$ (chap. II, 2.2.3, *b*)).