# 2. Résolutions.

*Dans tout ce paragraphe, $\mathcal{A}$ désigne une catégorie abélienne.*

## 2.1. Morphismes élémentaires.

**2.1.1.** Soient $X$ un complexe de $\mathcal{A}$ et $X^i$ le composant de degré $i$. Soit $u : Y \longrightarrow X^i$ un morphisme de $\mathcal{A}$. Construisons le diagramme commutatif ci-après :

(2.1.1.1)

$$\begin{tikzcd}
 & & X'^{i-1} \arrow[r, "v_2"] \arrow[d, "u'"] & Y \arrow[d, "u"'] \arrow[dr, "v_3"] & & \\
X^{i-3} \arrow[r, "d_X^{i-3}"] & X^{i-2} \arrow[ur, "v_1"] \arrow[r, "d_X^{i-2}"] & X^{i-1} \arrow[r, "d_X^{i-1}"] & X^i \arrow[r, "d_X^i"] & X^{i+1} \arrow[r, "d_X^{i+1}"] & X^{i+2}
\end{tikzcd} ,$$

où le carré :

$$\begin{tikzcd}
X'^{i-1} \arrow[r, "v_2"] \arrow[d, "u'"'] & Y \arrow[d, "u"] \\
X^{i-1} \arrow[r, "d_X^{i-1}"] & X^i
\end{tikzcd}$$

est cartésien et où les morphismes $v_1$ et $v_3$ sont définis par les égalités :

$$v_2 v_1 = 0 \quad ,$$

$$u' v_1 = d_X^{i-2} \quad ,$$

$$v_3 = d_X^i u \quad .$$

Désignons alors par $X(u, i)$ le complexe :

(2.1.1.2)

$$X(u,i) = \cdots X^{i-3} \xrightarrow{d_X^{i-3}} X^{i-2} \xrightarrow{v_1} X'^{i-1} \xrightarrow{v_2} Y \xrightarrow{v_3} X^{i+1} \xrightarrow{d_X^{i+1}} X^{i+2} \cdots ,$$

et par $p(u,i) : X(u,i) \longrightarrow X$ le morphisme de complexe :

$$p(u,i)^j = \text{ identité, pour } j \neq i-1\,,\ i\ ,$$

(2.1.1.3) $$p(u,i)^{i-1} = u' \quad ,$$

$$p(u,i)^i = u \quad .$$

Soit alors $m : Z \longrightarrow X$ un morphisme de complexes. Il est clair que le complexe $Z'$ au dessus de $Z$ obtenu par le changement de base $Z \xrightarrow{m} X$ :

$$\begin{tikzcd} Z' \arrow[r] \arrow[d] & X(u,i) \arrow[d, "p(u,i)"] \\ Z \arrow[r, "m"] & X \end{tikzcd}$$

est isomorphe à un complexe $p(w,i) : Z(w,i) \longrightarrow Z$ pour un morphisme $w$ convenable.

**Lemme 2.1.2.** a) *Le morphisme* $\mathsf{H}^j(p(u,i)) : \mathsf{H}^j(X(u,i)) \longrightarrow \mathsf{H}^j(X)$ *est un isomorphisme pour* $j \neq i\,,\ i+1\,.$

b) *On a des suites exactes :*

$$0 \to \mathsf{H}^i(X(u,i)) \to \mathsf{H}^i(X) \to \big(\mathsf{Ker}\,(d_X^i) + \mathsf{Im}(u)\big) \,/\, \big(\mathsf{Im}\,(d_X^{i-1}) + \mathsf{Im}(u)\big) \to 0$$

$$0 \longrightarrow \big(\mathsf{Ker}\,(d_X^i) + \mathsf{Im}(u)\big) \,/\, \big(\mathsf{Im}\,(d_X^{i-1}) + \mathsf{Im}(u)\big) \longrightarrow X^i \,/\, \big(\mathsf{Im}\,(d_X^{i-1}) + \mathsf{Im}(u)\big) \longrightarrow X^i \,/\, \big(\mathsf{Ker}\,(d_X^i) + \mathsf{Im}(u)\big) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow X^i \,/\, \big(\mathsf{Ker}\,(d_X^i) + \mathsf{Im}(u)\big) \longrightarrow \mathsf{H}^{i+1}(X(u,i)) \longrightarrow \mathsf{H}^{i+1}(X) \longrightarrow 0$$

c) *Pour que* $p(u,i)$ *soit un quasi-isomorphisme, il faut et il suffit que :*

$$\mathsf{Im}\,(d_X^{i-1}) + \mathsf{Im}(u) = X^i \quad .$$

La “chasse au diagramme” est laissée au lecteur.

**Définition 2.1.3.** Un morphisme de complexes $m : Z \longrightarrow X$ est appelé un *morphisme élémentaire de hauteur* $i$ s'il est isomorphe dans $\mathcal{F}\ell_1(\mathsf{comp}(\mathcal{A}))$ à un morphisme du type $p(u,i)$, où $u$ est un *épimorphisme.*

Un morphisme élémentaire est donc, en particulier, un quasi-isomorphisme ((2.1.2), $c$)). Un morphisme élémentaire est un épimorphisme de $\mathsf{comp}(\mathcal{A})$. Un épimorphisme de $\mathsf{comp}(\mathcal{A})$ est un morphisme élémentaire si et seulement si son noyau est un complexe acyclique comportant au plus deux composants non nuls. Le composé de deux morphismes élémentaires de même hauteur est un morphismes élémentaire. Les morphismes élémentaires sont stables par changement de base. Soit :

$$\cdots X_n \xrightarrow{u_n} X_{n-1} \xrightarrow{u_{n-1}} X_{n-2} \cdots$$

une suite de morphismes de complexes, illimitée dans les deux sens, telle que pour tout entier $n$, le morphisme $u_n$ soit un morphisme élémentaire de hauteur $-n$. Cette suite admet dans $\mathsf{comp}(\mathcal{A})$ une limite projective et inductive (cette suite induit sur les composants de degré donné une suite stationnaire dans les deux sens).

**Lemme 2.1.4.** *Soit $m : X \longrightarrow Y$ un quasi-isomorphisme de $\mathsf{comp}(\mathcal{A})$. Il existe une suite de morphismes :*

$$u_n : X_n \longrightarrow X_{n-1} \ , \quad n \in \mathbb{Z} \ ,$$

*telle que $u_n$ soit, pour tout entier $n$, un morphisme élémentaire de hauteur $-n$, et des morphismes :*

$$\varinjlim_n X_n \xleftarrow{\sim} Y \quad ,$$

$$\varprojlim_n X_n \xleftarrow{v} X \quad , \quad v \text{ homotopisme (chap. I, 2.5.11)} ,$$

*tels que le diagramme :*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "v"] \arrow[d, "m"'] & \varprojlim_n X_n \arrow[d] \\ Y \arrow[r, "\sim"] & \varinjlim_n X_n \end{tikzcd}$$

*soit commutatif à homotopie près.*

Tout d'abord, remarquons que pour tout morphisme $m : X \longrightarrow Y$ de $\mathsf{comp}(\mathcal{A})$, il existe un épimorphisme $m' : X' \longrightarrow Y$ et un diagramme commutatif à homotopie près :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "v"] \arrow[dr, "m"'] & & X' \arrow[dl, "m'"] \\ & Y & \end{tikzcd} \quad ,$$

où $v$ est un homotopisme.

Construisons en effet le cône du morphisme $m$ :

$$X \xrightarrow{m} Y \xrightarrow{p(m)} c(m) \longrightarrow X[1] \quad ,$$

puis de nouveau, le cône du morphisme $p(m)$ :

$$Y \xrightarrow{p(m)} c(m) \longrightarrow c(p(m)) \xrightarrow{q} Y[1] \quad .$$

Le morphisme $c(p(m)) \xrightarrow{q} Y[1]$ est une épimorphisme (chap. I, 3.2.2). Il résulte des propriétés des triangles distingués (propriété TRII) qu'il existe un homotopisme :

$$X \xrightarrow{v} c(p(m))[-1]$$

tel que le triangle ci-après :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "v"] \arrow[dr, "m"'] & & c(p(m))[-1] \arrow[dl, "{q[-1]}"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

soit commutatif à homotopie près.

On peut donc supposer que le morphisme $m$ est un épimorphisme de $\mathsf{comp}(\mathcal{A})$. Soit alors :

$$N = \cdots \longrightarrow N^i \xrightarrow{d_N^i} N^{i+1} \xrightarrow{d_N^{i+1}} N^{i+2} \longrightarrow \cdots$$

le noyau du morphisme $m$. Posons :

$$N_{-n} = \cdots \longrightarrow N^{n-3} \longrightarrow N^{n-2} \longrightarrow \mathsf{Im}\left(d_N^{n-2}\right) \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots \quad .$$

Les $N_{-n}$ forment une suite décroissante de sous-complexes acycliques de $N$, d'où en posant $X_n = X/N_n$, une suite :

$$u_n : X_n \longrightarrow X_{n-1} \ , \quad n \in \mathbb{Z} \quad .$$

Les $u_n$ sont des morphismes élémentaires de hauteur $-n$ et $\varprojlim_n X_n = X$, $\varinjlim_n X_n = Y$.

**Remarque 2.1.5.** Plaçons nous sous les hypothèses du lemme (2.1.4) et supposons de plus que $X$, $Y \in \mathsf{Ob\ comp}^-(\mathcal{A})$. L'argument présenté plus haut montre alors qu'on peut, en changeant au besoin $X$ par un homotopisme, supposer que $m$ est un épimorphisme. La construction de la suite $X_n$ présentée ci-dessus, montre alors que le système inductif $X_n$ est stationnaire (*i.e.* $X_n = Y$ et $u_n =$ identité pour $n$ petit) et que pour tout $n$, $X_n \in \mathsf{Ob\ comp}^-(\mathcal{A})$.

## 2.2. Étude de certains ensembles d'objets.

**2.2.1.** Soit $M$ un ensemble d'objets de $\mathcal{A}$. Nous considèrerons les différentes propriétés suivantes :

$(E_1)$ Les objets nuls appartiennent à $M$. La somme directe de deux objets appartenant à $M$ est un objet appartenant à $M$.

$(E_2)$ Pour tout épimorphisme $X \xrightarrow{u} L$, où $X$ est un objet de $\mathcal{A}$ et $L$ un élément de $M$, il existe un épimorphisme $v : L' \longrightarrow L$, $L' \in M$, qui se factorise par $u$.

$(E_3)$ Pour tout entier $n$ et toute suite exacte :

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow L_n \longrightarrow L_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow L_0 \longrightarrow 0 \quad , \quad L_i \in M\,,\ 0 \leq i \leq n\,,$$

il existe un épimorphisme $L' \longrightarrow X$, où $L' \in M$.

$(E_4)$ Pour tout épimorphisme $u : L \longrightarrow L'$, $L$, $L' \in M$, le noyau de $u$ est un élément de $M$.

$(E_5)$ Pour toute extension $0 \longrightarrow L \longrightarrow Z \longrightarrow L' \longrightarrow 0$, $L$, $L' \in M$, l'objet $Z$ est un élément de $M$ ; 0 est un élément de $M$.

$(E_6)$ L'ensemble $M$ est exact, *i.e.* chaque fois que deux des objets d'une suite exacte courte de $\mathcal{A}$ sont des éléments de $M$, le troisième l'est aussi; 0 est un élément de $M$.

On notera qu'on a les implications $(E_6) \Rightarrow (E_4)$ et $(E_5)$, $(E_4) \Rightarrow (E_3)$ et $(E_5) \Rightarrow (E_1)$. Une suite exacte illimitée :

$$\cdots \longrightarrow L_n \longrightarrow L_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow L_0 \longrightarrow X \longrightarrow 0 \quad , \quad L_i \in M \ , \quad i \in \mathbf{N}\,,$$

est appelée une $\infty$-*$M$-présentation* de l'objet $X$. Soit $M$ un ensemble d'objets possédant les propriétés $(E_1)$, $(E_2)$ et $(E_3)$. Désignons par $M^\wedge$ l'ensemble d'objets suivants : un objet $X$ appartient à $M^\wedge$ s'il possède une $\infty$-$M$-présentation et si pour tout entier $n$ et toute suite exacte :

$$0 \longrightarrow X' \longrightarrow L_n \longrightarrow L_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow L_0 \longrightarrow X \longrightarrow 0\,,\ L_i \in M,\ 0 \leq i \leq n\,,$$

l'objet $X'$ possède une $\infty$-$M$-présentation.

**Lemme 2.2.2.** *Soit* $0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow 0$ *une suite exacte de* $\mathcal{A}$.

a) *Si* $X$ *et* $Y$ *sont des éléments de* $M^\wedge$, *il existe un épimorphisme* $u : L \longrightarrow Z$, $L \in M$.

b) *Si* $X$ *et* $Z$ *sont des éléments de* $M^\wedge$, *il existe un épimorphisme* $u : L \longrightarrow Y$, $L \in M$.

c) *Si* $Y$ *et* $Z$ *sont des éléments de* $M^\wedge$, *il existe un épimorphisme* $u : L \longrightarrow X$, $L \in M$.

**Lemme 2.2.3.** *Soit* $0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow 0$ *une suite exacte de* $\mathcal{A}$.

a) *Si* $Y$ *et* $Z$ *sont des éléments de* $M^\wedge$, *pour tout épimorphisme* $u : L \longrightarrow X$, $L \in M$, *le noyau de* $u$ *est un noyau d'un épimorphisme entre deux éléments de* $M^\wedge$.

b) *Si* $X$ *et* $Y$ *sont des éléments de* $M^\wedge$, *pour tout épimorphisme* $u : L \longrightarrow Z$, $L \in M$, *le noyau de* $u$ *est un conoyau d'un monomorphisme entre deux éléments de* $M^\wedge$.

c) *Si* $X$ *et* $Z$ *sont des éléments de* $M^\wedge$, *pour tout épimorphisme* $u : L \longrightarrow Y$, $L \in M$, *le noyau de* $u$ *est un noyau d'un épimorphisme entre deux éléments de* $M^\wedge$.

La démonstration des deux lemmes est laissée au lecteur. On remarquera que les propriétés ($a$) et ($c$) des lemmes (2.2.2) et (2.2.3) ne font pas intervenir la propriété ($E_2$).

**Proposition 2.2.4.** a) *L'ensemble* $M^\wedge$ *possède les propriétés* ($E_6$) *et* ($E_2$). *L'ensemble* $M$ *est contenu dans l'ensemble* $M^\wedge$. *Tout objet de* $M^\wedge$ *est quotient d'un objet de* $M$.

b) *Tout ensemble d'objets* $M'$ *contenant* $M$ *tel que tout objet de* $M'$ *soit un quotient d'un objet de* $M$ *et qui possède la propriété* ($E_3$) *est contenu dans* $M^\wedge$.

c) *En particulier,* $(M^\wedge)^\wedge = M^\wedge$.

La propriété $a$) résulte des deux lemmes précédents. Les propriétés $b$) et $c$) sont immédiates.

**2.2.5.** Soient $M \subset M'$ deux ensembles d'objets de $\mathcal{A}$ tels que $M$ possède les propriétés ($E_4$) et ($E_5$), que $M'$ possède la propriété ($E_4$), et que tout objet de $M'$ soit quotient d'un objet de $M$. On dit qu'un objet $X$ de $M'$ est de *$M$-dimension inférieure où égale à $n$* et on note $M\text{-}\dim(X) \leq n$, s'il existe une suite exacte :

$$0 \longrightarrow L_n \longrightarrow L_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow L_0 \longrightarrow X \longrightarrow 0 \quad , \; L_i \in M \; , \; 0 \leq i \leq n \; .$$

S'il existe des entiers $n$ tels que $M\text{-}\dim(X) \leq n$, on appelle *$M$-dimension* de $X$ et on note $M\text{-}\dim(X)$, le plus petit des entiers $n$ tels que $M\text{-}\dim(X) \leq n$. S'il n'existe pas de tels entiers, on pose $M\text{-}\dim(X) = +\infty$.

**Lemme 2.2.6.** *Soit $0 \longrightarrow X \longrightarrow L \xrightarrow{u} Y \longrightarrow 0$ une suite exacte de $\mathcal{A}$ telle que $L \in M$ et $X, Y \in M'$. On a :*

$$M\text{-}\dim(X) = \sup\{M\text{-}\dim(Y) - 1\,,\, 0\} \quad .$$

**Proposition 2.2.7.** *Soit $0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow 0$ une suite exacte, $X, Y, Z \in M'$.*

a) $M\text{-}\dim(Z) \leq \inf\{M\text{-}\dim(X)\,,\, M\text{-}\dim(Y)\} \Rightarrow M\text{-}\dim(X) = M\text{-}\dim(Y)$.

b) $M\text{-}\dim(Y) \leq \inf\{M\text{-}\dim(X)\,,\, M\text{-}\dim(Z)\} \Rightarrow$
$M\text{-}\dim(X) = \sup\{M\text{-}\dim(Z) - 1\,,\, M\text{-}\dim(Y)\}$.

c) $M\text{-}\dim(X) \leq \inf\{M\text{-}\dim(Y)\,,\, M\text{-}\dim(Z)\} \Rightarrow M\text{-}\dim(Z) = M\text{-}\dim(Y)$ *ou* $M\text{-}\dim(Z) = M\text{-}\dim(Y) + 1$.

La proposition se démontre par récurrence, en construisant un épimorphisme de suites exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & L_2 & \longrightarrow & L_1 & \longrightarrow & L_0 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & 0 \end{array} \quad , \quad L_i \in M \ , \ 0 \leq i \leq 2 \ ,$$

et en appliquant l'hypothèse de récurrence à la suite exacte noyau sur laquelle on a un contrôle, grâce au lemme (2.2.6). Reste donc à démontrer le lemme. Tout d'abord, si $M\text{-}\dim(Y) = +\infty$ (resp. $0$), $M\text{-}\dim(X) = +\infty$ (resp. $0$). On peut donc supposer que $M\text{-}\dim(Y)$ est fini non nul, et il s'agit de montrer que $M\text{-}\dim(X) = M\text{-}\dim(Y) - 1$. Soit :

$$0 \longrightarrow L_n \longrightarrow L_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow L_0 \longrightarrow Y \longrightarrow 0 \quad , \quad n \geq 1 \ ,$$

une $M$-résolution de $Y$. Posons :

$$V^\bullet = 0 \to 0 \to \cdots \to 0 \to L_n \to L_{n-1} \to \cdots \to L_0 \to Y \to 0 \to 0 \to \cdots$$

( $L_i$ est le composant de degré $-i$ ),

$$U_0^\bullet = V^\bullet(u, 1) \quad , \qquad p_0 = p(u, 1) : U_0^\bullet \longrightarrow V^\bullet$$

(2.1.1). Le morphisme $p_0$ est un morphisme élémentaire de hauteur 1. Le complexe $U_0^\bullet$ est de la forme :

$$U_0^\bullet = 0 \to 0 \cdots 0 \to L_n \to L_{n-1} \to \cdots \to L_1 \to Z_0 \to L \to 0 \to 0 \to \cdots \quad .$$

D'après la propriété $(E_4)$, l'objet $Z_0$ est un élément de $M'$. Par suite, il existe un épimorphisme $u_0 : L'_0 \longrightarrow Z_0$ , $L'_0 \in M$. Posons alors (2.1.1) $U_1^\bullet = U_0^\bullet(u_0, 0)$ , $p_1 = p(u_0, 0) : U_1^\bullet \longrightarrow U_0^\bullet$ . En poursuivant ainsi, on démontre par récurrence, qu'il existe une suite de morphismes :

$$p_i : U_i^\bullet \longrightarrow U_{i-1}^\bullet \ , \quad 1 \leq i \leq n-1 \ ,$$

$$p_0 : U_0^\bullet \longrightarrow V^\bullet \qquad ,$$

où $p_i$ est un morphisme élémentaire de hauteur $-i+1$ et où $U_i^\bullet$ est de la forme : $U_i^\bullet =$

$$0 \to 0 \to \cdots L_n \to L_{n-1} \to \cdots L_{i+1} \to Z_i \to L'_{i-1} \to \cdots \to L'_0 \to L \to 0 \cdots \ ,$$

où $L'_j \in M$ , $0 \leq j \leq i-1$ . On obtient donc, en composant ces différents morphismes $p_i$ , un quasi-isomorphisme épimorphique :

$$p : U_{n-1}^\bullet \longrightarrow V^\bullet \quad .$$

Remarquons alors que dans le complexe :

$$U_{n-1}^\bullet = 0 \to 0 \to \cdots \to L_n \to Z_{n-1} \to L'_{n-2} \to \cdots \to L'_0 \to L \to 0 \to \cdots$$

l'objet $Z_{n-1}$ apparaît, d'après la propriété $(E_4)$, comme une extension de deux éléments de $M$ et est par suite, d'après la propriété $(E_5)$, un élément de $M$. Posons alors :

$$L^\bullet = 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow L_n \longrightarrow L_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow L_0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \cdots \quad ,$$

$$L'^\bullet = 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow L_n \longrightarrow Z_{n-1} \longrightarrow L'_{n-2} \longrightarrow \cdots \longrightarrow L'_0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \cdots$$

et notons $m : L'^\bullet \longrightarrow L^\bullet$ le morphisme induit par $p$. Le seul objet de cohomologie non nul de $L^\bullet$ (resp. $L'^\bullet$ ) est l'objet $Y$ en dimension 0 (resp. $L$ en dimension 0 ) et le morphisme $m$ induit sur ces objets le morphisme $u$ . Considérons alors le cône $c(m)$ du morphisme $m$ :

$$c(m) = \longrightarrow 0 \longrightarrow L_n \longrightarrow L_n \oplus Z_{n-1} \longrightarrow L_{n-1} \oplus L'_{n-2} \longrightarrow \cdots$$
$$\cdots \longrightarrow L_1 \oplus L'_0 \longrightarrow L_0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

(l'objet $L_0$ est le composant de degré 0 de $c(m)$ ). La cohomologie de $c(m)$ est nulle en degré différent de $-1$ , et égale à $X$ en degré $-1$ . Le morphisme $L_n \longrightarrow L_n \oplus Z_{n-1}$ dont la matrice est de la forme $\begin{pmatrix} \mathsf{id} \\ * \end{pmatrix}$ admet une retraction. Il existe donc un morphisme $v : Z_{n-1} \longrightarrow L_{n-1} \oplus L'_{n-2}$ tel que le complexe :

$$\cdots 0 \to 0 \to Z_{n-1} \xrightarrow{v} L_{n-1} \oplus L'_{n-2} \to \cdots \to L_1 \oplus L'_0 \to L_0 \to 0 \to \cdots$$

soit quasi-isomorphe au complexe $c(m)$ . D'autre part, le noyau du morphisme $L_1 \oplus L'_0 \longrightarrow L_0$ est, d'après la propriété $(E_4)$, un élément de $M$. Désignons par $L''_1$ ce noyau. Le complexe :

$$0 \to 0 \to Z_{n-1} \to L_{n-1} \oplus L'_{n-2} \to \cdots \to L_2 \oplus L'_1 \to L''_1 \to X \to 0 \cdots$$

est donc acyclique. On a ainsi construit une résolution de longueur $n-1$ de l'objet $X$ et, par suite, $M\text{-}\dim(X) \leq n-1$ . Par ailleurs, il est clair que $M\text{-}\dim(X) \geq M\text{-}\dim(Y) - 1$. Ceci achève la démonstration du lemme (2.2.6) et de la proposition (2.2.7).

### 2.3. Quelques lemmes sur les résolutions.

**Proposition 2.3.1.** [**22**] a) *Soit $M$ un ensemble d'objets de $\mathcal{A}$ possédant les propriétés $(E_1)$, $(E_2)$ et $(E_3)$ (2.2.1). Soient $Y \in \mathsf{Ob}\ \mathsf{comp}^-(\mathcal{A})$ un complexe dont les composants appartiennent à $M^\wedge$ (2.2.1) et $m : X \longrightarrow Y$ un quasi-isomorphisme. Il existe un complexe $L^\bullet \in \mathsf{Ob}\ \mathsf{comp}^-(\mathcal{A})$ dont les composants appartiennent à $M$ et un quasi-isomorphisme $w : L^\bullet \longrightarrow X$ .*

b) *Réciproquement, soit $M$ un ensemble d'objets de $\mathcal{A}$ possédant la propriété $(E_1)$. Supposons que pour tout complexe $Y \in \mathsf{Ob}\ \mathsf{comp}^-(\mathcal{A})$ dont les composants sont des éléments de $M$, et pour tout quasi-isomorphisme $m : X \longrightarrow Y$, il existe un complexe $L^\bullet$ dont les composants appartiennent à $M$ et un quasi-isomorphisme $w : L^\bullet \longrightarrow X$. Alors l'ensemble $M$ possède les propriétés $(E_2)$ et $(E_3)$.*

Démontrons $a$). Tout d'abord, il existe un complexe $X' \in \mathsf{Ob}\ \mathsf{comp}^-(\mathcal{A})$ et un quasi-isomorphisme $X' \longrightarrow X$ (1.2.1). On peut donc se ramener au cas où $X$ est un objet de $\mathsf{comp}^-(\mathcal{A})$ . D'après (2.1.4) et (2.1.5), il existe une suite de morphismes :

$$u_n : X_n \longrightarrow X_{n-1} \quad , \quad n \in \mathbb{Z} \ ,$$

où les $X_n$ sont des objets de $\mathsf{comp}^-(\mathcal{A})$, les $u_n$ des morphismes élémentaires de hauteur $-n$ et un diagramme commutatif à homotopie près :

$$\begin{tikzcd} \varprojlim\limits_n X_n \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "m"] \\ \varinjlim\limits_n X_n \arrow[r, "\sim"] & Y \end{tikzcd}$$

Pour démontrer la proposition, on peut donc supposer que $X = \varprojlim\limits_n X_n$ et que $X_n = Y$, $u_n =$ identité, pour $n$ assez petit. Nous allons construire par récurrence sur $n$ :

$a$) Une suite de morphismes élémentaires :

$$v_n : L_n^\bullet \longrightarrow L_{n-1}^\bullet \quad , \quad n \in \mathbb{Z} \; , \quad v_n \text{ élémentaire de hauteur } -n \, .$$

$b$) Une suite de morphismes :

$$w_n : L_n^\bullet \longrightarrow X_n$$

tels que :

1) Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ les composants de degré $i$, $i \geq -n$, de $L_n^\bullet$ soient des éléments de $M$ et les composants de degré $i$, $i < -n$, soient des éléments de $M^\wedge$.

2) Les diagrammes ci-après, soient commutatifs :

$$\begin{tikzcd} L_n^\bullet \arrow[r, "w_n"] \arrow[d, "v_n"'] & X_n \arrow[d, "u_n"] \\ L_{n-1}^\bullet \arrow[r, "w_{n-1}"] & X_{n-1} \end{tikzcd} \qquad \forall n \in \mathbb{Z} \quad .$$

3) L'objet $L_n^\bullet$ soit égal à $Y$ et les morphismes $v_n$ et $w_n$ soient l'identité pour $n$ assez petit.

Ceci étant fait, il suffira de poser $L^\bullet = \varprojlim_n L_n^\bullet$, $w = \varprojlim_n w_n$. Pour $n$ suffisamment petit, on pose $L_n = Y$, $v_n = \mathsf{id}_Y$ et $w_n = \mathsf{id}_Y$. Supposons que l'on ait construit pour tout entier $n < q$, $q \in \mathbb{Z}$, des complexes $L_n^\bullet$ et des morphismes $v_n$ et $w_n$ possédant les propriétés 1), 2) et 3) ci-dessus. Le complexe $X_n$ est de la forme :

$$X_n = \cdots \longrightarrow Y^{-n-2} \longrightarrow Z^{-n-1} \longrightarrow X^{-n} \longrightarrow X^{-n+1} \longrightarrow \cdots$$

et le complexe $L_n^\bullet$ est de la forme :

$$L_n^\bullet = \cdots \longrightarrow Y^{-n-2} \longrightarrow Z'^{-n-1} \longrightarrow L^{-n} \longrightarrow L^{-n+1} \longrightarrow \cdots \quad ,$$

où les $Y^i$ (resp. les $X^i$) sont les composants du complexe $Y$ (resp. $X$). On a donc un diagramme :

$$\begin{tikzcd} & X^{-q} \arrow[d, "(u_q)^{-q}"] \\ Z'^{-q} \arrow[r, "(w_{q-1})^{-q}"] & Z^{-q} \end{tikzcd} \quad ,$$

où $(u_q)^{-q}$ est un épimorphisme et où $Z'^{-q} \in M^\wedge$. Comme l'ensemble $M^\wedge$ possède la propriété $(E_2)$ (2.2.4), on peut compléter ce diagramme en un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} L^{-q} \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\alpha"'] & X^{-q} \arrow[d, "(u_q)^{-q}"] \\ Z'^{-q} \arrow[r, "(w_{q-1})^{-q}"] & Z^{-q} \end{tikzcd} \quad ,$$

où le morphisme $\alpha$ est un épimorphisme et l'objet $L^{-q}$ un élément de $M$. On en déduit, en utilisant les notations (2.1.1.2) et (2.1.1.3), un diagramme commutatif de complexes :

$$\begin{tikzcd} L_{q-1}^\bullet(\alpha, -q) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "p(\alpha,-q)"'] & X_{q-1}((u_q)^{-q}, -q) \simeq X_q \arrow[d, "p((u_q)^{-q},-q) \simeq u_q"] \\ L_{q-1}^\bullet \arrow[r, "w_{q-1}"] & X_{q-1} \end{tikzcd} \quad .$$

Posons alors $L_q^\bullet = L_{q-1}^\bullet(\alpha, -q)$, $w_q = \varphi$, $v_q = p(\alpha, -q)$. Les complexes $L_n^\bullet$ et les morphismes de complexes $w_n$ et $v_n$, $n \leq q$, possèdent les propriétés 2) et 3). Il reste à montrer que $L_q^\bullet$ possède la propriété 1) ci-dessus. Ceci résulte du fait que l'ensemble $M^\wedge$ est exact $(E_6)$ (2.2.4).

Démontrons $b$). Soient $L$ un élément de $M$ et $u : X \longrightarrow L$ un épimorphisme. Désignons par $Y$ le noyau de $u$. On a un quasi-isomorphisme :

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r] \arrow[d, "u"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & L \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd} .$$

Par suite, on a un quasi-isomorphisme :

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & L^{-1} \arrow[r] \arrow[d] & L^0 \arrow[r] \arrow[d, "v"] & L^1 \arrow[r] \arrow[d] & L^2 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & Y \arrow[r] & X \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd} ,$$

où les $L^i$ sont des éléments de $M$. Par suite, le morphisme $uv$ est un épimorphisme, ce qui démontre la propriété $(E_2)$. Soit maintenant :

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{u} L_n \longrightarrow L_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow L_0 \longrightarrow 0$$

une suite exacte, où les $L_i$ sont des éléments de $M$. On a alors un quasi-isomorphisme :

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r] \arrow[d, "u"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & L_n \arrow[r] & L_{n-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & L_0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd} .$$

Il existe par suite un quasi-isomorphisme :

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & L^{-n-1} \arrow[r] \arrow[d] & L^{-n} \arrow[r] \arrow[d, "v"] & L^{-n+1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & X \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

et par suite $v$ est un épimorphisme, ce qui démontre la propriété $(E_3)$ et achève la démonstration de la proposition.

**Proposition 2.3.2.** *Soit $M$ un ensemble d'objets de $\mathcal{A}$ possédant les propriétés $(E_1)$, $(E_2)$ et $(E_3)$. Soit $Y \in \mathsf{Ob\ comp}(\mathcal{A})$ un complexe tel que pour tout entier $n$, $\mathsf{H}^n(Y) \in M$ et tel qu'il existe un entier $n_0$ tel que $\mathsf{H}^n(Y) = 0$, pour $n \geq n_0$. Il existe alors un complexe $X \in \mathsf{Ob\ comp}^-(\mathcal{A})$ dont les composants sont des éléments de $M$ et un quasi-isomorphisme :*

$$u : X \longrightarrow Y \quad .$$

Tout d'abord, il existe (1.2.1) un complexe $Y' \in \mathsf{Ob\ comp}^-(\mathcal{A})$ et un quasi-isomorphisme $Y' \longrightarrow Y$. On peut donc se ramener au cas où $Y$ est un objet de $\mathsf{comp}^-(\mathcal{A})$. Nous allons construire par récurrence sur $n$, une suite de morphismes :

$$u_n : X_n \longrightarrow X_{n-1}$$

possédant les propriétés suivantes :

1) Pour $n$ assez petit $X_n = Y$ et $u_n =$ identité.

2) Les composants de degré $i \geq -n$ du complexe $X_n$ sont des éléments de $M$. Les noyaux et images des différentielles de degré $i \geq -n$ de $X_n$ sont des éléments de $M^\wedge$ (2.1.1).

3) Le morphisme $u_n$ est un quasi-isomorphisme. Il est isomorphe au morphisme $p((u_n)^{-n}, -n)$ (2.1.1.3).

Ceci fait, il suffit de poser $X = \varprojlim_n X_n$ et de prendre pour morphisme $u$ le morphisme canonique :

$$u : X = \varprojlim_n X_n \longrightarrow \varinjlim_n X_n = Y \quad .$$

Pour $n$ assez petit, on pose $X_n = Y$ et $u_n = \mathsf{id}_Y$. Supposons que l'on ait construit pour tout entier $n < q$ des complexes $X_n$ et des morphismes $u_n$ possédant les propriétés 1), 2) et 3) ci-dessus. Le complexe $X_{q-1}$ est de la forme :

$$X_{q-1} = \cdots \longrightarrow Y^{-q-2} \longrightarrow Y^{-q-1} \longrightarrow Z^{-q} \longrightarrow L^{-q+1} \longrightarrow L^{-q+2} \longrightarrow \cdots \quad ,$$

où les $Y^i$ sont les composants du complexe $Y$ et les $L^i$ sont des éléments de $M$. On a alors un épimorphisme :

$$Z^{-q} \longrightarrow Z^{-q}/\,\mathsf{Im}(Y^{-q-1} \longrightarrow Z^{-q}) \longrightarrow 0$$

et des suites exactes :

$$0 \to \mathsf{H}^{-q}(X_{q-1}) \to Z^{-q}/\,\mathsf{Im}(Y^{-q-1} \to Z^{-q}) \to Z^{-q}/\,\mathsf{Ker}(Z^{-q} \to L^{-q+1}) \to 0\ ,$$

$$0 \to Z^{-q}/\,\mathsf{Ker}(Z^{-q} \to L^{-q+1}) \to L^{-q+1} \to L^{-q+1}/\,\mathsf{Im}(Z^{-q} \to L^{-q+1}) \to 0\ ,$$

$$0 \to \mathsf{H}^{-q+1}(X_{q-1}) \to L^{-q+1}/\,\mathsf{Im}(Z^{-q} \to L^{-q+1}) \to L^{-q+1}/\,\mathsf{Ker}(L^{-q+1} \to L^{-q+2}) \to 0.$$

Le complexe $X_{q-1}$ étant quasi-isomorphe au complexe $Y$, les objets $\mathsf{H}^i(X_{q-1})$ sont des éléments de $M$. Il résulte alors des suites exactes écrites ci-dessus, de l'hypothèse de récurrence 2), et des propriétés d'exactitude de l'ensemble $M^\wedge$ (2.2.4), que l'objet $Z^{-q}/\ \mathsf{Im}(Y^{-q-1} \longrightarrow Z^{-q})$ est un élément de $M^\wedge$. Par suite, il existe un morphisme :

$$v : L^{-q} \longrightarrow Z^{-q}$$

tel que $L^{-q}$ soit un élément de $M$ et que le morphisme composé :

$$L^{-q} \xrightarrow{v} Z^{-q} \longrightarrow Z^{-q}/\,\mathsf{Im}(Y^{-q-1} \longrightarrow Z^{-q})$$

soit un épimorphisme. Posons alors :

$$X_q = X_{q-1}(v, -q) \quad ,$$
$$u_q = p(v, -q) \qquad\qquad (2.1.1).$$

Il résulte de (2.1.2) que $u_q$ est un quasi-isomorphisme, d'où la propriété 3). Il reste à vérifier la propriété 2), *i.e.* à vérifier que le noyau et l'image du morphisme $L^{-q} \longrightarrow L^{-q+1}$ sont des éléments de $M^\wedge$ ; ce qui résulte immédiatement des suites exactes :

$$0 \longrightarrow \mathsf{Im}(L^{-q} \longrightarrow L^{-q+1}) \longrightarrow \mathsf{Ker}(L^{-q+1} \longrightarrow L^{-q+2}) \longrightarrow \mathsf{H}^{-q+1}(X_q) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \mathsf{Ker}(L^{-q} \longrightarrow L^{-q+1}) \longrightarrow L^{-q} \longrightarrow \mathsf{Im}(L^{-q} \longrightarrow L^{-q+1}) \longrightarrow 0 \quad .$$

Ceci achève la preuve de la proposition.

**Proposition 2.3.3.** *Soient $M \subset M'$ deux ensembles d'objets de $\mathcal{A}$ tels que $M$ possède les propriétés $(E_4)$ et $(E_5)$, que $M'$ possède les propriétés $(E_1)$ et $(E_4)$ et que tout objet de $M'$ soit quotient d'un objet $M$. Soit $Y \in \mathsf{Ob\ comp}(\mathcal{A})$ un complexe tel que :*

1) *Les composants $Y^i$, $i \in \mathbb{Z}$, de $Y$ soient des éléments de $M'$.*

2) *La suite* $i \mapsto i - M\text{-}\dim(Y^i)$ *tende vers* $+\infty$ , *quand* $i$ *tend vers* $+\infty$ .

*Il existe alors un complexe* $X \in \mathsf{Ob}\ \mathsf{comp}(\mathcal{A})$ *dont les composants sont des éléments de* $M$ *et un quasi-isomorphisme :*

$$u : X \longrightarrow Y \quad .$$

*Si on suppose de plus que tous les composants de* $Y$ *sont de* $M$*-dimension finie et que* $Y \in \mathsf{Ob}(\mathsf{comp}^b(\mathcal{A}))$ (resp. $\mathsf{Ob}(\mathsf{comp}^+(\mathcal{A}))$ ), *on peut alors prendre* $X$ *dans* $\mathsf{comp}^b(\mathcal{A})$ (resp. $\mathsf{comp}^+(\mathcal{A})$ ).

Soit $n_0$ un entier tel que $i > n_0 \Rightarrow M\text{-}\dim(Y^i) < +\infty$ . On se propose de construire :

$a$) Une suite de complexes $X_i$ , $i \geq n_0$ .

$b$) Une suite de morphismes $u_i : X_i \longrightarrow X_{i-1}$ , $i > n_0$ , $u_{n_0} : X_{n_0} \longrightarrow Y$, tels que :

$1)_i$ $(X_i)^j \in M$, pour $j \leq i$ .

$2)_i$ $(X_i)^j = Y^j$, pour $j > i$ .

$3)_i$ Le morphisme $u_i$ soit un quasi-isomorphisme.

$4)_i$ $(u_i)^j =$ identité, pour $j > i$ .

$5)_i$ $(u_i)^j =$ identité, pour $j \leq i - M\text{-}\dim(Y^i)$ ; cette dernière propriété n'étant vraie que pour $i > n_0$ .

Cette construction étant faite, remarquons que le système projectif $X_i$ admet une limite projective dans $\mathsf{comp}(\mathcal{A})$ : les systèmes projectifs induits sur les composants de degré donné sont stationnaires, car $i - M\text{-}\dim(Y^i)$ tend vers $+\infty$ avec $i$ . Il suffira de poser alors $X = \varprojlim\limits_i X_i$ et de prendre pour $u : X \longrightarrow Y$ le morphisme canonique. Les composants du complexe $X$ sont des éléments de $M$ et le morphisme $u$ est un quasi-isomorphisme.

Construisons tout d'abord le morphisme $u_{n_0} : X_{n_0} \longrightarrow Y$ . Procédons par récurrence et supposons qu'on ait construit pour tout entier $i$ , $-n_0 \leq i < q$ , des complexes $X_{n_0,i}$ et des morphismes $v_{n_0,i} : X_{n_0,i} \longrightarrow X_{n_0,i-1}$ , $i > -n_0$ , et $v_{n_0,-n_0} : X_{n_0,-n_0} \longrightarrow Y$, tels que :

$I)_{n_0,i}$ Les composants $(X_{n_0,i})^j$ soient des éléments de $M$, pour $-i \leq j \leq n_0$.

$II)_{n_0,i}$ Les composants $(X_{n_0,i})^j$ soient des éléments de $M'$, pour tout entier $j$.

$III)_{n_0,i}$ Le morphisme $v_{n_0,i}$ soit un morphisme élémentaire de hauteur $-i$ (2.1.3).

Le complexe $X_{n_0,q-1}$ est alors de la forme :

$$\cdots \to Y^{-q-1} \to Z^{-q} \to L^{-q+1} \to L^{-q+2} \cdots \to L^{n_0-1} \to L^{n_0} \to Y^{n_0+1} \to Y^{n_0+2} \to \cdots ,$$

où $Z^{-q}$ est un élément de $M'$ et les $L^j$, $-q+1 \leq j \leq n_0$, des éléments de $M$. Il existe par suite un épimorphisme :

$$\alpha : L^{-q} \longrightarrow Z^{-q} \quad , \quad \text{où} \quad L^{-q} \in M \quad .$$

Posons alors :

$$X_{n_0,q} = X_{n_0,q-1}(\alpha, -q) \quad ,$$

$$v_{n_0,q} = p(\alpha, -q) \qquad (2.1.1).$$

Il est clair que par construction on a les propriétés $I)_{n_0,q}$ et $III)_{n_0,q}$. La propriété $II)_{n_0,q}$ résulte de ce que l'ensemble $M'$ possède les propriétés $(E_1)$ et $(E_4)$. On peut donc poursuivre la construction des $X_{n_0,i}$. En posant $X_{n_0} = \varprojlim_i X_{n_0,i}$ et en prenant pour $u_{n_0} : X_{n_0} \longrightarrow Y$ le morphisme canonique, on obtient un complexe et un morphisme qui possèdent les propriétés $1)_{n_0}$, $2)_{n_0}$, $3)_{n_0}$, $4)_{n_0}$.

Pour construire alors les complexes $X_i$ et les morphismes $u_i : X_i \to X_{i-1}$, nous procédons par récurrence. Supposons donc qu'on ait construit pour tout entier $i$, $n_0 \leq i < q$, des complexes $X_i$ et des morphismes $u_i : X_i \longrightarrow X_{i-1}$ possédant les propriétés $1)_i$, $2)_i$, $3)_i$, $4)_i$, $5)_i$, $n_0 \leq i < q$. Il s'agit de construire un complexe $X_q$ et un morphisme $u_q : X_q \longrightarrow X_{q-1}$ tels que l'on ait les propriétés $1)_q$, $2)_q$, $3)_q$, $4)_q$, $5)_q$. Tout d'abord, si $Y^q \in M$, on pose $X_q = X_{q-1}$ et $u_q =$ identité. Supposons que $Y^q$ ne soit pas un élément de $M$, *i.e.* que $M\text{-}\dim(Y^q) > 0$. Pour construire le complexe $X_q$ et le morphisme $u_q : X_q \longrightarrow X_{q-1}$, nous procédons à nouveau par récurrence. Soit $r$ un entier tel que $-q < r \leq -q + M\text{-}\dim(Y^q)$. Supposons qu'on ait déterminé une suite de complexes $X_{q,l}$, $-q < l < r$, et de morphismes $v_{q,l} : X_{q,l} \longrightarrow X_{q,l-1}$ (on pose $X_{q,-q} = X_{q-1}$) tels que :

$I')_l$ $(X_{q,l})^j = (X_{q,l-1})^j$, pour tout $j \neq -l, -l+1$.

$II')_l$ $(X_{q,l})^{-l} \in M'$ et $M\text{-}\dim((X_{q,l})^{-l}) = M\text{-}\dim(Y^q) - l - q$.

$III')_l$ $(X_{q,l})^{-l+1} \in M$.

$IV')_l$ $v_{q,l}$ soit un morphisme élémentaire de hauteur $-l+1$ et $(v_{q,l})^j =$ identité, pour $j \neq -l, -l+1$.

Le complexe $X_{q,r-1}$ est alors de la forme :

$$\cdots \to L^{-r} \longrightarrow Z^{-r+1} \longrightarrow L^{-r+2} \longrightarrow \cdots \longrightarrow L^q \longrightarrow Y^{q+1} \longrightarrow Y^{q+2} \to \cdots ,$$

où les $L^i$ sont des éléments de $M$ et où $Z^{-r+1}$ est un élément de $M'$ tel que $M\text{-}\dim(Z^{-r+1}) = M\text{-}\dim(Y^q) - r + 1 - q$. Il existe donc un épimorphisme

$\alpha : L^{-r+1} \longrightarrow Z^{-r+1}$, où $L^{-r+1}$ est un objet de $M$. Posons alors $X_{q,r} = X_{q,r-1}(\alpha, -r+1)$ et $v_{q,r} = p(\alpha, -r+1)$ (2.1.1). Il est clair que $X_{q,r}$ et $v_{q,r}$ possèdent les propriétés $I')_r$ , $III')_r$ , $IV')_r$ . De plus, par définition du complexe $X_{q,r}$ (2.1.1), on a une suite exacte :

$$0 \longrightarrow (X_{q,r})^{-r} \longrightarrow L^{-r} \oplus L^{-r+1} \longrightarrow Z^{-r+1} \longrightarrow 0 \quad .$$

Il résulte alors de la propriété $(E_4)$ que $(X_{q,r})^{-r}$ est un élément de $M'$ et de (2.2.6) que :

$$M\text{-}\dim((X_{q,r})^{-r}) = M\text{-}\dim(Z^{-r+1}) - 1 = M\text{-}\dim(Y^q) - r - q \quad ,$$

d'où la propriété $II')_r$ . On peut donc poursuivre la construction. Posons alors $X_{q,-q+M\text{-}\dim(Y^q)} = X_q$ et désignons par $u_q : X_q \longrightarrow X_{q-1}$ le morphisme obtenu en composant les $v_{q,l}$ . Il est clair que $X_q$ et $u_q$ possèdent les propriétés $1)_q$ , $2)_q$ , $3)_q$ , $4)_q$ , $5)_q$ . Ceci achève la démonstration de la première assertion de la proposition. Pour démontrer la deuxième assertion, il suffit de remarquer que sous les hypothèses supplémentaires, on peut prendre dans la construction précédente $X_{n_0} = Y$, pour un $n_0$ convenable.

**Remarque 2.3.4.** Dans la construction du complexe $X_{n_0}$ (*cf.* démonstration de la proposition (2.3.3)), nous avons en fait démontré le résultat suivant : soit $M \subset M'$ deux ensembles d'objets de $\mathcal{A}$ tels que $0 \in M$, $M'$ possède les propriétés $(E_1)$ et $(E_4)$ et que tout objet de $M'$ soit quotient d'un objet de $M$. Soit $Y \in \mathsf{Ob}\ \mathsf{comp}^-(\mathcal{A})$ un complexe dont tous les composants sont des éléments de $M'$. Il existe un complexe $X \in \mathsf{Ob}\ \mathsf{comp}^-(\mathcal{A})$ dont tous les composants sont des éléments de $M$ et un quasi-isomorphisme $u : X \longrightarrow Y$.

**2.3.5.** Nous laissons au lecteur le soin d'énoncer les résultats qu'on obtient en appliquant les résultats de ce numéro à la catégorie opposée à $\mathcal{A}$. On dit qu'un ensemble $M$ d'objets de $\mathcal{A}$ possède la propriété $(E_i)^\circ$, $1 \leq i \leq 6$, si l'ensemble $M$ d'objets de $\mathcal{A}^\circ$ possède la propriété $(E_i)$ de (2.2.1).

### 2.4. Applications.

**Proposition 2.4.1.** a) *Soient $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne et $M$ un ensemble d'objets de $\mathcal{A}$ possédant la propriété $(E_1)$* (2.2.1). *La catégorie* $\mathsf{K}^-(M)$ (1.1.4) *est* $\mathsf{Ac}(\mathcal{A})$*-localisante à gauche* (chap. II, 2.3.5) *si et seulement si l'ensemble $M$ possède les propriétés $(E_2)$ et $(E_3)$.*

b) *Soient $M$ un ensemble d'objets possédant les propriétés $(E_1)$, $(E_2)$ et $(E_3)$ et $M^\wedge$ l'ensemble associé à $M$, défini en* (2.2.1). *Le foncteur naturel :*

$$\mathsf{K}^-(M)/\,\mathsf{Ac}^-(M) \longrightarrow \mathsf{K}^-(M^\wedge)/\,\mathsf{Ac}^-(M^\wedge)$$

*est une équivalence de catégories. Le foncteur naturel :*

$$\mathsf{K}^-(M^\wedge)/\,\mathsf{Ac}^-(M^\wedge) \longrightarrow \mathsf{D}^-(\mathcal{A})$$

*est pleinement fidèle. Les objets de* $\mathsf{D}^-(\mathcal{A})$ *dont les objets de cohomologie sont des éléments de* $M^\wedge$ *sont isomorphes à des objets de* $\mathsf{K}^-(M^\wedge)/\,\mathsf{Ac}^-(M^\wedge)$*, où* $\mathsf{Ac}^-(M)$ *et* $\mathsf{Ac}^-(M^\wedge)$ *désignent les catégories des complexes acycliques dont les composants sont des éléments de* $M$ *et* $M^\wedge$ *respectivement.*

Cette proposition résulte immédiatement de (2.3.1), (2.3.2) et de (chap. II, 2.3.5).

**Corollaire 2.4.2.** *Soit* $\mathbf{U}$ *un univers. On suppose que la catégorie* $\mathcal{A}$ *est une* $\mathbf{U}$*-catégorie,* i.e. *que pour tout couple* $Y$ *et* $Z$ *d'objets de* $\mathcal{A}$*,* $\mathsf{Hom}_{\mathcal{A}}(Y,Z)$ *est un élément de* $\mathbf{U}$*, et que les sommes directes indexées par des éléments de* $\mathbf{U}$ *sont représentables dans* $\mathcal{A}$*. Soient* $(X_i)_{i\in I\in\mathbf{U}}$ *une famille de générateurs de* $\mathcal{A}$ *et* $M$ *l'ensemble des objets de* $\mathcal{A}$ *de la forme* $\coprod_{j\in J\in\mathbf{U}} X_j$*, où les* $X_j$ *sont des éléments de l'ensemble* $\bigcup_{i\in I}\{X_i\}$*. Alors le foncteur naturel :*

$$\mathsf{K}^-(M)/\,\mathsf{Ac}^-(M) \longrightarrow \mathsf{D}^-(\mathcal{A})$$

*est une équivalence de catégories.*

Résulte immédiatement de (2.4.1).

**Proposition 2.4.3.** *Soient* $\mathcal{A}$ *une catégorie abélienne et* $M$ *un ensemble d'objets de* $\mathcal{A}$ *possédant les propriétés* $(E_4)$ *et* $(E_5)$ *tel que tout objet de* $\mathcal{A}$ *soit quotient d'un élément de* $M$ *et tel qu'il existe un entier* $n\in\mathbb{N}$ *majorant la* $M$*-dimension de tout objet* $X$ *de* $\mathcal{A}$*.*

a) *La catégorie* $\mathsf{K}^*(M)$ *est* $\mathsf{Ac}^*(\mathcal{A})$*-localisante à gauche* ($* = -$ , $+$ , $b$ , "vide").

b) *Le foncteur naturel :*

$$\mathsf{K}^*(M)/\,\mathsf{Ac}^*(M) \longrightarrow \mathsf{D}^*(\mathcal{A})$$

*est une équivalence de catégories.*

Paraphrase la proposition (2.3.3) ($* = +$ , $b$ , "vide"), ou la proposition (2.3.1) ($* = -$).

**Proposition 2.4.4.** *On désigne par* $Q^* : \mathsf{K}^*(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathsf{D}^*(\mathcal{A})$ *le foncteur canonique.*

a) *Soit* $X$ *un objet de* $\mathcal{A}$*. L'objet* $X$ *est* $Q$*-libre à gauche* (chap. II, 2.3.2) *si et seulement si* $X$ *est un objet projectif de la catégorie* $\mathcal{A}$*.*

b) *Désignons par $P$ l'ensemble des objets projectifs de $\mathcal{A}$. La catégorie triangulée $\mathsf{K}^-(P)$ est une sous-catégorie de la catégorie des objets $Q$-libres à gauche. Le foncteur naturel :*

$$\mathsf{K}^-(P) \longrightarrow \mathsf{D}(\mathcal{A})$$

*est pleinement fidèle.*

c) *Si tout objet de $\mathcal{A}$ est quotient d'objet projectif* (resp. *et si de plus il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ qui majore la dimension projective des objets de $\mathcal{A}$*), *alors :*

1) *Le foncteur naturel $\mathsf{K}^-(P) \longrightarrow \mathsf{D}^-(\mathcal{A})$* (resp. $\mathsf{K}^*(P) \longrightarrow \mathsf{D}^*(\mathcal{A})$) *est une équivalence de catégories. On désigne par $L^- : \mathsf{D}^-(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathsf{K}^-(P)$* (resp. $L^* : \mathsf{D}^*(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathsf{K}^*(P)$) *un foncteur quasi-inverse.*

2) *Le foncteur $L^-Q^- : \mathsf{K}^-(\mathcal{A}) \to \mathsf{K}^-(P)$* (resp. $L^*Q^* : \mathsf{K}^*(\mathcal{A}) \to \mathsf{K}^*(P)$) *est adjoint à droite au foncteur d'inclusion :*

$$\mathsf{K}^-(P) \longrightarrow \mathsf{K}^-(\mathcal{A}) \qquad (\text{resp.} \quad \mathsf{K}^*(P) \to \mathsf{K}^*(\mathcal{A}) \quad ).$$

*Le morphisme d'adjonction $\mathsf{id}_{\mathsf{K}^-(\mathcal{A})} \longrightarrow L^-Q^-$* (resp. $\mathsf{id}_{\mathsf{K}^*(\mathcal{A})} \longrightarrow L^*Q^*$) *est un "quasi-isomorphisme".*

3) *Le foncteur $L^-$* (resp. $L^*$) *est un adjoint à gauche au foncteur $Q^-$* (resp. $Q^*$).

4) *Un objet de $\mathsf{K}^-(\mathcal{A})$* (resp. $\mathsf{K}^*(\mathcal{A})$) *est $Q$-libre à gauche si et seulement s'il est isomorphe à un objet de $\mathsf{K}^-(P)$* (resp. $\mathsf{K}^*(P)$).

Démontrons $a$). Pour tout objet $Y$ de $\mathcal{A}$, on a : $\mathsf{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{A})}(X, Y[n]) = 0$, pour $n \neq 0$, et par suite, comme $X$ est $Q$-libre à gauche (chap. II, 2.3.3), on a :

$$\mathsf{Hom}_{\mathsf{D}(\mathcal{A})}(X, Y[n]) = 0 \quad , \quad \text{pour } n \neq 0 \quad .$$

Par ailleurs, on a $\mathsf{Hom}_{\mathsf{D}(\mathcal{A})}(X, Y) = \mathsf{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$ (1.2.9). Soit alors :

$$S = \; 0 \longrightarrow Y' \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Y'' \longrightarrow 0$$

une suite exacte de $\mathcal{A}$. Le foncteur cohomologique canonique $\mathsf{comp}(\mathcal{A}) \to \mathsf{D}(\mathcal{A})$ (1.3.2) fournit un triangle distingué $\big(Y', Y, Y'', [u], [v], \delta(S)\big)$. D'où, une suite exacte (chap. II, 1.2.1) :

$$\cdots \to 0 \to \mathsf{Hom}_{\mathsf{D}(\mathcal{A})}(X, Y') \to \mathsf{Hom}_{\mathsf{D}(\mathcal{A})}(X, Y) \to \mathsf{Hom}_{\mathsf{D}(\mathcal{A})}(X, Y'') \to 0 \to \cdots ,$$

*i.e.* une suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y') \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y'') \longrightarrow 0 \quad ,$$

ce qui montre que $X$ est un objet projectif de $\mathcal{A}$.

Démontrons $b$). Soient $L^\bullet$ un complexe de type projectif objet de $\mathsf{K}^-(\mathcal{A})$ et $u : L^\bullet \longrightarrow Y$ un morphisme dans un complexe acyclique. Supposons qu'on ait construit pour tout entier $i > n$, un morphisme $s^i : L^i \longrightarrow Y^{i-1}$ tel que $u^i = d_Y^{i-1}s^i + s^{i+1}d^i_{L^\bullet}$ (une telle construction est toujours possible pour $n$ suffisamment grand car $L^\bullet$ est un objet de $\mathsf{K}^-(\mathcal{A})$). On en déduit que $d^n_Y(u^n - s^{n+1}d^n_{L^\bullet}) = 0$ et, par suite, le morphisme $u^n - s^{n+1}d^n_{L^\bullet}$ se factorise par $\mathsf{Ker}(d^n_Y)$. Le complexe $Y$ étant acyclique, le morphisme $Y^{n-1} \longrightarrow \mathsf{Ker}(d^n_Y)$ est un épimorphisme et l'objet $L^n$ étant projectif, il existe un morphisme $s^n : L^n \longrightarrow Y^{n-1}$ tel que $d_Y^{n-1}s^n = u^n - s^{n+1}d^n_{L^\bullet}$. On démontre ainsi par récurrence qu'il existe, pour tout entier $i$, un morphisme $s^i$ tel que $u^i = d_Y^{i-1}s^i + s^{i+1}d^n_{L^\bullet}$. Le morphisme $u$ est donc homotope à zéro. On en déduit par (chap. II, 2.3.3) que l'objet $L^\bullet$ est un objet $Q$-libre à gauche. La dernière assertion de $b$) résulte alors de (chap. II, 2.3.3).

Démontrons $c$). L'assertion 1) résulte immédiatement de $b$) et de (2.3.1). Pour démontrer l'assertion 1) sous la forme resp., montrons d'abord que tout complexe de type projectif est $Q$-libre à gauche. Soit $L^\bullet$ un complexe de type projectif et $u : X \longrightarrow L^\bullet$ un quasi-isomorphisme. Il suffit de montrer que $u$ admet une section (chap. II, 2.3.3). Il suffit donc de montrer qu'il existe un complexe de type projectif $L'^\bullet$ et un quasi-isomorphisme $v : L'^\bullet \longrightarrow X$ tel que le morphisme composé $uv : L'^\bullet \longrightarrow L^\bullet$ soit un isomorphisme de $\mathsf{K}(\mathcal{A})$. D'après (2.3.3), il existe toujours un complexe $L'^\bullet$ de type projectif et un quasi-isomorphisme $v : L'^\bullet \longrightarrow X$. Tout revient donc à montrer qu'un quasi-isomorphisme $uv : L'^\bullet \longrightarrow L^\bullet$ est un isomorphisme. Or il existe un triangle distingué $(L'^\bullet, L^\bullet, L''^\bullet, uv, w, m)$, où $L''^\bullet$ est un complexe de type projectif acyclique. Tout revient donc à montrer que les complexes acycliques de type projectif sont homotopes à zéro. Soit donc $L''^\bullet$ un complexe acyclique de type projectif. Comme la dimension projective des objets de $\mathcal{A}$ est majorée, les noyaux des différentielles de $L''^\bullet$ sont des projectifs (2.2.6). On en déduit que toutes les différentielles de $L''^\bullet$ sont des morphismes décomposables (chap. II, 1.2.8) et, par suite, que $L''^\bullet$ est homotope à zéro.

Il résulte alors de (chap. II, 2.3.3) que le foncteur naturel $\mathsf{K}^*(P) \to \mathsf{D}(\mathcal{A})$ est pleinement fidèle. Par suite, le foncteur $\mathsf{K}^*(P) \longrightarrow \mathsf{D}^*(\mathcal{A})$ est pleinement fidèle. D'après (2.3.3), ce foncteur est aussi essentiellement surjectif ; il est par suite une équivalence de catégorie. Les assertions 2) et 3) ne sont alors que des applications directes de (chap. II, 2.3.3). L'assertion 4) est alors évidente : un objet $Q$-libre à gauche de $\mathsf{K}^-(\mathcal{A})$ (resp. de $\mathsf{K}^*(\mathcal{A})$) admet, d'après (2.3.1) (resp. (2.3.3)), une résolution à gauche par un complexe de type projectif de $\mathsf{K}^-(\mathcal{A})$ (resp. $\mathsf{K}^*(\mathcal{A})$), et un quasi-isomorphisme entre objets $Q$-libres à gauche est un isomorphisme de $\mathsf{K}(\mathcal{A})$.

**Remarque 2.4.5.** *a*) Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne dont tous les objets soient isomorphes à des quotients d'objets projectifs. Un complexe de type projectif n'est pas nécessairement $Q$-libre à gauche.

*Exemple* : Soit $\mathcal{A}$ la catégorie des $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$-modules. Le complexe :

$$\cdots \longrightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \longrightarrow \cdots$$

dont toutes les différentielles sont la multiplication par 2 est acyclique et de type projectif. Il n'est cependant pas homotope à zéro. Le même complexe fournit un exemple de complexe acyclique de type injectif, non homotope à zéro.

*b*) Même lorsque la dimension projective des objets de $\mathcal{A}$ n'est pas bornée, il peut exister des complexes de type projectif $Q$-libres à gauche dont l'image dans $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ n'appartienne pas à $\mathsf{D}^-(\mathcal{A})$. Par exemple, un complexe projectif de Cartan-Eilenberg est un objet $Q$-libre à gauche. Plus généralement, toute somme directe d'objets $Q$-libres à gauche est $Q$-libre à gauche.

**2.4.6.** Nous laissons au lecteur le soin de formuler les énoncés qu'on obtient en appliquant les résultats de ce numéro à la catégorie opposée à la catégorie $\mathcal{A}$.