3. Étude des Ext.

Dans ce paragraphe, $\mathcal{A}$ désigne une catégorie abélienne.

3.1. Différentes définitions équivalentes.

3.1.1. On dit que la *dimension cohomologique de $\mathcal{A}$ est inférieure ou égale à n* si pour tout couple X et Y d'objets de $\mathcal{A}$ et pour tout entier $p > n$, on a $\mathsf{Ext}^p_{\mathcal{A}}(X,Y) = 0$ ((1.2.5), (1.2.9)). On appelle *dimension cohomologique de $\mathcal{A}$* et on note $\mathsf{dimcoh}(\mathcal{A})$, le plus petit des entiers n pour lesquels la dimension cohomologique de $\mathcal{A}$ est inférieure ou égale à n. S'il n'existe pas d'entier n pour lequel la dimension cohomologique de $\mathcal{A}$ soit inférieure ou égale à n, on dit que la dimension cohomologique de $\mathcal{A}$ est infinie et on écrit $\mathsf{dimcoh}(\mathcal{A}) = +\infty$.

3.1.2. Rappelons (1.1.3) qu'on désigne par Qis^* l'ensemble des quasi-isomorphismes de $\mathsf{K}^*(\mathcal{A})$ ($* = b\,, -\,, +\,,$ "vide"). Soit X un objet de $\mathsf{K}^*(\mathcal{A})$, on désigne par Qis^*/X (resp. $X\backslash\mathsf{Qis}^*$) la catégorie des quasi-isomorphismes de but X (resp. de source X) (chap. II, 2.2.1). L'ensemble Qis^* étant un système multiplicatif de morphismes, la catégorie Qis^*/X (resp. $X\backslash\mathsf{Qis}^*$) est filtrante à gauche (resp. à droite) (chap. II, 2.2.1). La catégorie Qis^*/X (resp. $X\backslash\mathsf{Qis}^*$) admet un objet initial (resp. final) $u : Y \longrightarrow X$ (resp. $u : X \longrightarrow Y$) si et seulement s'il existe un objet Q^*-libre à gauche (resp. à droite) Y et un quasi-isomorphisme $u : Y \longrightarrow X$ (resp. $u : X \longrightarrow Y$), comme on le voit immédiatement en utilisant (chap. II, 2.3.3).

Proposition 3.1.3. *Soient X et Y deux complexes de $\mathcal{A}$.*

(1) $\mathsf{Ext}^0_{\mathcal{A}}(X,Y) = \varinjlim_{(\mathsf{Qis}/X)^\circ} \mathsf{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{A})}(\,\cdot\,,Y)$.

(2) $\mathsf{Ext}^0_{\mathcal{A}}(X,Y) \simeq \varinjlim_{Y\backslash\mathsf{Qis}} \mathsf{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{A})}(X,\,\cdot\,)$.

(3) $\mathsf{Ext}^0_{\mathcal{A}}(X,Y) \simeq \varinjlim_{(\mathsf{Qis}/X)^\circ\times(Y\backslash\mathsf{Qis})} \mathsf{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{A})}(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$.

(4) $\mathsf{Ext}^n_{\mathcal{A}}(X,Y) \simeq \mathsf{Ext}^0_{\mathcal{A}}\big(X[p],Y[n+p]\big)$ *, pour tout entier p .*

(5) *Pour tout X dans $\mathsf{K}^-(\mathcal{A})$,* $\mathsf{Ext}^0_{\mathcal{A}}(X,Y) \simeq \varinjlim_{(\mathsf{Qis}^-/X)^\circ} \mathsf{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{A})}(\,\cdot\,,Y)$.

(6) *Pour tout Y dans $\mathsf{K}^+(\mathcal{A})$,* $\mathsf{Ext}^0_{\mathcal{A}}(X,Y) \simeq \varinjlim_{Y\backslash\mathsf{Qis}^+} \mathsf{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{A})}(X,\,\cdot\,)$.

(7) *Pour tout X dans $\mathsf{K}^b(\mathcal{A})$ et tout Y dans $\mathsf{K}^+(\mathcal{A})$,*

$$\mathsf{Ext}^0_{\mathcal{A}}(X,Y) \simeq \varinjlim_{(\mathsf{Qis}^b\,/X)^\circ} \mathsf{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{A})}(\,\cdot\,,Y) \quad .$$

(8) *Pour tout X dans $\mathsf{K}^-(\mathcal{A})$ et tout Y dans $\mathsf{K}^b(\mathcal{A})$,*

$$\mathsf{Ext}^0_{\mathcal{A}}(X,Y) \simeq \varinjlim_{Y\backslash\,\mathsf{Qis}^b} \mathsf{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{A})}(X,\,\cdot\,) \quad .$$

La formule (1) résulte de la définition de la catégorie localisée (chap. II, 2.2.2). La formule (2) se déduit de la formule (1), en passant à la catégorie opposée (chap. II, 2.2.4). La formule (3) se déduit alors des formules (1) et (2). La formule (4) est une définition (chap. I, 1.3.8). Les formules (5) et (6) résultent de la proposition (1.2.1), b) et $b)^{\text{bis}}$. Les formules (7) et (8) résultent de la proposition (1.2.1), c) et $c)^{\text{bis}}$.

Proposition 3.1.4. *On suppose que tout objet de la catégorie $\mathcal{A}$ est isomorphe à un sous-objet* (resp. *à un quotient*) *d'un objet injectif* (resp. *projectif*) *de $\mathcal{A}$.*

1) *Tout objet Y* (resp. X) *de $\mathsf{K}^+(\mathcal{A})$* (resp. $\mathsf{K}^-(\mathcal{A})$) *possède une résolution à droite* (resp. *à gauche*) $u : Y \longrightarrow I^\bullet$ (resp. $u : P^\bullet \longrightarrow X$) *de type injectif* (resp. *projectif*) (1.1.4).

2) *Cette résolution définit un isomorphisme :*

$$\mathsf{Ext}^0_{\mathcal{A}}(X,Y) \simeq \mathsf{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{A})}(X,I^\bullet) \quad , \quad \textit{pour tout } X \textit{ dans } \mathsf{K}(\mathcal{A})$$

(resp. $\quad \mathsf{Ext}^0_{\mathcal{A}}(X,Y) \simeq \mathsf{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{A})}(P^\bullet,Y) \quad , \quad$ *pour tout Y dans $\mathsf{K}(\mathcal{A})$*).

3) *La dimension cohomologique de $\mathcal{A}$ est la borne supérieure des dimensions injectives* (resp. *projectives*) *des objets de $\mathcal{A}$.*

4) *Lorsque la dimension cohomologique de $\mathcal{A}$ est finie, tout objet Y* (resp. X) *de $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ possède une résolution à droite* (resp. *à gauche*) $u : Y \longrightarrow I^\bullet$ (resp. $u : P^\bullet \longrightarrow X$) *de type injectif* (resp. *projectif*).

5) *Avec les hypothèses et notations de* 4), *une telle résolution définit un isomorphisme :*

$$\mathsf{Ext}^0_{\mathcal{A}}(X,Y) \simeq \mathsf{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{A})}(X,I^\bullet) \quad , \quad \textit{pour tout } X \textit{ dans } \mathsf{K}(\mathcal{A})$$

(resp. $\quad \mathsf{Ext}^0_{\mathcal{A}}(X,Y) \simeq \mathsf{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{A})}(P^\bullet,Y) \quad , \quad$ *pour tout Y dans $\mathsf{K}(\mathcal{A})$*).

Seule reste à démontrer la troisième assertion. Les autres assertions sont des conséquences immédiates de la proposition (2.4.4). L'assertion 2) montre aussitôt que la dimension cohomologique de $\mathcal{A}$ est inférieure ou égale à la borne supérieure des dimensions injectives (resp. projectives) des objets de $\mathcal{A}$. Supposons que la dimension cohomologique de $\mathcal{A}$ soit égale à n et soit :

$$I^\bullet = \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow I^0 \longrightarrow I^1 \longrightarrow I^2 \longrightarrow I^3 \longrightarrow \cdots$$

une résolution de type injectif d'un objet Y de $\mathcal{A}$. Pour tout objet X de $\mathcal{A}$, on a $\mathsf{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{A})}(X[-n-1], I^\bullet) = 0$. En particulier, en prenant $X = \mathsf{Ker}\, d^{n+1}_{I^\bullet}$, on montre aussitôt que le morphisme canonique $\mathsf{Ker}\, d^{n+1}_{I^\bullet} \longrightarrow I^{n+1}$ se factorise à travers I^n :

$$\begin{tikzcd}
 & \mathsf{Ker}\, d^{n+1}_{I^\bullet} \arrow[dl, dashed] \arrow[d] & \\
I^n \arrow[r] & I^{n+1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd} .$$

Par suite, $\mathsf{Ker}\, d^{n+1}_{I^\bullet}$ et $\mathsf{Ker}\, d^{n}_{I^\bullet}$ sont des facteurs directs de I^n et sont donc injectifs. Le complexe :

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow I^0 \longrightarrow I^1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow I^{n-1} \longrightarrow \mathsf{Ker}\, d^{n}_{I^\bullet} \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

est une résolution injective de Y; ce qui montre que la dimension injective de Y est inférieure ou égale à n. On démontre de même que la dimension projective de tout objet X de $\mathcal{A}$ est inférieure ou égale à n.

3.1.5. Soient X et Y deux objets de $\mathcal{A}$. La proposition (3.1.4) montre que lorsque la catégorie $\mathcal{A}$ *possède suffisamment d'objets injectifs ou projectifs* les groupes $\mathsf{Ext}^i_{\mathcal{A}}(X,Y)$ que nous avons définis ici coïncident avec ceux qui sont définis classiquement.

3.2. La construction de Yoneda.

3.2.1. Soient X et Y deux objets de $\mathcal{A}$. Désignons par $E^n_{\mathcal{A}}(X,Y)$ $(n \geq 1)$ l'ensemble des suites exactes :

$$S^n(X,Y) = \ 0 \longrightarrow Y \longrightarrow Z_{n-1} \longrightarrow Z_{n-2} \longrightarrow \cdots \longrightarrow Z_0 \xrightarrow{u_0} X \longrightarrow 0 \quad .$$

L'entier n est appelé la longueur de la suite $S^n(X,Y)$. Associons à tout élément $S^n(X,Y)$ de $E^n_{\mathcal{A}}(X,Y)$ trois complexes :

a) Le complexe X dont le seul composant non nul est l'objet X en degré zéro.

b) Le complexe :

$$Z^\bullet = \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow Y \longrightarrow Z_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow Z_0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

(Y est le composant de degré $-n$ et les Z_i sont les composants de degré $-i$).

c) Le complexe $Y[n]$ dont le seul composant non nul est l'objet Y en degré $-n$.

Désignons alors par $u(S^n(X,Y)) : Z^\bullet \to X$ le morphisme dont le seul composant non nul est u_0 en degré 0, et par $v(S^n(X,Y)) : Z^\bullet \to Y[n]$ le morphisme dont le seul composant non nul est id_Y en degré $-n$. Le morphisme $u(S^n(X,Y))$ est un quasi-isomorphisme, d'où un morphisme dans $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ (avec les notations de (1.3.2)) :

$$\delta^n_{\mathcal{A}}(S^n(X,Y)) = [v(S^n(X,Y))]\,[u(S^n(X,Y))]^{-1} : X \longrightarrow Y[n] \quad . \tag{3.2.1.1}$$

On définit ainsi une application :

$$\delta^n_{\mathcal{A}} : E^n_{\mathcal{A}}(X,Y) \longrightarrow \mathsf{Ext}^n_{\mathcal{A}}(X,Y) \quad , \tag{3.2.1.2}$$

qu'on note simplement δ^n lorsqu'aucune confusion n'en résulte.

Proposition 3.2.2. a) *L'application δ^n est surjective.*

b) *Deux éléments :*

$$S^n(X,Y) = 0 \longrightarrow Y \longrightarrow Z_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow Z_0 \longrightarrow X \longrightarrow 0$$

et :

$$S'^n(X,Y) = 0 \longrightarrow Y \longrightarrow Z'_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow Z'_0 \longrightarrow X \longrightarrow 0$$

ont la même image par δ^n si et seulement s'il existe un élément :

$$S''^n(X,Y) = 0 \longrightarrow Y \longrightarrow Z''_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow Z''_0 \longrightarrow X \longrightarrow 0$$

et un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Y \arrow[r] & Z_{n-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & Z_0 \arrow[r] & X \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & Y \arrow[r] \arrow[u, "\mathsf{id}"] \arrow[d, "\mathsf{id}"'] & Z''_{n-1} \arrow[r] \arrow[u] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & Z''_0 \arrow[r] \arrow[u] \arrow[d] & X \arrow[r] \arrow[u, "\mathsf{id}"'] \arrow[d, "\mathsf{id}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & Y \arrow[r] & Z'_{n-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & Z'_0 \arrow[r] & X \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \quad .$$

c) *Lorsque* $n = 1$, δ^1 *est le morphisme défini par le* δ*-foncteur canonique* $\mathsf{comp}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathsf{D}(\mathcal{A})$ (1.3.2).

Cette proposition résulte de la proposition (3.1.3) formule (7). Nous laissons l'exercice au lecteur qui pourra consulter [**3**].

3.2.3. Soit $S^n(X,Y) = 0 \longrightarrow Y \xrightarrow{u_n} Z_{n-1} \xrightarrow{u_{n-1}} Z_{n-2} \cdots Z_0 \xrightarrow{u_0} X \longrightarrow 0$ un élément de $E^n_{\mathcal{A}}(X,Y)$. Pour tout entier p, $0 \leq p \leq n$, donnons nous un élément ε_p de $\{-1,+1\}$. Désignons par $S^n_\varepsilon(X,Y)$ la suite exacte :

$$(3.2.3.1) \qquad 0 \longrightarrow Y \xrightarrow{\varepsilon_n u_n} Z_{n-1} \xrightarrow{\varepsilon_{n-1} u_{n-1}} Z_{n-2} \cdots Z_0 \xrightarrow{\varepsilon_0 u_0} X \longrightarrow 0 \quad ,$$

qui est élément de $E^n_{\mathcal{A}}(X,Y)$. On a l'égalité :

$$(3.2.3.2) \qquad \delta^n(S^n_\varepsilon(X,Y)) = \Big(\prod_{i=0}^{n} \varepsilon_i\Big)\, \delta^n(S^n(X,Y)) \quad .$$

La formule (3.2.3.2) se démontre immédiatement en utilisant la relation d'équivalence (3.2.2), b) et la définition de δ^n (3.2.1.1).

3.2.4. Soient maintenant deux suites exactes :

$$S^n(X,X') = \ 0 \longrightarrow X' \xrightarrow{u_n} Z_{n-1} \xrightarrow{u_{n-1}} \cdots \xrightarrow{u_1} Z_0 \xrightarrow{u_0} X \longrightarrow 0$$

$$S^m(X',X'') = \ 0 \longrightarrow X'' \xrightarrow{u'_m} Z'_{m-1} \xrightarrow{u'_{m-1}} \cdots \xrightarrow{u'_1} Z'_0 \xrightarrow{u'_0} X' \longrightarrow 0 \quad .$$

Désignons par $S^m(X',X'') * S^n(X,X')$ la suite exacte :

$$(3.2.4.1) \qquad S^m(X',X'') * S^n(X,X') =$$

$$0 \longrightarrow X'' \xrightarrow{u'_m} Z'_{m-1} \xrightarrow{u'_{m-1}} \cdots Z'_0 \xrightarrow{u_n u'_0} Z_{n-1} \xrightarrow{u_{n-1}} \cdots Z_0 \xrightarrow{u_0} X \longrightarrow 0$$

Proposition 3.2.5. *On a l'égalité :*

$$\delta^{m+n}(S^m(X',X'') * S^n(X,X')) = (-1)^{mn}\,(\delta^m(S^m(X',X'')))[n]\ \delta^n(S^n(X,X')).$$

Déterminons le morphisme $(\delta^m(S^m(X',X'')))[n]\ \delta^n(S^n(X,X'))$. Avec les notations de (3.2.1), on a deux diagrammes :

$$X' \xleftarrow{u(S^m(X',X''))} Z'^{\bullet} \xrightarrow{v(S^m(X',X''))} X''[m] \quad ,$$

$$X \xleftarrow{u(S^n(X,X'))} Z^\bullet \xrightarrow{v(S^n(X,X'))} X'[n] \quad ,$$

d'où un diagramme :

$$X \xleftarrow{u(S^n)} Z^\bullet \xrightarrow{v(S^n)} X'[n] \xleftarrow{u(S^m)[n]} Z'^\bullet[n] \xrightarrow{v(S^m)[n]} X''[m+n] \quad ,$$

(où pour simplifier la notation nous avons fait les abréviations évidentes). Il résulte alors de la définition de la translation dans $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ (chap. II, 2.2.6) qu'on a l'égalité :

(3.2.5.1) $(\delta^m(S^m(X',X'')))[n]\ \delta^n(S^n(X,X')) =$

$$\big[v(S^m)[n]\big]\big[u(S^m)[n]\big]^{-1}\big[v(S^n)\big]\big[u(S^n)\big]^{-1} \quad .$$

Posons alors :

(3.2.5.2) $$Z''^\bullet = \ \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow X'' \xrightarrow{(-1)^n u'_m} Z'_{m-1} \xrightarrow{(-1)^n u'_{m-1}} \cdots$$

$$\cdots \xrightarrow{(-1)^n u'_1} Z'_0 \xrightarrow{u_n u'_0} Z_{n-1} \xrightarrow{u_{n-1}} \cdots \xrightarrow{u_1} Z_0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

(les Z_i sont les composants de degré $-i$ de $Z''^\bullet$),

$$S^{m+n}(X,X'') = \ 0 \longrightarrow X'' \xrightarrow{(-1)^n u'_m} Z'_{m-1} \xrightarrow{(-1)^n u'_{m-1}} \cdots$$

$$\cdots \xrightarrow{(-1)^n u'_1} Z'_0 \xrightarrow{u_n u'_0} Z_{n-1} \xrightarrow{u_{n-1}} \cdots \xrightarrow{u_1} Z_0 \xrightarrow{u_0} X \longrightarrow 0$$

Définissons maintenant deux morphismes de complexes :

(3.2.5.3)
$$\rho : Z''^\bullet \longrightarrow Z^\bullet \begin{cases} \rho^p = \mathsf{id}\ , & \text{pour} \quad p \geq -n+1\ , \\ \rho^{-n} = u'_0\ , & \\ \rho^p = 0\ , & \text{pour} \quad p < -n\ , \end{cases}$$

$$\psi : Z''^\bullet \longrightarrow Z'^\bullet[n] \begin{cases} \psi^p = 0\ , & \text{pour} \quad p \geq -n+1\ , \\ \psi^p = \mathsf{id}\ , & \text{pour} \quad p \leq -n\ . \end{cases}$$

On vérifie immédiatement qu'on a les propriétés suivantes :

a) Le morphisme $\rho : Z''^\bullet \longrightarrow Z^\bullet$ (3.2.5.3) est un quasi-isomorphisme.

b) Dans le diagramme ci-après :

(3.2.5.4)
$$
\begin{tikzcd}
 & & Z''^{\bullet} \arrow[dll, "u(S^{m+n})"'] \arrow[dl, "\rho"] \arrow[dr, "\psi"'] \arrow[drr, "v(S^{m+n})"] & & \\
X & Z^{\bullet} \arrow[l, "u(S^n)"] \arrow[dr, "v(S^n)"'] & & Z'^{\bullet}[n] \arrow[r, "v(S^m)[n]"'] \arrow[dl, "u(S^m)[n]"] & X''[m+n] \\
 & & X'[n] & &
\end{tikzcd}
$$

le carré central et les triangles latéraux sont commutatifs dans $\mathsf{comp}(\mathcal{A})$.

En passant dans la catégorie $\mathsf{D}(\mathcal{A})$, le diagramme (3.2.5.4) fournit l'égalité :

$$(\delta^m(S^m(X',X'')))[n]\ \delta^n(S^n(X,X')) = \delta^{m+n}(S^{m+n}(X,X'')) \quad .$$

Il suffit alors d'utiliser (3.2.3.2) pour achever la démonstration.

3.2.6. Un cas d'application particulièrement important de la proposition (3.2.5) est le suivant. Soit :

$$S^n(X,Y) = \ 0 \longrightarrow Y \xrightarrow{u_n} Z_{n-1} \xrightarrow{u_{n-1}} \cdots \xrightarrow{u_1} Z_0 \xrightarrow{u_0} X \longrightarrow 0$$

un élément de $E^n_{\mathcal{A}}(X,Y)$. Posons pour tout entier p, $1 \leq p \leq n$:

(3.2.6.1) $\qquad S^1_p = \ 0 \longrightarrow \mathsf{Ker}(u_{p-1}) \longrightarrow Z_{p-1} \longrightarrow \mathsf{Im}(u_{p-1}) \longrightarrow 0 \quad .$

On a alors l'égalité :

(3.2.6.2)
$$\delta^n(S^n(X,Y)) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\ \delta^1(S^1_n)[n-1]\,\delta^1(S^1_{n-1})[n-2]\cdots\delta^1(S^1_1),$$

ainsi qu'on le démontre immédiatement en utilisant la proposition (3.2.5).

3.2.7. Buvons le calice jusqu'à la lie, et soient X et Y deux objets de $\mathcal{A}$ et par conséquent de $\mathcal{A}^\circ$: la catégorie opposée à $\mathcal{A}$. Les ensembles $E^n_{\mathcal{A}}(X,Y)$ et $E^n_{\mathcal{A}^\circ}(Y,X)$ sont égaux et on a deux applications :

(3.2.7.1)
$$
\begin{tikzcd}
E^n_{\mathcal{A}}(X,Y) \arrow[r, "\delta^n_{\mathcal{A}}"] \arrow[d, equal] & \mathsf{Ext}^n_{\mathcal{A}}(X,Y) \\
E^n_{\mathcal{A}^\circ}(Y,X) \arrow[r, "\delta^n_{\mathcal{A}^\circ}"] & \mathsf{Ext}^n_{\mathcal{A}^\circ}(Y,X)
\end{tikzcd} \quad .
$$

Par ailleurs, on a identifié en (1.2.8) la catégorie $\mathsf{D}(\mathcal{A})^\circ$ à la catégorie $\mathsf{D}(\mathcal{A}^\circ)$, ce qui permet d'identifier les ensembles $\mathsf{Ext}^n_{\mathcal{A}^\circ}(Y,X)$ et $\mathsf{Ext}^n_{\mathcal{A}}(X,Y)$ (chap. I, 1.3.9). Modulo ces identifications, on a donc deux applications ayant même source et même but :

(3.2.7.2)
$$\begin{tikzcd} E^n_{\mathcal{A}}(X,Y) \arrow[r, "\delta^n_{\mathcal{A}}"] \arrow[d, equal] & \mathsf{Ext}^n_{\mathcal{A}}(X,Y) \arrow[d, equal] \\ E^n_{\mathcal{A}^\circ}(Y,X) \arrow[r, "\delta^n_{\mathcal{A}^\circ}"] & \mathsf{Ext}^n_{\mathcal{A}^\circ}(Y,X) \end{tikzcd}$$

et on a la relation :

(3.2.7.3)
$$\delta^n_{\mathcal{A}} = \delta^n_{\mathcal{A}^\circ} \quad .$$

Cette relation est vraie pour $n = 1$ (1.3.4). Elle se démontre alors par récurrence sur n en utilisant (3.2.5).

3.2.8. Soient :

$$S^n(X,Y) = \ 0 \longrightarrow Y \xrightarrow{u_n} Z_{n-1} \xrightarrow{u_{n-1}} \cdots \xrightarrow{u_2} Z_1 \xrightarrow{u_1} Z_0 \xrightarrow{u_0} X \longrightarrow 0$$

un élément de $E^n_{\mathcal{A}}(X,Y)$, $f : X' \longrightarrow X$ et $g : Y \longrightarrow Y''$ deux morphismes de $\mathcal{A}$. Posons :

(3.2.8.1)
$$S^n(X,Y) * f = 0 \to Y \xrightarrow{u_n} Z_{n-1} \xrightarrow{u_{n-1}} \cdots \xrightarrow{u_2} Z_1 \xrightarrow{u'_1} Z'_0 \xrightarrow{u'_0} X' \to 0 \ ,$$

où Z'_0 est le produit fibré :

$$\begin{tikzcd} Z'_0 \arrow[r, "u'_0"] \arrow[d, "f'"'] & X' \arrow[d, "f"] \\ Z_0 \arrow[r, "u_0"] & X \end{tikzcd}$$

et où u'_1 est l'unique morphisme défini par les égalités $f'u'_1 = u_1$ et $u'_0u'_1 = 0$. De même, posons :

(3.2.8.2)
$$g * S^n(X,Y) = \ 0 \to Y'' \xrightarrow{u''_n} Z''_{n-1} \xrightarrow{u''_{n-1}} Z_{n-2} \xrightarrow{u_{n-2}} \cdots \xrightarrow{u_1} Z_0 \xrightarrow{u_0} X \to 0 \ ,$$

où Z''_{n-1} est la somme amalgamée :

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{u_n} & Z_{n-1} \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g''} \\ Y'' & \xrightarrow{u''_n} & Z''_{n-1} \end{array}$$

et où u''_{n-1} est l'unique morphisme défini par les égalités $u''_{n-1}\ g'' = u_{n-1}$ et $u''_{n-1} u''_n = 0$.

Proposition 3.2.9. a) *On a les égalités :*

$$\delta^n(S^n(X,Y) * f) = \delta^n(S^n(X,Y))f$$

$$\delta^n(g * S^n(X,Y)) = g[n]\ \delta^n(S^n(X,Y)) \quad .$$

b) *Tout diagramme commutatif :*

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} S^n(X,Y) = 0 & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Z_{n-1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & Z_1 & \longrightarrow & Z_0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & 0 \\ & & {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \\ S'^n(X',Y') = 0 & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & Z'_{n-1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & Z'_1 & \longrightarrow & Z'_0 & \longrightarrow & X' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

fournit l'égalité :

(3.2.9.1) $$\delta^n(g * S^n(X,Y)) = \delta^n(S'^n(X',Y') * f) \quad .$$

Lorsque $n = 1$, ces propriétés résultent des propriétés du δ-foncteur canonique $\mathsf{comp}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathsf{D}(\mathcal{A})$ (1.3). Le cas général s'obtient par récurrence sur n, en utilisant (3.2.5).

3.2.10. Soient $S^n(X,Y)$ et $S^n(X',Y')$ deux éléments appartenant respectivement aux ensembles $E^n_{\mathcal{A}}(X,Y)$ et $E^n_{\mathcal{A}}(X',Y')$ et considérons le morphisme :

$$\delta^n\big(S^n(X,Y) \oplus S^n(X',Y')\big) : X \oplus X' \longrightarrow (Y \oplus Y')[n] \quad .$$

On a l'égalité :

(3.2.10.1)

$$\delta^n\big(S^n(X,Y) \oplus S^n(X',Y')\big) = \begin{pmatrix} \delta^n(S^n(X,Y)) & 0 \\ 0 & \delta^n(S^n(X',Y')) \end{pmatrix} \quad ,$$

ainsi qu'il résulte immédiatement de la définition des applications δ_n.

3.2.11. Soient $f = \delta^n(S^n(X,Y))$ et $g = \delta^n({S'}^n(X,Y))$ deux éléments de $\mathsf{Ext}^n_{\mathcal{A}}(X,Y)$. Le morphisme $f+g \in \mathsf{Ext}^n_{\mathcal{A}}(X,Y)$ est, par définition, le morphisme composé :

$$X \xrightarrow{\begin{pmatrix}\mathrm{id}\\ \mathrm{id}\end{pmatrix}} X \oplus X \xrightarrow{\begin{pmatrix} f & 0\\ 0 & g\end{pmatrix}} Y[n] \oplus Y[n] \xrightarrow{(\mathrm{id},\mathrm{id})} Y[n] \quad .$$

Les alinéas (3.2.9) et (3.2.10) permettent alors, à partir des éléments $S^n(X,Y)$ et ${S'}^n(X,Y)$, de construire un élément ${S''}^n(X,Y) \in E^n_{\mathcal{A}}(X,Y)$ tel que $\delta^n({S''}^n(X,Y)) = f+g$. Nous laissons au lecteur le soin d'expliciter cette construction.

3.2.12. Nous avons donc montré au cours de ce numéro que les groupes $\mathsf{Ext}^n_{\mathcal{A}}(X,Y)$ (X et Y objets de $\mathcal{A}$) peuvent s'interpréter comme des quotients des ensembles $E^n_{\mathcal{A}}(X,Y)$ par la relation d'équivalence décrite en (3.2.2). De plus, la composition des extensions et la somme peuvent se décrire à l'aide d'opérations simples sur les éléments des $E^n_{\mathcal{A}}(X,Y)$. On retrouve ainsi une description due à Yoneda [**3**].

3.3. La catégorie $\mathcal{A}^{\mathsf{Ext}}$.

Lemme 3.3.1. a) *Soient X et Y deux objets de $\mathcal{A}$ et $\xi \in \mathsf{Ext}^0_{\mathcal{A}}(X[p],Y[q]) \simeq \mathsf{Ext}^{q-p}_{\mathcal{A}}(X,Y)$, $q>p$. Il existe $q-p$ suites exactes de longueur* 1, S^1_i, $1 \le i \le q-p$, *telles que la suite exacte de longueur n : $S^1_{q-p} * S^1_{q-p-1} * \cdots * S^1_1$ soit définie* (3.2.4) *et telles que :*

$$\delta^{q-p}\left(S^1_{q-p} * S^1_{q-p-1} * \cdots * S^1_1\right)[p] = \xi \quad . \tag{3.3.1.1}$$

b) *Soient S^n et ${S'}^n$ deux éléments de $E^n_{\mathcal{A}}(X,Y)$ qu'on peut écrire en utilisant les notations de* (3.2.6) :

$$S^n = S^1_n * S^1_{n-1} * \cdots * S^1_1 \quad ,$$

$$ {S'}^n = {S'}^1_n * {S'}^1_{n-1} * \cdots * {S'}^1_1 \quad ,$$

où les S^1_i et les ${S'}^1_i$, $1 \le i \le n$, sont des suites exactes de longueur 1. *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) $\delta^n(S^n) = \delta^n({S'}^n)$.

ii) *Il existe n suites exactes de longueur* 1 : ${S''}^1_i$, $1 \le i \le n$, *et* $2n-2$ *morphismes de $\mathcal{A}$: f_i, $1 \le i \le n-1$, et g_i, $1 \le i \le n-1$, tels que les suites* *exactes* $S^1_i * f_{i-1}$, $1 < i \leq n$, $f_i * {S''}^1_i$, $1 \leq i < n$, ${S'}^1_i * g_{i-1}$, $1 < i \leq n$, $g_i * {S''}^1_i$, $1 \leq i < n$, *soient définies* ((3.2.8.1) *et* (3.2.8.2)) *et tels que :*

$$(3.3.1.2) \qquad \begin{cases} \delta^1({S''}^1_n) = \delta^1\left(S^1_n * f_{n-1}\right) , \\ \delta^1({S''}^1_n) = \delta^1\left({S'}^1_n * g_{n-1}\right) , \\ \delta^1(f_i * {S''}^1_i) = \delta^1\left(S^1_i * f_{i-1}\right), \quad 1 < i \leq n-1 , \\ \delta^1(g_i * {S''}^1_i) = \delta^1\left({S'}^1_i * g_{i-1}\right), \quad 1 < i \leq n-1 , \\ \delta^1(f_1 * {S''}^1_1) = \delta^1(S^1_1) , \\ \delta^1(g_1 * {S''}^1_1) = \delta^1({S'}^1_1) . \end{cases}$$

En effet, l'assertion a) résulte immédiatement de (3.2.2) et (3.2.5) et l'assertion b) résulte de la description de la relation d'équivalence induite par l'application $E^n_{\mathcal{A}}(X,Y) \longrightarrow \mathsf{Ext}^n_{\mathcal{A}}(X,Y)$ ((3.2.2) et (3.2.9)).

3.3.2. Rappelons (1.2.11) que la catégorie $\mathcal{A}^{\mathsf{Ext}}$ est la sous-catégorie pleine de $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ définie par les translatés des objets de $\mathcal{A}$. Soit $F : \mathcal{A}^{\mathsf{Ext}} \longrightarrow \mathcal{C}$ un foncteur (à valeurs dans une catégorie non nécessairement additive). Désignons, pour tout entier n, par $F^n : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{C}$ le foncteur $X \mapsto F(X[n])$. De même, pour toute suite exacte de $\mathcal{A}$, $S^1 = 0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow 0$, désignons par $\delta^n_F(S^1) : F^n(Z) \longrightarrow F^{n+1}(X)$ le morphisme

$$F(\delta^1(S^1)[n]) : F(Z[n]) \longrightarrow F(X[n+1]) \quad .$$

La suite des foncteurs F^n, $n \in \mathbb{Z}$, munie des morphismes δ^*_F possède les propriétés suivantes (3.2.9) :

SFL I) Tout diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccccc} S = 0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} & & \\ S' = 0 & \longrightarrow & X' & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & Z' & \longrightarrow & 0 \end{array} \quad ,$$

où les lignes sont exactes fournit, pour tout entier n, un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} F^n(Z) & \xrightarrow{\delta^n_F(S)} & F^{n+1}(X) \\ {\scriptstyle F^n(g)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F^{n+1}(f)} \\ F^n(Z') & \xrightarrow{\delta^n_F(S')} & F^{n+1}(X') \end{array} \quad .$$

SFL II) Lorsque $S = 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0$, le morphisme $\delta^n_F(S)$ est, pour tout entier n, un isomorphisme.

Soit maintenant $m : F \to F'$ un morphisme de foncteurs $F,\ F' : \mathcal{A}^{\mathsf{Ext}} \to \mathcal{C}$. On en déduit de façon évidente une suite de morphismes de foncteurs $m^n : F^n \longrightarrow F'^n$. Cette suite de morphismes possède la propriété :

MSFL) Pour toute suite exacte $S = 0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow 0$, et pour tout entier n, le diagramme ci-après est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} F^n(Z) & \xrightarrow{\delta^n_F(S)} & F^{n+1}(X) \\ {\scriptstyle m^n(Z)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle m^{n+1}(X)} \\ F'^n(Z) & \xrightarrow{\delta^n_{F'}(S)} & F'^{n+1}(X) \end{array} \quad .$$

Définition 3.3.3. Une suite de foncteurs $F^n : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{C}$ munie de la donnée, pour toute suite exacte $S = 0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow 0$, d'un morphisme $\delta^n_F(S) : F^n(Z) \longrightarrow F^{n+1}(X)$ possédant les propriétés SFL I) et SFL II) est appelée une *suite de foncteurs liés*. Soient (F^n, δ^n_F) et $(F'^n, \delta^n_{F'})$ deux suites de foncteurs liés. Une suite de morphismes de foncteurs $m^n : F^n \longrightarrow F'^n$ est appelée un *morphisme de suites de foncteurs liés* si elle possède la propriété MSFL).

Proposition 3.3.4. *Soient $\mathcal{H}om(\mathcal{A}^{\mathsf{Ext}}, \mathcal{C})$ la catégorie des foncteurs de $\mathcal{A}^{\mathsf{Ext}}$ dans $\mathcal{C}$ et $\mathcal{SFL}(\mathcal{A}, \mathcal{C})$ la catégorie dont les objets sont les suites de foncteurs liés et les morphismes, les morphismes de suites de foncteurs liés. Ce qui précède définit un foncteur :*

$$\Phi : \mathcal{H}om(\mathcal{A}^{\mathsf{Ext}}, \mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{SFL}(\mathcal{A}, \mathcal{C}) \quad .$$

a) *Ce foncteur est une équivalence de catégories.*

b) *Lorsque la catégorie $\mathcal{C}$ est additive, un foncteur de $\mathcal{A}^{\mathsf{Ext}}$ dans $\mathcal{C}$ est pré-additif si et seulement si chacun des foncteurs de la suite de foncteurs liés associée est additif.*

Nous nous bornerons à montrer que Φ est essentiellement surjectif. Tout d'abord, quitte à modifier les catégories en présence par une équivalence, on peut supposer que la catégorie $\mathcal{A}$ possède un seul objet nul. On vérifie aussitôt qu'alors la catégorie $\mathcal{A}^{\mathsf{Ext}}$ ne possède qu'un seul objet nul. Soit alors (F^n, δ_F^n) une suite de foncteurs liés. Remarquons que, pour tout entier n, la propriété SFL II) définit un isomorphisme $F^n(0) \longrightarrow F^{n+1}(0)$. On peut alors, en remplaçant au besoin la suite (F^n, δ_F^n) par une suite isomorphe, supposer que, pour tout n, $F^n(0) = F^{n+1}(0)$ et que $\delta_F^n(0) = \text{identité}$. Tout objet non nul W de la catégorie $\mathcal{A}^{\mathsf{Ext}}$ s'écrit d'une manière unique sous la forme $X[n]$, où X est un objet de $\mathcal{A}$. Posons alors pour tout objet non nul W de $\mathcal{A}^{\mathsf{Ext}}$, $F(W) = F^n(X)$ et posons de plus $F(0) = F^0(0)$. Nous avons ainsi défini une application de $\mathsf{Ob}(\mathcal{A}^{\mathsf{Ext}})$ dans $\mathsf{Ob}(\mathcal{C})$ que nous allons maintenant prolonger en un foncteur $F : \mathcal{A}^{\mathsf{Ext}} \longrightarrow \mathcal{C}$, qui induise la suite de foncteurs liés (F^n, δ_F^n). Soit donc $m : W \longrightarrow W'$ un morphisme de $\mathcal{A}^{\mathsf{Ext}}$. Examinons d'abord différents cas :

1) $W = W' = 0$. On pose alors $F(m) = \mathsf{id}_{F^0(0)}$.

2) $W = 0$ et $W' = X[p]$, $X \neq 0$. On pose alors $F(m) = F^p(0 \longrightarrow X)$.

3) $W = Y[p]$, $Y \neq 0$, et $W' = 0$. On pose alors $F(m) = F^p(Y \longrightarrow 0)$.

Supposons maintenant que W et W' soient différents de l'objet nul. Ils s'écrivent alors de manière unique sous la forme $W = X[p]$, $W' = Y[q]$, où X et Y sont des objets de $\mathcal{A}$. L'entier $q - p$ est appelé alors le *degré* de m.

4) Degré de $m < 0$. On pose alors $F(m) = F^q(0 \longrightarrow Y)\, F^p(X \longrightarrow 0)$.

5) Degré de $m = 0$. Le morphisme m s'écrit alors de manière unique sous la forme $f[p]$, où f est un morphisme de $\mathcal{A}$. On pose alors $F(m) = F^p(f)$.

6) Degré de $m = 1$. Il existe une suite exacte de $\mathcal{A}$:

$$S = 0 \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow X \longrightarrow 0$$

telle que $m = \delta^1(S)[p]$ (3.3.1). On pose alors $F(m) = \delta_F^p(S)$. Le fait que le morphisme $F(m)$ ainsi défini ne dépende pas de la suite exacte choisie résulte de (3.2.2) et de la propriété SFL I).

Désignons alors par $\mathsf{Fl}_{\leq n}(\mathcal{A}^{\mathsf{Ext}})$ l'ensemble des morphismes $m : W \to W'$ tels que W ou W' soit l'objet nul ou tels que le degré de m soit inférieur ou égal à n. L'existence du foncteur $F : \mathcal{A}^{\mathsf{Ext}} \longrightarrow \mathcal{C}$ induisant la suite de foncteurs liés (F^n, δ_F^n) résulte alors du lemme et de la proposition suivants :

Lemme 3.3.5. *Soient* $m : W \longrightarrow W'$, $m' : W' \longrightarrow W''$, $m'' = m'm$ *trois morphismes de* $\mathcal{A}^{\mathsf{Ext}}$ *appartenant à* $\mathsf{Fl}_{\leq 1}(\mathcal{A}^{\mathsf{Ext}})$. *Les morphismes* $F(m)$, $F(m')$ *et* $F(m'')$ *ont été définis ci-dessus dans les cas* 1), 2), 3), 4), 5), 6) *et on a :*

$$F(m'') = F(m')F(m) \quad . \tag{3.3.5.1}$$

Proposition 3.3.6. (Définition de la catégorie $\mathcal{A}^{\mathsf{Ext}}$ par générateurs et relations). *Soient* $\mathcal{C}$ *une catégorie et :*

$$\mathsf{Ob}(F) : \mathsf{Ob}(\mathcal{A}^{\mathsf{Ext}}) \longrightarrow \mathsf{Ob}(\mathcal{C}) \quad ,$$

$$\mathsf{Fl}_{\leq 1}(F) : \mathsf{Fl}_{\leq 1}(\mathcal{A}^{\mathsf{Ext}}) \longrightarrow \mathsf{Fl}(\mathcal{C})$$

deux applications compatibles avec les applications source et but des catégories $\mathcal{A}^{\mathsf{Ext}}$ *et* $\mathcal{C}$ *telles que pour tout triplet de morphismes* $m : W \longrightarrow W'$, $m' : W' \longrightarrow W''$, $m'' = m'm$, $m, m', m'' \in \mathsf{Fl}_{\leq 1}(\mathcal{A}^{\mathsf{Ext}})$ *on ait :*

$$\mathsf{Fl}_{\leq 1}(F)(m')\,\mathsf{Fl}_{\leq 1}(F)(m) = \mathsf{Fl}_{\leq 1}(F)(m'') \quad .$$

Il existe alors un foncteur $F : \mathcal{A}^{\mathsf{Ext}} \longrightarrow \mathcal{C}$ *et un seul tel que* F *induise l'application* $\mathsf{Ob}(F)$ *sur les ensembles d'objets et tel que pour tout* $m \in \mathsf{Fl}_{\leq 1}(\mathcal{A}^{\mathsf{Ext}})$ *on ait :*

$$F(m) = \mathsf{Fl}_{\leq 1}(F)(m) \quad .$$

En effet, on vérifie facilement que la suite de foncteurs liés associée au foncteur fourni par (3.3.5) et (3.3.6) est bien la suite (F^n, δ^n_F) qu'on avait au départ.

3.3.7. Démonstration du lemme 3.3.5. La démonstration se fait en examinant les différents cas possibles. Il y a, d'abord, quatre cas à examiner lorsqu'au moins deux des objets W, W', W'' sont nuls. Les morphismes $F(m)$, $F(m')$ et $F(m'')$ sont alors définis dans l'un des cas 1), 2) ou 3). La vérification de (3.3.5.1) est immédiate et laissée au lecteur. Il y a, ensuite, neuf cas à examiner dans lesquels un des objets W, W', W'' est nul. Deux des morphismes m, m', m'' sont alors définis par 1), 2), 3), le troisième étant défini par 4), 5), 6). Là encore la vérification est immédiate et laissée au lecteur. Il reste à examiner les cas où W, W', W'' sont non nuls. Ces cas sont au nombre de huit :

c_1) degré de m et $m' < 0$;

c_2) degré de $m < 0$, degré de $m' = 0$;

c_3) degré de $m = 0$, degré de $m' < 0$;

c_4) degré de m et $m' = 0$;

c_5) degré de $m = 1$, degré de $m' < 0$;

c_6) degré de $m < 0$, degré de $m' = 1$;

c_7) degré de $m = 1$, degré de $m' = 0$;

c_8) degré de $m = 0$, degré de $m' = 1$;

Nous nous bornerons à envisager le cas c_8) ; le cas c_7) se traite de la même manière et les cas c_i), $1 \leq i \leq 6$, sont triviaux. Soit :

$$S = 0 \longrightarrow X'' \longrightarrow Y \longrightarrow X' \longrightarrow 0$$

une suite exacte telle que $\delta^1(S)[p] = m'$, et $f : X \longrightarrow X'$ un morphisme de $\mathcal{A}$ tel que $f[p] = m$. On a alors $F(m) = F^p(f)$, $F(m') = \delta^p_F(S)$ et $F(m'') = \delta^p_F(S * f)$ (3.2.9). Or on a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
S * f = 0 \arrow[r] & X'' \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & Y' \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
S = 0 \arrow[r] & X'' \arrow[r] & Y \arrow[r] & X' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \quad .$$

D'où un diagramme commutatif (SFL I) :

$$\begin{tikzcd}
F^p(X) \arrow[r, "\delta^p_F(S * f)"] \arrow[d, "F^p(f)"'] & F^{p+1}(X'') \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\
F^p(X') \arrow[r, "\delta^p_F(S)"] & F^{p+1}(X'')
\end{tikzcd} \quad ,$$

i.e.

$$F(m'') = F(m')F(m) \quad .$$

3.3.8. Démonstration de la proposition 3.3.6. Soit $m : X[p] \to Y[p+n]$, X et Y objets de $\mathcal{A}$, $n > 0$, un morphisme de $\mathcal{A}^{\mathsf{Ext}}$. D'après le lemme (3.3.1), il existe $n+1$ objets $X_i[p+i]$, $0 \leq i \leq n$, $X_0[p] = X[p]$, $X_n[p+n] = Y[p+n]$ et n morphismes :

$$X[p] \xrightarrow{m_1} X_1[p+1] \xrightarrow{m_2} X_2[p+2] \xrightarrow{m_3} \cdots \xrightarrow{m_n} Y[p+n]$$

tel que $m = m_n m_{n-1} \cdots m_2 m_1$. Ceci entraîne aussitôt l'unicité de F. Pour démontrer l'existence, il suffit de remarquer que d'après le lemme (3.3.1), lorsqu'on a une deuxième décomposition de m : $m = m'_n m'_{n-1} \cdots m'_1$, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
 & X_1[p+1] \arrow[r, "m_2"] & X_2[p+2] \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & X_{n-1}[p+n-1] \arrow[dr, "m_n"] & \\
X[p] \arrow[ur, "m_1"] \arrow[r, "m''_1"] \arrow[dr, "m'_1"'] & X''_1[p+1] \arrow[u, "{f_1[p+1]}"'] \arrow[d, "{g_1[p+1]}"] \arrow[r, "m''_2"] & X''_2[p+2] \arrow[u, "{f_2[p+2]}"'] \arrow[d, "{g_2[p+2]}"] \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & X''_{n-1}[p+n-1] \arrow[u, "{f_{n-1}[p+n-1]}"] \arrow[d, "{g_{n-1}[p+n-1]}"'] \arrow[r, "m''_n"] & Y[p+n] \\
 & X'_1[p+1] \arrow[r, "m'_2"] & X'_2[p+2] \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & X'_{n-1}[p+n-1] \arrow[ur, "m'_n"'] &
\end{tikzcd},$$

où les f_i et les g_i, $1 \leq i \leq n-1$, sont des morphismes de $\mathcal{A}$.