4. Objets spectraux usuels.

4.1. Premier objet spectral canonique.

4.1.1. Rappelons que $\widetilde{\mathbb{Z}}$ désigne l'ensemble ordonné $\mathbb{Z} \cup \{-\infty, +\infty\}$, ou encore la catégorie associée à cet ensemble ordonné (chap. II, 4.3.1). Soient $\mathcal{A}$ une catégorie additive et $Y : \widetilde{\mathbb{Z}} \to \mathsf{comp}(\mathcal{A})$ un foncteur :

$$
(4.1.1.1) \qquad \begin{aligned} q \in \widetilde{\mathbb{Z}} \quad &, \qquad q \longmapsto Y(q) \quad , \\ (p,q) \in \mathsf{Fl}_1(\widetilde{\mathbb{Z}}) \quad &, \qquad u(p,q) : Y(p) \to Y(q) \quad . \end{aligned}
$$

On a alors associé, au chapitre I, (3.3.6), au foncteur Y un objet spectral (de type $\widetilde{\mathbb{Z}}$) à valeurs dans $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ (chap. II, 4.1.2 et 4.1.3) dont nous allons rappeler la construction.

Soit, tout d'abord, pour tout élément (p,q) de $\mathsf{Fl}_1(\widetilde{\mathbb{Z}})$ (*i.e.* pour tout couple $p, q \in \widetilde{\mathbb{Z}}$ tel que $p \leq q$), $\mathcal{Y}(p,q)$ le cône du morphisme $u(p,q)$ (chap. I, 3.1.2) :

$$
(4.1.1.2) \qquad \begin{aligned} &\mathcal{Y}(p,q)^i = Y(q)^i \oplus Y(p)^{i+1} \ , \\ &d^i_{\mathcal{Y}(p,q)} = \begin{pmatrix} d^i_{Y(q)} & u(p,q)^{i+1} \\ 0 & -d^{i+1}_{Y(p)} \end{pmatrix} \quad . \end{aligned}
$$

Définissons alors, pour tout couple (p,q) et (p',q') d'éléments de $\mathsf{Fl}_1(\widetilde{\mathbb{Z}})$ tels que $p \leq p'$ et $q \leq q'$:

$$
(4.1.1.3) \qquad \Phi\big((p,q),(p',q')\big) : \mathcal{Y}(p,q) \to \mathcal{Y}(p',q') \quad ,
$$

comme étant la classe à homotopie près du morphisme de complexes :

$$
(4.1.1.4) \qquad \Psi\big((p,q),(p',q')\big) : \mathcal{Y}(p,q) \to \mathcal{Y}(p',q') \quad ,
$$

défini par les formules :

$$
(4.1.1.5) \qquad \Psi\big((p,q),(p',q')\big)^i = \begin{pmatrix} u(q,q')^i & 0 \\ 0 & u(p,p')^{i+1} \end{pmatrix} \quad .
$$

On a ainsi défini un foncteur $\mathcal{F}\ell_1(\widetilde{\mathbb{Z}}) \to \mathsf{K}(\mathcal{A})$.

Soit (p,q,r) un élément de $\mathsf{Fl}_2(\widetilde{\mathbb{Z}})$. Définissons alors :

$$(4.1.1.6) \qquad \delta(p,q,r) : \mathcal{Y}(q,r) \to \mathcal{Y}(p,q)[1] \quad ,$$

comme étant la classe d'homotopie du morphisme de complexes :

$$(4.1.1.7) \qquad d(p,q,r) : \mathcal{Y}(q,r) \to \mathcal{Y}(p,q)[1] \quad ,$$

défini par les formules :

$$(4.1.1.8) \qquad d(p,q,r)^i = \begin{pmatrix} 0 & \mathsf{id}_{Y(q)^{i+1}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad .$$

On sait (chap. I, 3.3.6) que le triangle de $\mathsf{K}(\mathcal{A})$:

$$\Big(\mathcal{Y}(p,q), \mathcal{Y}(p,r), \mathcal{Y}(q,r), \Phi\big((p,q),(p,r)\big), \Phi\big((p,r),(q,r)\big), \delta(p,q,r)\Big)$$

est distingué et dépend fonctoriellement de (p,q,r). On a donc construit un objet spectral $\big(\mathcal{Y}(p,q), \delta(p,q,r)\big)$, à valeurs dans $\mathsf{K}(\mathcal{A})$.

Soient $Y : \widetilde{\mathbb{Z}} \to \mathsf{comp}(\mathcal{A})$ et $Y' : \widetilde{\mathbb{Z}} \to \mathsf{comp}(\mathcal{A})$ deux foncteurs et $m : Y \to Y'$ un morphisme de foncteurs. Le morphisme m induit un morphisme des objets spectraux associés :

$$(4.1.1.9) \qquad \mathcal{M}(p,q) : \mathcal{Y}(p,q) \to \mathcal{Y}'(p,q) \quad .$$

4.1.2. Soit Y un objet de $\mathsf{comp}(\mathcal{A})$. Posons :

$$(4.1.2.1) \qquad q \in \mathbb{Z} \ , \quad Y(q) = \ 0 \to 0 \to Y^{-q} \to Y^{-q+1} \to Y^{-q+2} \to \cdots \quad ,$$

les différentielles de ce complexe étant induites par les différentielles de Y. Posons de même :

$$(4.1.2.2) \qquad Y(-\infty) = 0 \quad , \qquad Y(+\infty) = Y \quad .$$

On a des monomorphismes :

$$0 = Y(-\infty) \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow Y(q) \hookrightarrow Y(q+1) \hookrightarrow Y(q+2) \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow Y(+\infty) = Y \quad ,$$

qui définissent une filtration du type $\widetilde{\mathbb{Z}}$ de Y qu'on appelle *première filtration canonique de* Y, et par suite un foncteur, que nous notons Y, de $\widetilde{\mathbb{Z}}$ dans $\mathsf{comp}(\mathcal{A})$. On en déduit par la construction rappelée en (4.1.1) un objet spectral à valeurs dans $\mathsf{K}(\mathcal{A})$: $\big(\mathcal{Y}(p,q),\delta(p,q,r)\big)$. On se propose de décrire un objet spectral isomorphe à $\big(\mathcal{Y}(p,q),\delta(p,q,r)\big)$. Posons tout d'abord :

(4.1.2.3)

a) pour $-\infty < p < q < +\infty$:

$$Y(p,q) = \cdots 0 \to 0 \to Y^{-q} \to Y^{-q+1} \to \cdots \to Y^{-p-2} \to Y^{-p-1} \to 0 \to 0 \to \cdots ,$$

b) pour $-\infty < p < +\infty$:

$$Y(p,+\infty) = \cdots \to Y^{i} \to Y^{i+1} \to \cdots \to Y^{-p-2} \to Y^{-p-1} \to 0 \to 0 \to \cdots ,$$

c) $Y(-\infty,q) = Y(q)$, pour tout $q \in \widetilde{\mathbb{Z}}$, $Y(p,p) = 0$, pour tout $p \in \widetilde{\mathbb{Z}}$, les différentielles de ces complexes étant induites par les différentielles du complexe Y.

Désignons par :

(4.1.2.4) $\quad \varphi\big((p,q),(p',q')\big) : Y(p,q) \to Y(p',q')\ ,\quad p \leq p' \quad \text{et} \quad q \leq q'\ ,$

la classe d'homotopie du morphisme de complexes :

(4.1.2.5) $\quad \psi\big((p,q),(p',q')\big) : Y(p,q) \to Y(p',q') \quad ,$

dont les composants sont des morphismes identiques quand la source et le but sont des objets non nuls. On vérifie immédiatement qu'on a ainsi défini un foncteur de $\mathcal{F}\ell_1(\widetilde{\mathbb{Z}})$ dans $\mathsf{K}(\mathcal{A})$.

Soit (p,q,r) un élément de $\mathsf{Fl}_2(\widetilde{\mathbb{Z}})$. Désignons par :

(4.1.2.6) $\quad \delta(p,q,r) : Y(q,r) \to Y(p,q)[1]$

la classe d'homotopie du morphisme de complexes :

(4.1.2.7) $\quad d(p,q,r) : Y(q,r) \to Y(p,q)[1] \quad ,$

dont les composants sont :

(4.1.2.8)
$$d(p,q,r)^{i} = 0\ , \quad \text{pour } i \neq -q-1\ ,$$
$$d(p,q,r)^{-q-1} = -d_Y^{-q-1} \quad .$$

Enfin, pour tout élément (p,q) de $\mathsf{Fl}_1(\widetilde{\mathbb{Z}})$, désignons par :

$$J(p,q) : \mathcal{Y}(p,q) \to Y(p,q) \tag{4.1.2.9}$$

la classe d'homotopie du morphisme de complexes :

$$j(p,q) : \mathcal{Y}(p,q) \to Y(p,q) \quad , \tag{4.1.2.10}$$

défini par les formules :

$$\begin{aligned}
&j(p,q)^i = 0\ , \quad \text{pour} \quad i < -q \quad \text{ou} \quad i > -p-1\ ,\\
&j(p,q)^i = \text{ identité}\ , \quad \text{pour} \quad -q \leq i \leq -p-2\ ,\\
&j(p,q)^{-p-1} : Y^{-p-1} \oplus Y^{-p} \to Y^{-p-1}\ ,\\
&j(p,q)^{-p-1} = (\mathsf{id}, 0) \quad .
\end{aligned} \tag{4.1.2.11}$$

Proposition 4.1.3. a) *Pour tout élément (p,q) de $\mathsf{Fl}_1(\widetilde{\mathbb{Z}})$, le morphisme $J(p,q) : \mathcal{Y}(p,q) \to Y(p,q)$ de $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ est un isomorphisme.*

b) *Pour tout couple (p,q), (p',q') de $\mathsf{Fl}_1(\widetilde{\mathbb{Z}})$ tel que $p \leq p'$ et $q \leq q'$, le diagramme de $\mathsf{K}(\mathcal{A})$:*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{Y}(p,q) \arrow[r, "\Phi((p,q),(p',q'))"] \arrow[d, "J(p,q)"'] & \mathcal{Y}(p',q') \arrow[d, "J(p',q')"] \\
Y(p,q) \arrow[r, "\varphi((p,q),(p',q'))"] & Y(p',q')
\end{tikzcd}$$

est commutatif.

c) *Pour tout élément (p,q,r) de $\mathsf{Fl}_2(\widetilde{\mathbb{Z}})$, le diagramme de $\mathsf{K}(\mathcal{A})$:*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{Y}(q,r) \arrow[r, "\delta(p,q,r)"] \arrow[d, "J(q,r)"'] & \mathcal{Y}(p,q)[1] \arrow[d, "J(p,q)[1]"] \\
Y(q,r) \arrow[r, "\delta(p,q,r)"] & Y(p,q)[1]
\end{tikzcd}$$

est commutatif.

La vérification est laissée au lecteur.

4.1.4. Il résulte de (4.1.3) que pour tout objet Y de $\mathsf{comp}(\mathcal{A})$,

$$\mathsf{Spec}_1(Y) = \big(Y(p,q), \delta(p,q,r)\big) \quad ,$$

défini par (4.1.2.3), (4.1.2.4) et (4.1.2.6), est un objet spectral à valeurs dans $\mathsf{K}(\mathcal{A})$. L'objet spectral $\mathsf{Spec}_1(Y)$ dépend fonctoriellement de l'objet Y de $\mathsf{comp}(\mathcal{A})$. On a donc déterminé un foncteur :

$$Y \longmapsto \mathsf{Spec}_1(Y)$$

de la catégorie des complexes de $\mathcal{A}$ dans la catégorie des objets spectraux à valeurs dans $\mathsf{K}(\mathcal{A})$. Ce foncteur est appelé le foncteur *premier objet spectral canonique à valeurs dans* $\mathsf{K}(\mathcal{A})$. Pour tout objet Y de $\mathsf{comp}(\mathcal{A})$, l'objet spectral $\mathsf{Spec}_1(Y)$ est appelé le *premier objet spectral à valeurs dans* $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ *associé au complexe* Y. Il convient de noter que lorsque Y est un objet de $\mathsf{comp}^*(\mathcal{A})$ ($* = +\,,\, -\,,\, b\,$, "vide"), le premier objet spectral à valeurs dans $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ associé au complexe Y est, en fait, à valeurs dans $\mathsf{K}^*(\mathcal{A})$.

4.1.5. Soient $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne et Y un complexe de $\mathcal{A}$. L'image par le foncteur canonique $\mathsf{K}(\mathcal{A}) \to \mathsf{D}(\mathcal{A})$ du premier objet spectral associé au complexe Y est un objet spectral à valeurs dans $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ qui est appelé le *premier objet spectral à valeurs dans* $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ *associé au complexe* Y. Le plus souvent, nous dirons simplement *premier objet spectral associé au complexe* Y et noterons (abusivement) :

$$\mathsf{Spec}_1(Y) = \big(Y(p,q), \delta(p,q,r)\big)$$

le premier objet spectral à valeurs dans $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ associé au complexe Y. Le foncteur premier objet spectral canonique composé avec le foncteur canonique $\mathsf{K}(\mathcal{A}) \to \mathsf{D}(\mathcal{A})$ (étendu aux objets spectraux) est appelé le foncteur *premier objet spectral canonique à valeurs dans* $\mathsf{D}(\mathcal{A})$. Soulignons qu'il s'agit d'un foncteur de la catégorie des complexes de $\mathcal{A}$ dans la catégorie des objets spectraux de $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ et que *ce foncteur ne se factorise pas, en général, par la catégorie des complexes à homotopie près.*

4.1.6. Les complexes n-uples d'objets de $\mathcal{A}$ permettent de construire des complexes simples munis de filtrations et par suite des objets spectraux à valeurs dans $\mathsf{K}(\mathcal{A})$. Soient X un complexe n-uple (chap. I, 2.1.2) et m un entier, $1 \leq m \leq n$. Pour tout $\sigma \in \mathbb{Z}[n]$ (notation de (chap. I, 2.1.1)), désignons par σ_m sa m-ième coordonnée.

Nous allons, tout d'abord, définir une famille de complexes et de morphismes de complexes. Soit, pout tout couple $(p,q) \in \mathsf{Fl}_1(\widetilde{\mathbb{Z}})$, ${}^mX(p,q)$ le complexe n-uple défini par :

$$(4.1.6.1)\qquad \begin{cases} \left({}^{m}X(p,q)\right)^{\sigma} = \begin{cases} X^{\sigma} & \text{si} \quad -q \leq \sigma_m < -p \quad , \\ 0 & \text{si} \quad \sigma_m < -q \quad \text{ou} \quad -p \leq \sigma_m \ , \end{cases} \\ \text{les différentielles de } {}^{m}X(p,q) \text{ sont les différentielles} \\ \text{de } X \text{ sauf peut-être si la source ou le but de la dif-} \\ \text{férentielle considérée sont des objets nuls.} \end{cases}$$

Pour tout couple (p,q) et (p',q') d'éléments de $\mathsf{Fl}_1(\widetilde{\mathbb{Z}})$, tels que $p \leq p'$ et $q \leq q'$, désignons par :

$$(4.1.6.2)\qquad f\big((p,q),(p',q')\big) : {}^{m}X(p,q) \longrightarrow {}^{m}X(p',q')$$

le morphisme de complexes n-uples dont les composants sont des morphismes identiques sauf peut-être si la source ou le but sont des objets nuls. Enfin, pour tout élément (p,q,r) de $\mathsf{Fl}_2(\widetilde{\mathbb{Z}})$, désignons par :

$$(4.1.6.3)\qquad g(p,q,r) : {}^{m}X(q,r) \longrightarrow T_m\big({}^{m}X(p,q)\big)$$

(T_m désigne le foncteur de translation dans la direction m (chap. I, 2.3.1) le morphisme dont les composants sont :

$$(4.1.6.4)\qquad \begin{cases} g(p,q,r)^{\sigma} = 0 \quad \text{si} \quad \sigma_m \neq -q-1 \quad , \\ g(p,q,r)^{\sigma} = -d_X^{\sigma,m} \quad \text{si} \quad \sigma_m = -q-1 \quad . \end{cases}$$

Introduisons alors de nouvelles notations. Tout d'abord, désignons, par abus de notation, par $\int_n : \mathsf{comp}^n(\mathcal{A}) \to \mathsf{comp}(\mathcal{A})$ la Π-extension ou la Σ-extension du foncteur complexe simple associé (sous réserve d'existence de produits ou sommes dénombrables dans $\mathcal{A}$ (chap. I, 2.2.3). Posons alors :

$$(4.1.6.5)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_n {}^{m}X(p,q) = {}^{m}Y(p,q) \quad , \\ \displaystyle\int_n {}^{m}X(-\infty,q) = {}^{m}Y(-\infty,q) = {}^{m}Y(q) \quad , \\ \displaystyle\int_n {}^{m}X(-\infty,+\infty) = \int_n X = {}^{m}Y(-\infty,+\infty) = {}^{m}Y(+\infty) = Y \,; \end{cases}$$

puis :

$$\int_n f\big((p,q),(p',q')\big) = h\big((p,q),(p',q')\big) \quad . \tag{4.1.6.6}$$

Soit de plus :

$$^m d(p,q,r) : {}^m Y(q,r) \longrightarrow {}^m Y(p,q)[1] \tag{4.1.6.7}$$

le morphisme composé :

$$\begin{array}{c} {}^m Y(q,r) \xrightarrow{\int_n g(p,q,r)} \displaystyle\int_n T_m {}^m X(p,q) \xrightarrow{(*)} \Big(\int_n {}^m X(p,q)\Big)[1] \\ \hfill || \quad \\ \hfill Y(p,q)[1] \quad , \end{array} \tag{4.1.6.8}$$

où le morphisme $(*)$ est l'isomorphisme de commutation aux translations du foncteur complexe simple associé (chap. I, 2.3.2.1).

On obtient ainsi une filtration du complexe simple $Y = \int_n X$:

$$0 = {}^m Y(-\infty) \subset \cdots \subset {}^m Y(q) \subset \cdots \subset {}^m Y(+\infty) = Y \tag{4.1.6.9}$$

qu'on appelle *la filtration définie par le* m-ième *degré de* X.

On peut, par le procédé rappelé en (4.1.1), associer au complexe filtré (4.1.6.9) un objet spectral à valeurs dans $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ noté :

$$\big(\mathcal{Y}(p,q), \delta(p,q,r)\big) \quad . \tag{4.1.6.10}$$

Enfin, abusivement, nous désignerons dans la proposition ci-après par la même notation, un morphisme de $\mathsf{comp}(\mathcal{A})$ et son image dans $\mathsf{K}(\mathcal{A})$.

Proposition 4.1.7. a) *Les objets* ${}^m Y(p,q)$ (4.1.6.5), *les morphismes* $h\big((p,q),(p',q')\big)$ (4.1.6.6) *et les morphismes* ${}^m d(p,q,r)$ (4.1.6.7) *définissent un objet spectral à valeurs dans* $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ *qui dépend fonctoriellement du complexe n-uple X.*

Cet objet spectral est appelé *l'objet spectral à valeurs dans* $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ *défini par le complexe X filtré par son* m-ième *degré.*

b) *Il existe un isomorphisme canonique* (i.e. *fonctoriel par rapport à l'objet X de* $\mathsf{comp}^n(\mathcal{A})$) *entre les objets spectraux* $\big(\mathcal{Y}(p,q), \delta(p,q,r)\big)$ (4.1.6.10) *et* $\big({}^m Y(p,q), {}^m d(p,q,r)\big)$.

Supposons, tout d'abord, la proposition démontrée lorsque X est un double complexe et lorsque l'entier $m = 1$, et montrons comment on peut se ramener à ce cas. Soit $\varphi : [n] \to [2]$ l'application :

$$(4.1.7.1) \qquad \begin{cases} \varphi(m) = 1 \quad , \\ \varphi(i) = 2 \quad , \qquad \text{pour tout} \quad i \in [n]\,,\ i \neq m \quad . \end{cases}$$

Posons $\int_\varphi X = Z$ (chap. I, 2.2.2). On peut alors effectuer sur le double complexe Z les constructions décrites en $(4.1.6.i)$, $1 \leq i \leq 4$. On obtient des doubles complexes :

$$(4.1.7.2) \qquad {}^1Z(p,q) \quad , \qquad (p,q) \in \mathsf{Fl}_1(\widetilde{\mathbb{Z}}) \quad ,$$

et des morphismes de doubles complexes :

$$(4.1.7.3) \qquad \begin{aligned} &f_Z\big((p,q),(p',q')\big) : {}^1Z(p,q) \to {}^1Z(p',q') \quad , \\ &g_Z(p,q,r) : {}^1Z(q,r) \to T_1\big({}^1Z(p,q)\big) \quad . \end{aligned}$$

On constate alors que :

$$(4.1.7.4) \qquad \begin{aligned} &\int_\varphi {}^mX(p,q) = {}^1Z(p,q) \quad , \qquad (p,q) \in \mathsf{Fl}_1(\widetilde{\mathbb{Z}}) \quad , \\ &\int_\varphi f\big((p,q),(p',q')\big) = f_Z\big((p,q),(p',q')\big) \quad , \end{aligned}$$

(vérification immédiate) et que de plus le morphisme $g_Z(p,q,r)$ est le morphisme composé :

$$(4.1.7.5) \quad \int_\varphi {}^mX(q,r) \xrightarrow{\int_\varphi g(p,q,r)} \int_\varphi T_m\big({}^mX(p,q)\big) \xrightarrow{(**)} T_1\left(\int_\varphi {}^mX(p,q)\right) \ ,$$

où $(**)$ est l'isomorphisme de commutation du foncteur $\int_\varphi$ aux translations (chap. I, 2.3.2.1) (pour vérifier ceci, on utilise la définition explicite des différentielles de Z (chap. I, 2.2.2.5) et de l'isomorphisme de commutation (chap. I, 2.3.2.1). Construisons alors l'objet spectral défini par Z filtré par son premier degré. Il résulte de l'égalité $\int_2 \int_\varphi = \int_n$, de (4.1.7.4), (4.1.7.5) et de (chap. I, 2.3.3) que $\big({}^mY(p,q), {}^md(p,q,r)\big)$ est égal à cet objet spectral.

Supposons donc que X soit un double complexe et que $m = 1$. Pour démontrer $a)$, il suffit de montrer que, pour tout $(p,q,r) \in \mathsf{Fl}_2(\widetilde{\mathbb{Z}})$, le diagramme de $\mathsf{comp}(\mathcal{A})$:

(4.1.7.6)
$$\int_2 {}^1X(p,q) \to \int_2 {}^1X(p,r) \to \int_2 {}^1X(q,r) \xrightarrow{{}^1d(p,q,r)} \int_2 T_1\big({}^1X(p,q)\big) = \Big(\int_2 {}^1X(p,q)\Big)[1]$$

définit dans $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ un triangle distingué (remarquons que l'isomorphisme de commutation aux translations $\int_2 T_1\big({}^1X(p,q)\big) \xrightarrow{\sim} \big(\int_2 {}^1X(p,q)\big)[1]$ est dans ce cas l'identité). Les autres assertions contenues dans $a)$ sont évidentes. Pour prouver que le diagramme (4.1.7.6) définit dans $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ un triangle dinstingué, il suffit, d'après la propriété (TRII) (chap. II, 1.1.1), de montrer que le diagramme :

(4.1.7.7)
$$\Big(\int_2 {}^1X(q,r)\Big)[-1] \xrightarrow{-{}^1d(p,q,r)[-1]} \int_2 {}^1X(p,q) \longrightarrow \int_2 {}^1X(p,r) \longrightarrow \int_2 {}^1X(q,r)$$

définit dans $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ un triangle distingué. On constate alors immédiatement que le complexe simple $\int_2 {}^1X(p,r)$ est égal au cône du morphisme $-{}^1d(p,q,r)[-1]$ (chap. I, 3.1.2) et que les morphismes $\int_2 {}^1X(p,q) \longrightarrow \int_2 {}^1X(p,r)$, $\int_2 {}^1X(p,r) \to \int_2 {}^1X(q,r)$, figurant dans (4.1.7.7), sont les morphismes introduits dans l'étude du foncteur cône (chap. I, 3.2.2.2 et 3.2.2.4). Par suite, le triangle de $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ défini par le diagramme (4.1.7.7) est par définition (chap. I, 3.3.1) un triangle distingué. Démontrons maintenant $b)$. En utilisant les notations introduites en (4.1.6.5), on vient de montrer que dans le diagramme :

(4.1.7.8) $$ {}^1Y(q,r)[-1] \xrightarrow{-{}^1d(-\infty,q,r)} {}^1Y(q) \longrightarrow {}^1Y(r) \longrightarrow {}^1Y(q,r) \ ,$$

le complexe ${}^1Y(r)$ apparaît comme le cône du morphisme $-{}^1d(-\infty,q,r)$ (poser $p = -\infty$ dans le diagramme (4.1.7.7)). De plus (4.1.1), l'objet $\mathcal{Y}(q,r)$ a été défini comme étant le cône du morphisme :

(4.1.7.9) $$ {}^1Y(q) \longrightarrow {}^1Y(r)$$

On a alors défini, dans cette situation (chap. I, 3.2.5.2), un homotopisme (définissant donc un isomorphisme dans $\mathsf{K}(\mathcal{A})$) :

(4.1.7.10) $$J(q,r) : \mathcal{Y}(q,r) \longrightarrow {}^1Y(q,r) \quad .$$

On laisse au lecteur le soin de vérifier que cet homotopisme est fonctoriel par rapport aux indices $(q,r) \in \mathsf{Fl}_1(\widetilde{\mathbb{Z}})$ et par rapport au double complexe X et qu'il définit un isomorphisme canonique de l'objet spectral $\big(\mathcal{Y}(p,q), \delta(p,q,r)\big)$ sur l'objet spectral $\big({}^1Y(p,q), {}^1d(p,q,r)\big)$.

4.1.8. Lorsque X est un complexe simple, l'objet spectral à valeurs dans $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ défini par le complexe X filtré par son premier degré (4.1.7) n'est autre que le premier objet spectral à valeurs dans $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ associé au complexe X. De même, soient X un complexe n-uple et m un entier, $1 \leq m \leq n$. Supposons que le composant X^{σ} de X soit nul lorsque :

$$\sigma - \sigma_m e_m \neq 0 \qquad (\sigma_m \ \ m\text{-ième coordonnée }).$$

On vérifie alors que l'objet spectral défini par le complexe X filtré par son m-ième degré est égal au premier objet spectral canonique du complexe simple $\int_m X$.

Enfin, lorsque la catégorie $\mathcal{A}$ est abélienne, le foncteur canonique :

$$\mathsf{K}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathsf{D}(\mathcal{A})$$

transforme l'objet spectral à valeurs dans $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ défini par un complexe n-uple X filtré par son m-ième degré en un objet spectral à valeurs dans $\mathsf{D}(\mathcal{A})$. L'objet spectral ainsi obtenu est appelé *l'objet spectral, à valeurs dans* $\mathsf{D}(\mathcal{A})$*, défini par* X*, filtré par son* m-ième *degré.* Lorsque aucune confusion n'en résulte, on supprime la mention "à valeurs dans $\mathsf{D}(\mathcal{A})$".

4.1.9. Soit $X^{\bullet\bullet}$ un complexe double de $\mathcal{A}$. Désignons, pour tout entier q, par $X^{q,\bullet}$ (resp. $X^{\bullet,q}$) le complexe simple :

$$X^{q,\bullet} = \cdots \xrightarrow{d_2^{q,i-1}} X^{q,i} \xrightarrow{d_2^{q,i}} X^{q,i+1} \xrightarrow{d_2^{q,i+1}} \cdots$$

$$(\text{ resp.} \quad X^{\bullet,q} = \cdots \to X^{i,q} \xrightarrow{(-1)^q d_1^{i,q}} X^{i+1,q} \xrightarrow{(-1)^q d_1^{i+1,q}} X^{i+2,q} \to \cdots \quad),$$

dont le composant de degré i est $X^{q,i}$ (resp. $X^{i,q}$).

La différentielle dans la première (resp. deuxième) direction de $X^{\bullet\bullet}$ induit des morphismes (dans $\mathsf{K}(\mathcal{A})$) :

$$d_1^{q,\bullet} : X^{q,\bullet} \longrightarrow X^{q+1,\bullet}$$

$$(\text{ resp.} \qquad d_2^{\bullet,q} : X^{\bullet,q} \longrightarrow X^{\bullet,q+1} \quad),$$

dont les composants sont :

$$(d_1^{q,\bullet})^i = d_1^{q.i}$$

$$(\text{ resp.} \qquad (d_2^{\bullet,q})^i = (-1)^i d_2^{i,q} \quad).$$

Désignons par $\big({}^1Y(p,q), {}^1\delta(p,q,r)\big)$ (resp. $\big({}^2Y(p,q), {}^2\delta(p,q,r)\big)$) l' objet spectral, à valeurs dans $\mathsf{K}(\mathcal{A})$, défini par le complexe X, filtré par son premier (resp. deuxième) degré (4.1.7). Il résulte immédiatement des définitions qu'on a les relations :

$$
(4.1.9.1) \qquad \begin{cases} {}^1Y(q-1,q) = X^{-q,\bullet}[q] \quad , \\ {}^2Y(q-1,q) = X^{\bullet,-q}[q] \quad , \\ {}^1\delta(q-1,q,q+1) = -(d_1^{-q-1,\bullet})[q+1] \quad , \\ {}^2\delta(q-1,q,q+1) = -(d_2^{\bullet,-q-1})[q+1] \quad . \end{cases}
$$

Ces formules seront utilisées au numéro (4.6).

4.2. Objet spectral à valeurs dans $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ associé à un objet filtré de $\mathsf{comp}(\mathcal{A})$.

Dans ce numéro et les numéros suivants de ce paragraphe, $\mathcal{A}$ désigne une catégorie abélienne.

4.2.1. Soient X un objet de $\mathsf{comp}(\mathcal{A})$ et $X(q)$, $q \in \widetilde{\mathbb{Z}}$, une filtration croissante de type $\widetilde{\mathbb{Z}}$ du complexe X :

$$
(4.2.1.1) \quad 0 = X(-\infty) \subset \cdots \subset X(q) \subset X(q+1) \subset \cdots \subset X(+\infty) = X \quad .
$$

On en déduit, par la construction rappelée en (4.1.1), un objet spectral $\big(\mathcal{X}(p,q), \delta(p,q,r)\big)$ à valeurs dans $\mathsf{K}(\mathcal{A})$, d'où, en appliquant le foncteur canonique $\mathsf{K}(\mathcal{A}) \to \mathsf{D}(\mathcal{A})$, un objet spectral à valeurs dans $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ encore noté, abusivement, $\big(\mathcal{X}(p,q), \delta(p,q,r)\big)$. On se propose de décrire un objet spectral à valeurs dans $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ isomorphe à ce dernier objet spectral.

4.2.2. Soit donc $0 = X(-\infty) \subset \cdots \subset X(q) \subset \cdots \subset X(+\infty) = X$, un objet filtré de $\mathsf{comp}(\mathcal{A})$. Posons :

$$
(4.2.2.1) \qquad X(p,q) = X(q)/X(p) \quad ,
$$

pour tout élément (p,q) de $\mathsf{Fl}_1(\widetilde{\mathbb{Z}})$. (Le quotient est pris évidemment ici au sens de la catégorie abélienne $\mathsf{comp}(\mathcal{A})$). Désignons par :

$$
(4.2.2.2) \qquad \varphi\big((p,q),(p',q')\big) : X(p,q) \longrightarrow X(p',q') \quad ,
$$

où (p,q) et (p',q') sont des éléments de $\mathsf{Fl}_1(\widetilde{\mathbb{Z}})$ tels que $p \leq p'$ et $q \leq q'$, l'image dans $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ du morphisme canonique de $\mathsf{comp}(\mathcal{A})$:

$$\psi\big((p,q),(p',q')\big) : X(p,q) \longrightarrow X(p',q') \quad . \tag{4.2.2.3}$$

On a ainsi déterminé un foncteur de $\mathcal{F}\ell_1(\widetilde{\mathbb{Z}})$ dans $\mathsf{D}(\mathcal{A})$. Soit, pour tout élément (p,q,r) de $\mathsf{Fl}_2(\widetilde{\mathbb{Z}})$:

$$S(p,q,r) \colon\ 0 \to X(p,q) \to X(p,r) \to X(q,r) \to 0 \quad , \tag{4.2.2.4}$$

la suite exacte de $\mathsf{comp}(\mathcal{A})$ dont les morphismes sont les morphismes canoniques déduits de la filtration de X. Soit enfin, pour tout élément (p,q) de $\mathsf{Fl}_1(\widetilde{\mathbb{Z}})$,

$$J(p,q) : \mathcal{X}(p,q) \longrightarrow X(p,q) \quad , \tag{4.2.2.5}$$

l'image dans $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ du morphisme de $\mathsf{comp}(\mathcal{A})$:

$$j(p,q) : \mathcal{X}(p,q) \longrightarrow X(p,q) \quad , \tag{4.2.2.6}$$

dont les composants sont :

$$j(p,q)^i : \mathcal{X}(p,q)^i = X(q)^i \oplus X(p)^{i+1} \to X(q)^i/X(p)^i = X(p,q)^i \ ,$$

(4.2.2.7)
$$j(p,q)^i = (\pi^i, 0) \quad ,$$
où π^i est l'épimorphisme canonique :
$$\pi^i : X(q)^i \longrightarrow X(q)^i/X(p)^i \quad .$$

Proposition 4.2.3. *Pour tout élément (p,q,r) de $\mathsf{Fl}_2(\widetilde{\mathbb{Z}})$, désignons par :*

$$\delta(p,q,r) : X(q,r) \longrightarrow X(p,q)[1] \quad ,$$

le morphisme de $\mathsf{D}(\mathcal{A})$:

$$\delta(p,q,r) = \delta\big(S(p,q,r)\big) \quad , \tag{4.2.3.1}$$

où $\delta\big(S(p,q,r)\big)$ est le morphisme de $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ associé à la suite exacte $S(p,q,r)$ (4.2.2.4) *par le δ-foncteur canonique* $\mathsf{comp}(\mathcal{A}) \to \mathsf{D}(\mathcal{A})$ (1.3.2).

a) *Les objets $X(p,q)$* (4.2.2.1), *les morphismes $\varphi\big((p,q),(p',q')\big)$* (4.2.2.2) *et les morphismes $\delta(p,q,r)$* (4.2.3.1) *définissent un objet spectral à valeurs dans $\mathsf{D}(\mathcal{A})$.*

b) *Les morphismes $J(p,q)$* (4.2.2.5) *définissent un isomorphisme de l'objet spectral $\big(\mathcal{X}(p,q), \delta(p,q,r)\big)$ sur l'objet spectral $\big(X(p,q), \delta(p,q,r)\big)$.*

L'assertion a) résulte immédiatement des proporiétés du δ-foncteur canonique $\mathsf{comp}(\mathcal{A}) \to \mathsf{D}(\mathcal{A})$ (1.3.1). Pour démontrer l'assertion b), le lecteur se reportera à (1.3.2).

4.2.4. Un morphisme d'objets filtrés de type $\widetilde{\mathbb{Z}}$ de $\mathsf{comp}(\mathcal{A})$ induit de la manière évidente un morphisme entre les objets spectraux associés décrits par la proposition (4.2.3), a). La proposition (4.2.3) définit donc un foncteur de la catégorie des objets filtrés de $\mathsf{comp}(\mathcal{A})$ dans la catégorie des objets spectraux à valeurs dans $\mathsf{D}(\mathcal{A})$.

Soient X un objet de $\mathsf{comp}(\mathcal{A})$ et $X(q) \subset X$, $q \in \widetilde{\mathbb{Z}}$, sa première filtration canonique. L'objet spectral associé par la proposition (4.2.3) à l'objet filtré $\big(X, X(q), q \in \widetilde{\mathbb{Z}}\big)$ n'est autre, dans ce cas, que le premier objet spectral, à valeurs dans $\mathsf{D}(\mathcal{A})$, associé au complexe X (4.1.5).

Soient de même X un complexe n-uple de $\mathcal{A}$, $\int_n X = Y$ le complexe simple associé, m un entier, $1 \leq m \leq n$, et :

$$0 = {}^mY(-\infty) \subset \cdots \subset {}^mY(q) \subset \cdots \subset {}^mY(+\infty) = Y$$

la filtration définie par le m-ième degré de X (4.1.6.9). L'objet spectral associé par la proposition (4.2.3) à l'objet filtré $\big(Y, {}^mY(q), q \in \widetilde{\mathbb{Z}}\big)$ n'est autre, dans ce cas, que l'objet spectral, à valeurs dans $\mathsf{D}(\mathcal{A})$, défini par X, filtré par son m-ième degré (4.1.8).

4.3. Deuxième objet spectral canonique.

4.3.1. Soit X un objet de $\mathsf{comp}(\mathcal{A})$. Posons :

(4.3.1.1)
$$X(-\infty) = 0 \quad , \qquad X(+\infty) = X \quad ,$$

$$X(q) = \cdots X^{q-3} \to X^{q-2} \to \mathsf{Ker}(d_X^{q-1}) \to 0 \to 0 \to \cdots \ , \quad q \in \mathbb{Z} \ ,$$

les différentielles de ce dernier complexe étant induites par les différentielles de X. On a des monomorphismes canoniques :

$$0 = X(-\infty) \subset \cdots \subset X(q) \subset X(q+1) \subset \cdots \subset X(+\infty) = X \tag{4.3.1.2}$$

qui définissent une filtration de type $\widetilde{\mathbb{Z}}$ sur X qu'on appelle *la deuxième filtration canonique* de X. On en déduit, par la proposition (4.2.3), un objet spectral $\big(X(p,q), \delta(p,q,r)\big)$ qu'on appelle le *deuxième objet spectral, à valeurs dans* $\mathsf{D}(\mathcal{A})$*, associé au complexe* X. Un morphisme dans $\mathsf{comp}(\mathcal{A}) : X \to Y$ respecte les deuxièmes filtrations canoniques et, par suite, le foncteur :

$$X \longmapsto \big(X(p,q), \delta(p,q,r)\big)$$

est un foncteur de $\mathsf{comp}(\mathcal{A})$ dans la catégorie des objets spectraux à valeurs dans $\mathsf{D}(\mathcal{A})$. Ce foncteur est appelé le foncteur *deuxième objet spectral canonique.*

Proposition 4.3.2. *Soient X un objet de* $\mathsf{comp}(\mathcal{A})$, $\big(X(p,q), \delta(p,q,r)\big)$ *le deuxième objet spectral associé à X et* $\mathsf{H} : \mathsf{D}(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$ *le foncteur cohomologique canonique.*

a) $\mathsf{H}^r\big(X(p,q)\big) = 0$, *pour tout entier $r < p$ ou $r \geq q$.*

b) *Soit r un entier. Pour tout élément $(p,q) \in \mathsf{Fl}_1(\widetilde{\mathbb{Z}})$ tel que $p \leq r < q$, il existe un et un seul isomorphisme :*

$$i^r_{p,q}(X) : \mathsf{H}^r(X) \longrightarrow \mathsf{H}^r\big(X(p,q)\big)$$

tel que $i^r_{-\infty,+\infty}(X)$ soit l'identité et tel que pour tout couple (p,q) et (p',q'), $p \leq p'$, $q \leq q'$, $p \leq r < q$, $p' \leq r < q'$, le diagramme ci-après soit commutatif :

$$\begin{tikzcd}
 & \mathsf{H}^r(X) \arrow[dl, "i^r_{p,q}(X)"'] \arrow[dr, "i^r_{p',q'}(X)"] & \\
\mathsf{H}^r(X(p,q)) \arrow[rr, "\mathsf{H}^r\left(\varphi\left((p,q),(p',q')\right)\right)"] & & \mathsf{H}^r(X(p',q'))
\end{tikzcd} .$$

c) *Soient $m : X \to Y$ un morphisme de* $\mathsf{comp}(\mathcal{A})$ *et :*

$$m(p,q) : X(p,q) \to Y(p,q)$$

le morphisme correspondant entre les deuxièmes objets spectraux associés. Pour tout élément (p,q) de $\mathsf{Fl}_1(\widetilde{\mathbb{Z}})$ et tout entier r tel que $p \leq r < q$, le diagramme ci-après est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{H}^r(X) \arrow[r, "\mathsf{H}^r(m)"] \arrow[d, "i^r_{p,q}(X)"', "\wr"] & \mathsf{H}^r(Y) \arrow[d, "i^r_{p,q}(Y)", "\wr"'] \\
\mathsf{H}^r(X(p,q)) \arrow[r, "\mathsf{H}^r(m(p,q))"] & \mathsf{H}^r(Y(p,q))
\end{tikzcd} .$$

Cette proposition résulte immédiatement des définitions.

Corollaire 4.3.3. *Le foncteur deuxième objet spectral canonique* (4.3.1) *se factorise d'une manière unique à travers le foncteur canonique :*

$$\mathsf{comp}(\mathcal{A}) \to \mathsf{D}(\mathcal{A}) .$$

En effet, d'après (4.3.2), un quasi-isomorphisme $m : X \to Y$ est transformé par ce foncteur en isomorphisme d'objets spectraux. Le corollaire résulte donc de (1.3.5).

4.3.4. Le foncteur de $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ dans la catégorie des objets spectraux de $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ est encore appelé, abusivement, le *foncteur deuxième objet spectral canonique.*

Soient X un complexe de $\mathcal{A}$, $\big(X(p,q), \delta(p,q,r)\big)$ le deuxième objet spectral associé à X. Il résulte de (4.3.2) et (1.2.10) qu'on a un isomorphisme canonique dans $\mathsf{D}(\mathcal{A})$:

$$X(p, p+1) \xrightarrow{\sim} \mathsf{H}^p(X)[-p] \quad . \tag{4.3.4.1}$$

Notons aussi que lorsque X est un objet de $\mathsf{D}^*(\mathcal{A})$ $(* = -, +, b,$ “vide”), le deuxième objet spectral associé à X est en fait à valeurs dans $\mathsf{D}^*(\mathcal{A})$.

4.4. Suites spectrales usuelles.

4.4.1. Soient $\mathcal{A}$ une catégorie additive, non nécessairement abélienne, $F : \mathsf{K}(\mathcal{A}) \to \mathcal{B}$ un foncteur cohomologique dans une catégorie abélienne $\mathcal{B}$, $F^p : \mathsf{K}(\mathcal{A}) \to \mathcal{B}$ les foncteurs déduits de F en composant avec le foncteur de translation de $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ $\big(F^p(X) = F(X[p])\big)$. Soit, de plus, Y un complexe de $\mathcal{A}$. Le foncteur F transforme le premier objet spectral, à valeurs dans $\mathsf{K}(\mathcal{A})$, associé à Y (4.1.4) en un objet spectral à valeurs dans $\mathcal{B}$. On en déduit (chap. II, 4.3.3) une suite spectrale à valeurs dans $\mathcal{B}$, fonctorielle en F et en Y (lorsque celui-ci varie dans $\mathsf{comp}(\mathcal{A})$), qu'on appelle la *première suite spectrale du foncteur F, relative au complexe Y*. On utilise toujours, pour cette suite spectrale, l'indexation introduite au (chap. II, 4.3.3.1).

Proposition 4.4.2. a) *Le terme $\mathrm{I}_1^{p,q}$ de la première suite spectrale du foncteur F relative au complexe Y est donné par :*

$$\mathrm{I}_1^{p,q} = F^q(Y^p)$$

(Y^p désigne ici le complexe dont le seul composant non nul est, en degré zéro, le p-ième composant du complexe Y). La différentielle correspondante est :

$$d_1 : \mathrm{I}_1^{p,q} \longrightarrow \mathrm{I}_1^{p+1,q} \ ,$$

$$d_1 = F^q(-d_Y^p) : F^q(Y^p) \longrightarrow F^q(Y^{p+1}) \quad .$$

b) *Le terme $\mathrm{I}_2^{p,q}$ de cette même suite spectrale peut donc se décrire comme suit : désignons par $F^{q,\bullet} : \mathsf{comp}\big(\mathsf{K}(\mathcal{A})\big) \to \mathsf{comp}(\mathcal{B})$ l'extension de F^q aux complexes, $\mathsf{H}^p_{\mathcal{B}} : \mathsf{comp}(\mathcal{B}) \to \mathcal{B}$ le foncteur p-ième objet de cohomologie et $Y^\bullet$ l'objet de $\mathsf{comp}\big(\mathsf{K}(\mathcal{A})\big)$:*

$$Y^\bullet = \cdots \to Y^{p-1} \xrightarrow{d_Y^{p-1}} Y^p \xrightarrow{d_Y^p} Y^{p+1} \longrightarrow \cdots \quad .$$

On a alors :

$$\mathrm{I}_2^{p,q} = \mathsf{H}^p_{\mathcal{B}} F^{q,\bullet}(Y^\bullet) \quad .$$

c) *Les termes* $\mathrm{I}_\infty^{p,q}$ *sont les gradués associés aux objets* $F^{p+q}(Y)$ *convenablement filtrés.*

Démontrons a). Soit $\big(Y(p,q), \delta(p,q,r)\big)$ le premier objet spectral à valeurs dans $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ associé au complexe Y. Il résulte immédiatement de la définition de cet objet qu'on a (4.1.2.3) :

$$Y(-p-1,-p) = Y^p[-p] \quad .$$

Par suite (chap. II, 4.3.3.1) :

$$\mathrm{I}_1^{p,q} = F^{p+q}\big(Y^p[-p]\big) = F^q(Y^p) \quad .$$

La description de la différentielle $d_1 : \mathrm{I}_1^{p,q} \to \mathrm{I}_1^{p+1,q}$ se déduit alors immédiatement de (4.1.2.6). L'assertion b) résulte immédiatement de a). La dernière assertion résulte de (chap. II, 4.3.2).

Remarque 4.4.3. Désignons par $\big(\mathrm{I}_r^{p,q}(Y)\,,\, d_r\,,\, r \geq 1\big)$ la première suite spectrale du foncteur F relative au complexe Y. Le foncteur :

$$Y \longmapsto \big(\mathrm{I}_r^{p,q}(Y)\,,\, d_r\,,\, r \geq 1\big)$$

est un foncteur de la catégorie $\mathsf{comp}(\mathcal{A})$ dans la catégorie des suites spectrales à valeurs dans $\mathcal{B}$. Ce foncteur ne se factorise pas en général par la catégorie $\mathsf{K}(\mathcal{A})$. En revanche, le foncteur :

$$Y \longmapsto \big(\mathrm{I}_r^{p,q}(Y)\,,\, d_r\,,\, r \geq 2\big)$$

se factorise, d'après la proposition (4.4.2), b), par la catégorie des complexes à homotopie près.

4.4.4. Soient maintenant $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne, $F : \mathsf{D}(\mathcal{A}) \to \mathcal{B}$ un foncteur cohomologique à valeurs dans une catégorie abélienne, F^p, $p \in \mathbb{Z}$, les foncteurs déduits de F en composant avec les translations de $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ $\big(F^p(X) = F(X[p])\big)$. Soient, de plus, Y un objet de $\mathsf{comp}(\mathcal{A})$ et $\big(Y(p,q), \delta(p,q,r)\big)$ le premier objet spectral, à valeurs dans $\mathsf{D}(\mathcal{A})$, associé au complexe Y. Le foncteur F transforme cet objet spectral en un objet spectral à valeurs dans $\mathcal{B}$. On en déduit une suite spectrale à valeurs dans $\mathcal{B}$ qu'on appelle encore la *première suite spectrale du foncteur F, relative au complexe Y*. Cette suite spectrale est décrite essentiellement par la proposition (4.4.2) (il suffit dans la proposition (4.4.2) de remplacer la catégorie $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ par la catégorie $\mathsf{D}(\mathcal{A})$). La première suite spectrale du foncteur F, relativement au complexe Y, dépend fonctoriellement de F et de l'argument Y quand celui-ci varie dans $\mathsf{comp}(\mathcal{A})$. Nous utiliserons toujours, pour cette suite spectrale, l'indexation introduite en (chap. II, 4.3.3.1).

4.4.5. Les données sont les mêmes qu'en (4.4.4) mais on se donne, de plus, un objet X de $\mathsf{D}(\mathcal{A})$. Soit $\big(X(p,q), \delta(p,q,r)\big)$ le deuxième objet spectral à valeurs dans $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ associé au complexe X (4.3.1). Le foncteur F transforme cet objet spectral en un objet spectral à valeurs dans $\mathcal{B}$. On en déduit une suite spectrale fonctorielle en F et en l'argument X lorsque celui-ci varie dans la catégorie $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ (4.3.3). Cette suite spectrale est appelée la *deuxième suite spectrale du foncteur F, relative au complexe X*. On utilise toujours, pour cette suite spectrale, l'indexation introduite au (chap. II, 4.3.3.2).

Proposition 4.4.6. a) *Le terme $\mathrm{II}_2^{p,q}$ de la deuxième suite spectrale de F relative au complexe X est donné par :*

$$\mathrm{II}_2^{p,q} = F^p\big(\mathsf{H}^q(X)\big)$$

b) *Les termes $\mathrm{II}_\infty^{p,q}$ sont les gradués associés aux objets $F^{p+q}(X)$ convenablement filtrés.*

En effet (4.3.4.1), on un isomorphisme canonique :

$$X(p,p+1) \xrightarrow{\sim} \mathsf{H}^p(X)[-p] \quad ,$$

d'où en utilisant (chap. II, 4.3.3.2) :

$$\mathrm{II}_2^{p,q} = F^{p+q}\big(\mathsf{H}^q(X)[-q]\big) = F^p\big(\mathsf{H}^q(X)\big) \quad ,$$

d'où l'égalité (abusive) de a). L'assertion b) résulte de (chap. II, 4.3.2).

4.5. Problèmes de convergence.

Définition 4.5.1. Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux catégories abéliennes. Un foncteur *cohomologique* $F : \mathsf{D}^*(\mathcal{A}) \to \mathcal{B}$ ($* = +\,,\,-\,,\,b\,,$ "vide") est dit *stationnaire à droite* (resp. *à gauche*) s'il existe un entier n_0 tel que, pour tout objet X de $\mathsf{D}^*(\mathcal{A})$ tel que $\mathsf{H}^i(X) = 0$, pour tout $i < 0$ (resp. > 0), on ait $F^n(X) = 0$, pour tout $n < n_0$ (resp. $n > n_0$). Le foncteur F est dit *stationnaire* s'il est stationnaire à droite et à gauche. Un foncteur exact $G : \mathsf{D}^*(\mathcal{A}) \to \mathsf{D}^{*'}(\mathcal{B})$ est dit *stationnaire à droite* (resp. *stationnaire à gauche,* resp. *stationnaire*) si le foncteur cohomologique obtenu en composant le foncteur G avec le foncteur cohomologique canonique $\mathsf{D}^{*'}(\mathcal{B}) \to \mathcal{B}$ est stationnaire à droite (resp. stationnaire à gauche, resp. stationnaire).

4.5.2. Soient $F : \mathsf{D}(\mathcal{A}) \to \mathcal{B}$ un foncteur cohomologique stationnaire à droite, p un entier, X un objet de $\mathsf{comp}(\mathcal{A})$ et :

$$0 = X(-\infty) \to \cdots \to X(q) \to X(q+1) \to \cdots \to X(+\infty) = X$$

la deuxième filtration canonique (4.3.1) de X. Le système inductif $F^p\big(X(q)\big)$ est stationnaire, *i.e.* il existe un entier q_0 tel que pour tout q, $q_0 \leq q \leq +\infty$, le morphisme :

$$F^p\big(X(q)\big) \to F^p(X)$$

soit un isomorphisme. En effet, avec les notations de (4.2.3), on a une suite exacte :

$$F^{p-1}\big(X(q,+\infty)\big) \to F^p\big(X(q)\big) \to F^p(X) \to F^p\big(X(q,+\infty)\big) \quad ,$$

et le foncteur F étant stationnaire à droite, il existe un entier q_0 tel que pour tout $q > q_0$ les objets $F^p\big(X(q,+\infty)\big)$ et $F^{p-1}\big(X(q,+\infty)\big)$ soient nuls.

Soient de même $F : \mathsf{D}(\mathcal{A}) \to \mathcal{B}$ un foncteur cohomologique stationnaire à droite, p un entier, Y un objet de $\mathsf{comp}(\mathcal{A})$ et :

$$0 = Y(-\infty) \to \cdots \to Y(q) \to Y(q+1) \to \cdots Y(+\infty) = Y \quad ,$$

la première filtration de Y (4.1.2). Il existe un entier q_0 tel que pour tout $q < q_0$ l'objet $F^p\big(Y(q)\big)$ soit nul. La vérification analogue à la précédente est laissée au lecteur qui pourra de même, en passant aux catégories opposées, étudier les propriétés analogues des foncteurs stationnaires à gauche.

Proposition 4.5.3. a) *Soit Y un objet de* $\mathsf{comp}^*(\mathcal{A})$ (1.1.1) ($* = +\,,\,-\,,\,b$, "vide"). *Soit $F : \mathsf{D}^*(\mathcal{A}) \to \mathcal{B}$ un foncteur cohomologique. La première suite spectrale du foncteur F relative au complexe Y* (4.4.1) *dont les termes initiaux sont* (4.4.2) :

$$\mathrm{I}_1^{p,q} = F^q(Y^p)$$

est stationnaire (chap. II, 4.4.2) *dans les cas suivants :*

1) *Y est un objet de* $\mathsf{comp}^b(\mathcal{A})$.

2) *Y est un objet de* $\mathsf{comp}^+(\mathcal{A})$ *et F est stationnaire à droite.*

3) *Y est un objet de* $\mathsf{comp}^-(\mathcal{A})$ *et F est stationnaire à gauche.*

4) *Le foncteur F est stationnaire.*

b) *Soient X un objet de* $\mathsf{D}^*(\mathcal{A})$ (1.2.4) *et $F : \mathsf{D}^*(\mathcal{A}) \to \mathcal{B}$ un foncteur cohomologique. La deuxième suite spectrale du foncteur F relative au complexe X* (4.4.5) *est stationnaire dans les cas suivants :*

1) *X est un objet de* $\mathsf{D}^b(\mathcal{A})$.

2) *X est un objet de* $\mathsf{D}^+(\mathcal{A})$ *et F est stationnaire à droite.*

3) *X est un objet de* $\mathsf{D}^-(\mathcal{A})$ *et F est stationnaire à gauche.*

4) *Le foncteur F est stationnaire.*

Cette proposition résulte immédiatement de (4.5.2) et de la définition (chap. II, 4.4.2).

Théorème 4.5.4. *Soient* $F_1, F_2 : \mathsf{D}^*(\mathcal{A}) \to \mathcal{B}$ ($* = +\,,\,-\,,\,b\,,$ "vide") *deux foncteurs cohomologiques* (resp. $G_1, G_2 : \mathsf{D}^*(\mathcal{A}) \to \mathsf{D}^{*'}(\mathcal{B})$ *deux foncteurs exacts*) *et* $m : F_1 \to F_2$ (resp. $m : G_1 \to G_2$) *un morphisme de foncteurs* (resp. *un morphisme de foncteurs exacts* (chap. I, 1.6.6.4)). *La sous-catégorie pleine de* $\mathsf{D}^*(\mathcal{A})$ *définie par les objets X de* $\mathsf{D}^*(\mathcal{A})$ *tels que* $m\big(X[p]\big)$ *soit un isomorphisme, pour tout entier p, est une sous-catégorie triangulée strictement pleine et saturée de* $\mathsf{D}^*(\mathcal{A})$ (chap. II, 2.1.6), *notée* $\mathsf{Is}(m)$.

a) *Si tout objet de $\mathcal{A}$ est un objet de* $\mathsf{Is}(m)$, *alors* $\mathsf{D}^b(\mathcal{A}) \subset \mathsf{Is}(m)$.

b) *Si tout objet de $\mathcal{A}$ est un objet de* $\mathsf{Is}(m)$ *et si les foncteurs F_1 et F_2* (resp. *G_1 et G_2*) *sont stationnaires à droite, alors* $\mathsf{D}^+(\mathcal{A}) \cap \mathsf{D}^*(\mathcal{A}) \subset \mathsf{Is}(m)$.

c) *Si tout objet de $\mathcal{A}$ est un objet de* $\mathsf{Is}(m)$ *et si les foncteurs F_1 et F_2* (resp. *G_1 et G_2*) *sont stationnaires à gauche, alors* $\mathsf{D}^-(\mathcal{A}) \cap \mathsf{D}^*(\mathcal{A}) \subset \mathsf{Is}(m)$.

d) *Si tout objet de $\mathcal{A}$ est un objet de* $\mathsf{Is}(m)$ *et si les foncteurs F_1 et F_2* (resp. *G_1 et G_2*) *sont stationnaires, alors* $\mathsf{D}^*(\mathcal{A}) = \mathsf{Is}(m)$.

e) *S'il existe une partie M de* $\mathsf{Ob}(\mathcal{A})$ *telle que :*

α) *tout objet de $\mathcal{A}$ soit isomorphe à un quotient d'un objet appartenant à M;*

β) *tout objet appartenant à M soit un objet de* $\mathsf{Is}(m)$;

si de plus les foncteurs F_1 et F_2 (resp. *G_1 et G_2*) *sont stationnaires à gauche, alors* $\mathsf{D}^-(\mathcal{A}) \cap \mathsf{D}^*(\mathcal{A}) \subset \mathsf{Is}(m)$.

f) *S'il existe une partie M de* $\mathsf{Ob}(\mathcal{A})$ *telle que :*

α) *tout objet de $\mathcal{A}$ soit isomorphe à un sous-objet d'un objet appartenant à M;*

β) *tout objet appartenant à M est un objet de* $\mathsf{Is}(m)$;

si de plus les foncteurs F_1 et F_2 (resp. *G_1 et G_2*) *sont stationnaires à droite, alors* $\mathsf{D}^+(\mathcal{A}) \cap \mathsf{D}^*(\mathcal{A}) \subset \mathsf{Is}(m)$.

Notons, tout d'abord, que la partie resp. du théorème (4.5.4) se déduit de la partie non resp., en composant les foncteurs G_1 et G_2 avec le foncteur cohomologique canonique $\mathsf{D}^{*'}(\mathcal{B}) \to \mathcal{B}$. Démontrons *a*). Soit X un objet de

$\mathsf{D}^b(\mathcal{A})$. Le morphisme m induit un morphisme entre les deuxièmes suites spectrales canoniques des foncteurs F_1 et F_2 relatives au complexe X. Le morphisme induit entre les termes initiaux :

$$m_2^{p,q}(X) : F_1^p\big(\mathsf{H}^q(X)\big) \longrightarrow F_2^p\big(\mathsf{H}^q(X)\big)$$

est par hypothèse un isomorphisme. De plus, les deux suites spectrales sont stationnaires (4.5.3). On en déduit (chap. II, 4.4.5) que le morphisme m induit un isomorphisme entre les aboutissements des deux suites spectrales et, par suite, que $m(X)$ est un isomorphisme. Les assertions b), c), d) se démontrent de manière analogue : il suffit de remarquer que sous les hypothèses faites, les deuxièmes suites spectrales canoniques sont stationnaires (4.5.3). Démontrons e). Il suffit, d'après c), de montrer que tout objet de $\mathcal{A}$ est un objet de $\mathsf{Is}(m)$. Soient X un objet de $\mathcal{A}$, p un entier, et montrons que le morphisme :

$$m\big(X[p]\big) : F_1^p(X) \longrightarrow F_2^p(X)$$

est un isomorphisme. Les foncteurs F_1 et F_2 étant stationnaires à gauche, il existe un entier r tel que $F_i^q(Y) = 0$, pour $i = 1, 2$, tout objet Y de $\mathcal{A}$ et tout entier $q \geq p+r-1$. La propriété α) implique que X est quasi-isomorphe à un complexe :

$$W^\bullet = \cdots \to 0 \to Y \to L^{-r+1} \to L^{-r+2} \to \cdots \to L^{-1} \to L^0 \to 0 \to \cdots \quad ,$$

où les composants L^i, $-r+1 \leq i \leq 0$, sont des éléments de M. Désignons par $L^\bullet$ le complexe :

$$\cdots \to 0 \to L^{-r+1} \to L^{-r+2} \to \cdots \to L^{-1} \to L^0 \to 0 \to \cdots \quad .$$

On a une suite exacte de complexes :

$$0 \to L^\bullet \to W^\bullet \to Y[r] \to 0 \quad ,$$

d'où (1.3.2) un triangle distingué de $\mathsf{D}^*(\mathcal{A})$:

$$\begin{tikzcd} & Y[r] \arrow[dl] & \\ L^\bullet \arrow[rr] & & X \arrow[ul] \end{tikzcd} \quad .$$

On en déduit un diagramme commutatif, où les lignes sont exactes :

$$\begin{tikzcd}
F_1^{p+r-1}(Y) \arrow[r] \arrow[d] & F_1^p(L^\bullet) \arrow[r] \arrow[d, "m(L^\bullet[p])"'] & F_1^p(X) \arrow[r] \arrow[d, "m(X[p])"] & F_1^{p+r}(Y) \arrow[d] \\
F_2^{p+r-1}(Y) \arrow[r] & F_2^p(L^\bullet) \arrow[r] & F_2^p(X) \arrow[r] & F_2^{p+r}(Y)
\end{tikzcd} .$$

L'entier r a été choisi de telle façon que les objets $F_i^q(Y)$ soient nuls, pour $i = 1, 2$ et $q \geq p + r - 1$, et, par suite, tout revient à montrer que $m(L^\bullet)$ est un isomorphisme, pour tout objet $L^\bullet$ de $\mathsf{comp}^b(\mathcal{A})$ dont les composants sont des éléments de M. Or le morphisme m induit un morphisme entre les premières suites spectrales des foncteurs F_1 et F_2 relatives au complexe $L^\bullet$. Sur les termes initiaux, ce morphisme :

$$m_1^{p,q}(L^\bullet) : F_1^q(L^p) \to F_2^q(L^p) \quad ,$$

est, par hypothèse, un isomorphisme. Ces suites spectrales étant stationnaires (4.5.3), le morphisme m induit un isomorphisme sur les aboutissments (chap. II, 4.4.5) et, par suite (4.4.2), le morphisme $m(L^\bullet)$ est un isomorphisme. Ceci achève la démonstration de l'assertion e). L'assertion f) se déduit de l'assertion e), en passant aux catégories opposées. Le théorème est démontré.

4.6. Objet spectral de Cartan-Eilenberg.

Définition 4.6.1. On dit qu'un complexe $I^\bullet$ de $\mathcal{A}$ est un *complexe injectif de Cartan-Eilenberg* si, pour tout entier i, les objets $\mathsf{Im}(d^i_{I^\bullet})$ et $\mathsf{H}^i(I^\bullet)$ sont injectifs.

4.6.2. On notera qu'un complexe injectif de Cartan-Eilenberg $I^\bullet$ est de type injectif (1.1.5), *i.e.* que ses composants sont des objets injectifs de $\mathcal{A}$ et que, pour tout entier i, l'objet $\mathsf{Ker}(d^i_{I^\bullet})$ est un objet injectif de $\mathcal{A}$. Ceci se vérifie immédiatement, en utilisant les suites exactes à trois termes qui relient ces différents objets.

Proposition 4.6.3. *Soit $I^\bullet$ un complexe injectif de Cartan-Eilenberg.*

a) *Pour tout complexe Y, le morphisme canonique :*

$$\mathsf{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{A})}(Y, I^\bullet) \longrightarrow \prod_{p \in \mathbb{Z}} \mathsf{Hom}_{\mathcal{A}}\big(\mathsf{H}^p(Y), \mathsf{H}^p(I^\bullet)\big)$$

est un isomorphisme.

b) *Soit* $Q : \mathsf{K}(\mathcal{A}) \to \mathsf{D}(\mathcal{A})$ *le foncteur de passage au quotient. Le complexe* $I^\bullet$ *est* Q*-libre à droite* (chap. II, 2.3.3), i.e. *pour tout complexe* Y*, le morphisme canonique :*

$$\mathsf{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{A})}(Y, I^\bullet) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathsf{D}(\mathcal{A})}(Y, I^\bullet)$$

est un isomorphisme.

c) *Soit :*

$$\mathsf{H}^*(I^\bullet) : \cdots \to \mathsf{H}^p(I^\bullet) \to \mathsf{H}^{p+1}(I^\bullet) \to \cdots$$

le complexe dont les composants sont les $\mathsf{H}^p(I^\bullet)$, $p \in \mathbb{Z}$, *et les différentielles sont nulles. Il existe un et un seul isomorphisme dans* $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ $I^\bullet \to \mathsf{H}^*(I^\bullet)$ *induisant l'identité sur les objets de cohomologie.*

d) *Les morphismes canoniques* $\mathsf{H}^*(I^\bullet) \to \mathsf{H}^p(I^\bullet)[-p]$ *définissent des isomorphismes dans* $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ *et dans* $\mathsf{D}(\mathcal{A})$:

$$\mathsf{H}^*(I^\bullet) \xrightarrow{\sim} \prod_{p \in \mathbb{Z}} \mathsf{H}^p(I^\bullet)[-p] \quad .$$

Montrons que a) entraîne b). En effet, il suffit (chap. II, 2.3.3) de montrer que pour tout complexe acyclique Y, $\mathsf{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{A})}(Y, I^\bullet) = 0$, ce qui résulte de a). Montrons que a) entraîne c). En effet, il suffit de remplacer, dans l'isomorphisme de a), le complexe Y par $I^\bullet$ et le complexe $I^\bullet$ par $\mathsf{H}^*(I^\bullet)$. On voit de même que a) entraîne d) en remplaçant, dans l'isomorphisme de a), le complexe $I^\bullet$ par le complexe $\mathsf{H}^*(I^\bullet)$. Démontrons a). Il résulte immédiatement des définitions que le complexe $I^\bullet$ est isomorphe à un complexe du type :

$$\cdots \to J^{n-2} \oplus \mathsf{H}^{n-1} \oplus J^{n-1} \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathrm{id} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} J^{n-1} \oplus \mathsf{H}^n \oplus J^n \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathrm{id} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} J^n \oplus \mathsf{H}^{n+1} \oplus J^{n+1} \to \cdots ,$$

et, par suite, il existe un homotopisme entre $I^\bullet$ et le complexe $\mathsf{H}^*(I^\bullet)$. Pour démontrer a), on peut donc supposer que $I^\bullet = \mathsf{H}^*(I^\bullet)$. Il est clair qu'on a alors un isomorphisme :

$$\mathsf{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{A})}\big(Y, \mathsf{H}^*(I^\bullet)\big) \xrightarrow{\sim} \prod_{p \in \mathbb{Z}} \mathsf{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{A})}\big(Y, \mathsf{H}^p(I^\bullet)[-p]\big) \quad .$$

De plus, les objets $\mathsf{H}^p(I^\bullet)$ étant injectifs, le morphisme canonique :

$$\mathsf{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{A})}\big(Y, \mathsf{H}^p(I^\bullet)[-p]\big) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{A}}\big(\mathsf{H}^p(Y), \mathsf{H}^p(I^\bullet)\big)$$

est un isomorphisme.

4.6.4. Soit $X^{\bullet\bullet}$ un double complexe de $\mathcal{A}$ (chap. I, 2.1.2). Le double complexe $X^{\bullet\bullet}$ définit un objet de $\mathsf{comp}(\mathsf{comp}(\mathcal{A}))$:

$$X^{\bullet\bullet}\ :\ \cdots\to X^{\bullet,n-1}\xrightarrow{d_2^{\bullet,n-1}} X^{\bullet,n}\xrightarrow{d_2^{\bullet,n}} X^{\bullet,n+1}\to\cdots\quad .$$

(On utilise les notations de (4.1.9). Attention au signe !) Désignons par $\mathsf{B}_1^p(X^{\bullet\bullet})$ le complexe simple :

$$\text{(4.6.4.1)}\qquad \begin{cases} \mathsf{B}_1^p(X^{\bullet\bullet})^i = \mathsf{Im}(d_1^{p-1,i}) \quad , \\ d^i_{\mathsf{B}_1^p(X^{\bullet\bullet})} \quad \text{induit par} \quad d_2^{p,i} \quad . \end{cases}$$

Désignons par $\mathsf{Z}_1^p(X^{\bullet\bullet})$ le complexe simple :

$$\text{(4.6.4.2)}\qquad \begin{cases} \mathsf{Z}_1^p(X^{\bullet\bullet})^i = \mathsf{Ker}(d_1^{p,i}) \quad , \\ d^i_{\mathsf{Z}_1^p(X^{\bullet\bullet})} \quad \text{induit par} \quad d_2^{p,i} \quad . \end{cases}$$

Désignons par $\mathsf{H}_1^p(X^{\bullet\bullet})$ le complexe simple :

$$\text{(4.6.4.3)}\qquad \begin{cases} \mathsf{H}_1^p(X^{\bullet\bullet})^i = \mathsf{Z}_1^p(X^{\bullet\bullet})^i/\,\mathsf{B}_1^p(X^{\bullet\bullet})^i \quad , \\ d^i_{\mathsf{H}_1^p(X^{\bullet\bullet})} \quad \text{induit par} \quad d_2^{p,i} \quad . \end{cases}$$

Enfin, Y étant un complexe simple de $\mathcal{A}$, nous désignons encore par Y le complexe double dont les composants sont nuls en deuxième degré non nul et dont les composants et les premières différentielles sont ceux de Y en deuxième degré zéro.

Définition 4.6.5. Soit Y un complexe simple de $\mathcal{A}$. Une *résolution injective de Cartan-Eilenberg* de Y est un double complexe :

$$I^{\bullet\bullet}\ :\ \cdots\to 0\to I^{\bullet,0}\to I^{\bullet,1}\to I^{\bullet,2}\to\cdots\quad ,$$

muni d'un morphisme appelé *augmentation* :

$$\varepsilon : Y\to I^{\bullet\bullet}$$

tel que pour tout entier p, les complexes simples $\mathsf{B}_1^p(I^{\bullet\bullet})$ (4.6.4.1) et $\mathsf{H}_1^p(I^{\bullet\bullet})$ (4.6.4.3) munis des augmentations :

$$\mathsf{B}_1^p(\varepsilon) : \mathsf{Im}(d_Y^{p-1}) \longrightarrow \mathsf{B}_1^p(I^{\bullet\bullet}) \quad ,$$

$$\mathsf{H}_1^p(\varepsilon) : \mathsf{H}^p(Y) \longrightarrow \mathsf{H}_1^p(I^{\bullet\bullet})$$

soient des résolutions de type injectif (1.1.4).

Nous appelons donc *résolution injective de Cartan-Eilenberg du complexe* Y ce que ces auteurs appellent simplement résolution injective du complexe Y ([**1**], chap. XVII), terminologie que nous n'utiliserons pas dans ce travail. Une résolution injective de Cartan-Eilenberg de Y induit des résolutions de type injectif des composants du complexe Y et des noyaux des différentielles de Y [*loc. cit.*]. Nous dirons qu'une résolution de Cartan-Eilenberg $\varepsilon : Y \to I^{\bullet\bullet}$ est de *longueur finie* s'il existe un entier n_0 tel que $I^{\bullet,n} = 0$ pour $n > n_0$. Pour qu'un complexe Y admette une résolution injective de Cartan-Eilenberg de longueur finie, il faut et il suffit que la dimension injective des objets de cohomologie de Y et des images des différentielles de Y soit majorée. Rappelons les résultats établis dans *loc. cit.* :

Proposition 4.6.6. a) *Lorsque la catégorie $\mathcal{A}$ possède suffisamment d'objets injectifs* (3.1.5)*, tout complexe simple Y de $\mathcal{A}$ admet une résolution injective de Cartan-Eilenberg.*

b) *Soient $f : X \to Y$ un morphisme de complexes simples, $\varepsilon : X \to I^{\bullet\bullet}$ et $\varepsilon' : Y \to J^{\bullet\bullet}$ deux résolutions injectives de Cartan-Eilenberg. Il existe un morphisme de doubles complexes :*

$$g : I^{\bullet\bullet} \longrightarrow J^{\bullet\bullet}$$

au dessus de f, i.e. *tel que le diagramme de morphismes de doubles complexes :*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varepsilon"'] & Y \arrow[d, "\varepsilon'"] \\ I^{\bullet\bullet} \arrow[r, "g"] & J^{\bullet\bullet} \end{tikzcd}$$

soit commutatif.

c) *Deux morphismes g, $g' : I^{\bullet\bullet} \to J^{\bullet\bullet}$ au dessus de f, sont homotopes* (*au sens de l'homotopie des morphismes de doubles complexes* (chap. I, 2.5.1)).

Nous renvoyons pour la démonstration à *loc. cit.*

4.6.7. Soient Y un objet de $\mathsf{comp}(\mathcal{A})$ et $Y \to I^{\bullet\bullet}$ une résolution injective de Cartan-Eilenberg de Y. Le double complexe $I^{\bullet\bullet}$ donne naissance à deux objets spectraux à valeurs dans $\mathsf{D}(\mathcal{A})$, suivant qu'on le filtre par son premier ou son deuxième degré (4.1.7). L'objet spectral, à valeurs dans $\mathsf{D}(\mathcal{A})$, défini par $I^{\bullet\bullet}$ *filtré par son deuxième degré*, est appelé *l'objet spectral de Cartan-Eilenberg de Y* (relatif à la résolution de Cartan-Eilenberg considéré).

Proposition 4.6.8. *Soient Y un complexe de $\mathcal{A}$ et $\varepsilon : Y \to I^{\bullet\bullet}$ une résolution injective de Cartan-Eilenberg de Y. Lorsque Y est un objet de $\mathsf{comp}^+(\mathcal{A})$, ou bien lorsque la résolution $I^{\bullet\bullet}$ est de longueur finie, le complexe simple $\int_2 I^{\bullet\bullet}$ est un complexe de type injectif et le morphisme de complexes :*

$$\int_2 \varepsilon \ : \ Y \longrightarrow \int_2 I^{\bullet\bullet}$$

est un quasi-isomorphisme.

En effet, le morphisme ε induit un morphisme entre le premier objet spectral de Y, à valeurs dans $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ (4.1.5), et l'objet spectral, à valeurs dans $\mathsf{D}(\mathcal{A})$, défini par $I^{\bullet\bullet}$ filtré par son premier degré ((4.1.7), (4.1.8)). Ces deux objets spectraux sont transformés par le foncteur cohomologique canonique $\mathsf{H} : \mathsf{D}(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$ en objets spectraux à valeurs dans la catégorie abélienne $\mathcal{A}$. Il suffit de montrer que ε induit un isomorphisme entre ces objets spectraux. Or l'objet spectral défini par Y est toujours stationnaire (chap. II, 4.4.2) et, sous les hypothèses faites, l'objet spectral défini par $I^{\bullet\bullet}$ est stationnaire. Il suffit donc de montrer que ε induit un isomorphisme sur les termes initiaux. Ces termes initiaux sont d'une part :

$$\mathrm{I}_1^{p,q} = \mathsf{H}^q(Y^p) \quad ,$$

et d'autre part :

$$'\mathrm{I}_1^{p,q} = \mathsf{H}^q(I^{p,\bullet}) \quad .$$

De plus, le morphisme induit par ε sur les termes initiaux est déduit par passage à la cohomologie du morphisme de complexes :

$$\varepsilon^p : Y^p \longrightarrow I^{p,\bullet} \quad .$$

Or ce morphisme est un quasi-isomorphisme, ce qui démontre la proposition.

4.6.9. Soient $F : \mathsf{D}(\mathcal{A}) \to \mathcal{B}$ un foncteur cohomologique, Y un objet de $\mathsf{comp}(\mathcal{A})$ et $Y \to I^{\bullet\bullet}$ une résolution injective de Cartan-Eilenberg. Le foncteur F transforme l'objet spectral de Cartan-Eilenberg correspondant (4.6.7) en un objet spectral à valeurs dans $\mathcal{B}$, d'où une suite spectrale appelée *suite spectrale de Cartan-Eilenberg*. Désignons par $(\mathrm{C.E.})_r^{p,q}$ les termes de cette suite spectrale (chap. II, 4.3.3.1). Les termes initiaux de cette suite spectrale sont (4.1.9.1) :

$$(\mathrm{C.E.})_1^{p,q} = F^{p+q}\big(I^{\bullet,p}[-p]\big) = F^q(I^{\bullet,p}) \quad ,$$

et les premières différentielles sont (4.1.9.1) :

$$d_1^{p,q} : (\text{C.E.})_1^{p,q} \longrightarrow (\text{C.E.})_1^{p+1,q} \quad ,$$

$$d_1^{p,q} = F^q(-d_2^{\bullet,p}) \quad .$$

Les complexes $I^{\bullet,p}$ sont des complexes injectifs de Cartan-Eilenberg (4.6.1) et, par suite (4.6.3), on a un isomorphisme canonique dans $\mathsf{D}(\mathcal{A})$:

$$I^{\bullet,p} \xrightarrow{\sim} \prod_{r\in\mathbb{Z}} \mathsf{H}^r(I^{\bullet,p})[-r] \quad .$$

Utilisons alors le complexe $\mathsf{H}_1^p(I^{\bullet\bullet})$ introduit en (4.6.4.3). Pour tout entier r on a :

$$\mathsf{H}_1^r(I^{\bullet\bullet})^p = \mathsf{H}^r(I^{\bullet,p}) \quad ,$$

d'où un isomorphisme canonique dans $\mathsf{D}(\mathcal{A})$:

$$I^{\bullet,p} \xrightarrow{\sim} \prod_{r\in\mathbb{Z}} \mathsf{H}_1^r(I^{\bullet\bullet})^p[-r] \quad ,$$

et, modulo cet isomorphisme, le morphisme de complexes :

$$d_2^{\bullet,p} : I^{\bullet,p} \longrightarrow I^{\bullet,p+1} \quad ,$$

est isomorphe au morphisme :

$$\prod_{r\in\mathbb{Z}} d^p_{\mathsf{H}_1^r(I^{\bullet\bullet})}[-r] \quad ,$$

d'où l'expression définitive des termes initiaux :

(4.6.9.1) $$(\text{C.E.})_1^{p,q} = F^q\Big(\prod_{r\in\mathbb{Z}} \mathsf{H}_1^r(I^{\bullet\bullet})^p[-r]\Big) \quad ,$$

et des premières différentielles :

(4.6.9.2) $$d_1^{p,q} = -F^q\Big(\prod_{r\in\mathbb{Z}} d^p_{\mathsf{H}_1^r(I^{\bullet\bullet})}[-r]\Big) \quad .$$

Soit alors $F^{q,\bullet}\big(\mathsf{H}_1^r(I^{\bullet\bullet})\big)$ le *complexe d'objets de* $\mathcal{B}$ obtenu en appliquant le foncteur F^q aux composants et aux différentielles du complexe $\mathsf{H}_1^r(I^{\bullet\bullet})$. Les formules (4.6.9.1) et (4.6.9.2) définissent un morphisme :

(4.6.9.3) $$(\text{C.E.})_2^{p,q} \longrightarrow \prod_{r\in\mathbb{Z}} \mathsf{H}^p_{\mathcal{B}}\big(F^{q-r,\bullet}(\mathsf{H}_1^r(I^{\bullet\bullet}))\big) \quad .$$

Ce morphisme est un isomorphisme lorsque, par exemple, le complexe Y est un objet de $\mathsf{comp}^+(\mathcal{A})$ et lorsque le foncteur F est stationnaire à droite, ou bien, sans hypothèse sur Y, lorsque le foncteur F est stationnaire (4.5.1).

Le double complexe $I^{\bullet\bullet}$ étant une résolution injective de Cartan-Eilenberg de Y, le complexe $\mathsf{H}_1^r(I^{\bullet\bullet})$ est une résolution injective de l'objet $\mathsf{H}^r(Y)$ et, par suite, on a un isomorphisme :

$$\mathsf{H}^p_{\mathcal{B}}\big(F^{q-r,\bullet}(\mathsf{H}_1^r(I^{\bullet\bullet}))\big) \xrightarrow{\sim} R^pF^{q-r}(\mathsf{H}^r(Y)) \quad , \tag{4.6.9.4}$$

où $R^pF^{q-r} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ désigne le p-ième dérivé droit (au sens de [**1**]) du foncteur F^{q-r} restreint à la catégorie $\mathcal{A}$. On a donc, lorsque le morphisme (4.9.6.3) est un isomorphisme, un isomorphisme :

$$(\text{C.E.})_2^{p,q} \xrightarrow{\sim} \prod_{r\in\mathbb{Z}} R^pF^{q-r}(\mathsf{H}^r(Y)) \quad . \tag{4.6.9.5}$$

4.6.10. Étudions le cas où la catégorie $\mathcal{B}$ est la catégorie Ab des groupes abéliens appartenant à un univers convenable et où le foncteur :

$$F : \mathsf{D}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathsf{Ab}$$

est le foncteur :

$$Y \longmapsto F(Y) = \mathsf{Ext}^0(Z,Y) \quad ,$$

où Z est un objet de $\mathsf{D}(\mathcal{A})$. Soient Y un complexe de $\mathcal{A}$ et $\varepsilon : Y \to I^{\bullet\bullet}$ une résolution injective de Cartan-Eilenberg. Le morphisme (4.6.9.3) est alors un isomorphisme (4.6.3) et, par suite, on a un isomorphisme :

$$(\text{C.E.})_2^{p,q} \xrightarrow{\sim} \prod_{r\in\mathbb{Z}} \mathsf{Ext}^p\big(\mathsf{H}^{r-q}(Z), \mathsf{H}^r(Y)\big) \quad . \tag{4.6.10.1}$$

Par ailleurs, la suite spectrale de Cartan-Eilenberg relative à F est stationnaire lorsque Y est un objet de $\mathsf{comp}^+(\mathcal{A})$ et Z un objet de $\mathsf{D}^-(\mathcal{A})$, ou bien lorsque la résolution injective de Cartan-Eilenberg est de longueur finie. De plus, sous ces hypothèses, l'aboutissement de cette suite spectrale est, en vertu de (4.6.8) :

$$\prod_{r\in\mathbb{Z}} \mathsf{Ext}^p\big(\mathsf{H}^{r-q}(Z), \mathsf{H}^r(Y)\big) \Longrightarrow \mathsf{Ext}^{p+q}(Z,Y) \quad .$$