Préface

Jean-Louis Verdier, tragiquement disparu le 25 août 1989, a soutenu sa thèse de doctorat d'État, intitulée *Des catégories dérivées des catégories abéliennes*, le 14 juin 1967, à Paris. Le présent texte est celui du manuscrit dactylographié de cette thèse, dans sa dernière version. Les éditeurs se sont bornés à corriger des erreurs de détail. Seule la partie intitulée *Introduction* avait été déposée à la faculté. Le corps du texte était inachevé à la date de la soutenance, et l'est resté.

La genèse de ce travail est assez bien connue (*cf.* [I]). On sait que Grothendieck conçut l'idée des catégories dérivées au début des années soixante pour fournir le cadre d'algèbre homologique nécessaire à la vaste généralisation des théorèmes de dualité qu'il avait imaginée à la suite de son exposé au congrès international d'Édinbourg de 1958. Il avait proposé à Verdier, comme sujet de thèse, de construire le formalisme envisagé. En 1963, Verdier faisait paraître un fascicule de résultats résumant l'essentiel de la théorie, *Catégories dérivées, quelques résultats (État 0)*, miméographié par l'IHÉS (reproduit dans [SGA 4 1/2]). Si la notion de catégorie dérivée est due à Grothendieck, c'est à Verdier que revient d'avoir introduit, en amont, celle de catégorie triangulée. L'axiomatique présentée là, inspirée de la théorie homotopique stable (*cf.* [P]), devait se révéler d'une surprenante fécondité.

Ce n'est que plusieurs années après que Verdier entreprend une rédaction d'ensemble de son travail. Pourquoi ne l'a-t-il pas terminée? Bien des hypothèses ont été avancées. Je pencherais pour la suivante. La partie qui manque est la théorie des foncteurs dérivés. Quand Verdier en arrive à cet endroit de sa rédaction, les catégories dérivées ont déjà été largement utilisées en géométrie algébrique. Diverses variantes et généralisations se développent : notion de dérivabilité ponctuelle à la Deligne, foncteurs dérivés non additifs (algèbre homotopique à la Quillen), foncteurs dérivés filtrés. Dès lors, le cadre fixé par le fascicule de résultats s'avérait insuffisant. Trouver le bon point de vue aurait demandé un nouveau travail de fondements que Verdier, intéressé à cette époque par d'autres problèmes, n'a eu, me semble-t-il, ni le loisir ni sans doute l'envie de réaliser. À mesure que le temps passait, des articles sur les catégories dérivées paraissaient et l'usage s'en répandait, le formalisme envahissant d'autres domaines des mathématiques (comme les équations aux dérivées partielles linéaires). L'achèvement de son ouvrage devenait alors aux yeux de Verdier une tâche de moins en moins nécessaire ...

Tout incomplet qu'il est, ce texte de Verdier constitue néanmoins une référence précieuse, voire irremplaçable (par exemple, la présentation, originale et élégante, qui y est donnée des suites spectrales ne se trouve, à ma connaissance, nulle part ailleurs). On ne peut que se réjouir qu'il voie enfin le jour.

Paris, le 27 avril 1996

Luc Illusie

Références

[I] L. Illusie, *Catégories dérivées et dualité, travaux de J.-L. Verdier*, L'Enseignement Mathématique, 36 (1990), 369-391. (Exposé donné le 19 octobre 1989, lors de la cérémonie en hommage à Jean-Louis Verdier organisée par l'Université Paris VII.)

[P] D. Puppe, *On the formal structure of stable homotopy theory*, Colloquium on Algebraic Topology, Aarhus Universitet (1962), 65-71.

[SGA 4 1/2] "Cohomologie étale", Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie, SGA 4 1/2, par P. Deligne, Lecture Notes in Mathematics 569, Springer-Verlag (1977), 262-311.

Note des éditeurs

C'est lors de la cérémonie en hommage à J.-L. Verdier, organisée par l'Université Paris VII, le 19 octobre 1989, que M. Artin, P. Cartier et L. Illusie eurent l'idée de publier la thèse de J.-L. Verdier. Deux ans plus tard je me joignais à eux et j'obtenais, grâce à l'appui de J. Le Potier et de M. Broué, un financement de Paris VII (URA 212) et de l'ÉNS (DMI) pour une saisie de ce texte en TEX. Une fois la frappe terminée, le résultat fut soigneusement comparé à l'original dactylographié de Verdier. Il restait encore à faire une relecture mathématique car Verdier n'avait jamais effectué les dernières corrections.

Cette lecture attentive a été faite, avec un extrême soin, par P. Cartier (chapitre I), B. Keller (chapitre III), et, pour l'ensemble du texte, par M. Zisman et moi-même. En dehors des nombreuses coquilles qui ne méritent pas d'être énumérées, les principales modifications apportées sont les suivantes. Dans le chapitre I, la proposition (3.1.5) affirmait une équivalence. Cette équivalence a été remplacée par une implication, la réciproque (jamais utilisée par la suite) étant fausse. Dans la proposition (3.4.1), il y avait une erreur de signe, induisant des erreurs de signe dans le chapitre III ((1.3.4), (*b*) et (3.2.7.3)). Ceci a conduit à adapter la définition de la "catégorie triangulée opposée" (chap. II, 1.1.7) afin que reste vraie l'affirmation : *la catégorie dérivée de la catégorie opposée est la catégorie triangulée opposée à la catégorie dérivée.*

Dans le chapitre II, l'ordre des propositions du §1.2 a été modifié. En effet, Verdier s'était rendu compte, après la rédaction, que l'assertion que la somme directe de deux triangles distingués est un triangle distingué est conséquence des autres axiomes des catégories triangulées. Il l'avait donc supprimée de la liste des axiomes, sans effectuer les remaniements qui en résultaient. D'autre part, les alinéas (2.3.6) et (2.3.7) qui n'étaient pas utilisés dans la suite, et dont la vérification a échoué, ont été supprimés. La définition de la notion d'objet spectral stationnaire (4.4.2) a été légèrement modifiée, la définition originale étant trop faible pour l'établissement du théorème (4.4.3) qui suivait. Il a été vérifié que cela était sans conséquence pour la suite.

L'index de notations et l'index terminologique ont été complétés. En revanche, la bibliographie a été laissée inchangée (sauf pour les SGA dont les références définitives dans les "Lecture Notes" ont été indiquées). En particulier, l'absence de référence numéro 13 n'a pas été comblée.

Je voudrais remercier vivement M. Broué, A. Bruguières, P. Cartier, L. Gruson, L. Illusie, B. Keller, J. Le Potier, M. Zisman, ainsi que l'Université Paris VII, l'École Normale Supérieure, et l'Institut des Hautes Études Scientifiques, qui ont aidé à divers titres à la réalisation de ce projet. Je remercie également C. Defosse et C. Gourgues pour avoir patiemment saisi cet ouvrage en $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX.

J'aurais aimé pouvoir étendre ces remerciements à L. Doustaing prématurément disparu en décembre 1994.

Paris, le 14 juin 1996

Georges Maltsiniotis

Publications de J.-L. Verdier

[01] *Sur les intégrales attachées aux formes automorphes* (d'après G. Shimura), Séminaire Bourbaki 1960-61, n° 216, pp. 216-1 à 216-27, Benjamin (1966).

[02] *Le théorème de dualité de Poincaré*, C.R.A.S. t. 256, pp. 2084-2086, Gauthier-Villars (1963).

[03] *Seminar on étale cohomology of number fields* (en collaboration avec M. Artin), Woods Hole Conference on Algebraic Geometry, A.M.S. (1964).

[04] *Équivalence essentielle des systèmes projectifs*, C.R.A.S. t. 261, pp. 4950-4953, Gauthier-Villars (1965).

[05] *Dimension des espaces localement compacts*, C.R.A.S. t. 261, pp. 5293-5296, Gauthier-Villars (1965).

[06] *Dualité dans la cohomologie des groupes profinis*, Appendice à "Cohomologie galoisienne" (Jean-Pierre Serre), Lecture Notes in Mathematics 5, pp. 183-206, Springer (1964), quatrième édition (1973).

[07] *Faisceaux constructibles sur un espace localement compact*, C.R.A.S. t. 262, pp. 12-15, Gauthier-Villars (1966).

[08] *Dualité dans la cohomologie des espaces localement compacts*, Séminaire Bourbaki 1965-66, n° 300, pp. 300-01 à 300-13, Benjamin (1966).

[09] *The Lefschetz fixed point formula in étale cohomology*, Conference on Local Fields, NUFFIC Summer School held at Driebergen in 1966, pp. 199-214, Springer (1967).

[10] *A duality theorem in the étale cohomology of schemes*, Conference on Local Fields, NUFFIC Summer School held at Driebergen in 1966, pp. 184-198, Springer (1967).

[11] *Base change for twisted inverse image of coherent sheaves*, Bombay Colloquium on Algebraic Geometry in 1968, pp. 393-408, Oxford University Press (1969).

[12] *Théorème de dualité pour la cohomologie des espaces localement compacts*, Dualité de Poincaré, Séminaire Heidelberg-Strasbourg 1966-67, exp. 4, Publ. I.R.M.A. Strasbourg, n° 3, pp. 1-36 (1969).

[13] *Théorème du noyau*, Dualité de Poincaré, Séminaire Heidelberg-Strasbourg 1966-67, exp. 9, Publ. I.R.M.A. Strasbourg, n° 3, pp. 1-52 (1969).

[14] *On a theorem of Wilder*, Applications of categorical algebra, Proc. Symp. Pure Math. 17, pp. 184-191, A.M.S. (1970).

[15] *Ein einfacher Beweis des Kohärenzsatzes von Grauert* (en collaboration avec R. Kiehl), Math. Ann. 195, pp. 24-50, Springer (1971).

[16] *Topologie sur les espaces de cohomologie d'un complexe de faisceaux analytiques à cohomologie cohérente*, Bull. Soc. Math. France 99, pp. 337-343, Gauthier-Villars (1971).

[17] *Dualité relative en géométrie analytique complexe* (en collaboration avec J.-P. Ramis et G. Ruget), Inv. Math. 13, pp. 261-283, Springer (1971).

[18] S.G.A. 4 (1963-64) "Théorie des topos et cohomologie étale des schémas" : *Préfaisceaux* (en collaboration avec A. Grothendieck) pp. 1-184 ; *Topologies et faisceaux,* pp. 219-263 ; *Fonctorialité des catégories de faisceaux,* pp. 265-297 ; *Topos* (en collaboration avec A. Grothendieck), pp. 299-519, Lecture Notes in Mathematics 269, Springer (1972).

[19] S.G.A. 4 (1963-64) "Théorie des topos et cohomologie étale des schémas" : *Cohomologie dans les topos,* pp. 1-62 ; *Conditions de finitude. Topos et sites fibrés. Applications aux questions de passage à la limite* (en collaboration avec A. Grothendieck), pp. 163-336, Lecture Notes in Mathematics 270, Springer (1972).

[20] *Caractéristique d'Euler-Poincaré*, Bull. Soc. Math. France 101, pp. 441-445, Gauthier-Villars (1973).

[21] *Le théorème de Le Potier*, Séminaire de géométrie analytique 1972-73, Différents aspects de la positivité, Astérisque 17, pp. 68-78, S.M.F. (1974).

[22] *Indépendance par rapport à ℓ des polynômes caractéristiques des endomorphismes de Frobenius de la cohomologie ℓ-adique* (d'après P. Deligne), Séminaire Bourbaki 1972-73, n° 423, Lecture Notes in Mathematics 383, pp. 98-115, Springer (1974).

[23] *Quelques problèmes d'intersection en géométrie riemannienne* (en collaboration avec P. Marry), J. Diff. Geom. 12, pp. 345-376, A.M.S. (1977).

[24] *Stratifications de Whitney et théorème de Bertini Sard*, Inv. Math. 36, pp. 295-312, Springer (1976).

[25] *Classe d'homologie associée à un cycle*, Séminaire de géométrie analytique 1974-75, Astérisque 36-37, pp. 101-151, S.M.F. (1976).

[26] *Le théorème de Riemann-Roch pour les intersections complètes*, Séminaire de géométrie analytique 1974-1975, Astérisque 36-37, pp. 189-228, S.M.F. (1976).

[27] *Le théorème de Riemann-Roch pour les variétés algébriques éventuellement singulières* (d'après P. Baum, W. Fulton et R. MacPherson), Séminaire Bourbaki 1974-75, n° 464, Lecture Notes in Mathematics 514, pp. 159-175, Springer (1976).

[28] *Catégories dérivées* (rédigé en 1963, publié en 1976), Séminaire de Géométrie Algébrique 4 1/2, Cohomologie Étale, Lecture Notes in Mathematics 569, pp. 262-311, Springer (1977).

[29] *Équations différentielles algébriques*, Séminaire Bourbaki 1977-78, n° 512, Lecture Notes in Mathematics 710, pp. 101-122, Springer (1979).

[30] *Instantons*, Les équations de Yang-Mills, Séminaire É.N.S. 1977-78, Astérisque 71-72, pp. 105-134, S.M.F. (1980).

[31] *Spécialisation des classes de Chern*, Caractéristique d'Euler-Poincaré, Séminaire É.N.S. 1978-79, Astérisque 82-83, pp. 149-159, S.M.F. (1981).

[32] *Algèbres de Lie, systèmes hamiltoniens, courbes algébriques* (d'après M. Adler et P. Van Moerbeke), Séminaire Bourbaki 1980-81, n° 566, Lecture Notes in Mathematics 901, pp. 85-94, Springer (1981).

[33] *Les représentations des algèbres de Lie affines : applications à quelques problèmes de physique* (d'après E. Date, M. Jimbo, M. Kashiwara, T. Miwa), Séminaire Bourbaki 1981-82, n° 596, Astérisque 92-93, pp. 365-377, S.M.F. (1982).

[34] *Construction des matrices S* (en collaboration avec A. Treibich-Kohn), Mathématique et Physique, Séminaire de l'É.N.S. 1979-82, Progress in Mathematics 37, pp. 175-196, Birkhäuser (1983).

[35] *Two dimensional σ-models and harmonic maps from S^2 to S^{2n}*, Group Theoretical Methods in Physics, Lecture Notes in Physics 180, pp. 136-141, Springer (1983).

[36] *Géométrie Microlocale*, Algebraic Geometry, Japan-France Conference, Tokyo-Kyoto 1982, Lecture Notes in Mathematics 1016, pp. 125-133, Springer (1983).

[37] *Construction géométrique de la correspondance de McKay* (en collaboration avec G. Gonzalez-Sprinberg), Annales Scientifiques É.N.S. t. 16, pp. 409-449, Gauthier-Villars (1983).

[38] *Spécialisation de faisceaux et monodromie modérée*, Analyse et topologie sur les espaces singuliers (II-III), Astérisque 101-102, pp. 332-364, S.M.F. (1983).

[39] *Transformation de Fourier géométrique* (en collaboration avec J.-L. Brylinski et B. Malgrange), C.R.A.S. t. 297, pp. 55-58, Gauthier-Villars (1983).

[40] *Extension of a perverse sheaf over a closed subspace*, Systèmes Différentiels et Singularités, Astérisque 130, pp. 210-217, S.M.F. (1985).

[41] *Prolongements de faisceaux pervers monodromiques*, Systèmes Différentiels et Singularités, Astérisque 130, pp. 218-236, S.M.F. (1985).

[42] *Reflexive modules over rational double points* (en collaboration avec M. Artin), Math. Ann. 270, pp. 79-82, Springer (1985).

[43] *Sur la règle de McKay en caractéristique positive* (en collaboration avec G. Gonzalez-Sprinberg), C.R.A.S. t. 301, pp. 585-587, Gauthier-Villars (1985).

[44] *Applications harmoniques de S^2 dans S^4*, Geometry today, International Conference, Rome 1984, Progress in Mathematics 60, pp. 267-282, Birkhäuser (1985).

[45] *Structure multiplicative des modules réflexifs sur les points doubles rationnels* (en collaboration avec G. Gonzalez-Sprinberg), Géométrie algébrique et applications : I. Géométrie et calcul algébrique, Travaux en cours 22, pp. 79-110, Hermann (1987).

[46] *Un calcul triste*, Appendice, Géométrie algébrique et applications : II. Singularités et géométrie complexe, Travaux en cours 23, pp. 12-14, Hermann (1987).

[47] *Transformation de Fourier géométrique II* (en collaboration avec J.-L. Brylinski et B. Malgrange), C.R.A.S. t. 303, pp. 193-198, Gauthier-Villars (1986).

[48] *Groupes quantiques* (d'après V. G. Drinfel'd), Séminaire Bourbaki 1986-87, n° 685, Astérisque 152-153, pp. 305-319, S.M.F. (1987).

[49] *Applications harmoniques de S^2 dans S^4 II*, Harmonic mappings, twistors, and σ-models, Advanced series in Mathematical Physics 4, pp. 124-147, World Scientific (1988).

[50] *New Elliptic Solitons*, "Algebraic Analysis", Papers Dedicated to Professor Mikio Sato on the Occasion of his Sixtieth Birthday, Vol. II, pp. 901-910, Academic Press (1988).

[51] *Solitons Elliptiques* (en collaboration avec A. Treibich), The Grothendieck Festschrift, Vol. III, Progress in Mathematics 88, pp. 437-473, Birkhäuser (1990).

[52] *Revêtements tangentiels et sommes de 4 nombres triangulaires* (en collaboration avec A. Treibich), C.R.A.S. t. 311, pp. 51-54, Gauthier-Villars (1990).

[53] *Boussinesq Elliptic Solitons : the cyclic case* (en collaboration avec E. Previato), Proceedings of the Indo-French Conference on Geometry, pp. 173-185, Hindustan Book Agency (1993).

[54] *Variétés de Kritchever des Solitons Elliptiques de KP* (en collaboration avec A. Treibich), Proceedings of the Indo-French Conference on Geometry, pp. 187-232, Hindustan Book Agency (1993).