Physique mathématique/*Mathematical physics*

CALCUL DIFFÉRENTIEL NON COMMUTATIF SUR LE GROUPE QUANTIQUE DES MATRICES TRIANGULAIRES.

Georges Maltsiniotis

Résumé - On introduit un calcul différentiel non commutatif sur une déformation quantique du groupe des matrices triangulaires inversibles d'ordre 2. On définit un complexe de de Rham sur ce groupe quantique et on étudie les formes invariantes ainsi que les opérateurs différentiels invariants.

NON-COMMUTATIVE DIFFERENTIAL CALCULUS ON THE QUANTUM GROUP OF TRIANGULAR MATRICES.

Abstract - We introduce a non-commutative differential calculus on a quantum deformation of the group of triangular invertible matrices of order 2. We define a de Rham complex on this quantum group and we study the invariant differential forms and the invariant differential operators.

Introduction et rappels. On se fixe un anneau commutatif K. La déformation quantique à deux paramètres ([**AST**], [**Mal1**], [**Su**]) de la bigèbre des fonctions polynomiales sur l'espace affine des matrices carrées d'ordre deux est la bigèbre

$$M_{p,q}(2) = K < a,b,c,d > /J \quad ,$$

où $K < a,b,c,d >$ désigne l'algèbre associative unifère libre engendrée par a, b, c, d (algèbre des "polynômes non commutatifs" en a, b, c, d) et J l'idéal bilatère engendré par

$$\begin{aligned} &ba - pab\,,\ dc - pcd\,,\ ca - qac\,,\ db - qbd\,, \\ &cb - p^{-1}qbc \quad \text{et} \quad da - ad - (q - p^{-1})bc\,, \end{aligned} \tag{1}$$

p et q étant des éléments inversibles de K. Le coproduit $\Delta : M_{p,q}(2) \to M_{p,q}(2) \otimes M_{p,q}(2)$ est défini par

$$\Delta(a) = a \otimes a + b \otimes c\,,\ \Delta(b) = a \otimes b + b \otimes d\,,\ \Delta(c) = c \otimes a + d \otimes c\,,\ \Delta(d) = c \otimes b + d \otimes d$$

et la coünité $\varepsilon : M_{p,q}(2) \to K$ par

$$\varepsilon(a) = \varepsilon(d) = 1 \quad \text{et} \quad \varepsilon(b) = \varepsilon(c) = 0 \quad .$$

Le groupe quantique $Gl_{p,q}(2)$ est obtenu en "rendant inversible" le déterminant quantique $t = ad - p^{-1}bc$. On obtient ainsi une bigèbre de Hopf dont l'antipode est défini par

$$I(a) = t^{-1}d = dt^{-1}\,, \quad I(b) = -qt^{-1}b = -pbt^{-1}\,,$$

$$I(c) = -q^{-1}t^{-1}c = -p^{-1}ct^{-1}\ , \quad I(d) = t^{-1}a = at^{-1}\ .$$

Par une construction universelle, inspirée d'une construction de Manin [**Man1**], on a introduit dans [**Mal1**] un complexe de de Rham non commutatif sur le "monoïde quantique" $M_{p,q}(2)$. C'est une bigèbre différentielle graduée dont la composante de degré 0 n'est autre que $M_{p,q}(2)$, qui est universelle parmi celles dont l'action sur le plan quantique est compatible avec les différentielles [**Mal1**], et dont l'algèbre différentielle graduée sous-jacente est définie par générateurs et relations comme suit : elle est engendrée (comme algèbre différentielle) par a, b, c, d soumis aux relations (1) ci-dessus ainsi qu'aux relations

(2) $\quad \alpha a - pqa\alpha\ ,\ \beta b - pqb\beta\ ,\ \gamma c - pqc\gamma\ ,\ \delta d - pqd\delta\ ,$

(3) $\quad \alpha c - pc\alpha\ ,\ \beta d - pd\beta\ ,\ \alpha b - qb\alpha\ ,\ \gamma d - qd\gamma\ ,$

(4) $\quad \beta a - pa\beta - (pq-1)b\alpha\ ,\ \delta c - pc\delta - (pq-1)d\gamma\ ,$

(5) $\quad \gamma a - qa\gamma - (pq-1)c\alpha\ ,\ \delta b - qb\delta - (pq-1)d\beta\ ,$

(6) $\quad q\beta c - p\gamma b - pc\beta + qb\gamma\ ,\ \alpha d + q\beta c - pc\beta - pqd\alpha\ ,$

(7) $\quad \gamma b + q\delta a - qa\delta - q^2 b\gamma - (pq-1)c\beta - q(pq-1)d\alpha\ ,$

où α, β, γ, δ désignent les différentielles de a, b, c, d (du moins si $pq+1$ est inversible dans K ; sinon il faut ajouter les relations $\alpha^2 = \beta^2 = \gamma^2 = \delta^2 = 0$ qui ne sont plus conséquence des précedentes). Pour plus de détails voir [**Mal1**] (exemple 7). La remarque cruciale dans [**Mal1**] est que ce complexe n'est pas une déformation du complexe de de Rham algébrique (ordinaire) sur l'espace affine (commutatif) des matrices 2×2, mais il possède un unique quotient ayant cette propriété et qui est encore une bigèbre (il existe un second quotient qui est une déformation, mais pas une bigèbre [**Man2**]). Pour cela, il faut et il suffit d'ajouter la relation $\alpha d = d\alpha$, et alors il est facile de vérifier que ce complexe quotient est défini par les relations (1)-(5) ci-dessus et les relations $(6')$ et $(7')$ ci-dessous :

$(6')$ $\quad \alpha d - d\alpha\ ,\ q\beta c - pc\beta - (pq-1)d\alpha\ ,\ p\gamma b - qb\gamma - (pq-1)d\alpha\ ,$

$(7')$ $\quad pq\delta a - pqa\delta - q(pq-1)b\gamma - p(pq-1)c\beta - (pq-1)^2 d\alpha\ .$

En inversant formellement le déterminant quantique, on obtient ainsi un complexe de de Rham non commutatif sur le groupe quantique $Gl_{p,q}(2)$ qui est maintenant universellement reconnu comme étant le "bon" complexe de de Rham sur ce groupe quantique [**Man2**], [**Tsy**]. Dans [**Mal3**] on a étudié les formes et les opérateurs différentiels invariants et dans [**Mal2**] et [**Mal4**] on a généralisé ce complexe en dimension quelconque. Tsygan a introduit un tel complexe pour des R-matrices plus générales, satisfaisant à la condition de Hecke ainsi qu'à une condition de non dégénérescence [**Tsy**].

Le groupe quantique des matrices triangulaires. On vérifie facilement que l'idéal bilatère de $M_{p,q}(2)$ engendré par c est aussi un coïdéal, d'où une bigèbre quotient, notée $T_{p,q}(2)$, qui comme algèbre est donc isomorphe à

$$K < a,b,d > /(ba - pab,\, db - qbd,\, da - ad) \quad ,$$

le coproduit $\Delta : T_{p,q}(2) \to T_{p,q}(2) \otimes T_{p,q}(2)$ étant défini par

$$\Delta(a) = a\otimes a\ , \quad \Delta(b) = a\otimes b + b\otimes d\ , \quad \Delta(d) = d\otimes d$$

et la coünité $\varepsilon : T_{p,q}(2) \to K$ par

$$\varepsilon(a) = \varepsilon(d) = 1 \quad \text{et} \quad \varepsilon(b) = 0 \quad .$$

L'image du déterminant quantique dans $T_{p,q}(2)$ est égale à ad ; la rendre inversible équivaut donc à rendre a et d inversibles. On obtient ainsi une bigèbre de Hopf notée $B^{+}_{p,q}(2)$ qui est le "groupe quantique des matrices triangulaires supérieures" et dont l'antipode est défini par

$$I(a) = a^{-1} \ , \quad I(b) = -a^{-1}bd^{-1} \ , \quad I(d) = d^{-1} \quad .$$

Si l'on essaye de définir un complexe de de Rham sur ce groupe quantique à partir du complexe défini par les relations (1)-(5) et $(6')$, $(7')$ en ajoutant la relation $c = 0$ (qui implique $\gamma = 0$), on constate aussitôt que le complexe ainsi obtenu n'est pas, si $pq \neq 1$, une déformation du complexe de de Rham algébrique ordinaire sur l'espace (commutatif) des matrices triangulaires, puisque la deuxième des relations $(6')$ combinée à la relation $c = 0$ implique que $(pq-1)d\alpha = 0$, d'où $(pq-1)\alpha = 0$ puisque d est inversible. En revanche, si l'on remonte au complexe défini par les relations (1) à (7) et l'on ajoute la relation $c = 0$, le complexe obtenu, qui est isomorphe (avant inversion du déterminant quantique) à l'algèbre différentielle graduée engendrée par les générateurs a, b, d soumis aux relations

(8) $\quad ba - pab \ , \ db - qbd \ , \ da - ad \ ,$

(9) $\quad \alpha a - pqa\alpha \ , \ \beta b - pqb\beta \ , \ \delta d - pqd\delta \ ,$

(10) $\quad \beta d - pd\beta \ , \ \delta b - qb\delta - (pq-1)d\beta \ ,$

(11) $\quad \alpha b - qb\alpha \ , \ \beta a - pa\beta - (pq-1)b\alpha \ ,$

(12) $\quad \alpha d - pqd\alpha \ , \ \delta a - a\delta - (pq-1)d\alpha \ ,$

(relations auxquelles il faut ajouter, si $pq+1$ n'est pas inversible dans K, les relations $\alpha^2 = \beta^2 = \delta^2 = 0$), est bien une déformation du "cas commutatif". En effet, on vérifie facilement (en utilisant, par exemple, le "diamond lemma" de Bergman [**Be**]) que la famille des monômes

$$(a^l b^m d^n \alpha^i \beta^j \delta^k)_{l,m,n \in \mathbb{N}, i,j,k \in \{0,1\}}$$

en est une base. De plus, il résulte de la propriété universelle du complexe défini par les relations (1) à (7), que ce complexe est la seule bigèbre différentielle graduée (à isomorphisme près) qui est à la fois une déformation "du cas commutatif" et qui agit sur le plan quantique de façon compatible aux différentielles. On en déduit qu'il s'agit bien du "bon" choix d'un complexe de de Rham sur le groupe quantique des matrices triangulaires. On constate ainsi que du point de vue différentiel ce groupe quantique n'est pas un "sous-groupe" du groupe linéaire quantique. C'est un phénomène déjà observé pour le groupe linéaire spécial. En effet, le déterminant quantique qui, quand $p = q$, est dans le centre de $M_q(2) = M_{q,q}(2)$, ne commute pas aux formes différentielles, dans le complexe défini par les relations (1)-(5), $(6')$ et $(7')$. La prise en compte du complexe de de Rham accentue donc la difficulté de considérer des "relations d'inclusion" entre les groupes quantiques. On rappelle que, en dehors de toute considération de différentielles, le groupe orthogonal ou symplectique quantique n'est pas un “sous-groupe” du groupe linéaire quantique.

Formes différentielles invariantes sur $B^+_{p,q}(2)$. Soient $\Omega = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \Omega^n$ une bigèbre différentielle graduée de Hopf, de coproduit Δ, coünité ε, antipode I et différentielle d et ω un élément homogène de degré m de Ω, $\omega \in \Omega^m$. Alors on a

$$\Delta(\omega) = \sum_{i=0}^{m} \Delta_i(\omega) \quad , \quad \Delta_i(\omega) \in \Omega^i \otimes \Omega^{m-i} \quad , \quad 0 \leq i \leq m \quad ,$$

cette décomposition étant unique. On dit que ω est *invariant à gauche* (resp. *à droite*) si $\Delta_0(\omega) = 1 \otimes \omega$ (resp. si $\Delta_m(\omega) = \omega \otimes 1$). Si ω est un élément quelconque de Ω, on dit qu'il est *invariant à gauche* (resp. *à droite*) si toutes ses composantes homogènes le sont. On vérifie aussitôt que l'ensemble des éléments invariants à gauche (resp. à droite) de Ω est une sous-algèbre différentielle graduée de Ω notée Ω_λ (resp. Ω_ρ) et qu'on a $\Omega^0_\lambda = \Omega^0_\rho = K$. On rappelle qu'en vertu d'un théorème de Woronowicz, on a des isomorphismes de K-modules (mais pas d'algèbres) $\Omega^0 \otimes \Omega_\lambda \simeq \Omega \simeq \Omega_\lambda \otimes \Omega^0$ (resp. $\Omega^0 \otimes \Omega_\rho \simeq \Omega \simeq \Omega_\rho \otimes \Omega^0$) définis par la multiplication de Ω [**Wo**].

On dit qu'une matrice $A = (a^i_j)_{1\leq i,j\leq n}$ à coefficients dans Ω^0 est une *matrice multiplicative* si

$$\Delta(a^i_j) = \sum_{k=1}^{n} a^i_k \otimes a^k_j \quad , \quad \varepsilon(a^i_j) = \delta^i_j \quad , \quad 1 \leq i, j \leq n \quad ,$$

où δ^i_j désigne le symbole de Kronecker. Il est facile de vérifier que si A est une matrice multiplicative, alors elle est inversible d'inverse $I(A)$.

Proposition 1. *Soit A une matrice multiplicative à coefficients dans Ω^0. Alors les coefficients de la matrice $\omega = I(A) \cdot \mathsf{d}\, A$ sont des éléments invariants à gauche de Ω^1 et on a*

$$\omega^2 + \mathsf{d}\,\omega = 0$$

(formules de Maurer-Cartan).

([**Ca**] et [**Mal3**] propositions (2.1.1) et (2.3.1).)

Théorème. *L'algèbre des formes invariantes à gauche Ω_λ du complexe de de Rham Ω sur le groupe quantique $B^+_{p,q}(2)$, défini par les relations (8) à (12), est engendrée par les formes*

$$\omega_a = a^{-1}\alpha \ , \ \omega_b = a^{-1}\beta - a^{-1}bd^{-1}\delta \ , \ \omega_d = d^{-1}\delta \ .$$

De façon plus précise, la famille de monômes $(\omega^i_a \omega^j_b \omega^k_d)_{0\leq i,j,k\leq 1}$ en est une base, les formes

ω_a , ω_b , ω_d satisfont aux relations de commutation

$$
\begin{aligned}
\omega_a a &= pqa\omega_a \ , \\
\omega_a b &= pqb\omega_a \ , \\
\omega_a d &= pqd\omega_a \ , \\
\omega_b a &= pa\omega_b \ , \\
\omega_b b &= pb\omega_b \ , \\
\omega_b d &= pd\omega_b \ , \\
\omega_d a &= a\omega_d + (pq-1)a\omega_a \ , \\
\omega_d b &= pqb\omega_d + (pq-1)a\omega_b \ , \\
\omega_d d &= pqd\omega_d \ ,
\end{aligned}
$$

ainsi qu'aux relations

$$
\begin{aligned}
\omega_a^2 &= 0 \ , \\
\omega_b^2 &= 0 \ , \\
\omega_d^2 &= 0 \ , \\
\omega_b\omega_a &= -\omega_a\omega_b \ , \\
\omega_d\omega_a &= -\omega_a\omega_d \ , \\
\omega_d\omega_b &= -pq\omega_b\omega_d - (pq-1)\omega_a\omega_b \ ,
\end{aligned}
$$

et les différentielles des formes ω_a , ω_b , ω_d sont données par les formules

$$
\begin{aligned}
\mathsf{d}\,\omega_a &= 0 \ , \\
\mathsf{d}\,\omega_b &= -\omega_a\omega_b - \omega_b\omega_d \ , \\
\mathsf{d}\,\omega_d &= 0 \ .
\end{aligned}
$$

Démonstration. Posons

$$
A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \ , \quad \mathcal{A} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \delta \end{pmatrix} \ , \quad \omega = \begin{pmatrix} \omega_a & \omega_b \\ 0 & \omega_d \end{pmatrix} \quad .
$$

La matrice A est une matrice multiplicative et on a $\omega = I(A)\cdot\mathcal{A}$, ce qui implique, en vertu de la proposition 1, que les formes ω_a , ω_b et ω_d sont invariantes. Soit Ω'_λ la sous-algèbre de Ω_λ engendrée par ω_a , ω_b et ω_d et considérons les applications linéaires

$$
\Omega'_\lambda \otimes B^+_{p,q}(2) \to \Omega_\lambda \otimes B^+_{p,q}(2) \to \Omega \quad ,
$$

la première étant définie par l'inclusion de Ω'_λ dans Ω_λ et la deuxième par la multiplication de Ω. La première est injective car $B^+_{p,q}(2)$ est un K-module libre (la famille $(a^l b^m d^n)_{l,n\in\mathbb{Z}\,,\,m\in\mathbb{N}}$ en est une base), la deuxième est, en vertu du théorème de Woronowicz, un isomorphisme car $\Omega^0 = B^+_{p,q}(2)$, et leur composé surjectif car $\omega = I(A)\cdot\mathcal{A}$

implique que $\mathcal{A} = A \cdot \omega$ et comme les formes α , β , δ engendrent la $B^+_{p,q}(2)$-algèbre Ω , il en de même pour les formes ω_a , ω_b , ω_d . On en déduit que $\Omega'_\lambda \otimes B^+_{p,q}(2) \to \Omega_\lambda \otimes B^+_{p,q}(2)$ est bijective et par fidèle platitude que $\Omega'_\lambda = \Omega_\lambda$, ce qui prouve la première assertion. Le fait que la famille $(\omega_a^i \omega_b^j \omega_d^k)_{0\leq i,j,k\leq 1}$ est une base de Ω_λ sur K résulte du fait que la famille $(\alpha^i \beta^j \delta^k)_{0\leq i,j,k\leq 1}$ est une base de Ω sur $B^+_{p,q}(2)$ et d'une lecture plus attentive de la démonstration du théorème de Woronowicz. Les autres assertions résultent de calculs explicites.

Opérateurs différentiels invariants sur $B^+_{p,q}(2)$. En appliquant la construction de [**Mal3**], on déduit que l'algèbre des opérateurs différentiels invariants (algèbre enveloppante de $B^+_{p,q}(2)$) est l'algèbre engendrée par les générateurs X_a , X_b , X_d soumis aux relations

$$\begin{aligned}
&X_a X_b - X_b X_a = (pq-1) X_d X_b + X_b \ , \\
&X_a X_d - X_d X_a = 0 \ , \\
&X_b X_d - pq X_d X_b = X_b \ .
\end{aligned}$$

On rappelle que ces relations s'obtiennent en posant formellement

$$\varpi = \omega_a \otimes X_a + \omega_b \otimes X_b + \omega_d \otimes X_d \in \Omega_\lambda \otimes K < X_a, X_b, X_d > \ ,$$

$$\mathsf{d}\,\varpi = \mathsf{d}\,\omega_a \otimes X_a + \mathsf{d}\,\omega_b \otimes X_b + \mathsf{d}\,\omega_d \otimes X_d \in \Omega_\lambda \otimes K < X_a, X_b, X_d >$$

et en écrivant que $\varpi^2 = -\,\mathsf{d}\,\varpi$. (Voir [**Mal3**] pour plus de détails et pour une interprétation plus intrinsèque, en termes de dual de Koszul.) En effet on a

$$\begin{aligned}
\varpi^2 &= \omega_a\omega_a \otimes X_a X_a + \omega_a\omega_b \otimes X_a X_b + \omega_a\omega_d \otimes X_a X_d \\
&+ \omega_b\omega_a \otimes X_b X_a + \omega_b\omega_b \otimes X_b X_b + \omega_b\omega_d \otimes X_b X_d \\
&+ \omega_d\omega_a \otimes X_d X_a + \omega_d\omega_b \otimes X_d X_b + \omega_d\omega_d \otimes X_d X_d \\
&= \omega_a\omega_b \otimes X_a X_b + \omega_a\omega_d \otimes X_a X_d - \omega_a\omega_b \otimes X_b X_a \\
&+ \omega_b\omega_d \otimes X_b X_d - \omega_a\omega_d \otimes X_d X_a - pq\omega_b\omega_d \otimes X_d X_b \\
&- (pq-1)\omega_a\omega_b \otimes X_d X_b \\
&= \omega_a\omega_b \otimes (X_a X_b - X_b X_a - (pq-1) X_d X_b) \\
&+ \omega_a\omega_d \otimes (X_a X_d - X_d X_a) \\
&+ \omega_b\omega_d \otimes (X_b X_d - pq X_d X_b)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\mathsf{d}\,\varpi &= \mathsf{d}\,\omega_a \otimes X_a + \mathsf{d}\,\omega_b \otimes X_b + \mathsf{d}\,\omega_d \otimes X_d \\
&= -\omega_a\omega_b \otimes X_b - \omega_b\omega_d \otimes X_b \quad .
\end{aligned}$$

On remarque que si $p = q = 1$, on retrouve l'algèbre enveloppante habituelle du groupe des matrices triangulaires.

Références

[**AST**] M. Artin, W. Schelter, J. Tate, *Quantum deformations of GL_n*, Comm. Pure Appl. Math. **44** (1991), 879-895.

[**Be**] G. M. Bergman, *The diamond lemma for ring theory*, Adv. Math. **29** (1978), 178-218.

[**Ca**] P. Cartier, *Formules de Maurer-Cartan quantiques*, Exposés à l'ENS 1990-1991.

[**Mal1**] G. Maltsiniotis, *Groupes quantiques et structures différentielles*, C.R.A.S. **311, Sér. I** (1990), 831-834.

[**Mal2**] G. Maltsiniotis, *Calcul différentiel sur le groupe linéaire quantique*, Preprint (1990).

[**Mal3**] G. Maltsiniotis, *Formes différentielles invariantes à gauche sur le groupe quantique $GL_{p,q}$*, Publ. IRMA Strasbourg, RCP 25, **Vol. 43** (1992), 163-180.

[**Mal4**] G. Maltsiniotis, *Le langage des espaces et des groupes quantiques*, Commun. Math. Phys. **151** (1993), 275-302.

[**Man1**] Yu. I. Manin, "Quantum groups and non-commutative geometry," Centre de Recherches Mathématiques de l'Université de Montréal, 1988.

[**Man2**] Yu. I. Manin, *Notes on quantum groups and quantum de Rham complexes*, Preprint, MPI/91-60 (1991).

[**Su**] A. Sudbery, *Consistent multiparameter quantisation of $GL(n)$*, J. Phys. A: Math. Gen. **23** (1990), L697-L704.

[**Tsy**] B. Tsygan, *Notes on differential forms on quantum groups*, Preprint (1991).

[**Wo**] S. L. Woronowicz, *Differential calculus on compact matrix pseudogroups (quantum groups)*, Commun. Math. Phys. **122** (1989), 125-170.

C.N.R.S, Université de Paris VII, UFR de Mathématiques, URA 212,
2, Place Jussieu, 75251 Paris CEDEX 05.