GROUPES QUANTIQUES ET STRUCTURES DIFFÉRENTIELLES.

G. Maltsiniotis

On introduit une notion d'espace quantique muni d'un complexe de de Rham non commutatif, et on généralise une construction de Manin [**Ma2**], pour obtenir un complexe bicovariant de différentielles (au sens de Woronowicz [**Wo4**],[**Po**]) sur un groupe quantique. On donne deux exemples de déformation à deux paramètres de $GL(2)$.

We introduce a notion of a quantum space with a non-commutative de Rham complex and we generalize a construction of Manin in order to obtain a bicovariant complex of differentials (in the sense of Woronowicz) on a quantum group. We give two examples of deformation of $GL(2)$ depending on two parameters.

La philosophie de cette note est que, suivant Manin, un groupe quantique est "un groupe linéaire (affine) dans la géométrie algébrique non-commutative qui se construit naturellement comme un objet d'automorphismes d'un espace linéaire quantique" ([**Ma4**]). Mais, contrairement à Manin, on considére qu'un espace quantique n'est pas un objet de la catégorie opposée à celle des algèbres sur un corps, mais plutôt à celle des algèbres munies d'un "complexe de de Rham non-commutatif", suivant en cela des idées de Connes [**Co**] et de Woronowicz (ce qui permet, en particulier, de retrouver les "relations manquantes" dans la construction de Manin ([**Ma2**], p.37)).

On se fixe un anneau commutatif k. Toutes les algèbres considerées seront des k-algèbres associatives unifères, non nécessairement commutatives, et les morphismes d'algèbres seront unifères. On notera $\otimes$ le produit tensoriel $\otimes_k$ sur k. Si $(x_i)_{i\in I}$ désigne une famille d'indéterminées, on note $k\langle(x_i)_{i\in I}\rangle$ l'algèbre associative unifère libre engendrée par les x_i (algèbre de polynômes non commutatifs).

§ **1. Définition 1.** *On appelle k-algèbre différentielle une k-algèbre graduée*

$$\Omega \quad = \quad \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \Omega^n$$

munie d'une application k-linéaire d (la différentielle) homogène de degré 1

$$d:\Omega\to\Omega \quad , \quad d=\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} d_n \quad , \quad d_n:\Omega^n\to\Omega^{n+1}$$

telle que :

i) $d^2=0$;
ii) $d(a\cdot b)=da\cdot b+(-1)^n a\cdot db \quad , \quad a\in\Omega^n \quad , \quad b\in\Omega$.

On remarque que Ω^0 est une sous-algèbre de Ω , que Ω^1 est un (Ω^0,Ω^0)-bimodule et que $d_0:\Omega^0\to\Omega^1$ est une k-dérivation. Un morphisme d'algèbres différentielles est un morphisme de k-algèbres graduées qui commute aux différentielles.

Exemple 1. Soient $(x_i)_{i\in I}$ et $(\xi_i)_{i\in I}$ deux familles d'indéterminées et Ω l'algèbre $k\langle (x_i)_{i\in I}, (\xi_i)_{i\in I}\rangle$, graduée par le degré total par rapport aux ξ_i , et munie de la différentielle d , définie par $dx_i = \xi_i$, pour $i \in I$, et les propriétés (i) et (ii) ci-dessus. Alors Ω est une k-algèbre différentielle appelée *k-algèbre différentielle libre engendrée par les x_i* et notée $k\langle\langle (x_i)_{i\in I}\rangle\rangle$. Pour toute k-algèbre différentielle Ω' et toute famille $(a_i)_{i\in I}$ d'éléments de Ω'^0 il existe un morphisme unique $f : \Omega \to \Omega'$ de k-algèbres différentielles tel que $f(x_i) = a_i$, pour $i \in I$.

Définition 2. *Soient A une k-algèbre et Ω une k-algèbre différentielle. On dit que Ω est une algèbre de différentielles sur A (ou un complexe de de Rham sur A) si :*

a) $\Omega^0 = A$;

b) Ω est engendrée comme k-algèbre par $\Omega^0 \cup d(\Omega^0)$ (ou, ce qui est équivalent, comme k-algèbre différentielle par Ω^0) .

Exemple 2. Si $(x_i)_{i\in I}$ désigne une famille d'indéterminées, $k\langle\langle (x_i)_{i\in I}\rangle\rangle$ est un complexe de de Rham sur $k\langle (x_i)_{i\in I}\rangle$.

Exemple 3. Si A désigne une k-algèbre commutative, le complexe de de Rham algébrique habituel $\bigwedge \Omega^1_{A/k}$ est une algèbre de différentielles sur A .

Théorème 1. *Soient A une k-algèbre, M un (A,A)-bimodule et $D : A \to M$ une k-dérivation telle que M soit engendré par $D(A)$ (comme A-module à gauche, ou à droite, ou comme bimodule, conditions qui sont équivalentes). Alors il existe une algébre de différentielles Ω_D sur A telle que $\Omega^1_D = M$, $d_0 = D$, satisfaisant à la propriété universelle suivante : Pour toute k-algèbre différentielle (Ω', d') et tout morphisme de k-algèbres $\rho : A \to \Omega'^0$ tel qu'il existe un morphisme (forcément unique) de (A,A)-bimodules $\sigma : M \to \Omega'^1$ tel que $d'_0 \circ \rho = \sigma \circ D$, il existe un morphisme unique de k-algèbres différentielles $f : \Omega_D \to \Omega'$ tel que $f_0 = \rho$ (et alors $f_1 = \sigma$).*

DÉMONSTRATION: Soient $(a_i)_{i\in I}$ un système de générateurs de la k-algèbre A , $(x_i)_{i\in I}$ une famille d'indéterminées et $\Omega = k\langle\langle (x_i)_{i\in I}\rangle\rangle$. On définit un morphisme de k-algèbres $p_0 : \Omega^0 \to A$ (resp. de (Ω^0, Ω^0)-bimodules $p_1 : \Omega^1 \to M$) par $p_0(x_i) = a_i$ (resp. par $p_1(dx_i) = Da_i$) , pour $i \in I$, et on désigne par J^0 (resp. par J^1) le noyau de p_0 (resp. de p_1) et par J l'idéal bilatère différentiel (stable par d) engendré par $J^0 \cup J^1$. Alors l'algèbre différentielle quotient $\Omega_D = \Omega/J$ satisfait aux conditions du théorème.

On appelle *espace quantique* une k-algèbre différentielle satisfaisant à la condition (b) de la définition 2, “vue dans la catégorie opposée”. On dit qu'un espace quantique est simple, s'il est isomorphe à une algèbre différentielle Ω_D définie comme ci-dessus.

Exemple 4. $\Omega = k\langle\langle x, y\rangle\rangle/J$, où si l'on pose $\xi = dx$ et $\eta = dy$, J désigne l'idéal bilatère engendré par

$$yx - qxy \ ,$$

$$\xi x - pqx\xi \ , \ \xi y - py\xi \ , \ \eta x - qx\eta - (pq-1)y\xi \ , \ \eta y - pqy\eta \ ,$$

$$\xi^2 \ , \ \eta^2 \ , \ \xi\eta + p\eta\xi \qquad (p, q \in k) \ .$$

L'espace quantique ainsi défini est simple, si et seulement si $pq + 1$ est inversible dans k. Si $p = q$, on définit ainsi un complexe de de Rham sur la q-déformation du plan [**Ma2**],[**Ca**].

Exemple 5. $\Omega = k\langle\langle x,y\rangle\rangle/J$, où si l'on pose $\xi = dx$ et $\eta = dy$, J désigne l'idéal bilatère engendré par

$$\begin{aligned}
&yx - xy - \lambda x^2 \ , \\
&\xi x - x\xi \ , \ \xi y + \lambda x\xi - y\xi \ , \ \eta x - \lambda x\xi - x\eta \ , \ \eta y + \lambda\mu x\xi + \mu x\eta - \mu y\xi - y\eta \ , \\
&\xi^2 \ , \ \eta\xi + \xi\eta \ , \ \eta^2 - \mu\xi\eta \qquad (\lambda, \mu \in k) \ .
\end{aligned}$$

On définit ainsi un complexe de de Rham sur le "plan de Jordan".

§ **2.** Soient Ω et Ω' deux k-algèbres différentielles. On définit une *algèbre différentielle produit tensoriel*, notée $\Omega \otimes \Omega'$, en munissant l'algèbre graduée produit tensoriel gauche $\Omega \ {}^g\!\otimes\ \Omega'$ ([**Bo**], III, p. 49) de la différentielle définie par

$$d\,(a \otimes b) = da \otimes b + (-1)^m a \otimes db \quad a \in \Omega^m \ , \ b \in \Omega' \ .$$

Définition 3. *On appelle k-bigèbre différentielle une k-algèbre différentielle Ω munie d'un coproduit coassociatif $\Delta : \Omega \to \Omega \otimes \Omega$ et d'une coünité $\varepsilon : \Omega \to k$, Δ et ε étant des morphismes d'algèbres différentielles (k étant muni de la différentielle nulle). On dit que Ω est un monoïde quantique, si en plus, Ω satisfait à la condition (b) de la définition 2.*

Exemple 6. L'algèbre différentielle $\Omega = k\langle\langle (a^i_j)_{1\le i,j\le n}\rangle\rangle$, où $(a^i_j)_{1\le i,j\le n}$ désigne une famille d'indéterminées, munie des morphismes d'algèbres différentielles $\Delta : \Omega \to \Omega \otimes \Omega$ et $\varepsilon : \Omega \to k$ définis (cf. ex. 1) par

$$\Delta(a^i_j) = \sum_{k=1}^n a^k_j \otimes a^i_k \quad \text{et} \quad \varepsilon(a^i_j) = \delta^i_j$$

est un monoïde quantique. Si l'on pose $\alpha^i_j = d\,(a^i_j)$, on a

$$\Delta(\alpha^i_j) = \sum_{k=1}^n \alpha^k_j \otimes a^i_k + \sum_{k=1}^n a^k_j \otimes \alpha^i_k \quad \text{et} \quad \varepsilon(\alpha^i_j) = 0 \ .$$

On appelle *monoïde quantique matriciel* un monoïde quantique isomorphe à un quotient d'une bigèbre différentielle de ce type. On dit qu'une matrice $(b^i_j)_{1\le i,j\le n}$ à coefficients dans une bigèbre Ω' est une *matrice multiplicative*, si le morphisme d'algèbres différentielles $\varphi : \Omega \to \Omega'$, défini par $\varphi(a^i_j) = b^i_j$, $1 \le i,j \le n$, (cf. ex. 1) est un morphisme de bigèbres.

§ **3. Définition 4.** *On appelle algèbre différentielle graduée une algèbre différentielle Ω telle que pour tout n , $n \in \mathbb{N}$, Ω^n soit muni d'une structure de k-module gradué $\Omega^n = \bigoplus_{m\in\mathbb{N}} \Omega^{m,n}$ satisfaisant aux conditions suivantes :*

i) $\Omega^{m,n} \cdot \Omega^{m',n'} \subset \Omega^{m+m',n+n'}$;
ii) $d\,(\Omega^{m,n}) \subset \Omega^{m-1,n+1}$.

On dit que Ω est un *cône quantique*, si Ω satisfait à la condition (b) de la définition 2, et si en plus, Ω^0 est engendrée par $\Omega^{1,0}$ comme k-algèbre.

Exemple 7. Si $(x_i)_{i\in I}$ désigne une famille d'indéterminées, l'algèbre différentielle $k\langle\langle (x_i)_{i\in I}\rangle\rangle$ munie de la graduation définie par le degré total par rapport aux x_i est un cône quantique. Tout cône quantique est isomorphe à un quotient d'une telle algèbre différentielle graduée et on dit qu'il est de *type fini*, si l'on peut choisir l'ensemble I fini.

Dans la suite, on se fixe un cône quantique C. On appelle *famille d'endomorphismes linéaires de C indexée par un espace quantique* Ω, un morphisme d'algèbres différentielles

$$\varphi : C \to \Omega \otimes C$$

tel que

$$\varphi(C^{1,0}) \subset \Omega \otimes C^{1,0} \quad . \tag{1}$$

(La justification de cette terminologie est que ce morphisme "vu dans la catégorie opposée" peut s'interpreter comme un morphisme de source le "produit du cône quantique C par l'espace quantique Ω " et de but le cône quantique C, la linéarité étant exprimée par l'inclusion (1)). Étant donnée deux telles familles

$$\varphi : C \to \Omega \otimes C \quad \text{et} \quad \varphi' : C \to \Omega' \otimes C$$

un morphisme de φ dans φ' est un morphisme d'algèbres différentielles $\psi : \Omega \to \Omega'$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\varphi} & \Omega \otimes C \\ \Vert & & \downarrow{\scriptstyle \psi\otimes id_C} \\ C & \xrightarrow{\varphi'} & \Omega' \otimes C \end{array}$$

soit commutatif.

Théorème 2. *Si k est un corps et C de type fini, la catégorie définie ci-dessus posséde un objet initial. Autrement dit, il existe un espace quantique E et un morphisme d'algèbres différentielles*

$$\varphi_0 : C \to E \otimes C \quad , \quad \varphi_0(C^{1,0}) \subset E \otimes C^{1,0}$$

tel que pour tout espace quantique Ω et tout morphisme d'algèbres différentielles

$$\varphi : C \to \Omega \otimes C \quad , \quad \varphi(C^{1,0}) \subset \Omega \otimes C^{1,0}$$

il existe un morphisme unique d'algèbres différentielles $\psi : E \to \Omega$ rendant le diagramme

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\varphi_0} & E \otimes C \\ \Vert & & \downarrow{\scriptstyle \psi\otimes id_C} \\ C & \xrightarrow{\varphi} & \Omega \otimes C \end{array}$$

commutatif.

En appliquant la propriété universelle du théorème à $(id_E \otimes \varphi_0) \circ \varphi_0 : C \to E \otimes E \otimes C$ (resp. à l'isomorphisme canonique $i : C \to k \otimes C$), on en déduit l'existence d'un morphisme d'algèbres différentielles unique $\Delta : E \to E \otimes E$ (resp. $\varepsilon : E \to k$) tel que $(\Delta \otimes id_C) \circ \varphi_0 = (id_E \otimes \varphi_0) \circ \varphi_0$ (resp. tel que $(\varepsilon \otimes id_C) \circ \varphi_0 = i$) et on vérifie aussitôt que (E, Δ, ε) est une k-bigèbre différentielle. En fait, il résulte de la démonstration ci-dessous (inspirée de celle de Manin [**Ma4**]) que (E, Δ, ε) est un monoïde quantique matriciel qu'on appellera le *monoïde quantique associé au cône quantique* C.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME: Le cône quantique C étant de type fini, C est isomorphe à B/R, où $B = k\langle\langle (x_i)_{i\in I}\rangle\rangle$, $(x_i)_{i\in I}$ est une famille finie d'indéterminées et R un idéal différentiel bilatère bigradué de B. On peut supposer que la famille formée des images $\overline{x_i}$ des x_i dans B est libre. Soient $(f_j)_{j\in J}$ un système de générateurs bihomogènes de l'idéal différentiel bilatère R, S un supplementaire bigradué de R dans B et $(r_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ (resp. $(s_\beta)_{\beta\in\mathcal{B}}$) une base du k-espace vectoriel R (resp. S) formée d'éléments bihomogènes. On considère une nouvelle famille d'indéterminées $(x_i^{i'})_{i,i'\in I}$, l'algèbre différentielle $M = k\langle\langle (x_i^{i'})_{i,i'\in I}\rangle\rangle$ et le morphisme $\Phi : B \to M \otimes B$ défini par $\Phi(x_i) = \sum_{i'\in I} x_i^{i'} \otimes x_{i'}$ (cf. Ex. 1). Alors pour tout j, $j \in J$, $\Phi(f_j)$ s'ecrit de façon unique

$$\Phi(f_j) = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} \rho_{j\alpha} \otimes r_\alpha + \sum_{\beta\in\mathcal{B}} \sigma_{j\beta} \otimes s_\beta \quad , \quad \rho_{j\alpha}\ ,\ \sigma_{j\beta} \in M \ .$$

Si l'on pose $E = M/T$, où T désigne l'idéal différentiel bilatère engendré par la famille $(\sigma_{j\beta})_{j\in J,\beta\in\mathcal{B}}$, on vérifie aussitôt que Φ définit par passage au quotient un morphisme d'algèbres différentielles $\varphi_0 : C \to E \otimes C$ satisfaisant aux conditions du théorème.

Exemple 8. L'espace quantique de l'exemple 4 est un cône quantique et le monoïde quantique associé est isomorphe à $k\langle\langle a, b, c, d\rangle\rangle/T$, où si l'on désigne par α , β , γ , δ les différentielles de a , b , c , d respectivement, T est engendré comme idéal bilatère par

(1) $ba - pab\ ,\ dc - pcd\ ,\ ca - qac\ ,\ db - qbd\ ,\ pcb - qbc\ ,$

(2) $q(da - ad) - q^2bc + cb \qquad (\Longleftrightarrow p(da - ad) - p^2cb + bc),$

(3) $\alpha a - pqa\alpha\ ,\ \beta b - pqb\beta\ ,\ \gamma c - pqc\gamma\ ,\ \delta d - pqd\delta\ ,$

(4) $\alpha c - pc\alpha\ ,\ \beta d - pd\beta\ ,\ \alpha b - qb\alpha\ ,\ \gamma d - qd\gamma\ ,$

(5) $\beta a - pa\beta - (pq-1)b\alpha\ ,\ \delta c - pc\delta - (pq-1)d\gamma\ ,$

(6) $\gamma a - qa\gamma - (pq-1)c\alpha\ ,\ \delta b - qb\delta - (pq-1)d\beta\ ,$

(7) $q\beta c - p\gamma b - pc\beta + qb\gamma\ ,\ \alpha d + q\beta c - pc\beta - pqd\alpha\ ,$

(8) $\gamma b + q\delta a - qa\delta - q^2b\gamma - (pq-1)c\beta - q(pq-1)d\alpha\ ,$

(9) $\alpha^2\ ,\ \beta^2\ ,\ \gamma^2\ ,\ \delta^2\ ,$

(10) $\alpha\gamma + p\gamma\alpha\ ,\ \beta\delta + p\delta\beta\ ,\ \alpha\beta + q\beta\alpha\ ,\ \gamma\delta + q\delta\gamma\ ,$

(11) $\alpha\delta + p\gamma\beta + q\beta\gamma + pq\delta\alpha \quad .$

Ce monoïde quantique n'est pas une "déformation de l'objet commutatif correspondant", mais on démontre qu'il posséde un unique quotient satisfaisant à cette propriété. Ce quotient est $k\langle\langle a,b,c,d\,\rangle\rangle/T'$, où T' est engendré par les relations $(1)-(6), (7'), (8'), (9), (10), (11')$, où

$$\alpha d - d\alpha\ ,\ q\beta c - pc\beta - (pq-1)d\alpha\ ,\ p\gamma b - qb\gamma - (pq-1)d\alpha\ , \tag{7'}$$

$$pq\delta a - pqa\delta - q(pq-1)b\gamma - p(pq-1)c\beta - (pq-1)^2 d\alpha\ , \tag{8'}$$

$$\delta\alpha + \alpha\delta\ ,\ p\gamma\beta + q\beta\gamma - (pq-1)\alpha\delta \quad . \tag{11'}$$

On remarque que pour $p = q$ on définit ainsi un complexe de de Rham sur la q-déformation de l'espace des matrices 2×2.

Exemple 9. En appliquant la construction du théorème 2 au cône quantique de l'exemple 5, on définit un complexe de de Rham sur le "monoïde quantique de Jordan" introduit par Manin [**Ma4**].

Exemple 10. Plus génélalement, soit $R = (r_{ii'}^{jj'})_{1\le i,i',j,j'\le n}$ une matrice à coefficients dans k, et supposons que k soit un corps et que

$$\mathrm{rg}_k(R+I) = \mathrm{rg}_k(R'+I') = \frac{n(n+1)}{2} \quad ,$$

où R' désigne la matrice $(r_{ii'}^{jj'})_{1\le i\le i'\le n, 1\le j\le j'\le n}$ et I et I' les matrices unités correspondantes. Alors si $(x_i)_{1\le i\le n}$ désigne une famille d'indéterminées, il existe un idéal différentiel bilatère bigradué unique J de $\Omega = k\langle\langle x_1,\dots,x_n\rangle\rangle$, possédant les propriétés suivantes:

i) J est engendré par $J^2 = J^{2,0}\bigoplus J^{1,1}\bigoplus J^{0,2}$;

ii) $\Omega^{2,0} = J^{2,0}\bigoplus \bigoplus_{1\le i\le i'\le n} k\cdot(x_i\cdot x_{i'})$;

iii) $\Omega^{1,1} = J^{1,1}\bigoplus \bigoplus_{1\le i,i'\le n} k\cdot(x_i\cdot dx_{i'})$;

iv) $\Omega^{0,2} = J^{0,2}\bigoplus \bigoplus_{1\le i'<i\le n} k\cdot(dx_i\cdot dx_{i'})$;

v) $dx_i\cdot x_{i'} - \sum_{1\le j,j'\le n} r_{ii'}^{jj'}\cdot x_j\cdot dx_{j'} \in J$.

Le monoïde quantique associé au cône quantique quotient Ω/J est isomorhe au quotient de l'algèbre différentielle $\Omega = k\langle\langle (a_j^i)_{1\le i,j\le n}\rangle\rangle$ (où $(a_j^i)_{1\le i,j\le n}$ désigne une famille d'indéterminées) par l'idéal différentiel bilatère engendré par les coefficients des matrices

$$R(A\otimes A) - (A\otimes A)R \quad \text{et} \quad T(\mathcal{A}\otimes A - (A\otimes\mathcal{A})R) \quad ,$$

où $A = (a_j^i)_{1\le i,j\le n}$, $\mathcal{A} = (da_j^i)_{1\le i,j\le n}$ et $T = (r_{ii'}^{jj'} + \delta_i^j\delta_{i'}^{j'})_{1\le i,i'\le n, 1\le j\le j'\le n}$ (où δ désigne le symbole de Kronecker). On remarque que les relations $R(A\otimes A) - (A\otimes A)R$ sont celles utilisées dans "Quantum inverse scattering transform method" pour définir un groupe quantique, à partir d'un opérateur de Yang-Baxter faible (voir aussi [**Ma2**], p. 40-42).

Dans les exemples 8 et 9 ci-dessus, on vérifie facilement que la matrice R est effectivement une solution de l'équation de Yang-Baxter.

§ **4.** Dans ce paragraphe et le suivant, on se fixe une k-bigèbre différentielle $(\Omega, \Delta, \varepsilon)$ et on désigne par $\mu : \Omega \otimes \Omega \to \Omega$ (resp. $\eta : k \to \Omega$) l'application k-linéaire définie par la multiplication (resp. l'unité) de Ω.

Définition 5. *On dit qu'une application k-linéaire $S : \Omega \to \Omega$ est un antipode, si*

$$\mu \circ (S \otimes id_\Omega) \circ \Delta = \mu \circ (id_\Omega \otimes S) \circ \Delta = \eta \circ \varepsilon \ .$$

On appelle bigèbre différentielle de Hopf (resp. groupe quantique) une bigèbre différentielle (resp. un monoïde quantique) munie d'un antipode. On appelle morphisme de bigèbres différentielles de Hopf un morphisme de bigèbres différentielles qui commute aux antipodes.

On désigne par τ l'application k-linéaire $\tau : \Omega \otimes \Omega \to \Omega \otimes \Omega$, définie par

$$\tau(a \otimes b) = (-1)^{mn} b \otimes a \qquad , \quad a \in \Omega^m \ , \ b \in \Omega^n \ ,$$

et par Ω^{opp} la k-bigèbre dont le k-module sous-jacent est Ω, le produit est défini par $\mu \circ \tau$ et le coproduit par $\tau \circ \Delta$ (l'unité et la coünité étant inchangées).

Proposition 1. *Une bigèbre différentielle Ω posséde au plus un antipode S et alors S est un morphisme de bigèbres différentielles de Ω dans Ω^{opp}.*

La démonstration de cette proposition est une simple tranposition de celle du Théorème 2.1.4 [**Ab**].

Théorème 3. *Si Ω est un monoïde quantique matriciel, il existe un groupe quantique G et un morphisme de bigèbres différentielles $\varphi_0 : \Omega \to G$ (uniques) tels que pour tout groupe quantique G' et tout morphisme de bigèbres différentielles $\varphi : \Omega \to G'$ il existe un morphisme unique de bigèbres différentielles de Hopf $\psi : G \to G'$ tel que le diagramme*

$$\begin{tikzcd}
\Omega \arrow[r, "\varphi_0"] \arrow[d, equal] & G \arrow[d, "\psi"] \\
\Omega \arrow[r, "\varphi"] & G'
\end{tikzcd}$$

soit commutatif.

La démonstration de ce théorème est analogue à celle du théorème 7.3 [**Ma2**]. On dira que le groupe quantique G est le *groupe quantique associé* au monoïde quantique matriciel Ω. En général, le monoïde quantique sous-jacent à G n'est pas un monoïde quantique matriciel ni même une k-algèbre de type fini.

§ **5. Définition 6.** *On dit que Ω est un monoïde quantique de Cramer à gauche (resp. à droite), s'il existe une matrice multiplicative A, dont les coefficients engendrent la k-algèbre différentielle Ω, une matrice B à coefficients dans Ω et un élément t de Ω, tels que*

$$\Delta(t) = t \otimes t \qquad , \qquad \varepsilon(t) = 1$$

et

$$BA = tI \qquad (resp.\ AB = tI) \quad .$$

On remarque qu'un monoïde quantique de Cramer à gauche ou à droite est en particulier un monoïde quantique matriciel.

Proposition 2. *Le monoïde quantique sous-jacent au groupe quantique associé à un monoïde quantique de Cramer à gauche (ou à droite) est un monoïde quantique matriciel.*

DÉMONSTRATION: En gardant les notations de la définition 6, soient G le groupe quantique associé à Ω, $\varphi_0 : \Omega \to G$ le morphisme canonique de bigèbres différentielles et S l'antipode de G. Si $A = (a^i_j)_{1\leq i,j\leq n}$, on définit une matrice $\widetilde{A} = (\tilde{a}^i_j)_{1\leq i,j\leq n+1}$ à coefficients dans G par

$$\tilde{a}^i_j = \varphi_0(a^i_j) \ , \ \tilde{a}^i_{n+1} = 0 \ , \ \tilde{a}^{n+1}_j = 0 \ , \ \tilde{a}^{n+1}_{n+1} = S(\varphi_0(t)) \ , \ 1 \leq i,j \leq n$$

et on vérifie que $\widetilde{A}$ est une matrice multiplicative, dont les coefficients engendrent G comme k-algèbre différentielle, ce qui démontre la proposition.

Exemple 11. Les monoïdes quantiques des exemples 8 et 9 sont des monoïdes de Cramer à droite et à gauche. Pour celui de l'exemple 8 on peut prendre

$$t = ad - q^{-1}cb = da - qbc = da - pcb = ad - p^{-1}bc$$

et on a

$$\begin{pmatrix} d & -qb \\ -q^{-1}c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -pb \\ -p^{-1}c & a \end{pmatrix} = tI \quad .$$

RÉFÉRENCES

[**Ab**] E. Abe, "Hopf algebras," Cambridge Tracts in Math., Vol.74, Cambridge Univ. Press, 1980.

[**Bo**] N. Bourbaki, "Éléments de Mathématique," Algèbre, Chapitres 1 à 3, Hermann, Paris, 1970.

[**Ca**] P. Cartier, *Calcul différentiel non commutatif*, Exposés à l'E.N.S. (1989).

[**Co**] A. Connes, *Non-commutative differential geometry*, Publ. Math. de l'I.H.E.S. **62** (1985), 41-144.

[**Ma1**] Yu. I. Manin, *Some remarks on Koszul algebras and quantum groups*, Ann. Inst. Fourier **37,4** (1987), 191-205.

[**Ma2**] Yu. I. Manin, "Quantum groups and non-commutative geometry," Centre de Recherches Mathématiques de l'Université de Montréal, 1988.

[**Ma3**] Yu. I. Manin, *Multiparametric Quantum Deformation of the General Linear Supergroup*, Commun. Math. Phys. **123** (1989), 163-175.

[**Ma4**] Yu. I. Manin, *Quantum Groups*, Exposés au College de France (1989).

[**Po**] P. Podles, S. L. Woronowicz, *Quantum deformation of Lorentz group*, Preprint (1989).

[**Wo1**] S. L. Woronowicz, *Twisted $SU(2)$ Group. An Example of a Non-Commutative Differential Calculus*, Publ. RIMS, Kyoto Univ. **23** (1987), 117-181.

[**Wo2**] S. L. Woronowicz, *Compact matrix pseudogroups*, Commun. Math. Phys. **111** (1987), 613-655.

[**Wo3**] S. L. Woronowicz, *Tanaka-Krein duality for compact matrix pseudogroups. Twisted $SU(N)$ groups*, Invent. Math. **93** (1988), 35-76.

[**Wo4**] S. L. Woronowicz, *Differential Calculus on Compact Matrix Pseudogroups (Quantum Groups)*, Commun. Math. Phys. **122** (1989), 125-170.