Université Paris 7 Denis Diderot
UFR de Mathématiques

Thèse en vue de l'obtention du diplôme de
docteur de l'université de Paris 7
en mathématiques

La tour de Teichmüller–Grothendieck

Vincent ZOONEKYND

Cette thèse a été soutenue le vendredi 22 juin 2001.
Le jury était constitué de

Alain BRUGUIÈRES
Bernhard KELLER
Georges MALTSINIOTIS (directeur)
Ieke MOERDIJK (rapporteur)
Pierre SCHAPIRA
Christoph SORGER

Remerciements

Je tiens à remercier ici tous ceux qui m'ont aidé dans la réalisation de cette thèse : tout particulièrement Georges Maltsiniotis, qui m'a dirigé pendant ce travail de recherche ; Yasutaka Ihara et Ieke Moerdijk, qui ont accepté d'en être les rapporteurs ; Alain Bruguières, Bernhard Keller, Pierre Schapira et Christoph Sorger, qui ont accepté de faire partie du jury ; Pierre Lochak et Leila Schneps, pour les discussions que j'ai eues avec eux ; ainsi que les auditeurs du groupe de travail « algèbre homotopique » (trop nombreux pour que je puisse les citer en étant sûr de n'en oublier aucun), devant lesquels j'ai réalisé quelques exposés.

INTRODUCTION

Les espaces de modules de courbes sont tout d'abord définis comme des ensembles : $\mathscr{M}_{g,n}$ est l'ensemble des classes d'isomorphie de courbes lisses de genre g à n points marqués sur $\bar{\mathbb{Q}}$. Mais c'est juste un ensemble : on ne peut pas faire de géométrie dessus, *i.e.*, des questions comme « quel est son groupe fondamental ? », « quelle est sa dimension ? » ou « est-il lisse ? » n'ont pas de sens. Au lieu de considérer les courbes, on peut regarder les *familles* de courbes : cela revient à considérer le foncteur (ou *préfaisceau*) $\mathfrak{Sch}\,\bar{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathfrak{Ens}$ qui, à un schéma X sur $\bar{\mathbb{Q}}$, associe l'ensemble des classes d'isomorphie de familles de courbes lisses de genre g à n points marqués indexées par X. En général, on ne peut pas faire de géométrie sur un tel foncteur, mais il arrive qu'il soit *représentable*, *i.e.*, isomorphe à un foncteur de la forme $\mathrm{Hom}(\cdot, \mathrm{M})$ pour un certain schéma M : l'étude du foncteur se ramène alors à celle du schéma M. Mais en général, les foncteurs de modules ne sont pas représentables.

Une manière de contourner le problème consiste à regarder si on ne pourrait pas « faire de la géométrie » sur une sous-catégorie de la catégorie des préfaisceaux plus grande que la sous-catégorie des préfaisceaux représentables (qui est équivalente à la catégorie des schémas). On commence par se limiter à des préfaisceaux qui vérifient des propriétés comparables à celles des schémas, par exemple, le fait d'être un faisceau pour la topologie étale. Cela ne suffit pas. On peut exiger que de plus il existe un morphisme surjectif et étale depuis un schéma, *i.e.*, que le faisceau ressemble localement à un schéma, pour la topologie étale. À quelques conditions techniques près, c'est la définition d'un *espace algébrique* (voir [Knutson]). Nos espaces de modules sont-ils des espaces algébriques ? Eh bien non, toujours pas.

La plupart des démonstrations du fait que les espaces de modules de courbes ne sont pas représentables utilisent l'existence de courbes avec des automorphismes non triviaux. Or, dans la définition des foncteurs de modules, on oublie ces automorphismes. On peut donc penser qu'on aura plus de chance si on s'en souvient, *i.e.*, si on considère le foncteur

$$\mathfrak{Sch}\,\bar{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathfrak{Groupo\ddot{i}des}$$

qui, à un schéma X, associe la *catégorie* ayant pour objets les familles de courbes lisses de genre g à n points marqués indexées par X et pour morphismes les isomorphismes de telles familles. Il se trouve que le foncteur que l'on obtient vérifie une propriété de recollement comparable à celle définissant un faisceau (on dit que c'est un *champ*) et qu'il existe un morphisme surjectif et étale depuis un schéma, *i.e.*, il ressemble localement, pour la topologie étale, à un schéma : c'est un *champ algébrique*. On peut dès lors « faire de la géométrie dessus » et montrer, par exemple, qu'il est lisse ou que sa dimension est $3(g-1)+n$.

Ces objets paraissent très compliqués, mais voici un exemple simple de champ algébrique qui n'est pas un schéma. Soit X un schéma muni d'une action d'un groupe fini G. Le quotient naïf X/G est l'*ensemble* des orbites. Au lieu de le regarder comme un ensemble, on peut le regarder comme une *catégorie*, dont les morphismes sont les automorphismes des orbites : le groupe d'automorphismes d'une orbite est alors son stabilisateur. Cela se généralise pour les familles d'orbites et on obtient ainsi un champ algébrique, dit *champ quotient* et noté [X/G]. On peut par exemple quotienter un point par un groupe (qui agit trivialement) : le quotient est un « point avec des automorphismes ».

Comme les champs sont définis à l'aide de groupoïdes, ils forment une 2-catégorie : cela va sérieusement compliquer certaines constructions. Par exemple, la notion de produit-fibré doit être remplacée par celle de 2-produit-fibré et, de manière plus générale, les propriétées universelles laissent la place à des propriétés 2-universelles. Nous retrouverons ces problèmes un peu plus loin.

Le fait que les premiers exemples de champs algébriques soient les schémas quotientés par des groupes finis incite à comparer cette notion avec celle d'orbifold. Un *orbifold* est un « objet géométrique » qui ressemble localement à une variété différentielle quotientée par l'action d'un groupe fini. [1]

1. Plus formellement (nous n'utiliserons pas cette définition), un orbifold est la donnée de

(*i*) Un espace topologique X ;

(*ii*) Une famille $(\mathrm{U}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ d'ouverts de X, recouvrant X et stable par intersections finies ;

(*iii*) Pour tout $i \in \mathrm{I}$, un ouvert $\widetilde{\mathrm{U}}_i$ de $\mathbb{R}^n$, un groupe fini Γ_i, une action continue de Γ_i sur $\widetilde{\mathrm{U}}_i$ (que l'on suppose généralement fidèle) et un morphisme $\widetilde{\mathrm{U}}_i \longrightarrow \mathrm{U}_i$ qui induise un homéomorphisme $\widetilde{\mathrm{U}}_i/\Gamma_i \longrightarrow \mathrm{U}_i$;

En particulier, le stabilisateur de chaque point est bien défini (à conjugaison près). Par exemple, le plan quotienté par le groupe $\mathbb{Z}/\mathrm{N}\mathbb{Z}$ agissant par rotations d'un $\mathrm{N}^{\text{ième}}$ de tour est un orbifold dont l'espace sous-jacent (*i.e.*, la variété quotient) est le plan et dont tous les points ont un stabilisateur trivial, sauf l'origine, dont le stabilisateur est $\mathbb{Z}/\mathrm{N}\mathbb{Z}$. On peut aussi voir cet orbifold comme un cône : on prend un domaine fondamental délimité par deux demi-droites passant par l'origine et on recolle ces deux demi-droites ; le sommet, *i.e.*, le point avec des automorphismes devient une « singularité ». Nous verrons en I.3.10 que les orbifolds sont effectivement l'analogue topologique des champs algébriques.

Nous venons de voir que les champs algébriques étaient un moyen de contourner la non-représentabilité de certains foncteurs de modules. Une autre manière de la contourner consiste à rigifier le problème, *i.e.*, construire un autre foncteur, qui classifie les courbes lisses munies d'une structure supplémentaire, de manière à « tuer » les automorphismes. Comme les courbes lisses sur $\mathbb{C}$ sont en fait les surfaces de Riemann compactes, on va pouvoir utiliser la topologie ou la géométrie complexe pour définir cette structure supplémentaire.[2] Ainsi, l'*espace de Teichmüller* des courbes de genre g classifie les surfaces de Riemann Σ de genre g munies d'une famille de (classes d'homotopie de) courbes comme sur la figure 1 (voir [Imayoshi–Taniguchi]). De

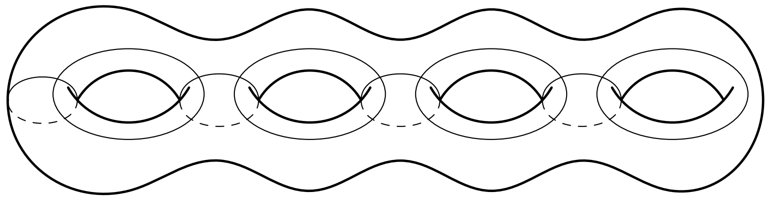


Figure 1 – On peut voir les points de l'espace de Teichmüller comme des surfaces de Riemann sur lesquelles on a dessiné une famille de courbes (à homotopie près) comme sur cette figure.

manière plus algébrique, on peut voir cette structure supplémentaire comme

(*iv*) Pour tous $i, j \in \mathrm{I}$ tels que $\mathrm{U}_i \subset \mathrm{U}_j$, un morphisme injectif de groupes $f_{ij} : \Gamma_i \longrightarrow \Gamma_j$, un plongement équivariant $\widetilde{\varphi}_{ij} : \widetilde{\mathrm{U}}_i \longrightarrow \widetilde{\mathrm{U}}_j$ au dessus de l'inclusion $\mathrm{U}_i \hookrightarrow \mathrm{U}_j$ (mais $\widetilde{\varphi}_{ij}$ n'est défini qu'à composition à un élément de Γ_i près et f_{ij} n'est défini qu'à conjugaison d'un élément de Γ_j près.) ;

telle que si $\mathrm{U}_i \subset \mathrm{U}_j \subset \mathrm{U}_k$, il existe $\gamma \in \Gamma_k$ tel que $\gamma\widetilde{\varphi}_{ik} = \widetilde{\varphi}_{jk} \circ \widetilde{\varphi}_{ij}$ et $\forall g \in \Gamma_i \ \gamma f_{ik}(g)\gamma^{-1} = f_{jk} \circ f_{ij}(g)$.

2. On peut aussi rigidifier ce foncteur de modules d'une autre manière, en gardant des courbes, à l'aide de « structures de niveau » (voir [Mumford 2]). Nous n'en parlerons pas.

la donnée d'un isomorphisme de groupes

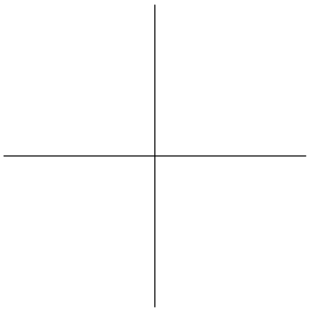
$$\pi_1(\Sigma) \longrightarrow \Big\langle a_1, \ldots, a_g, b_1, \ldots, b_g ; \prod_{i=1}^{g} a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1} \Big\rangle.$$

On peut définir de même un espace de Teichmüller pour les courbes à points marqués. Le morphisme d'oubli de la structure supplémentaire, de l'espace de Teichmüller vers l'espace de modules de courbes permet d'identifier l'espace de modules de courbes avec l'orbifold quotient de l'espace de Teichmüller par l'action du « groupe permutant ces différentes structures supplémentaires ». En remarquant que, si on coupe la surface selon les courbes de la figure, on obtient quelque chose de simplement connexe, on s'apperçoit qu'il s'agit du *groupe d'homéotopie* $\Gamma_{g,n}$ (aussi appelé *groupe modulaire* ou *mapping class group* en anglais), *i.e.*, du groupe des automorphismes d'une surface de genre g à n points marqués modulo isotopie. Comme l'espace de Teichmüller est *contractile*, *i.e.*, homotope à un point, on s'attend à ce que l'espace de modules $\mathscr{M}_{g,n}$ soit homotope à un point quotienté par le groupe d'homéotopie : en particulier, que son groupe fondamental est $\Gamma_{g,n}$ et que tous ses autres groupes d'homotopie soient triviaux — on dit alors que c'est un $\mathrm{K}(\Gamma_{g,n}, 1)$.

On remarquera que le groupe d'homéotopie est défini de manière purement topologique alors que les espaces de modules de courbes le sont de manière algébrique ou analytique.

Après cet interlude analytique, revenons dans le cadre de la géométrie algébrique. Les espaces de modules de courbes lisses ne sont pas des champs propres sur $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$: on peut tenter de les compactifier, en considérant des espaces de modules de courbes de genre g à n points marqués non nécessairement lisses. Pour espérer avoir un champ algébrique, on ne prend pas toutes les courbes, mais on se limite à celles dont le groupe d'automorphismes est fini — on dit qu'elles sont *stables*. On obtient alors un champ algébrique $\bar{\mathscr{M}}_{g,n}$ projectif et lisse, qui contient l'espace de modules de courbes lisses $\mathscr{M}_{g,n}$ comme sous-champ ouvert. La différence $\mathscr{S}_{g,n} = \bar{\mathscr{M}}_{g,n} \setminus \mathscr{M}_{g,n}$ est un diviseur à croisements normaux (figure 2). À l'aide de ce diviseur, on peut définir une « stratification » : les strates de codimension k sont les intersections de k composantes du diviseur (il peut y avoir des composantes qui se recoupent elles-mêmes). Les strates ouvertes sont les strates auxquelles on a retiré toutes les strates de dimension plus petite.

Les espaces de modules de courbes stables sont munis d'une structure plus riche que celle des espaces de modules de courbes lisses : ce n'est pas qu'une suite de champs algébriques, ils sont reliés par certains morphismes.



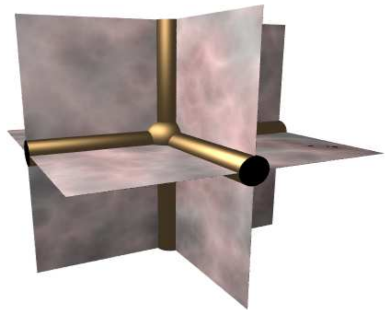


Figure 2 – Exemple de diviseurs à croisements normaux dans le plan $\mathbb{A}^2$ et dans l'espace $\mathbb{A}^3$. Localement, un diviseur à croisements normaux ressemble toujours à cela. Nous verrons néanmoins que, pour les champs algébriques, la situation peut s'avérer plus compliquée.

Par exemple, étant données une courbe de genre g_1 à $n_1 + 1$ points marqués et une autre de genre g_2 à $n_2 + 1$ points-marqués, on peut identifier le dernier point de chacune de ces courbes et obtenir une courbe de genre g_1+g_2 à n_1+n_2 points marqués. Cette construction permet en fait de définir des morphismes d'*accrochage* (et même d'auto-accrochage) entre les espaces de modules (figure 3). Le diviseur $\mathscr{S}_{g,n}$ des courbes singulières est la réunion des images des

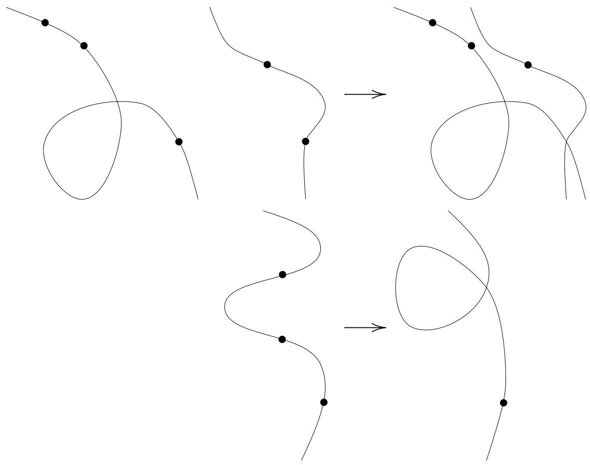


Figure 3 – Accrochage de deux courbes et autoaccrochage d'une courbe

morphismes d'accrochage. De plus, les morphismes d'accrochage permettent de décrire les strates ouvertes : les points d'une même strate ouverte correspondent aux courbes à points marqués ayant le même type topologique — on parle donc de *stratification par le type topologique*.

Voici un autre exemple de morphisme entre ces espaces de modules. Étant donnée une courbe de genre g à $n+1$ points marqués, on peut « oublier » le dernier point marqué et ainsi obtenir une courbe de genre g à n points marqués. En général, cela ne donne pas une courbe stable : il est possible que certaines composantes irréductibles n'aient pas suffisemment de points marqués ou singuliers pour que le groupe d'automorphismes soit fini ; si c'est le cas, on « contracte » la composante en question (qui est nécessairement rationnelle) en l'identifiant à un point. Cela définit encore un morphisme (d'oubli ou de *stabilisation*) entre les espaces de modules de courbes. On peut

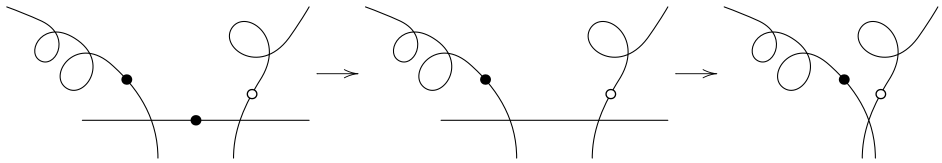


Figure 4 – Stabilisation d'une courbe, après qu'on lui ait enlevé un point marqué.

vérifier que ce morphisme $\bar{\mathscr{M}}_{g,n+1} \longrightarrow \bar{\mathscr{M}}_{g,n}$ est en fait la *courbe universelle* sur $\bar{\mathscr{M}}_{g,n}$, *i.e.*, pour toute famille de courbes stables $\mathrm{Y} \longrightarrow \mathrm{X}$ sur un schéma X, il existe un « unique » morphisme $\mathrm{X} \longrightarrow \bar{\mathscr{M}}_{g,n}$ tel que Y soit le « produit-fibré » [3]

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Y} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & \bar{\mathscr{M}}_{g,n+1} \arrow[d] \\ \mathrm{X} \arrow[r] & \bar{\mathscr{M}}_{g,n}. \end{tikzcd}$$

On appellera *tour de Teichmüller–Grothendieck* la famille des espaces de modules de courbes stables munie de tous ces morphismes.

Maintenant que le décor (la 2-catégorie des champs algébriques) est planté et les acteurs (les espaces de modules de courbes) présentés, revenons au sujet qui nous intéresse : le groupe fondamental des espaces de modules de courbes lisses. En topologie, le groupe fondamental peut se définir indifféremment à l'aide de lacets ou de revêtements ; cette seconde description se transcrit aisément en géométrie algébrique. Plus précisément, dans [SGA 1], on donne une

3. Comme les champs algébriques ne forment pas tant une catégorie qu'une 2-catégorie, c'est un peu plus compliqué : il ne s'agit pas d'un produit-fibré mais d'un 2-produit-fibré et le morphisme $\mathrm{X} \longrightarrow \bar{\mathscr{M}}_{g,n}$ n'est pas unique, mais unique à unique isomorphisme prés.

caractérisation des catégories, dites *galoisiennes*,[4] de la forme G-$\mathfrak{ens}$ (catégorie des ensembles finis munis d'une action continue d'un groupe profini G), on démontre que la catégorie des revêtements étales d'un schéma X est de cette forme et on donne un moyen de retrouver le groupe profini. C'est ce groupe profini que l'on définit comme étant le groupe fondamental (profini) du schéma X. Au lieu de considérer des revêtements étales (cela soulèverait quelques difficultés au niveau des champs algébriques, car on obtient naturellement une 2-catégorie de revêtements et pas une catégorie), on peut considérer des faisceaux étales localement constants finis : pour les schémas, c'est une catégorie équivalente. On peut, de cette manière, généraliser la notion de groupe fondamental aux champs algébriques : la catégorie des faisceaux étales localement constants finis sur un champ algébrique est galoisienne.

La notion de groupe fondamental est centrale en homotopie, mais elle n'est pas « intrinsèque » : pour définir un groupe fondamental, on doit commencer par *choisir* un point-base. Ce faisant, on détruit souvent la symétrie du problème. Par exemple, quand un groupe agit sur un espace topologique, on aimerait pouvoir prendre pour point-base un point invariant sous l'action du groupe — cette action se traduirait alors en une action sur le groupe fondamental. Mais que faire s'il n'y a pas de point invariant ? On peut prendre un *ensemble* de points, globalement invariant : de même que le groupe fondamental est défini à partir des lacets en un point, on peut construire une catégorie dont les objets sont les points-bases que l'on a choisis et les morphismes les classes d'homotopie de chemins entre ces points. Cette catégorie est même un *groupoïde*[5], le *groupoïde fondamental*. La notion de groupoïde fondamental a un autre avantage sur celle de groupe fondamental : elle permet

4. Une catégorie $\mathfrak{C}$ est dite *galoisienne* si

(i) les limites projectives finies existent ;

(ii) les sommes finies existent ;

(iii) les quotients par les groupes finis existent ;

(iv) tout morphisme $X \longrightarrow Y$ peut se factoriser en un épimorphisme strict suivi d'un monomorphisme dont l'image est un sommand direct de Y

et s'il existe un *foncteur-fibre*, *i.e.*, un foncteur $\mathcal{F} : \mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{Ens}$ tel que

(i) $\mathcal{F}$ est exact à gauche ;

(ii) $\mathcal{F}$ commute aux sommes directes finies ;

(iii) $\mathcal{F}$ commute au passage au quotient par un groupe fini ;

(iv) $\mathcal{F}$ transforme les épimorphismes stricts en épimorphismes ;

(v) pour tout morphisme u de $\mathfrak{C}$, si $\mathcal{F}u$ est un isomorphisme, alors u en est aussi un.

5. Rappelons qu'un groupoïde est une catégorie dont toutes les flèches sont des isomorphismes. En particulier, un groupoïde à un seul objet n'est rien d'autre qu'un groupe. On peut dire que les groupoïdes sont des « groupes à plusieurs objets ».

de simplifier certains énoncés en se débarassant d'hypothèses de connexité ; c'est par exemple le cas du théorème de Van Kampen (voir [Brown 2]).

Revenons au cas des espaces de modules de courbes lisses $\mathscr{M}_{g,n}$ et par exemple à $\mathscr{M}_{0,4} = \mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$: quels points-bases choisir ? On aimerait bien prendre les trois points que l'on a enlevés (c'est une orbite sous l'action du groupe symétrique $\mathfrak{S}_3$, qui agit ici par $t \mapsto t$, $1-t$, $(1/t)$, $1/(1-t)$, $t/(t-1)$, $(t-1)/t$) — mais justement, ils ne sont plus là. À la place, si on est sur $\mathbb{C}$, on peut prendre les intervalles (réels) $]0,1[$, $]1,+\infty[$ et $]-\infty,0[$ ou des points « infiniment proches » de 0, 1 et ∞ dans une certaine direction, que l'on pourrait noter $\overrightarrow{01}$, $\overrightarrow{0\infty}$, $\overrightarrow{1\infty}$, $\overrightarrow{10}$, $\overrightarrow{\infty 0}$ et $\overrightarrow{\infty 1}$. Pour obtenir des points-bases tangenciels, sur un schéma (sur $\mathbb{C}$, défini sur $\mathbb{R}$) privé d'un diviseur à croisements normaux, en dimension supérieures, on peut prendre les composantes connexes des points réels d'un voisinage suffisemment petit du point. On peut aussi construire ces points-bases tangenciels à l'aide de vecteurs tangents : on prend des coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ au voisinage du point, de manière que le diviseur ait pour équation $x_1 = \cdots = x_m = 0$, et on prend des vecteurs tangents de coordonées $(\pm 1, \ldots, \pm 1, 0, \ldots, 0)$. Ces points-bases tangenciels peuvent se définir de manière algébrique et nous verrons en II.4.1 et II.5.9 qu'ils se généralisent aux champs algébriques.

Si on essaye d'appliquer cette notion de point-base tangenciel aux espaces de modules de courbes lisses, on a envie de prendre les strates de dimension zéro comme points-bases. Ces points correspondent aux « courbes stables dégénérées maximales », *i.e.*, aux courbes dont toutes les composantes sont rationelles à trois points spéciaux (un point spécial est un point de la normalisée au dessus d'un point marqué ou singulier) : il s'agit d'objets purement combinatoires que l'on peut décrire à l'aide de graphes trivalents (figure 5).

Pour avoir des points-bases tangenciels, on peut remarquer qu'il suffit d'avoir des coordonnées au voisinage de ce point et pour cela, il suffit d'avoir des coordonnées sur chacune des strates de dimension un. Mais ces strates de dimension un sont des images de $\bar{\mathscr{M}}_{0,4}$ ou de $\bar{\mathscr{M}}_{1,1}$, *i.e.*, des droites projectives à trois points distingués. L'un de ces trois points est le point en lequel on se trouve et pour avoir des coordonnées, il suffit de choisir l'un des deux points restants : en l'appelant 1 et en appelant ∞ le dernier, on aura une coordonnée sur la strate. Ce sont encore les graphes qui nous permettront d'effectuer ce choix : deux graphes sont sur la même strate de dimension un si et seulement s'ils peuvent être munis d'une structure de graphe en rubans telle qu'ils diffèrent l'un de l'autre par une « fusion » (figure 6). Nous allons montrer que les graphes en rubans permettent effectivement de construire des points-bases tangenciels.[6]

6. Certaines difficultés apparaitront. Par exemple, les strates de dimension un ne sont

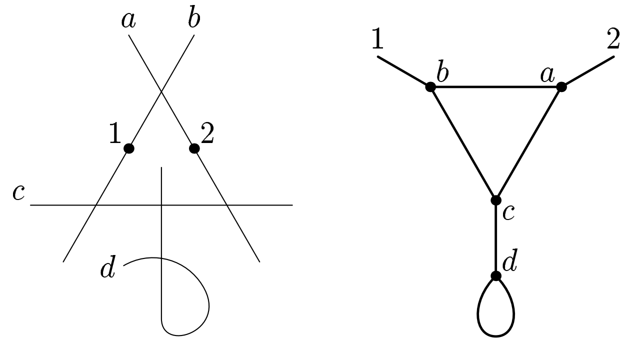


Figure 5 – Une courbe stable dégénérée maximale et le graphe associé : ses sommets sont les composantes irréductibles de la courbe, ses arrêtes correspondent aux intersections entre les composantes, ses jambes (ici 1 et 2) correspondent aux points marqués. Si la courbe est dégénérée maximale, ce graphe est trivalent.

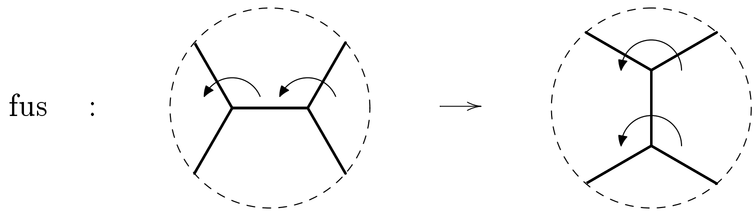


Figure 6 – La fusion d'une arrête d'un graphe en rubans (le graphe est inchangé en dehors des pointillés)

Nous venons de voir que les graphes en rubans permettaient de décrire des points-bases tangenciels sur les espaces de modules de courbes lisses $\mathcal{M}_{g,n}$. De manière plus générale, les graphes permettent de décrire diverses constructions sur ces espaces de modules, établissant un dictionnaire entre graphes et opérations sur les graphes d'une part et la géométrie des espaces de modules de courbes d'autre part. La figure 7 résume certaines de ces relations.

graphe trivalent (stable)	strate de dimension zéro, correspondant à une courbe stable dégénérée maximale.
groupe d'automorphismes d'un graphe trivalent	groupe d'automorphismes de la courbe correspondante
graphe stable non trivalent	strate de dimension non nulle
contraction de graphes	inclusions entre strates
automorphismes d'un graphe stable, non trivalent	la strate ouverte correspondante est le quotient d'une produit d'espaces de modules de courbes lisses par une action du groupe d'automorphismes de ce graphe
graphe en rubans	point-base tangenciel
fusion entre deux graphes	chemin, le long d'une strate de dimension un, entre deux points-bases tangenciels.

Figure 7 – Le dictionnaire entre la combinatoire des graphes et la géométrie des espaces de modules de courbes.

Nous avons dit plus haut que les espaces de modules de courbes stables, $\bar{\mathcal{M}}_{g,n}$, étaient reliés par divers morphismes et, à ce titre, formaient une *tour.*

pas des droites projectives, mais juste des images de droites projectives : les trois points correspondant à des courbes stables dégénérées maximales ne sont pas nécessairement distincts. D'autre part, le nombre de strates de dimension un passant par une strate de dimension nulle n'est pas nécessairement égal à la dimension de l'espace : il s'agit d'un champ algébrique, que l'on peut voir localement comme un espace vectoriel quotienté par l'action d'un groupe fini ; il se peut que l'action de ce groupe identifie certaines des strates de dimension un.

Les espaces de modules de courbes lisses $\mathscr{M}_{g,n}$ ne présentent pas une telle structure mais, par contre, leurs groupoïdes fondamentaux ont une structure comparable.

Pour tenter de comprendre quelle serait cette « structure modulaire » sur la tour des groupoïdes fondamentaux des espaces de modules de courbes lisses $\pi_1\mathscr{M}_{g,n}$, examinons quelques groupoïdes présentant une telle « structure modulaire ». Commençons par le groupoïde dont les objets sont les différents découpages en pantalons d'une surface de Riemann de genre g dont le bord a n composantes connexes (nous ne précisons pas les morphismes pour l'instant). La « structure modulaire » est décrite par la figure 8. Pour tenter de

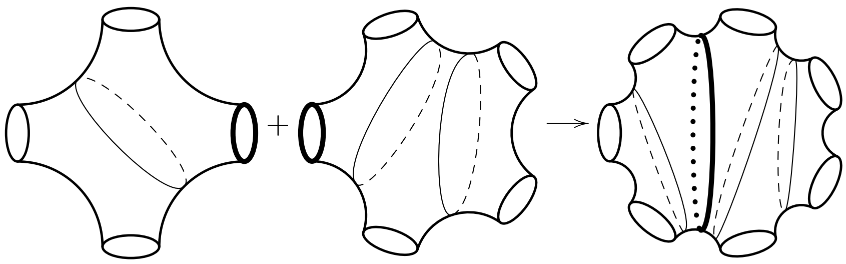
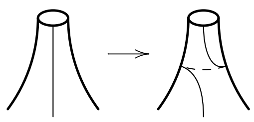
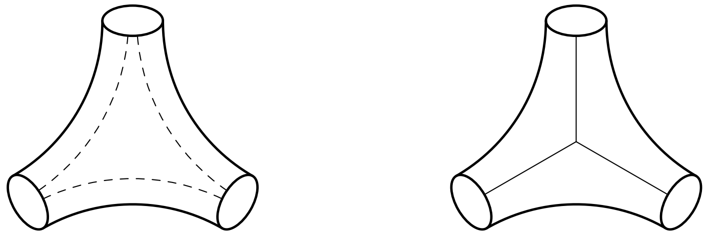


Figure 8 – Analogue du « morphisme d'accrochage » dans la famille de groupoïdes de surfaces de Riemann découpées en pantalons.

nous rapprocher des graphes en rubans qui décrivent les points-bases tangenciels sur les espaces de modules de courbes lisses, considérons le groupoïde $\widetilde{\Gamma}'_{g,n}$ dont les objets sont les surfaces de Riemann découpées en pantalons et munies de coutures (figure 9). La deuxième définition des coutures permet d'associer un graphe en rubans (et donc un point-base tangenciel de $\mathscr{M}_{g,n}$) à une surface de Riemann découpée en pantalons munis de coutures. Nous pouvons maintenant définir les morphismes de notre groupoïde : d'une part, les automorphismes de graphes, d'autre part, les quatre « mouvements élémentaires » suivants, soumis à certaines relations que nous ne détaillons pas ici :

– la torsion



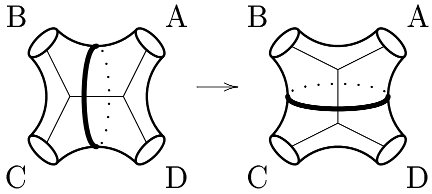


(a) Coutures sur un pantalon

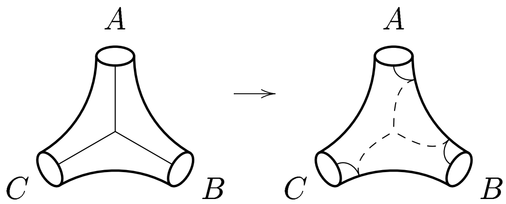
(b) Autre manière de définir les coutures sur un pantalon

Figure 9 – On peut définir les coutures sur un pantalon (dont chaque composante du bord est munie d'un point marqué) soit comme trois courbes, non sécantes, partant de points voisins de ces points marqués (a), soit comme un graphe tracé sur le pantalon et partant des points marqués (b).

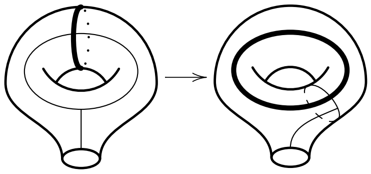
– la fusion



– le tressage



– le retournement



Le fait que le découpage d'une surface de Riemann en pantalons munis de coutures définit un graphe en rubans permet, par « passage au quotient », d'obtenir un groupoïde dont les objets sont les graphes en rubans : c'est le *groupoïde de Lyubashenko*, que nous noterons $\Gamma'_{g,n}$.

Le but de cette thèse est de préciser la remarque de suivante de [Grothendieck],

L'intérêt a priori d'une telle connaissance des deux premiers étages

> *de la tour (savoir, les cas où la dimension modulaire* $\mathrm{N} = 3g-3+n$ *est* $\leqslant 2$*) réside dans ce principe que,* la tour entière se reconstitue à partir des deux premiers étages *en ce sens que via l'opération fondamentale de « recollement », l'étage* 1 *fournit un système complet de générateurs et l'étage* 2 *un système complet de relations.*

en montrant que le groupoïde fondamental $\pi_1\mathscr{M}_{g,n}$ des espaces de modules de courbes lisses est le (complété profini du) quotient $\Gamma_{g,n}$ du groupoïde de Lyubashenko $\Gamma'_{g,n}$ par la torsion autour des extrémités — la « structure modulaire » n'est donc pas présente sur les groupoïdes fondamentaux eux-mêmes mais sur une extension centrale.

Nous avons déjà évoqué la première étape de ce programme : la construction des points-bases tangenciels à l'aide de graphes en rubans. L'étape suivante est la construction des générateurs. Localement, au voisinage d'un point de $\mathscr{M}_{g,n}$ décrivant une courbe stable dégénérérée maximale, décrite par un graphe en rubans trivalent, *i.e.*, une strate de dimension nulle, les strates de dimension un sont en bijection avec les arrêtes du graphe. On est donc tenté de définir la torsion d'une arrête comme étant un tour complet autour de la strate correspondante. De même, on définit le tressage en un sommet comme des demi-tours autour des strates de dimension un qui correspondent aux trois arrêtes qui partent de ce sommet. Nous donnerons en IV.3.6 et IV.3.7 une description algébrique de ces chemins. Comme la fusion est définie par une arrête, *i.e.*, par une strate de genre un, on définiera le chemin correspondant comme un chemin le long de cette strate. Quant au dernier générateur, le retournement, on peut le définir explicitement comme un chemin dans $\mathscr{M}_{1,1}$.

La troisième étape consiste à montrer que les relation définissant le groupoïde de Lyubashenko sont effectivement vérifiées dans le groupoïde fondamental $\pi_1\mathscr{M}_{g,n}$: nous l'avons fait pour certaines des relations faisant intervenir le tressage et la torsion.

La dernière étape, que nous n'avons pas abordée, consiste à montrer par récurrence qu'il s'agit bien d'une présentation. Pour les premiers étages, on peut le faire à la main : cela amorce la récurrence. Pour les étages suivants, il faudrait utiliser les résultats de [Lochak] affirmant qu'en dimension strictement supérieure à deux, le groupe fondamental de $\mathscr{M}_{g,n}$ est isomorphe au groupe fondamental d'un voisinage tubulaire du diviseur $\mathscr{S}_{g,n}$ des courbes singulières : il faudrait utiliser la description des strates ouvertes de $\mathscr{S}_{g,n}$ (voir III.3) pour décrire le groupoïde fondamental du diviseur puis de son voisinage tubulaire.

Résumé

Voici la liste des résultats démontrés dans ce travail.

Dans le premier chapitre, nous nous arrêtons sur la notion de groupoïde fondamental d'un topos localement connexe, défini par [Leroy] (voir aussi [Moerdijk 1]) comme un certain topos localement galoisien (I.1.3) :

- Nous montrons en I.1.11 que ce topos localement galoisien permet, après avoir choisi une famille de points-bases, d'obtenir un objet plus concret — un progroupoïde — et nous expliquons en I.1.17 en quoi c'est une généralisation des catégories galoisiennes de [SGA 1, V] ;
- Nous montrons en I.2.1 que cette théorie du progroupoïde fondamental d'un topos s'applique aux champs algébriques ;
- Nous montrons en I.4.5, en utilisant [Artin–Mazur], que la notion de progroupe fondamental résultant du type d'homotopie d'un champ algébrique, défini d'après J.-L. Verdier [SGA 4], coïncide avec la notion de progroupoïde fondamental ;
- Cette théorie du groupe fondamental d'un champ algébrique nous permet de calculer en I.3.15 le complété profini du groupe fondamental de l'orbifold (généralisé, analytique) associé défini en I.3.10 ;
- Nous établissons en I.5.4 quelques suites exctes courtes, notamment celle reliant le groupoïde fondamental profini d'un champ algébrique sur un corps k et le groupe de Galois absolu de ce corps (I.5.5), généralisant [SGA 1, IX 6.1].

Dans le second chapitre, nous nous arrêtons sur la notion de point-base tangenciel d'un schéma privé d'un diviseur à croisements normaux, initialement due à [Deligne] et décrite en caractéristique nulle en termes de séries de Puiseux par [Andreson–Ihara 2] :

- Nous construisons en II.2.12 de tels points-bases tangenciels sur un

corps algébriquement clos de caractéristique quelconque ;
- Nous étudions en II.3.5 l'espace tangent d'un champ algébrique en un point et montrons qu'il s'agit d'un espace vectoriel *muni d'une action du groupe de ce point* ;
- À l'aide de cette description, nous construisons en II.4.1 des points-bases tangenciels sur un champ algébrique privé d'un diviseur à croisements normaux ;
- Nous généralisons la notion de voisinage tubulaire de [Cox 2] aux champs algébriques.

Dans le troisième chapitre, nous nous arrêtons sur les espaces de modules de courbes stables construits et étudiés par [Deligne–Mumford] et [Knudsen] :
- Nous rappelons en III.2.5 que les graphes permettent de décrire le type topologique d'une courbe stable, et donc d'identifier la strate à laquelle elle appartient ;
- Nous remarquons en III.2.12 que ces graphes permettent de calculer le groupe d'automorphismes des courbes stables dégénérées maximales ;
- En III.3.2, nous exprimons les strates ouvertes de la stratification des espaces de modules de courbes comme quotient d'un produit d'espaces de modules de courbes *lisses* par le groupe des automorphismes du graphe décrivant la strate en question ;
- Nous remarquons en III.5.11 que la déformation universelle d'une courbe stable dégénérée maximale permet de décrire l'espace tangent de $\bar{\mathscr{M}}_{g,n}$ au point correspondant ;
- Nous montrons en III.5.12 qu'en un tel point, une structure de graphe en rubans permet de définir des coordonnées dans cette déformation et donc un point-base tangenciel.

Dans le quatrième chapitre, nous nous arrêtons sur quelques liens entre le groupoïde de [Lyubashenko 1] et le groupoïde fondamental des espaces de modules de courbes lisses, relatif aux points-bases précédemment construits :
- Nous définissons (sur un corps algébriquement clos de caractéristique nulle) des chemins de « torsion » (IV.3.6) et de « tressage » (IV.3.7) entre les points-bases tangenciels de $\mathscr{M}_{g,n}$ construits au chapitre précédent et montrons que les relations attendues pour la composition de deux tressages sont bien satisfaites (IV.3.8) ;
- À l'aide de la fusion et de la description explicite de l'espace de modules de courbes elliptiques $\mathscr{M}_{1,1}$, nous construisons, en dimension un, des chemins de retournement (IV.4.4), ainsi que la torsion et le tressage pour les graphes avec une boucle (IV.3.9).

Les appendices rappellent des notions déjà connues :

- La théorie des champs algébriques provient de [Deligne–Mumford] et est développée dans [Vistoli] et [Laumon–Moret-Bailly].
- La théorie des 2-catégories est détaillée dans [Kelly–Street].
- La théorie des topos ainsi que les notions d'ind-objets et de pro-objets proviennent de [SGA 4].

Chapitre I

Groupoïdes fondamentaux

Dans [SGA 1], on démontre que la catégorie des revêtements étales d'un schéma est équivalente à la catégorie des ensembles finis munis de l'action continue d'un groupe profini (uniquement déterminé à isomorphisme près) : c'est le groupe fondamental profini du schéma. Dans une première section, nous rappelons, en suivant [Leroy], comment on généralise la notion de groupe ou de groupoïde fondamental à un topos (connexe et localement connexe) ; dans ce cadre, les revêtements étales sont remplacés par des faisceaux localement constants. Dans une seconde section, nous appliquerons cette définition aux champs algébriques. Dans une troisième section, nous associerons un orbifold (généralisé) à un champ algébrique et nous vérifierons que les groupes fondamentaux *profinis* sont les mêmes. Dans une quatrième section, nous rappelerons, en suivant [Artin–Mazur], comment définir le type d'homotopie d'un champ algébrique et démontrerons qu'il permet de calculer le groupe fondamental.

1 Groupoïde fondamental profini d'un topos

De même que le groupe fondamental d'un schéma est défini en remarquant que la catégorie de ses revêtements étales est équivalente à la catégorie des ensembles finis munis de l'action continue d'un certain groupe profini, on peut définir le groupe (groupoïde) fondamental d'un topos $\mathscr{T}$ en remarquant que la catégorie (des sommes disjointes) de ses objets localement constants est équivalente au topos classifiant d'un progroupoïde. Nous rappelons ces résultats de [Leroy].

Définitions 1.1. — Un objet X d'un topos $\mathscr{T}$ est *connexe* si dans toute écriture $\mathrm{X} = \mathrm{X}_1 \amalg \mathrm{X}_2$, X_1 ou X_2 est l'objet initial $\varnothing$ de $\mathscr{T}$. Un topos $\mathscr{T}$ est *connexe* si son objet final est connexe. Un topos $\mathscr{T}$ est *localement connexe* s'il est engendré[1] par ses objets connexes ; il revient au même [Leroy, 1.5] de demander qu'il existe un foncteur « composantes connexes », *i.e.*, un adjoint à gauche du foncteur « objet constant » (qui à un ensemble I associe la somme disjointe $\mathrm{I}_{\mathscr{T}}$ de $\operatorname{Card}\mathrm{I}$ copies de l'objet final $*$ du topos $\mathscr{T}$). Un objet F est *trivialisé* par un objet U si sa restriction $\mathrm{F}|_{\mathrm{U}} = (\mathrm{F}\times\mathrm{U} \longrightarrow \mathrm{U})$ est un objet constant du topos $\mathscr{T}/\mathrm{U}$. Un objet est *localement constant* s'il est trivialisé par une famille d'objets couvrant l'objet final. Un objet Y est *galoisien* s'il est connexe, localement constant et si le morphisme canonique $\mathrm{Y}\times(\operatorname{Aut}\mathrm{Y})_{\mathscr{T}} \longrightarrow \mathrm{Y}\times\mathrm{Y}$ est un isomorphisme (on dit aussi que Y est un *pseudo-torseur* sous son groupe d'automorphismes). Un topos est *localement galoisien* s'il est engendré par ses objets galoisiens. Un objet constant, *i.e.*, isomorphe à un objet de la forme $\mathrm{I}_{\mathscr{T}}$, est *fini* si l'ensemble I est fini. Un objet localement constant est *fini* si ses restrictions aux objets le trivialisant sont des objets constants finis. Un topos est *localement galoisien profini* s'il est engendré par ses objets galoisiens finis.

Définition 1.2. — Le *topos classifiant* d'un groupoïde G est la catégorie des préfaisceaux sur le groupoïde opposé[2]. Nous le noterons $\mathfrak{B}\mathrm{G}$ ou G-$\mathfrak{Ens}$.

Le théorème suivant [Leroy, 2.4, 3.1.1] définit le groupoïde fondamental d'un topos localement connexe.

Théorème 1.3. — ***Soit $\mathscr{T}$ un topos localement connexe.***

(*i*) ***La sous-catégorie pleine*** $\mathrm{SLC}\,\mathscr{T}$ ***des sommes disjointes d'objets localement constants de $\mathscr{T}$ est un topos localement galoisien et le foncteur d'inclusion*** $\mathrm{SLC}\,\mathscr{T} \longrightarrow \mathscr{T}$ ***induit un morphisme de topos*** $\mathscr{T} \longrightarrow \mathrm{SLC}\,\mathscr{T}$ 2***-universel parmi les morphismes vers des topos localement galoisiens.***

(*ii*) ***Tout topos localement galoisien est équivalent à une*** 2***-limite projective stricte***[3] ***de topos classifiants de groupoïdes. En particulier, on peut voir le topos*** $\mathrm{SLC}\,\mathscr{T}$ ***comme le groupoïde fondamental de $\mathscr{T}$.***

1. Nous renvoyons à l'appendice B.2 pour le rappel des notions classiques relatives aux topos.

2. Nous prenons la catégorie opposée de manière que dans le cas où le groupoïde est en fait un groupe, son topos classifiant soit la catégorie des ensembles munis d'une action de G *à gauche* : or sa catégorie de préfaisceaux est la catégorie des ensembles munis d'une action de G *à droite*

3. Nous rappelons la notion de 2-limite projective dans l'appendice B.1. On dit qu'un 2-système projectif de topos est *strict* si les foncteurs image réciproques des morphismes de topos le constituant sont pleinement fidèles.

Remarque 1.4. — On peut préciser le deuxième point [Leroy, 3.2 et 3.3].

(i) Soit R un crible couvrant l'objet final $*$ du topos $\mathscr{T}$. On note $\mathrm{LC}(\mathscr{T}, \mathrm{R})$ la sous-catégorie pleine de $\mathscr{T}$ formée des objets trivialisés par les objets connexes de R : c'est un topos et le foncteur d'inclusion $\mathrm{LC}(\mathscr{T}, \mathrm{R}) \longrightarrow \mathscr{T}$ est le foncteur image réciproque d'un morphisme de topos.

(ii) Le topos localement galoisien $\mathscr{T}$ est la 2-limite projective de ces topos :

$$\mathscr{T} \approx \underset{\mathrm{R} \in \mathrm{J}(*)}{2\text{-}\varprojlim} \mathrm{LC}(\mathscr{T}, \mathrm{R}).$$

(iii) Les topos $\mathrm{LC}(\mathscr{T}, \mathrm{R})$ sont des topos classifiants de groupoïdes : si G est le groupoïde des points de $\mathrm{LC}(\mathscr{T}, \mathrm{R})$ (*i.e.*, des morphismes de topos depuis le topos ponctuel $\mathfrak{Ens}$) et $\mathfrak{B}\mathrm{G}$ son topos classifiant, on a une équivalence

$$\mathrm{LC}(\mathscr{T}, \mathrm{R}) \approx \mathfrak{B}\mathrm{G}.$$

Nous allons maintenant expliquer comment passer de cette notion abstraite de groupoïde fondamental, défini en termes de 2-limites projectives de topos classifiants de groupoïdes, à celle, plus concrète, de progroupoïde fondamental, généralisant celle de groupe fondamental profini de [SGA 1].

Définition 1.5. — Un *progroupoïde* est un système projectif filtrant de groupoïdes (et pas un 2-système).

Un *progroupoïde strict* est un progroupoïde « $\varprojlim$ » G_i tel que

(i) les foncteurs $\mathrm{G}_i \longrightarrow \mathrm{G}_j$ induisent des bijections entre les ensembles d'objets $\mathrm{Ob}\,\mathrm{G}_i \longrightarrow \mathrm{Ob}\,\mathrm{G}_j$;

(ii) pour tous objets X et Y, les foncteurs $\mathrm{G}_i \longrightarrow \mathrm{G}_j$ induisent des surjections, $\mathrm{Hom}_{\mathrm{G}_i}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{G}_j}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$.

Nous ne considèrerons que des progroupoïdes stricts.

Définition 1.6. — Un progroupoïde strict « $\varprojlim$ » G_i est *connexe* si l'un des G_i est connexe. Tous les G_i sont alors connexes. Tout progroupoïde strict peut s'écrire comme somme disjointe de sous-progroupoïdes stricts connexes, uniquement déterminés : ce sont ses *composantes connexes.*

Définition 1.7. — Le *topos classifiant* d'un progroupoïde « $\varprojlim$ » G_i est la 2-limite projective (dans la 2-catégorie des topos) des topos classifiants de ses composantes,

$$\mathfrak{B}\text{« }\varprojlim\text{ »}\,\mathrm{G}_i = 2\text{-}\varprojlim \mathfrak{B}\mathrm{G}_i.$$

Nous allons décrire le topos classifiant d'un progroupoïde de manière plus explicite.

Lemme 1.8. —

(*i*) *Soit* $\mathrm{G} = \text{“}\varprojlim\text{”}\mathrm{G}_i$ *un progroupe strict. Notons* $\mathfrak{B}_0\mathrm{G}$ *la catégorie dont les objets sont les ensembles* X *munis d'une action de l'un des* G_i *(ils sont donc aussi munis d'une action de* G_k*, pour tout* $k \geqslant i$*), connexes (en tant que* G_i*-ensembles,* i.e.*, ils n'ont qu'une orbite) et dont les morphismes sont données par*

$$\mathrm{Hom}\big((\mathrm{X}, \mathrm{G}_i), (\mathrm{Y}, \mathrm{G}_j)\big) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{G}_k}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \text{ pour tout } k \geqslant \sup(i, j).$$

Le topos classifiant $\mathfrak{B}\mathrm{G}$ *du progroupe* G *est équivalent à la catégorie* $\mathfrak{S}$ *des sommes disjointes d'objets de* $\mathfrak{B}_0\mathrm{G}$*, où les morphismes sont donnés par*

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{B}\mathrm{G}}\Big(\coprod_i \mathrm{X}_i, \coprod_j \mathrm{Y}_j\Big) = \prod_i \coprod_j \mathrm{Hom}_{\mathfrak{B}_0\mathrm{G}}(\mathrm{X}_i, \mathrm{Y}_j).$$

(*ii*) *Soit* $\mathrm{G} = \text{“}\varprojlim\text{”}\mathrm{G}_i$ *un progroupoïde strict. On note* $\mathfrak{B}_0\mathrm{G}$ *la catégorie dont les objets sont les objets connexes des* $\mathfrak{B}\mathrm{G}_i$*,* i.e.*, des familles d'ensembles* $(\mathrm{X}_x)_{x\in \mathrm{Ob}\,\mathrm{G}}$ *avec une action de* G_i *(donc de* G_k *pour tout* $k \geqslant i$*), connexes en tant que préfaisceaux, et dont les morphismes sont donnés par*

$$\mathrm{Hom}\big((\mathrm{G}_i, (\mathrm{X}_x)_{x\in \mathrm{Ob}\,\mathrm{G}}), (\mathrm{G}_j, (\mathrm{Y}_x)_{x\in \mathrm{Ob}\,\mathrm{G}})\big) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{G}_k}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$$

pour $k \geqslant \sup(i, j)$*. Le topos classifiant* $\mathfrak{B}\mathrm{G}$ *est équivalent à la catégorie* $\mathfrak{S}$ *des sommes disjointes d'objets de* $\mathfrak{B}_0\mathrm{G}$*, dont les morphismes sont donnés par*

$$\mathrm{Hom}\Big(\coprod_i \mathrm{X}_i, \coprod_j \mathrm{Y}_j\Big) = \prod_i \coprod_j \mathrm{Hom}_{\mathfrak{B}_0\mathrm{G}}(\mathrm{X}_i, \mathrm{Y}_j).$$

Démonstration : (a) D'après [Leroy, 3.3.6], on sait que la 2-limite projective d'un système projectif strict de topos classifiants de groupoïdes $\mathfrak{B}\mathrm{G}_i$ est le topos des faisceaux pour la topologie canonique sur $\varinjlim^{\mathfrak{Cat}} \mathfrak{B}\mathrm{G}_i$, où le système inductif $(\mathfrak{B}\mathrm{G}_i)_i$ est donné par les foncteurs image réciproque des morphismes de topos.

(b) Montrons que les topos classifiants d'un progroupoïde *strict* forment un système projectif *strict* de topos. Il s'agit de voir que si $f : \mathrm{G}_i \longrightarrow \mathrm{G}_j$ est un morphisme de groupoïdes qui soit une bijection sur les ensembles d'objets et tel que les applications $\mathrm{Hom}_{G_i}(x,y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{G_j}(fx,fy)$ soient surjectives, alors le foncteur

$$f^* : \begin{cases} \mathfrak{B}G_j & \longrightarrow \mathfrak{B}G_i \\ X & \longmapsto X \end{cases}$$

est pleinement fidèle — c'est effectivement le cas.

(c) La catégorie $\mathfrak{S}$ décrite dans l'énoncé du lemme est bien un topos d'après le lemme suivant, appliqué à $\mathfrak{K} = \varinjlim^{\mathfrak{Cat}} \mathfrak{B}G_i$ (qui est la sous-catégorie pleine de $\mathfrak{S}$ dont les objets s'écrivent $\coprod_{j\in J} X_j$ où il existe $i \in I$ tel que pour tout $j \in J$, $X_j \in \mathrm{Ob}\mathfrak{B}G_i$) et $\mathscr{T} = \widehat{\mathfrak{K}}$.

Lemme 1.9. — *Soit $\mathscr{T}$ un topos, $\mathfrak{K}$ une sous-catégorie pleine de $\mathscr{T}$ et $\mathfrak{S}$ la sous-catégorie pleine des sommes disjointes d'objets de $\mathfrak{K}$. Si*

- (i) *Tout objet X de $\mathfrak{K}$ est somme disjointe $X = \coprod_{i\in I} X_i$ d'objets connexes de $\mathfrak{K}$ et pour tout $J \subset I$, $\coprod_{i\in J} X_i$ est encore dans $\mathfrak{K}$;*
- (ii) *Tout morphisme d'un objet non vide de $\mathfrak{K}$ vers un objet connexe de $\mathfrak{K}$ est un épimorphisme ;*
- (iii) *$\mathfrak{K}$ est stable dans $\mathscr{T}$ par limites projectives finies ;*
- (iv) *Pour toute relation d'équivalence $R \hookrightarrow X \times X$ dans $\mathfrak{K}$, le quotient X/R est encore dans $\mathfrak{K}$;*
- (v) *Il existe une petite famille génératrice pour $\mathfrak{K}$;*

Alors, $\mathfrak{S}$ est un topos.

Démonstration : Voir [Leroy, 2.4.2, 2.4.3]. □

(d) On peut désormais conclure : d'après (a), $2\text{-}\varprojlim^{\mathfrak{Topos}} \mathfrak{B}G_i$ est la plus petite sous-catégorie pleine de la catégorie des préfaisceaux sur $\varinjlim^{\mathfrak{Cat}} \mathfrak{B}G_i$ qui contienne les faisceaux représentables ; en particulier, elle contient aussi les sommes disjointes de préfaisceaux représentables, *i.e.*, $\mathfrak{S}$; mais comme $\mathfrak{S}$ est un topos, c'est la 2-limite projective recherchée. □

Remarque 1.10. — Ce lemme nous donne en particulier une description des objets connexes du topos classifiant d'un progroupoïde "$\varprojlim$" G_i : ce sont les objets connexes des $\mathfrak{B}G_i$.

Proposition 1.11. — *Soient $\mathscr{T}$ un topos localement connexe et P un ensemble de points de SLC $\mathscr{T}$, au moins un dans chaque composante connexe[4] de SLC $\mathscr{T}$. On peut alors définir un progroupoïde strict $\pi_1(\mathscr{T}, P)$ dont SLC $\mathscr{T}$ soit le topos classifiant.*

4. Je ne sais pas si un topos de la forme SLC $\mathscr{T}$ possède toujours des points : je suppose donc qu'ils sont préalablement donnés.

Démonstration : Nous savons déjà que SLC $\mathscr{T}$ est une 2-limite projective de topos classifiants de groupoïdes, SLC $\mathscr{T} = \underleftarrow{2\text{-lim}}_{\mathrm{R}} \mathfrak{B}\mathrm{G}_{\mathrm{R}}$. Nous allons montrer que

– on peut supposer que ces groupoïdes ont tous les mêmes objets, P ;
– ce système projectif est filtrant ;
– les morphismes de groupoïdes $\mathrm{G}_{\mathrm{R}'} \longrightarrow \mathrm{G}_{\mathrm{R}}$ sont surjectifs.

(a) Nous allons commencer par montrer que l'on peut se ramener à des groupoïdes G_{R} ayant tous les mêmes objets.

Remarquons tout d'abord que si $\mathscr{T}$ n'est pas connexe et si les $(\mathrm{U}_i)_{i\in \mathrm{I}}$ sont les composantes connexes de son objet final, on peut écrire $\mathscr{T} = \coprod_{i\in\mathrm{I}} \mathscr{T}/\mathrm{U}_i$ (c'est un 2-coproduit dans la 2-catégorie des topos, que l'on peut voir simplement comme un produit de catégories), où les $\mathscr{T}/\mathrm{U}_i$ sont des topos connexes et localement connexes.

Remarquons que la connexité de $\mathscr{T}$ implique celle des $\mathrm{LC}(\mathscr{T},\mathrm{R})$: supposons que l'objet final de $\mathrm{LC}(\mathscr{T},\mathrm{R})$ s'écrive $* = \mathrm{U}_1 \amalg \mathrm{U}_2$. Comme le foncteur d'inclusion $\mathrm{LC}(\mathscr{T},\mathrm{R}) \longrightarrow \mathscr{T}$ est le foncteur image réciproque d'un morphisme de topos, il préserve coproduit, objet final et objet initial. On a donc la même décomposition dans $\mathscr{T}$, donc l'un des U_i est l'objet initial $\varnothing$ de $\mathscr{T}$, qui est aussi l'objet initial de $\mathrm{LC}(\mathscr{T},\mathrm{R})$. Le même raisonnement montre que SLC $\mathscr{T}$ est connexe dès que $\mathscr{T}$ l'est.

On en déduit que les composantes connexes de $\mathscr{T}$, SLC $\mathscr{T}$ ou $\mathrm{LC}(\mathscr{T},\mathrm{R})$ sont les mêmes : on peut supposer que $\mathscr{T}$, SLC $\mathscr{T}$ et les $\mathrm{LC}(\mathscr{T},\mathrm{R})$ sont connexes. Les $\mathrm{LC}(\mathscr{T},\mathrm{R})$ sont des topos classifiants de groupoïdes G_{R} dont on peut choisir l'ensemble des objets comme étant P. Comme tout est connexe, on peut même supposer que P est réduit à un élément et que donc les G_{R} sont des groupes.

(b) Le système projectif des groupes G_{R} est filtrant, car si R et R′ sont des cribles couvrant l'objet final $*$ du topos $\mathscr{T}$, alors il existe un crible couvrant R″ plus fin que R et R′ : par exemple $\mathrm{R}'' = \mathrm{R} \cap \mathrm{R}'$.

(c) Montrons que les morphismes entre ces groupes sont surjectifs. Soit f l'un de ces morphismes de topos ; on sait que f^* est pleinement fidèle.

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{LC}(\mathscr{T},\mathrm{R}') \approx \mathfrak{B}\mathrm{G}' \arrow[d, "f"] \\ * \arrow[ur, "p'"] \arrow[r, "p"'] & \mathrm{LC}(\mathscr{T},\mathrm{R}) \approx \mathfrak{B}\mathrm{G} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & \mathfrak{B}\mathrm{G}' \arrow[dl, "p'^*"'] \\ \mathfrak{Ens} & \mathfrak{B}\mathrm{G} \arrow[l, "p^*"] \arrow[u, hook, "f^*"'] \end{tikzcd}$$

La situation est la suivante : on a un morphisme de groupes $f : \mathrm{G}' \longrightarrow \mathrm{G}$ tel que le foncteur

$$f^* : \begin{cases} \mathfrak{B}\mathrm{G} & \longrightarrow & \mathfrak{B}\mathrm{G}' \\ \mathrm{X} & \longmapsto & \mathrm{X} \end{cases}$$

soit pleinement fidèle et on veut montrer que ce morphisme de groupes est surjectif.

Considérons le G-ensemble G. Comme f^* est pleinement fidèle, on a une bijection

$$\mathrm{Aut}_{\mathrm{G}}\,\mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathrm{G}'}\,\mathrm{G}.$$

Comme un G-automorphisme de G est entièrement déterminé par l'image d'un élément (par exemple l'élément neutre $e \in \mathrm{G}$), on a

$$\mathrm{Aut}_{\mathrm{G}}\,\mathrm{G} = \mathrm{G}.$$

Pour les G′-automorphimes de G, commençons par remarquer que

$$\mathrm{Aut}_{\mathrm{G}'}\,\mathrm{G} = \mathrm{Aut}_{\mathrm{Im}\,f}\,\mathrm{G}.$$

Un $\mathrm{Im}\,f$-automorphisme φ de G n'est plus entièrement déterminé par l'image d'un élément. Choisissons un élément e_i dans chaque orbite $i \in \mathrm{G}/\,\mathrm{Im}\,f$. Un $\mathrm{Im}\,f$-automorphisme de G est entièrement défini par une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_{\mathrm{G}/\,\mathrm{Im}\,f}$ des orbites et un $h_i \in \mathrm{Im}\,f$ pour chaque orbite $i \in \mathrm{G}/\,\mathrm{Im}\,f$ avec $\varphi(e_i) = h_i e_{\sigma(i)}$. En d'autres termes,

$$\mathrm{Aut}_{\mathrm{Im}\,f}\,\mathrm{G} = \Big(\prod_{\mathrm{G}/\,\mathrm{Im}\,f} \mathrm{Im}\,f\Big) \rtimes \mathfrak{S}_{\mathrm{G}/\,\mathrm{Im}\,f}.$$

Mais les $\mathrm{Im}\,f$-automorphismes qui proviennent d'un élément de G sont entièrement définis par cette permutation σ et par l'un de ces éléments h_i. Comme, par hypothèse, tous les $\mathrm{Im}\,f$-automorphismes proviennent d'un élément de G, on est nécessairement dans l'un des deux cas suivants : $\mathrm{Im}\,f = \mathrm{G}$ ou $\mathrm{Im}\,f = 0$, car sinon on pourrait garder σ et l'un des h_i et modifier les autres h_i pour obtenir un automorphisme qui ne proviendrait d'aucun élément de G. Le second cas est à exclure, car le morphisme $\mathrm{Aut}_{\mathrm{G}}\,\mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathrm{G}'}\,\mathrm{G}$ serait alors $\mathrm{G} \longrightarrow \mathfrak{S}_{\mathrm{G}}$, qui n'est pas surjectif. On a donc bien $\mathrm{Im}\,f = \mathrm{G}$, *i.e.*, f est surjective.

(d) On a donc un progroupe strict “ $\varprojlim$” G_{R} tel que $\mathrm{SLC}\,\mathscr{T} \approx \text{2-}\varprojlim \mathfrak{B}\mathrm{G}_{\mathrm{R}}$, mais d'après la remarque précédente, $\text{2-}\varprojlim \mathfrak{B}\mathrm{G}_{\mathrm{R}} \approx \mathfrak{B}$ “ $\varprojlim$” G_{R}. Ceci achève la démonstration. □

Définition 1.12. — Un *point-base* d'un topos localement connexe $\mathscr{T}$ est un point du topos $\mathrm{SLC}\,\mathscr{T}$, *i.e.*, un morphisme de topos $\mathfrak{Ens} \longrightarrow \mathrm{SLC}\,\mathscr{T}$.

Le théorème suivant [Leroy, 5.2.3] dit que l'on peut effectuer un raisonnement similaire pour obtenir un groupoïde profini.

Théorème 1.13. — ***Soit $\mathscr{T}$ un topos localement connexe.*[5] *La sous-catégorie pleine* SLCF $\mathscr{T}$ *des sommes directes d'objets localement constants finis est un topos localement galoisien profini et le foncteur d'inclusion induit un morphisme de topos* $\mathscr{T} \longrightarrow \mathrm{SLCF}\,\mathscr{T}$*, 2-universel parmi les morphismes vers des topos localement galoisiens profinis. On pourra le voir comme le groupoïde fondamental profini du topos.***

Définition 1.14. — On dit qu'un groupoïde est *fini* si l'ensemble des flèches entre deux objets est toujours fini. On appellera *groupoïde profini* un système projectif filtrant strict de groupoïdes finis.

Proposition 1.15. — *Soit $\mathscr{T}$ un topos localement galoisien profini et* P *un ensemble de points-bases de $\mathscr{T}$, au moins un dans chaque composante connexe de $\mathscr{T}$. Alors le topos $\mathscr{T}$ est le topos classifiant du groupoïde profini* $\pi_1(\mathscr{T}, \mathrm{P})$.

Démonstration : Soit $\mathscr{T}$ un topos localement galoisien profini. D'après le théorème 1.13, on sait que $\mathscr{T} = \mathrm{SLC}\,\mathscr{T} = \mathrm{SLCF}\,\mathscr{T}$. D'après la proposition 1.11, on sait que c'est le topos classifiant du progroupoïde strict $\pi_1(\mathscr{T}, \mathrm{P}) =$ "$\varprojlim$" G_i. Supposons que ce groupoïde ne soit pas fini. Quitte à écrire $\mathscr{T}$ comme somme de ses composantes connexes, on peut supposer que $\mathscr{T}$ est connexe et que les G_i sont des groupes. Par hypothèse, l'un d'entre eux, G_i, n'est pas fini. On peut voir G_i comme un G-ensemble (infini) donc comme un objet de $\mathscr{T}$. Comme le groupoïde est *strict*, il n'existe pas de morphisme d'un G-ensemble fini vers G_i : par conséquent, $\mathscr{T}$ n'est pas engendré par ses objets (localement constants) finis — contradiction. □

Définition 1.16. — Un *point-base profini* (par abus de langage, nous parlerons souvent de point-base) d'un topos localement connexe $\mathscr{T}$ est un point du topos SLCF $\mathscr{T}$, *i.e.*, un morphisme de topos $\mathfrak{Ens} \longrightarrow \mathrm{SLCF}\,\mathscr{T}$.

Si $\mathscr{T}$ est un topos localement connexe et P un ensemble de points-bases profinis de $\mathscr{T}$, au moins un dans chaque composante connexe de $\mathscr{T}$, on note $\widehat{\pi}_1(\mathscr{T}, \mathrm{P})$ le groupoïde profini $\pi_1(\mathrm{SLCF}\,\mathscr{T}, \mathrm{P})$.

5. Dans [Leroy], on se contente de supposer que le topos est somme directe de topos connexes, ce qui est une condition moins forte : si un topos est localement connexe, on dispose d'un foncteur « composantes connexes », en particulier, l'objet final se décompose en une somme disjointe de composantes connexes, $* = \coprod_{i \in \mathrm{I}} \mathrm{C}_i$. Notre topos s'écrit alors comme une somme disjointe de topos connexes, $\mathscr{T} = \mathscr{T}/* \simeq \coprod_{i \in \mathrm{I}} \mathscr{T}/\mathrm{C}_i$.

Précisons maintenant le lien entre cette théorie du groupoïde fondamental profini et celle de [SGA 1].

Corollaire 1.17. — *Les objets finis d'un topos localement galoisien profini connexe muni d'un point-base forment une catégorie galoisienne et, réciproquement, toute catégorie galoisienne s'obtient ainsi.*

Démonstration : Soit $\mathfrak{C}$ une catégorie galoisienne. D'après [SGA 1], elle est équivalente à une catégorie π-$\mathfrak{ens}$ d'ensembles finis munis d'une action continue d'un groupe profini π. Or, cette catégorie est la catégorie des objets finis du topos π-$\mathfrak{Ens}$ classifiant du groupe π, *i.e.*, de la catégorie des ensembles (quelconques) munis d'une action continue du groupe profini π. Ce topos est localement galoisien profini et connexe, car π est un groupe profini.

Réciproquement, si $\mathscr{T}$ est un topos localement galoisien profini connexe, la proposition précédente nous dit qu'il est le topos classifiant d'un groupoïde profini. Or la connexité du groupoïde est équivalente à celle du topos classifiant. Il s'agit donc du topos classifiant d'un groupoïde profini connexe, qui est équivalent au topos classifiant d'un groupe profini π, *i.e.*, de la catégorie des ensembles munis d'une action continue de π. Comme π est profini, la catégorie des objets finis de π-$\mathfrak{Ens}$ est la catégorie des ensembles finis munis d'une action continue de π, *i.e.*, c'est π-$\mathfrak{ens}$. □

2 Groupoïde fondamental profini d'un champ algébrique

Pour appliquer les résultats précédents et définir le groupoïde fondamental et le groupoïde fondamental profini d'un champ algébrique, il nous suffit de montrer que le topos des faisceaux étales sur un champ algébrique est localement connexe, *i.e.*, engendré par ses objets connexes.

Proposition 2.1. — *Le topos étale d'un champ algébrique est localement connexe.*

Démonstration : Il s'agit de vérifier que ce topos est engendré par ses objets connexes. Le premier lemme montre qu'il est engendré par les *schémas* connexes et le second que ceux-ci sont des objets connexes. □

Lemme 2.2. — *Soient* $\mathscr{F} \rightrightarrows \mathscr{G}$ *deux morphismes de faisceaux étales sur un champ algébrique* X*, distincts. Il existe un schéma connexe* V *et un morphisme* $\mathrm{V} \longrightarrow \mathscr{F}$ *tel que les composés* $\mathrm{V} \longrightarrow \mathscr{F} \rightrightarrows \mathscr{G}$ *soient distincts.*

Démonstration : C'est la même démonstration que pour les schémas. Il existe un morphisme étale $\mathrm{U} \longrightarrow \mathrm{X}$ tel que les applications $\mathscr{F}\mathrm{U} \rightrightarrows \mathscr{G}\mathrm{U}$ soient distinctes. Décomposons U comme somme disjointe de ses composantes connexes (dans la catégorie des schémas), $\mathrm{U} = \coprod_{i\in \mathrm{I}} \mathrm{U}_i$. Les morphismes $\mathrm{U}_i \longrightarrow \mathrm{X}$ (pour $i \in \mathrm{I}$) sont toujours étales.

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{F}\mathrm{U} \simeq \mathrm{Hom}(\mathrm{U}, \mathscr{F}) \arrow[r, no head, "\sim"] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & \prod_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{Hom}(\mathrm{U}_i, \mathscr{F}) \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] \\
\mathscr{G}\mathrm{U} \simeq \mathrm{Hom}(\mathrm{U}, \mathscr{G}) \arrow[r, no head, "\sim"] & \prod_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{Hom}(\mathrm{U}_i, \mathscr{G}),
\end{tikzcd}$$

On peut voir $\mathrm{Hom}(\mathrm{U}, \mathscr{F})$ comme l'ensemble des familles de morphismes $(\mathrm{U}_i \longrightarrow \mathscr{F})_{i\in\mathrm{I}}$. Il existe donc un indice $i \in \mathrm{I}$ tel que les morphismes

$$\mathrm{Hom}(\mathrm{U}_i, \mathscr{F}) \rightrightarrows \mathrm{Hom}(\mathrm{U}_i, \mathscr{G})$$

soient distincts. En particulier, il existe un morphisme $\mathrm{U}_i \longrightarrow \mathscr{F}$ tel que les composés $\mathrm{U}_i \longrightarrow \mathscr{F} \rightrightarrows \mathscr{G}$ soient distincts. □

Lemme 2.3. — *Les faisceaux sur un champ algébrique* X *représentés par un schéma connexe* U *de son site étale sont connexes.*

Démonstration : Soit $\mathrm{U} \longrightarrow \mathrm{X}$ un objet du site étale du champ X, où le schéma U est connexe. Par le plongement d'Yoneda, on peut voir U comme un faisceau sur X. Supposons que U s'écrive $\mathrm{U} = \mathscr{F}_1 \amalg \mathscr{F}_2$ dans $\mathfrak{Sh}\,\mathrm{X}$ et montrons que $\mathscr{F}_1 = \varnothing$ ou $\mathscr{F}_2 = \varnothing$.

1. Il suffit de montrer que pour tout $\mathrm{Y} \longrightarrow \mathrm{X}$ dans le site étale de X et tout point géométrique x de Y, on a $(\mathscr{F}_2)_x = \varnothing$. En effet, soit $\mathrm{V} \longrightarrow \mathrm{X}$ un morphisme surjectif et étale depuis un schéma ; on sait que les points géométriques de V forment une famille fidèle de foncteur-fibres $\mathfrak{Sh}\,\mathrm{V} \longrightarrow \mathfrak{Ens}$, et comme le foncteur image réciproque $\mathfrak{Sh}\,\mathrm{X} \longrightarrow \mathfrak{Sh}\,\mathrm{V}$ peut s'écrire $\mathfrak{Sh}_\mathrm{S}\mathrm{V} \longrightarrow \mathfrak{Sh}\,\mathrm{V}$, où $\mathrm{S} = \mathrm{V} \times_\mathrm{X} \mathrm{V} \rightrightarrows \mathrm{V}$ est la présentation correspondante et $\mathfrak{Sh}_\mathrm{S}\mathrm{V}$ désigne la catégorie des faisceaux S-équivariants sur V (voir A.4.13), il est fidèle. Par conséquent, les composés

$$\mathfrak{Sh}\,\mathrm{X} \longrightarrow \mathfrak{Sh}\,\mathrm{V} \longrightarrow \mathfrak{Ens}$$

forment une famille fidèle de foncteurs-fibres.

2. Si x est un point géométrique de U, on a $\mathrm{U}_x = *$ et $\mathrm{U}_x = (\mathscr{F}_1)_x \amalg (\mathscr{F}_2)_x$, donc $(\mathscr{F}_1)_x = \varnothing$ et $(\mathscr{F}_2)_x = *$ (ou le contraire).

3. Montrons que la condition « $(\mathscr{F}_1)_x = *$ et $(\mathscr{F}_2)_x = \varnothing$ » ne dépend pas du choix du point géométrique x au dessus d'un point $x_0 \in \mathrm{U}$. Soient donc x et x' des points géométriques au dessus de x_0, avec $(\mathscr{F}_1)_x = *$ et $(\mathscr{F}_2)_x = \varnothing$. Comme il existe un point géométrique x'' à la fois au dessus de x et x', on peut supposer que x se factorise par x'.

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Spec} k \arrow[dr, dotted] \arrow[drr, "x"] & & \\
& \operatorname{Spec} k' \arrow[r, "x'"'] & \mathrm{U}
\end{tikzcd}$$

On a alors des applications

$$\begin{aligned}
\mathrm{U}_x &\longrightarrow \mathrm{U}_{x'}\\
(\mathscr{F}_1)_x &\longrightarrow (\mathscr{F}_1)_{x'}\\
(\mathscr{F}_2)_x &\longrightarrow (\mathscr{F}_2)_{x'}.
\end{aligned}$$

Mais comme $(\mathscr{F}_1)_x = *$, on a $(\mathscr{F}_1)_{x'} \neq \varnothing$, donc $(\mathscr{F}_2)_{x'} = \varnothing$ et $(\mathscr{F}_1)_{x'} = *$.

4. Montrons que la condition « $(\mathscr{F}_1)_x = *$ et $(\mathscr{F}_2)_x = \varnothing$ » est ouverte. En effet, si $(\mathscr{F}_1)_x \neq \varnothing$, comme $(\mathscr{F}_1)_x = \varinjlim \mathscr{F}_1(\mathrm{V})$, il existe $\mathrm{V} \longrightarrow \mathrm{U}$ étale tel que $\mathscr{F}_1(\mathrm{V}) \neq \varnothing$. Comme $\mathrm{V} \longrightarrow \mathrm{U}$ est étale, l'image de V dans U est un ouvert, contenant x, sur lequel on a, pour tout $y \in \mathrm{V}$, $(\mathscr{F}_1)_y \neq \varnothing$ (et donc $(\mathscr{F}_1)_y = *$ et $(\mathscr{F}_2)_y = \varnothing$). De même, on montrerait que la condition « $(\mathscr{F}_1)_x = *$ et $(\mathscr{F}_2)_x = \varnothing$ » est fermée.

5. Montrons maintenant que pour tout point géométrique $x : \operatorname{Spec} k \longrightarrow \mathrm{V}$ d'un objet $\mathrm{V} \longrightarrow \mathrm{X}$ du site étale de X, on a $(\mathscr{F}_2)_x = \varnothing$. Soit x un tel point. On a une bijection

$$\mathrm{U}_x = \{\, \text{points } y \text{ de } \mathrm{U} \underset{\mathrm{X}}{\times} \mathrm{V} \text{ au dessus de } x \,\}.$$

$$\begin{tikzcd}
& & \mathrm{U} \underset{\mathrm{X}}{\times} \mathrm{V} \arrow[dl] \arrow[dr, "p"] & \\
\operatorname{Spec} k \arrow[urr, dotted, "y"] \arrow[r, "x"'] & \mathrm{V} \arrow[dr] & & \mathrm{U} \arrow[dl] \\
& & \mathrm{X} &
\end{tikzcd}$$

Si $\mathrm{U}_x = \varnothing$, on a $(\mathscr{F}_2)_x = \varnothing$, car $\mathscr{F}_2 \subset \mathrm{U}$: supposons donc $\mathrm{U}_x \neq \varnothing$. Pour tout $y \in \mathrm{U}_x$, le morphisme $p : \mathrm{U} \times_{\mathrm{X}} \mathrm{V} \longrightarrow \mathrm{U}$ induit une application $\mathrm{U}_x \longrightarrow \mathrm{U}_{p(x)}$ qui préserve la décomposition $\mathrm{U} = \mathscr{F}_1 \amalg \mathscr{F}_2$. Par conséquent, pour tout $y \in \mathrm{U}_x$, on a une application $(\mathscr{F}_2)_x \longrightarrow (\mathscr{F}_2)_{p(x)}$, avec $(\mathscr{F}_2)_{p(x)} = \varnothing$, donc $(\mathscr{F}_2)_x = \varnothing$. □

Exemple 2.4. — Soient X un schéma et G un groupe fini agissant *trivialement* sur X. Nous allons relier le groupe fondamental du schéma X et celui du champ quotient [X/G]. On sait que la catégorie des faisceaux sur le champ [X/G] est équivalente à la catégorie des faisceaux G-équivariants sur le schéma X,

$$\mathfrak{Sh}[\mathrm{X}/\mathrm{G}] \approx \mathfrak{Sh}(\mathrm{G} \times \mathrm{X} \rightrightarrows \mathrm{X}).$$

Mais cette catégorie est en fait équivalente à la catégorie des faisceaux sur X munis d'une action de G (sans tenir compte de l'action de G sur X),

$$\approx \mathrm{G}\text{-}\mathfrak{Sh}\mathrm{X}.$$

En effet, la catégorie des faisceaux sur le groupoïde $\mathrm{G} \times \mathrm{X} \rightrightarrows \mathrm{X}$ est la catégorie dont les objets sont la donnée d'un faisceau $\mathscr{F}$ sur X et d'une action α du groupe G sur $\mathscr{F}$, telle que

$$\begin{tikzcd} \mathrm{G} \times \mathscr{F} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "1\times f"'] & \mathscr{F} \arrow[d, "f"] \\ \mathrm{G} \times \mathrm{X} \arrow[r, "\alpha"'] & \mathrm{X}. \end{tikzcd}$$

Mais comme l'action de G sur X est triviale, il s'agit simplement de

$$\begin{tikzcd} \mathrm{G} \times \mathscr{F} \arrow[rrr] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_2"'] & & & \mathscr{F} \arrow[dll, "f"] \\ & \mathscr{F} \arrow[r, "f"'] & \mathrm{X}, & \end{tikzcd}$$

i.e., la donnée d'un objet de $\mathfrak{Sh}\mathrm{X}$ et d'une action du groupe G.

On en déduit

$$\mathrm{SLCF}\,\mathfrak{Sh}[\mathrm{X}/\mathrm{G}] \approx \mathrm{SLCF}\,\mathrm{G}\text{-}\mathfrak{Sh}\mathrm{X}.$$

Mais comme la notion de faisceau localement constant ne fait intervenir que des produits fibrés et des sommes disjointes, dont la construction dans $\mathrm{G}\text{-}\mathfrak{Sh}\mathrm{X}$ ne fait pas intervenir l'action du groupe G, un faisceau équivariant est localement constant en tant que faisceau équivariant si et seulement s'il l'est en tant que faisceau, *i.e.*,

$$\mathrm{SLCF}\,\mathrm{G}\text{-}\mathfrak{Sh}\mathrm{X} \approx \mathrm{G}\text{-}\,\mathrm{SLCF}\,\mathfrak{Sh}\mathrm{X}.$$

On en déduit

$$\begin{aligned}\mathrm{SLCF}\,\mathfrak{Sh}[\mathrm{X}/\mathrm{G}] &\approx \mathrm{G}\text{-}\,\mathrm{SLCF}\,\mathfrak{Sh}\mathrm{X}.\\ &\approx \mathrm{G}\text{-}\big(\pi_1(\mathrm{X})\text{-}\mathfrak{ens}\big)\\ &\approx \big(\mathrm{G}\times\pi_1(\mathrm{X})\big)\text{-}\mathfrak{ens}.\end{aligned}$$

On vient donc de calculer le groupe fondamental d'un champ algébrique dans un cas particulier, celui d'un schéma quotienté par l'action triviale d'un groupe fini :

$$\pi_1([\mathrm{X}/\mathrm{G}]) = \mathrm{G}\times\pi_1(\mathrm{X}).$$

On peut généraliser ce résultat aux champs algébriques si on définit une action triviale d'un groupe G sur un champ algébrique X comme étant une action triviale sur son topos de faisceaux $\mathfrak{Sh}\,\mathrm{X}$.

Le résultat est faux en général si l'action n'est pas triviale : voir 5.4 et IV.1.7.

3 « Orbifold » associé à un champ algébrique

Les notions de schéma ou d'espace algébrique ont un analogue analytique : les espaces analytiques. Il en va de même pour les champs algébriques, mais l'objet obtenu est plus général : il s'agit d'orbifolds, d'S-atlas ou plus généralement de groupoïdes étales. Nous allons définir l'orbifold généralisé associé à un champ algébrique de type fini sur $\mathbb{C}$ et montrer que leurs groupoïdes fondamentaux *profinis* sont équivalents.

Remarque 3.1. — Intuitivement, un *orbifold* [6] est un objet géométrique qui ressemble localement au quotient d'un ouvert de $\mathbb{R}^n$ par l'action d'un groupe fini [Thurston, 13]. Un S-atlas est un espace topologique muni d'un atlas dont les changements de cartes peuvent être multiples [van Est] ; en d'autres termes, les changements de cartes forment un pseudo-groupe [Thurston, 3.1.1] d'homéomorphismes locaux, auquel on peut associer un groupoïde de germes d'homéomorphismes locaux. Nous ne donnons pas les définitions classiques de ces objets, car on peut les définir uniquement en termes de groupoïdes [Moerdijk–Pronk].

Définition 3.2. — Un *groupoïde étale* est un groupoïde dans la catégorie des schémas (ou dans celle des variétés différentielles) dont le morphisme source est étale.

6. Si on voulait vraiment traduire, on pourrait parler d'« espace plié », mais on gardera le terme anglais.

Remarque 3.3. — En fait, tous les morphismes structurels d'un groupoïde étale $\mathrm{G} = (\mathrm{G}_1 \rightrightarrows \mathrm{G}_0)$

$$\mathrm{G}_1 \underset{b}{\overset{s}{\rightrightarrows}} \mathrm{G}_0 \qquad \mathrm{G}_1 \xrightarrow{i} \mathrm{G}_1 \qquad \mathrm{G}_0 \xrightarrow{e} \mathrm{G}_1 \qquad \mathrm{G}_1 \underset{\mathrm{G}_0}{\times} \mathrm{G}_1 \xrightarrow{m} \mathrm{G}_1$$

sont étales. Expliquons pourquoi. Tout d'abord, l'antipode i est un isomorphisme, il est donc étale. Comme le morphisme but s'exprime à l'aide de l'antipode et du morphisme source, $b = si$, il est lui aussi étale. Comme l'unité e fait commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{G}_0 \arrow[rr, "e"] \arrow[dr, equal] & & \mathrm{G}_1 \arrow[dl, "s"] \\ & \mathrm{G}_0, & \end{tikzcd}$$

c'est encore un morphisme étale. Pour voir que la composition est étale, commençons par remarquer que comme le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{G}_1 \underset{\mathrm{G}_0}{\times} \mathrm{G}_1 \arrow[r, "\mathrm{pr}_2"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & \mathrm{G}_1 \arrow[d, "b"] \\ \mathrm{G}_1 \arrow[r, "s"'] & \mathrm{G}_0 \end{tikzcd}$$

est cartésien, les projections pr_1 et pr_2 sont étales. Comme d'autre part le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{G}_1 \underset{\mathrm{G}_0}{\times} \mathrm{G}_1 \arrow[rr, "m"] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_2"'] & & \mathrm{G}_1 \arrow[ddl, "s"] \\ & \mathrm{G}_1 \arrow[d, "s"'] & \\ & \mathrm{G}_0 & \end{tikzcd}$$

est commutatif, on en déduit que la composition m est étale.

Exemple 3.4. — La donnée d'un groupe G agissant sur un ensemble X permet de définir un groupoïde $(\mathrm{G}, \mathrm{X}) = (\mathrm{G} \times \mathrm{X} \rightrightarrows \mathrm{X})$ de la manière suivante.

$$s : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{G} \times \mathrm{X} & \longrightarrow & \mathrm{X} \\ (g, x) & \longmapsto & x \end{array} \right. \qquad b : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{G} \times \mathrm{X} & \longrightarrow & \mathrm{X} \\ (g, x) & \longmapsto & g \cdot x \end{array} \right.$$

$$m : \left\{ \begin{array}{ccc} (\mathrm{G} \times \mathrm{X}) \underset{s, \mathrm{X}, b}{\times} (\mathrm{G} \times \mathrm{X}) & \longrightarrow & \mathrm{G} \times \mathrm{X} \\ (g', g \cdot x, g, x) & \longmapsto & (g'g, x) \end{array} \right.$$

$$i : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{G} \times \mathrm{X} & \longrightarrow & \mathrm{G} \times \mathrm{X} \\ (g, x) & \longmapsto & (g^{-1}, g \cdot x) \end{array} \right. \qquad e : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{X} & \longrightarrow & \mathrm{G} \times \mathrm{X} \\ x & \longmapsto & (1, x) \end{array} \right.$$

On généralise sans problème cette description au cas d'un groupe topologique agissant sur un espace topologique ou un groupe algébrique agissant sur un schéma. Si l'action est définie par un morphisme étale, on obtient un groupoïde étale.

En particulier, on peut prendre comme groupe G le groupe des automorphismes de X et on obtient un groupoïde $(\mathrm{Aut}\,\mathrm{X}) \times \mathrm{X} \rightrightarrows \mathrm{X}$.

L'action de G peut se voir comme un morphisme de groupes $\mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{Aut}\,\mathrm{X}$, qui induit un morphisme de groupoïdes $(\mathrm{G}, \mathrm{X}) \longrightarrow (\mathrm{Aut}\,\mathrm{X}, \mathrm{X})$; l'action du groupe G est fidèle si et seulement si ce morphisme de groupoïdes est injectif.

De manière plus générale, si $\mathrm{G} = (\mathrm{G}_1 \rightrightarrows \mathrm{G}_0)$ est un groupoïde, on a un morphisme de groupoïdes $\mathrm{G} \longrightarrow (\mathrm{Aut}\,\mathrm{G}_0, \mathrm{G}_0)$.

Soit X une variété différentielle : nous allons définir son groupoïde de germes de difféomorphismes. Notons Diff X l'ensemble des germes de difféomorphismes de X, *i.e.*, l'ensemble des (x, U, f), où $x \in \mathrm{X}$, U est un ouvert de X et $f : \mathrm{U} \longrightarrow \mathrm{X}$ est un difféomorphisme sur son image, quotienté par la relation d'équivalence $(x, \mathrm{U}, f) \sim (y, \mathrm{V}, g)$ si $x = y$ et s'il existe un ouvert W de X, contenant x, contenu dans U et V et tel que $f|_{\mathrm{W}} = g|_{\mathrm{W}}$. Le *groupoïde* $(\mathrm{Diff}\,\mathrm{X}, \mathrm{X})$ *des germes de difféomorphismes* de X est alors défini par

$$\begin{aligned} s(x, \mathrm{U}, f) &= x & e(x) &= (x, \mathrm{X}, \mathrm{Id}_{\mathrm{X}}) \\ b(x, \mathrm{U}, f) &= f(x) & i(x, \mathrm{U}, f) &= (f(x), f(\mathrm{U}), f^{-1}) \end{aligned}$$

$$m\big((f(x), \mathrm{V}, g), (x, \mathrm{U}, f)\big) = \big(x, \mathrm{U} \cap f^{-1}\mathrm{V}, (g \circ f)|_{\mathrm{U} \cap f^{-1}\mathrm{V}}\big).$$

Remarquons qu'un groupoïde étale $\mathrm{G}_1 \rightrightarrows \mathrm{G}_0$ définit un morphisme de groupoïdes

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{G}_1 & \rightrightarrows & \mathrm{G}_0 \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Id}} \\ \mathrm{Diff}\,\mathrm{G}_0 & \rightrightarrows & \mathrm{G}_0. \end{array}$$

En effet, si $\varphi \in \mathrm{G}_1$, comme les morphismes source s et but b sont des homéomorphismes locaux, il existe un voisinage V de φ tel que

$$s|_{\mathrm{V}} : \mathrm{V} \longrightarrow s(\mathrm{V}) \qquad \text{et} \qquad b|_{\mathrm{V}} : \mathrm{V} \longrightarrow b(\mathrm{V})$$

soient des homéomorphismes et φ défini donc un germe d'homéomorphisme en $s(\varphi)$,

$$\big(s(\varphi), (b|_{\mathrm{V}}) \circ (s|_{\mathrm{V}})^{-1}\big) \in \mathrm{Diff}\,\mathrm{G}_0.$$

On vérifie aisément que cela définit bien un morphisme de groupoïdes.

Définition 3.5. — Un groupoïde étale $\mathrm{G} = (\mathrm{G}_1 \rightrightarrows \mathrm{G}_0)$ est *effectif* si le morphisme de G vers le groupoïde des germes de difféomorphismes de G_0 est injectif.

Définition 3.6. — Un *orbifold* est un groupoïde étale effectif propre, *i.e.*, un groupoïde étale effectif tel que le morphisme $(s,b) : G_1 \longrightarrow G_0 \times G_0$ soit propre.

Remarque 3.7. — Les morphismes de groupoïdes induisent des morphismes d'orbifolds, mais ceux-ci sont plus nombreux. Comme nous nous limiterons aux morphismes de groupoïdes, nous ne donnons pas la définition d'un morphisme d'orbifolds (voir [Moerdijk–Pronk]). En particulier, nous ne parlerons pas de la catégorie des orbifolds, mais uniquement de celle des groupoïdes (et même plutôt de la 2-catégorie des groupoïdes).

Le même phénomène se produit au niveau des champs algébriques : si $G = (G_1 \rightrightarrows G_0)$ et $H = (H_1 \rightrightarrows H_0)$ sont deux groupoïdes étales de diagonale quasi-compacte et séparée, un morphisme de champs $G_0/G_1 \longrightarrow H_0/H_1$ ne se relève pas toujours en un morphisme de groupoïdes

$$\begin{tikzcd} G_1 \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & H_1 \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] \\ G_0 \arrow[r, dotted] \arrow[d] & H_0 \arrow[d] \\ G_0/G_1 \arrow[r] & H_0/H_1. \end{tikzcd}$$

Par contre, si on remplace le groupoïde G par la présentation « plus fine »

$$G'_0 = H_0 \overset{2}{\underset{H_0/H_1}{\times}} G_0/G_1$$

$$G'_1 = G'_0 \overset{2}{\underset{G_0/G_1}{\times}} G'_0,$$

le morphisme de champs se relève en un morphisme de groupoïdes.

Remarque 3.8. — Cette notion d'orbifold est trop limitée : alors qu'au niveau des champs algébriques, on peut distinguer entre un point et le quotient d'un point par un groupe non trivial, ces objets coïncident en tant qu'orbifolds. On rencontre aussi ce problème avec $\bar{\mathscr{M}}_{1,1}$ ou $\bar{\mathscr{M}}_{2,0}$, dont les points ont en général des automorphismes non triviaux. Nous allons donc nous intéresser aux groupoïdes étales propres, non nécessairement effectifs.

Définition 3.9. — Un *orbifold généralisé* est un groupoïde étale propre.

Proposition 3.10. — *À un champ algébrique localement de type fini sur $\mathbb{C}$, on peut associer (de manière non canonique) un orbifold généralisé,* i.e., *un groupoïde topologique étale propre.*

Démonstration : D'après [Vistoli], à un champ algébrique, on peut associer (de manière non canonique, en choisissant un morphisme surjectif et étale depuis un schéma) un groupoïde étale $\mathrm{R} \rightrightarrows \mathrm{U}$ dont la diagonale est quasi-compacte et séparée. D'après [Laumon–Moret-Bailly, 3.22], on sait que ces groupoïdes sont propres. Le groupoïde analytique associé $\mathrm{R}(\mathbb{C}) \rightrightarrows \mathrm{U}(\mathbb{C})$ est donc un orbifold généralisé. □

Définition 3.11. — Un *faisceau équivariant* sur un groupoïde étale propre $\mathrm{G} = (\mathrm{G}_1 \rightrightarrows \mathrm{G}_0)$ est la donnée d'un faisceau $\mathscr{F}$ sur G_0 et d'un morphisme de faisceaux (on peut voir G_1 comme un faisceau sur G_0, de deux manières différentes)

$$\alpha : \mathrm{G}_1 \ {}_s\!\underset{\mathrm{G}_0}{\times} \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{F}$$

tel que

$$\begin{tikzcd} \mathrm{G}_1 \underset{\mathrm{G}_0}{\times} \mathrm{G}_1 \underset{\mathrm{G}_0}{\times} \mathscr{F} \arrow[r, "1\times\alpha"] \arrow[d, "m\times 1"'] & \mathrm{G}_1 \underset{\mathrm{G}_0}{\times} \mathscr{F} \arrow[d, "\alpha"] \\ \mathrm{G}_1 \underset{\mathrm{G}_0}{\times} \mathscr{F} \arrow[r, "\alpha"'] & \mathscr{F} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathscr{F} = \mathrm{G}_0 \underset{\mathrm{G}_0}{\times} \mathscr{F} \arrow[r, "e\times 1"] \arrow[dr, equal] & \mathrm{G}_1 \underset{\mathrm{G}_0}{\times} \mathscr{F} \arrow[d, "\alpha"] \\ & \mathscr{F} \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \mathrm{G}_1 \underset{\mathrm{G}_0}{\times} \mathscr{F} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d] & \mathscr{F} \arrow[d] \\ \mathrm{G}_1 \arrow[r, "b"'] & \mathrm{G}_0. \end{tikzcd}$$

Remarque 3.12. — Dans les diagrammes ci-dessus, on peut voir G_1 comme un faisceau sur G_0 de deux manières différentes : par le morphisme source s ou par le morphisme but b. Si on note $\lambda : \mathscr{F} \longrightarrow \mathrm{G}_0$ le morphisme structural du faisceau $\mathscr{F}$ (on regarde G_0 comme un faisceau sur lui-même, c'est l'objet final du topos des faisceaux sur G_0), le produit fibré $\mathrm{G}_1 \times_{\mathrm{G}_0} \mathscr{F}$ désigne en fait $s \times \lambda$. Toutefois, le sens à donner à

$$\mathrm{G}_1 \underset{\mathrm{G}_0}{\times} \mathrm{G}_1 \underset{\mathrm{G}_0}{\times} \mathscr{F} = \mathrm{G}_1 \ {}_s\!\underset{\mathrm{G}_0}{\times}\!{}_b \ \mathrm{G}_1 \ {}_s\!\underset{\mathrm{G}_0}{\times}\!{}_\lambda \ \mathscr{F}$$

est moins évident. Notons i l'inverse dans le groupoïde $(G_1 \rightrightarrows G_0)$: c'est un isomorphisme $b \longrightarrow s$. Le produit fibré $G_1 \times_{G_0} G_1 \times_{G_0} \mathscr{F}$ est alors défini comme la limite projective du diagramme suivant, *i.e.*, il s'agit de $s \times b \times \lambda$.

$$\begin{tikzcd}
s \arrow[ddr] & b \arrow[d, "i"] \arrow[dd, bend right] & \lambda \arrow[ddl] \\
& s \arrow[d] & \\
& G_0 &
\end{tikzcd}$$

Définition 3.13. — Le *groupoïde fondamental (profini)* d'un groupoïde topologique étale G est le groupoïde fondamental (profini) de son topos de faisceaux G-équivariants.

Remarque 3.14. — Cette notion de groupoïde fondamental coïncide avec celles déjà connues pour les variétés différentielles ou les orbifolds ; expliquons brièvement pourquoi.

Pour les orbifolds (ou les variétés différentielles), le groupe ou le groupoïde fondamental est défini à partir du revêtement universel [Thurston, 13.2.5]. Or, on a une équivalence entre la catégorie des sommes disjointes de faisceaux étales localement constants (finis), la catégorie des sommes disjointes de revêtements (finis) et la catégorie des sommes disjointes des quotients (finis) du revêtement universel : la définition classique du groupe fondamental, à l'aide du revêtement universel, et la nôtre, à l'aide des faisceaux étales localement constants, coïncident.

Théorème 3.15. — ***Le groupoïde fondamental* profini *d'un champ algébrique séparé, localement de type fini sur* $\mathbb{C}$*, possédant un revêtement étale par (*i.e.*, un morphisme étale surjectif* fini *depuis) un schéma est équivalent au groupoïde (topologique) associé.***

Remarque 3.16. — Les champs algébriques qui nous intéressent, *i.e.*, les espaces de modules de courbes lisses à points marqués, $\mathscr{M}_{g,n}$, vérifient cette condition d'après [Deligne–Mumford, 5.8].

Pour démontrer le théorème, nous aurons besoin d'une notion de groupoïde dans un topos. La définition usuelle, *i.e.*, la donnée de deux objets G_1, G_0 et de morphismes

$$G_1 \overset{s}{\underset{b}{\rightrightarrows}} G_0 \qquad G_0 \xrightarrow{e} G_1 \qquad G_1 \xrightarrow{i} G_1 \qquad G_1 \underset{G_0}{\times} G_1 \xrightarrow{m} G_1$$

faisant commuter certains diagrammes ne conviendra pas, car nous voulons que G_0 soit l'objet final du topos, ce qui entrainerait $s = b$.

Définition 3.17. — Un *groupoïde* dans un topos $\mathscr{T}$ (sur l'objet final de ce topos) est la donnée de deux objets s et b, d'un isomorphisme $i : s \longrightarrow b$ (par abus de notation, nous noterons encore i son inverse), un morphisme $m : s \times b \longrightarrow s$ et d'un morphisme $e : * \longrightarrow s$ tels que

$$\begin{tikzcd}
s \times b \times b \arrow[rr, "m\times 1"] \arrow[d, "1\times i\times 1"'] & & s \times b \arrow[dd, "m"] \\
s \times s \times b \arrow[d, "1\times m"'] & & \\
s \times s \arrow[r, "1\times i"'] & s \times b \arrow[r, "m"'] & s
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
s \times * \arrow[r, "1\times e"] \arrow[drr, equal] & s \times s \arrow[r, "1\times i"] & s \times b \arrow[d, "m"] & * \times b \arrow[l, "e\times 1"'] & b \arrow[l] \arrow[dll, "i"] \\
& & s & &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
b \arrow[r, "(i{,}1)"] \arrow[d] & s \times b \arrow[d, "m"] \\
* \arrow[r, "e"'] & s
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
s \arrow[r, "(1{,}i)"] \arrow[d] & s \times b \arrow[d, "m"] \\
* \arrow[r, "e"'] & s.
\end{tikzcd}$$

Définition 3.18. — Un *objet équivariant* sur un groupoïde (s, b, i, m, e) dans un topos $\mathscr{T}$ est un objet x de $\mathscr{T}$ et un morphisme $\alpha : s \times x \longrightarrow x$ tel que

$$\begin{tikzcd}
s \times s \times x \arrow[r, "1\times\alpha"] \arrow[d, "1\times i\times 1"'] & s \times x \arrow[dd, "\alpha"] \\
s \times b \times x \arrow[d, "m\times 1"'] & \\
s \times x \arrow[r, "\alpha"'] & x
\end{tikzcd}
\quad \text{et} \quad
\begin{tikzcd}
* \times x \arrow[r, "e\times 1"] \arrow[dr, equal] & s \times x \arrow[d, "\alpha"] \\
& x.
\end{tikzcd}$$

Remarque 3.19. — Contrairement à 3.11, il n'y a que deux conditions, car la troisième est toujours vérifiée :

$$\begin{tikzcd}
s \times x \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[d] & & x \arrow[d] \\
s \arrow[r] & b \arrow[r] & *.
\end{tikzcd}$$

Démonstration : Nous pouvons maintenant démontrer le théorème. Soit $\mathrm{R} \rightrightarrows \mathrm{U}$ une présentation finie du champ X.

On sait d'après [SGA 1, XII 5.1] que les catégories de faisceaux localement constants finis sur U et U($\mathbb{C}$) sont équivalentes :

$$\mathrm{SLCF}\,\mathfrak{Sh}\,\mathrm{U} \approx \mathrm{SLCF}\,\mathfrak{Sh}\,\mathrm{U}(\mathbb{C}).$$

Le groupoïde $\mathrm{R} \rightrightarrows \mathrm{U}$ définit un groupoïde dans $\mathrm{SLCF}\,\mathfrak{Sh}\,\mathrm{U}$, de même le groupoïde $\mathrm{R}(\mathbb{C}) \rightrightarrows \mathrm{U}(\mathbb{C})$ définit un groupoïde dans $\mathrm{SLCF}\,\mathfrak{Sh}\,\mathrm{U}(\mathbb{C})$; ce groupoïde est l'image du précédent par l'équivalence de topos $\mathrm{SLCF}\,\mathfrak{Sh}\,\mathrm{U} \approx \mathrm{SLCF}\,\mathfrak{Sh}\,\mathrm{U}(\mathbb{C})$. Par conséquent, les catégories d'objets équivariants de ces deux groupoïdes sont équivalentes, or, elles sont respectivement équivalentes à $\mathfrak{Sh}\,\mathrm{X}$ et $\mathfrak{Sh}\,\mathrm{X}(\mathbb{C})$. □

4 Type d'homotopie d'un champ algébrique

Nous allons définir le type d'homotopie d'un champ algébrique. On disposera alors de deux notions de groupe fondamental : celui défini dans les sections précédentes et celui défini à l'aide du type d'homotopie ; nous montrerons qu'elles coïncident.

Rappels 4.1. — Soit $\mathscr{T}$ un topos localement connexe, d'objet final $*$. Notons Δ la catégorie des simplexes, *i.e.*, la catégorie dont les objets sont les $[n] = \{0, \dots, n\}$ et dont les morphismes sont les applications croissantes, et Δ_n la catégorie des simplexes tronqués au rang n, *i.e.*, la sous-catégorie pleine de Δ engendrée par les $[0], \dots, [n]$. Un *objet simplicial* du topos $\mathscr{T}$ est un foncteur contravariant de la catégorie simpliciale vers $\mathscr{T}$, *i.e.*, un objet de $\Delta^{\mathrm{op}}\mathscr{T}$. Les foncteurs *squelette* Sk_n et *cosquelette* Cosk_n sont les adjoints à gauche et à droite des foncteurs de restriction $\Delta^{\mathrm{op}}\mathscr{T} \longrightarrow \Delta_n^{\mathrm{op}}\mathscr{T}$. Par abus de notation, on notera encore Sk_n et Cosk_n leur composé avec le foncteur de restriction,

$$\Delta^{\mathrm{op}}\mathscr{T} \longrightarrow \Delta_n^{\mathrm{op}}\mathscr{T} \underset{\mathrm{Sk}_n}{\overset{\mathrm{Cosk}_n}{\rightrightarrows}} \Delta^{\mathrm{op}}\mathscr{T}.$$

Un *hyper-recouvrement* est un objet simplicial $\mathrm{X}_\bullet$ tel que les morphismes

$$\begin{aligned} \mathrm{X}_0 &\longrightarrow e \\ \mathrm{X}_{n+1} &\longrightarrow \big(\mathrm{Cosk}_n(\mathrm{X}_\bullet)\big)_{n+1} \end{aligned}$$

soient des épimorphismes. Si I est un ensemble et X un objet du topos, notons $\mathrm{I} \otimes \mathrm{X}$ la somme disjointe de copies de X indexées par I. Si $\mathrm{I}_\bullet$ est un ensemble simplicial et $\mathrm{X}_\bullet$ un objet simplicial, notons $\mathrm{I}_\bullet \otimes \mathrm{X}_\bullet$ l'objet simplicial de terme général $\mathrm{I}_n \otimes \mathrm{X}_n$. Une *homotopie stricte* entre deux morphismes $f, g : \mathrm{X}_\bullet \longrightarrow \mathrm{Y}_\bullet$ est un morphisme $[1] \otimes \mathrm{X}_\bullet \longrightarrow \mathrm{Y}_\bullet$ dont les restrictions à $[0] \otimes \mathrm{X}_\bullet = \mathrm{X}_\bullet$ sont f et g. On appelle *homotopie* la relation d'équivalence engendrée par l'homotopie stricte. Soit $\mathfrak{HR}\mathscr{T}$ la catégorie des hyper-recouvrements du topos $\mathscr{T}$ et de leurs morphismes modulo homotopie. La catégorie opposée est filtrante. Enfin, comme notre topos est localement connexe, il possède un foncteur « composantes connexes » que nous noterons π. Pour les détails, nous renvoyons à [Artin–Mazur].

Soient $\mathscr{H}$ la catégorie des CW-complexes et de leurs morphismes modulo homotopie (ou, c'est équivalent, la catégorie des complexes de Kan et de leurs morphismes modulo homotopie) [7] et Pro-$\mathscr{H}$ sa catégorie de pro-objets. On définit un foncteur $\sharp : \text{Pro-}\mathscr{H} \longrightarrow \text{Pro-}\mathscr{H}$ par

$$\Big(\text{“}\varprojlim_i\text{”}\, \mathrm{X}_i\Big)^\sharp = \text{“}\varprojlim_{i,n}\text{”}\, \mathrm{Cosk}_n\, \mathrm{X}_i.$$

Le type d'homotopie sera un objet de la catégorie $(\text{Pro-}\mathscr{H})_\sharp$, définie à partir de Pro-$\mathscr{H}$ en inversant tous les morphismes f tels que $f^\sharp$ soit un isomorphisme. [8]

Définition 4.2. — Le *type d'homotopie* d'un topos localement connexe $\mathscr{T}$ est le proobjet

$$\{\mathscr{T}\} = \text{“}\varprojlim_{\mathrm{Y}_\bullet \in \mathfrak{HR}\mathscr{T}}\text{”}\ \pi \mathrm{Y}_\bullet$$

dans la catégorie $(\text{Pro-}\mathscr{H})_\sharp$ définie dans la remarque précédente.

Définition 4.3. — Un *quotient* de groupoïdes est un morphisme de groupoïdes $f : \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{H}$ tel que

(i) c'est une bijection entre les ensembles d'objets ;

7. On peut aussi prendre la catégorie de tous les ensembles simpliciaux, mais il faut faire attention aux morphismes. Soient $\Delta^{\mathrm{op}}\mathfrak{Ens}$ la catégorie des ensembles simpliciaux et $\mathfrak{Kan}$ la sous-catégorie pleine des complexes de Kan. Il existe un foncteur $\mathrm{Ex}^\infty : \Delta^{\mathrm{op}}\mathfrak{Ens} \longrightarrow \mathfrak{Kan}$ qui devient un adjoint à gauche du foncteur d'inclusion $\mathfrak{Kan} \longrightarrow \Delta^{\mathrm{op}}\mathfrak{Ens}$ quand on passe aux catégories homotopiques. Si X et Y sont des ensembles simpliciaux, notons $[\mathrm{X}, \mathrm{Y}]$ l'ensemble des morphismes de X vers Y modulo homotopie. La catégorie $\mathscr{H}$ est équivalente à la catégorie dont les objets sont les ensembles simpliciaux et dont les morphismes entre X et Y sont donnés par $[\mathrm{X}, \mathrm{Ex}^\infty \mathrm{Y}]$.

8. En fait, le type d'homotopie est déjà défini dans Pro-$\mathscr{H}$. Néanmoins, il est souvent préférable d'inverser les $\sharp$-isomorphismes car la catégorie homotopique a alors des propriétés beaucoup plus agréables : les isomorphismes f sont exactement les morphismes tels que les $\pi_n f$ sont des isomorphismes pour tout n ; les sphères homotopiques sont uniques, etc. — voir [Artin–Mazur].

(*ii*) pour tous x, $y \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{G}$, l'application $\mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(x, y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{H}}(fx, fy)$ est surjective.

Le *complété profini* d'un groupoïde G est le système projectif (qui est filtrant) de ses quotients finis ; on le note $\widehat{\mathrm{G}}$. De même, le complété profini d'un progroupoïde $\mathrm{G} = \text{“}\varprojlim\text{”}\, \mathrm{G}_i$ est la limite projective (dans la catégorie des progroupoïdes) des complétés profinis des composantes de G, *i.e.*, $\widehat{\mathrm{G}} = \text{“}\varprojlim\text{”}\, \widehat{\mathrm{G}}_i$.

Lemme 4.4. — *Soient* G *un groupoïde,* $\mathfrak{B}\mathrm{G}$ *son topos classifiant. Alors,* $\mathrm{SLCF}\,\mathfrak{B}\mathrm{G}$ *est le topos classifiant du complété profini de* G*,* i.e.*,*

$$\mathrm{SLCF}\,\mathfrak{B}\mathrm{G} \approx \mathfrak{B}\widehat{\mathrm{G}}.$$

Démonstration : Le topos $\mathrm{SLCF}\,\mathfrak{B}\mathrm{G}$ est une sous-catégorie pleine de la catégorie $\mathrm{SLC}\,\mathfrak{B}\mathrm{G} = \mathfrak{B}\mathrm{G}$, celle des ensembles munis d'une action de G, dont les composantes connexes sont finies, *i.e.*, celle des sommes disjointes d'ensembles munis d'une action de G qui se factorise par un quotient fini : c'est donc bien le topos classifiant du complété profini de G. □

Proposition 4.5. — *Le type d'homotopie d'un topos localement connexe permet de calculer son groupoïde fondamental (et son groupoïde fondamental profini),* i.e.*,*

$$\mathfrak{B}\pi_1\{\mathscr{T}\} \approx \mathrm{SLC}\,\mathscr{T}.$$

Démonstration : Tout repose sur le lemme suivant.

Lemme 4.6. — *Soient* $\mathscr{T}$ *un topos localement connexe et* $\mathrm{K}_\bullet$ *un hyper-recouvrement de l'objet final. Alors* $\mathrm{LC}(\mathscr{T}, \mathrm{K}_0) \approx \mathfrak{B}\pi_1\pi\mathrm{K}_\bullet$.

Démonstration : Voir [Artin–Mazur, 10.6]. □

Pour simplifier, on peut supposer le topos connexe et remplacer les groupoïdes par des groupes. Rappelons que si G est un progroupe, on note $\mathfrak{B}\mathrm{G}$ (ou G-$\mathfrak{Ens}$) son topos classifiant. Par définition du type d'homotopie,

$$\mathfrak{B}\pi_1\{\mathscr{T}\} = \mathfrak{B}\pi_1 \underset{\mathrm{U}_\bullet \in \mathfrak{H}\mathfrak{R}\,\mathscr{T}}{\text{“}\varprojlim\text{”}} \pi\mathrm{U}_\bullet.$$

Puis, par définition du groupe fondamental d'un pro-ensemble simplicial,

$$= \mathfrak{B} \underset{\mathrm{U}_\bullet \in \mathfrak{H}\mathfrak{R}\,\mathscr{T}}{\text{“}\varprojlim\text{”}} \pi_1(\pi\mathrm{U}_\bullet).$$

On sait que le topos classifiant d'un progroupe est la 2-limite projective des classifiants des composantes du système projectif,

$$\approx \underset{\mathrm{U}_\bullet \in \mathfrak{H}\mathfrak{R}\mathscr{T}}{\underleftarrow{\text{2-lim}}}\, \mathfrak{B}\pi_1(\pi\mathrm{U}_\bullet).$$

D'après le lemme,

$$\begin{aligned} &\approx \underset{\mathrm{U}_\bullet \in \mathfrak{H}\mathfrak{R}\mathscr{T}}{\underleftarrow{\text{2-lim}}}\, \mathrm{LC}(\mathscr{T}, \mathrm{U}_0) \\ &\approx \underset{\mathrm{R}\in \mathrm{J}(*)}{\underleftarrow{\text{2-lim}}}\, \mathrm{LC}(\mathscr{T}, \mathrm{R}) && (*) \\ &\approx \mathrm{SLC}\,\mathscr{T}. \end{aligned}$$

Seule l'avant-dernière étape $(*)$ exige plus d'explications : montrons que tout crible R couvrant de l'objet final $*$ du topos $\mathscr{T}$ est moins fin qu'un crible engendré par un objet U_0. On est tenté de poser

$$\mathrm{U}_0 = \coprod_{(\mathrm{U} \rightarrowtail *)\in \mathrm{R}} \mathrm{U},$$

mais comme il ne s'agit pas d'un petit coproduit, il n'a aucune raison d'être représentable. Comme $\mathscr{T}$ possède une petite famille génératrice $\mathfrak{K}$ (d'après le critère de Giraud), pour tout $(\mathrm{U} \longrightarrow *) \in \mathrm{R}$, il existe un ensemble I_U et une famille épimorphique (donc couvrante, car on est dans un topos) $(\mathrm{C}_i \longrightarrow \mathrm{U})_{i\in \mathrm{I}_\mathrm{U}}$ où les C_i sont dans $\mathfrak{K}$. On est alors tenté de poser

$$\mathrm{U}_0 = \coprod_{(\mathrm{U} \rightarrowtail *)\in \mathrm{R}} \coprod_{i\in \mathrm{I}_\mathrm{U}} \mathrm{C}_i.$$

C'est toujours trop gros, mais en éliminant les facteurs qui apparaissent plusieurs fois, on peut se ramener à

$$\mathrm{U}_0 = \coprod_{\substack{\mathrm{C}\in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{K} \text{ tel que} \\ \mathrm{C}\rightarrowtail * \text{ se factorise} \\ \text{par un } (\mathrm{U}\rightarrowtail *)\in \mathrm{R}}} \mathrm{C}.$$

Il s'agit maintenant d'un petit coproduit, il est donc représentable. Comme $\mathrm{U}_0 \longrightarrow *$ est un épimorphisme, c'est un morphisme couvrant (rappelons que la topologie sur un topos est la topologie canonique). Enfin, le crible engendré par U_0 est moins fin que R. $\square$

5 Suites exactes courtes

Nous allons montrer quelques suites exactes courtes qui généralisent celles que l'on peut rencontrer avec des schémas, en particulier celle qui relie le groupe fondamental d'un schéma sur un corps k, le groupe fondamental de l'extension de ce schéma à une clôture séparable de k et le groupe de Galois absolu de k [SGA 1, IX 6.1]. Nous n'utiliserons pas ces résultats dans la suite de ce travail.

Proposition 5.1. — *Soient $\mathscr{T}$ un topos connexe et localement connexe, x un point de $\mathrm{SLC}\,\mathscr{T}$ et $\mathcal{F} : \mathrm{SLC}\,\mathscr{T} \longrightarrow \mathfrak{Ens}$ le foncteur-fibre correspondant. Soit Y un objet galoisien de $\mathrm{SLC}\,\mathscr{T}$.*

(*i*) *La catégorie $\mathrm{SLC}\,\mathscr{T}/\mathrm{Y}$ est encore galoisienne et un point $a \in \mathcal{F}(\mathrm{Y})$ définit un foncteur-fibre $\mathrm{SLC}\,\mathscr{T} \longrightarrow \mathfrak{Ens}$.*

(*ii*) *Le foncteur*

$$\begin{cases} \mathrm{SLC}\,\mathscr{T} & \longrightarrow & (\mathrm{SLC}\,\mathscr{T})/\mathrm{Y} \\ \mathrm{X} & \longmapsto & (\mathrm{X} \times \mathrm{Y} \longrightarrow \mathrm{Y}) \end{cases}$$

définit un morphisme de topos $(\mathrm{SLC}\,\mathscr{T})/\mathrm{Y} \longrightarrow \mathrm{SLC}\,\mathscr{T}$.

(*iii*) *On a une suite exacte courte*

$$1 \longrightarrow \pi_1(\mathrm{Y}, a) \longrightarrow \pi_1(\mathscr{T}, x) \longrightarrow \mathrm{Aut}\,\mathrm{Y} \longrightarrow 1.$$

Démonstration : Quitte à remplacer $\mathscr{T}$ par $\mathrm{SLC}\,\mathscr{T}$, on peut supposer que $\mathscr{T}$ est localement galoisien. Quitte à le remplacer par une catégorie équivalente, on peut même supposer que c'est le topos classifiant d'un progroupe $\mathrm{G} =$ "$\varprojlim$" G_i et que le foncteur-fibre $\mathcal{F}$ est le foncteur d'oubli $\mathrm{G}\text{-}\mathfrak{Ens} \longrightarrow \mathfrak{Ens}$. Le lemme suivant montre que $\mathrm{G}\text{-}\mathfrak{Ens}/\mathrm{Y}$ est bien un topos localement galoisien et identifie son groupe H à un sous-groupe de G ; de plus le morphisme de topos $\mathrm{G}\text{-}\mathfrak{Ens}/\mathrm{Y} \longrightarrow \mathrm{G}\text{-}\mathfrak{Ens}$ est en fait le morphisme $\mathrm{H}\text{-}\mathfrak{Ens} \longrightarrow \mathrm{G}\text{-}\mathfrak{Ens}$ induit par le morphisme de groupes $\mathrm{H} \longrightarrow \mathrm{G}$. Ceci établira (*i*) et (*ii*).

Lemme 5.2. — *Soient G un progroupe, Y un G-ensemble connexe, $a \in \mathrm{Y}$ et H le stabilisateur de a. On a une équivalence de catégories*

$$\mathrm{G}\text{-}\mathfrak{Ens}/\mathrm{Y} \approx \mathrm{H}\text{-}\mathfrak{Ens}.$$

Démonstration : Dire que Y est un G-ensemble connexe revient à dire qu'il existe un $i_0 \in \mathrm{I}$ tel que Y est muni d'une action de G_i pour tout $i \geqslant i_0$, que ces actions sont compatibles, et qu'elles n'ont qu'une seule orbite. Notons H_i le stabilisateur de $a \in \mathrm{Y}$ sous l'action de G_i : le stabilisateur de a est le progroupe "$\varprojlim$"$_{i \geqslant i_0} \mathrm{H}_i$. C'est un sous-progroupe de "$\varprojlim$"$_{i \geqslant i_0} \mathrm{G}_i \simeq$ "$\varprojlim$"$_i \mathrm{G}_i = \mathrm{G}$. Montrons maintenant que le foncteur

$$(*) : \begin{cases} \mathrm{G}\text{-}\mathfrak{Ens}/\mathrm{Y} & \longrightarrow \mathrm{H}\text{-}\mathfrak{Ens} \\ (\pi : \mathrm{Z} \longrightarrow \mathrm{Y}) & \longmapsto \pi^{-1}(\{a\}) \end{cases}$$

est une équivalence de catégories.

Tout d'abord, ce foncteur $(*)$ est bien défini : expliquons comment le groupe H agit sur la fibre $\pi^{-1}(\{a\})$. Soit $\pi : \mathrm{Z} \longrightarrow \mathrm{Y}$ un objet de G-$\mathfrak{Ens}$/Y. Il existe $i_0 \in \mathrm{I}$ tel que Y soit muni d'actions compatibles de G_i, pour $i \geqslant i_0$, et il existe $i_1 \in \mathrm{I}$ tel que Z soit muni d'actions compatibles des G_i pour $i \geqslant i_1$ et pour $i \geqslant i_2 = \sup(i_0, i_1)$ l'application $\pi : \mathrm{Z} \longrightarrow \mathrm{Y}$ est G_i-équivariante. La fibre $\pi^{-1}(\{a\})$ est alors munie d'une action du progroupe

$$\text{"}\varprojlim_{i \geqslant i_2}\text{"}\, \mathrm{H}_i \simeq \text{"}\varprojlim_{i \geqslant i_0}\text{"}\, \mathrm{H}_i \simeq \mathrm{H}.$$

De même, on montrerait qu'un morphisme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Z} \arrow[rr] \arrow[dr] & & \mathrm{Z}' \arrow[dl] \\ & \mathrm{Y} & \end{tikzcd}$$

de G-ensembles au dessus de Y induit un H-morphisme entre leurs fibres au dessus de a.

Montrons maintenant que ce foncteur est pleinement fidèle. Soient Z et Z′ des G-ensembles au dessus de Y. Il s'agit de vérifier que l'application

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Y,G}}(\mathrm{Z}, \mathrm{Z}') \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{H}}\big(\pi^{-1}(\{a\}), \pi'^{-1}(\{a\})\big)$$

est bijective. Nous allons l'établir dans le cas des groupes, celui des progroupes se traitant de même.

Établissons l'injectivité, *i.e.*, montrons qu'un morphisme f au dessus de Y,

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Z} \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & \mathrm{Z}' \arrow[dl, "\pi'"] \\ & \mathrm{Y} & \end{tikzcd}$$

est entièrement déterminé par sa fibre f_a. Soit $z \in \mathrm{Z}$. Comme Y est *connexe*, il existe $g \in \mathrm{G}$ tel que $\pi(z) = g \cdot a$. On a alors

$$\begin{aligned} f(z) &= f(g \cdot g^{-1} \cdot z) \\ &= g \cdot f(g^{-1} \cdot z) \\ &= g \cdot f_a(g^{-1} \cdot z) \qquad \text{car } g^{-1} \cdot z \in \pi^{-1}(\{a\}). \end{aligned}$$

Établissons la surjectivité. Soit

$$f_a : \pi^{-1}(\{a\}) \longrightarrow \pi'^{-1}(\{a\})$$

un H-morphisme entre les fibres. On définit un G-morphisme $Z \longrightarrow Z'$ comme précédemment,

$$f(z) = g \cdot f_a(g^{-1} \cdot z) \qquad \text{si } \pi(z) = g \cdot a.$$

Pour voir que f est bien définie, il suffit de vérifier que cela ne dépend pas du choix de g. Soient donc $g, g' \in \mathrm{G}$ tels que $\pi(z) = g \cdot a = g' \cdot a$. On a alors $g^{-1}g'a = a$ donc $h = g^{-1}g' \in \mathrm{H}$. Comme f_a est H-équivariant, on a

$$\begin{aligned} h^{-1} f_a(g^{-1} \cdot z) &= f_a(h^{-1} g^{-1} z), \\ i.e.,\ g'^{-1} g f_a(g^{-1} z) &= f_a(g'^{-1} z) \\ \text{donc } g f_a(g^{-1} z) &= g' f_a(g'^{-1} z), \end{aligned}$$

i.e., la définition de $f(z)$ ne dépend pas du choix de g. D'autre part, la fonction f est bien équivariante :

$$\begin{aligned} g' \cdot f(z) &= g' \cdot g \cdot f_a(g^{-1} \cdot z) \\ &= (g'g) \cdot f_a((g'g)^{-1} \cdot g'z) \\ &= f(g' \cdot z) \qquad\qquad \text{car } \pi(g'z) = g'\pi(z) = g'g \cdot a. \end{aligned}$$

Montrons maintenant que notre foncteur $(*)$ est essentiellement surjectif. Soit U un H-ensemble. Nous allons définir une action de G sur $\mathrm{Y} \times \mathrm{U}$ dont la restriction à la fibre au dessus de a sera bien l'action sur U. Commençons par choisir, pour tout $y \in \mathrm{Y}$, un $\gamma_y \in \mathrm{G}$, tel que $y = \gamma_y \cdot a$. On impose $\gamma_a = 1$. Soient $g \in \mathrm{G}$ et $(y, u) \in \mathrm{Y} \times \mathrm{U}$. On peut écrire $y = \gamma_y a$ et $gy = \gamma_{gy} a = g\gamma_y a$ et donc $\gamma_{gy}^{-1} g \gamma_y \in \mathrm{H}$. On pose alors

$$g \cdot (y, u) = (g \cdot y,\ \gamma_{gy}^{-1} g \gamma_y \cdot u).$$

C'est bien une action de G :

$$\begin{aligned} g' \cdot g \cdot (y, u) &= \big(g' \cdot g \cdot y,\ \gamma_{g'gy}^{-1} g' \gamma_{gy} \cdot \gamma_{gy}^{-1} g \gamma_y \cdot u\big) \\ &= (g'g \cdot y, \gamma'_{g'gy} g' g \gamma_y \cdot u). \end{aligned}$$

La projection sur Y est bien équivariante et l'action de H sur la fibre est bien celle dont on était parti : pour $h \in \mathrm{H}$,

$$\begin{aligned} h \cdot (a, u) &= (h \cdot a, \gamma_{ha}^{-1} h \gamma_a \cdot u) \\ &= (a, \gamma_a^{-1} h \gamma_a \cdot u) \qquad\qquad \text{car } h \cdot a = a \\ &= (a, h \cdot u) \qquad\qquad \text{car } \gamma_a = 1 \end{aligned}$$

Ceci démontre le lemme. □

On sait que H est un sous-groupe de G (avec les notations de la proposition : $\pi_1(\mathrm{Y}, a)$ est un sous-groupe de $\pi_1(\mathscr{T}, x)$). Il ne reste plus qu'à montrer que c'est un sous-groupe normal (c'est là qu'intervient l'hypothèse « Y est galoisien ») et à identifier le quotient.

Lemme 5.3. — *Soient* G *un progroupe,* Y *un* G*-ensemble galoisien,* $a \in \mathrm{Y}$ *et* H *le stabilisateur de* a*. Alors le sous-groupe* H *est normal et on a un isomorphisme*

$$\mathrm{G}/\mathrm{H} \simeq \mathrm{Aut}\,\mathrm{Y}.$$

Démonstration : Commençons par supposer que G est un groupe. Dire que Y est galoisien signifie qu'il est connexe et que l'application

$$\Psi : \begin{cases} \mathrm{Y} \times \mathrm{Aut}\,\mathrm{Y} & \longrightarrow & \mathrm{Y} \times \mathrm{Y} \\ (y, \varphi) & \longmapsto & \big(y, \varphi(y)\big) \end{cases}$$

est bijective. Cela permet de définir une application

$$\Phi : \begin{cases} \mathrm{G} & \longrightarrow & \mathrm{Aut}\,\mathrm{Y} \\ g & \longmapsto & \varphi \text{ tel que } \Psi(a, \varphi) = (a, g \cdot a). \end{cases}$$

Cette application est surjective : soit $\varphi \in \mathrm{Aut}\,\mathrm{Y}$. Comme Y est connexe, l'automorphisme φ est entièrement déterminé par la donnée de $\varphi(a)$. Or, toujours d'après la connexité de Y, il existe $g \in \mathrm{G}$ tel que $\varphi(a) = g \cdot a$ et donc $\varphi = \Phi(g)$. De plus, l'application Φ est clairement un morphisme de groupe : les automorphismes $\Phi(g)\Phi(g')$ et $\Phi(gg')$ ont la même valeur $gg' \cdot a$ en a, donc ils coïncident.

Montrons maintenant que le noyau de Φ est le stabilisateur H de a :

$$\begin{aligned} & \Phi(g) = \mathrm{Id} \\ \Longleftrightarrow\ & \Phi(g)(a) = \mathrm{Id}(a) \\ \Longleftrightarrow\ & g \cdot a = a \\ \Longleftrightarrow\ & g \in \mathrm{H}. \end{aligned}$$

On a donc une suite exacte courte

$$1 \longrightarrow \mathrm{H} \longrightarrow \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{Aut}\,\mathrm{Y} \longrightarrow 1.$$

Passons maintenant au cas où G est un progroupe. Il existe $i_0 \in \mathrm{I}$ tel que l'action de G sur Y se factorise par celle des G_i, pour tout $i \geqslant i_0$. D'après le cas précédent, on a des suites exactes courtes

$$1 \longrightarrow \mathrm{H}_i \longrightarrow \mathrm{G}_i \longrightarrow \mathrm{Aut}\,\mathrm{Y} \longrightarrow 1$$

pour $i \geqslant i_0$, donc, d'après le lemme B.3.6 page 192, une suite exacte courte de progroupes

$$1 \longrightarrow \text{“}\varprojlim_{i \geqslant i_0}\text{”}\, \mathrm{H}_i \longrightarrow \text{“}\varprojlim_{i \geqslant i_0}\text{”}\, \mathrm{G}_i \longrightarrow \mathrm{Aut}\, \mathrm{Y} \longrightarrow 1,$$

qui s'écrit aussi

$$1 \longrightarrow \mathrm{H} \longrightarrow \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{Aut}\, \mathrm{Y} \longrightarrow 1. \qquad \square$$

Ceci achève la démonstration de la proposition. $\square$

Corollaire 5.4. — *Soient* X *un schéma connexe,* G *un groupe fini agissant sur* X *et* x *un point géométrique de* X*. On a une suite exacte*

$$1 \longrightarrow \widehat{\pi}_1(\mathrm{X}, x) \longrightarrow \widehat{\pi}_1([\mathrm{X}/\mathrm{G}], x) \longrightarrow \mathrm{G} \longrightarrow 1.$$

Démonstration : La catégorie des faisceaux localement constants finis sur le champ quotient X/G est équivalente [Vistoli, p. 669] à la catégorie $\mathfrak{Rev}_{\mathrm{G}}\mathrm{X}$ des revêtements étales G-équivariants de X ; son objet final est X muni de l'action de G. Considérons l'objet $\mathrm{Y} = \coprod_{g \in \mathrm{G}} \mathrm{X}$, où le groupe G agit en permutant les facteurs

$$h \in \mathrm{G} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{Y} & \longrightarrow & \mathrm{Y} \\ x_g & \longmapsto & (h \cdot x)_{gh^{-1}}, \end{array} \right.$$

(où on a noté x_g le point $x \in \mathrm{X}$ situé dans la copie de X indexée par $g \in \mathrm{G}$), et dont le morphisme vers X est donné par

$$\pi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{Y} & \longrightarrow & \mathrm{X} \\ x_g & \longmapsto & g \cdot x. \end{array} \right.$$

Montrons que $\mathrm{G} = \mathrm{Aut}\, \mathrm{Y}$. L'action de G sur Y nous donne un morphisme

$$\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{G} & \longrightarrow & \mathrm{Aut}\, \mathrm{Y} \\ h & \longmapsto & \Phi(h) : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{Y} & \longrightarrow & \mathrm{Y} \\ x_g & \longmapsto & (h \cdot x)_{h^{-1}g}. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Ce morphisme est clairement injectif. Réciproquement, soit $\varphi \in \mathrm{Aut}\, \mathrm{Y}$. Si $x \in \mathrm{X}_1$, son image peut s'écrire $\varphi(x) = y_h$, où $y \in \mathrm{X}$ et $h \in \mathrm{G}$. Comme le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Y} \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & \mathrm{Y} \arrow[dl, "\pi"] \\ & \mathrm{X} & \end{tikzcd}$$

commute, on a

$$\begin{aligned} & \pi x_1 = \pi(\varphi x_1) \\ \textit{i.e.}, \qquad & x = h \cdot y \\ \textit{i.e.}, \qquad & y = h^{-1} \cdot x \\ \text{donc} \qquad & \varphi(x_1) = (h^{-1} \cdot x)_h, \end{aligned}$$

donc φ et $\Phi(h^{-1})$ coïncident sur un point de X_1. Mais comme X_1 est connexe et $\pi : \mathrm{Y} \longrightarrow \mathrm{X}$ étale, on sait qu'ils coïcident sur X_1. Enfin, comme φ et $\Phi(h^{-1})$ sont tous deux équivariants, ils coïncident sur l'orbite de X_1, *i.e.*, sur Y tout entier : on a bien $\varphi = \Phi(h^{-1})$.

Montrons que Y est galoisien, *i.e.*, que $\mathrm{Y} \times_{\mathrm{X}} (\operatorname{Aut} \mathrm{Y})_{\mathrm{X}} \simeq \mathrm{Y} \times_{\mathrm{X}} \mathrm{Y}$, *i.e.*, que

$$\Big(\coprod_{g\in\mathrm{G}} \mathrm{X}\Big) \underset{\mathrm{X}}{\times} \Big(\coprod_{g\in\mathrm{G}} \mathrm{X}\Big) \simeq \Big(\coprod_{g\in\mathrm{G}} \mathrm{X}\Big) \underset{\mathrm{X}}{\times} \Big(\coprod_{g\in\mathrm{G}} \mathrm{X}\Big)$$

où le groupe G agit sur chacune des composantes dans le deuxième facteur du membre de gauche et agit en permutant les composantes partout ailleurs. L'isomorphisme est donné explicitement par

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \Big\{(x,g,y,h) \in (\mathrm{X}\times\mathrm{G})^2 \;:\; g\cdot x = y\Big\} & \longrightarrow & \Big\{(x,g,y,h) \;:\; g\cdot x = h\cdot y\Big\} \\ (x,g,y,h) & \longmapsto & (x,g,h^{-1}\cdot y,h) \\ (x,g,h\cdot y,h) & \longmapsfrom & (x,g,y,h). \end{array} \right.$$

Remarquons enfin l'équivalence de catégories

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathfrak{Rev}\mathrm{Y} & \longrightarrow & \mathfrak{Rev}\mathrm{X} \\ \begin{tikzcd} \mathrm{R} \arrow[d] \\ \mathrm{Y} \end{tikzcd} & \longmapsto & \begin{tikzcd} \mathrm{R}_1 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & \mathrm{R} \arrow[d] \\ \mathrm{X} \arrow[r] & \mathrm{Y} = \coprod_{g\in\mathrm{G}} \mathrm{X} \end{tikzcd} \\ \begin{tikzcd} \coprod_{g\in\mathrm{G}} \mathrm{R} \arrow[d] \\ \mathrm{Y} = \coprod_{g\in\mathrm{G}} \mathrm{X} \end{tikzcd} & \longmapsfrom & \begin{tikzcd} \mathrm{R} \arrow[d] \\ \mathrm{X} \end{tikzcd} \end{array} \right.$$

On peut donc conclure en appliquant la proposition 5.1 : on a une suite exacte

$$1 \longrightarrow \pi_1 \mathfrak{Rev}\,\mathrm{Y} \longrightarrow \pi_1 \mathfrak{Rev}_{\mathrm{G}} \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{G} \longrightarrow 1$$

qui s'écrit

$$1 \longrightarrow \widehat{\pi}_1(\mathrm{X}, x) \longrightarrow \widehat{\pi}_1([\mathrm{X}/\mathrm{G}], x) \longrightarrow \mathrm{G} \longrightarrow 1. \qquad \square$$

Corollaire 5.5. — *Soient* X *un champ algébrique sur un corps k, connexe et quasi-compact*[9], $\bar{k}$ *une clôture séparable de k et x un point de* $\bar{\mathrm{X}} = \mathrm{X} \otimes_k \bar{k}$. *On a alors une suite exacte courte de groupes fondamentaux* profinis

$$1 \longrightarrow \widehat{\pi}_1(\bar{\mathrm{X}}, x) \longrightarrow \widehat{\pi}_1(\mathrm{X}, x) \longrightarrow \mathrm{Gal}(\bar{k} : k) \longrightarrow 1.$$

Démonstration : Il s'agit de généraliser aux champs algébriques la démonstration de [SGA 1, IX 6.1]. Nous commençons par établir des suites exactes pour chaque extension galoisienne finie k' de k, dont nous prendrons ensuite la limite projective.

Lemme 5.6. — *Soient* X *un champ algébrique sur un corps k, connexe et $k' : k$ une extension galoisienne finie. On a* $\mathrm{Gal}(k' : k) \simeq \mathrm{Aut}_{\mathrm{X}}(\mathrm{X} \otimes_k k')$ *et l'extension* $\mathrm{X} \underset{k}{\otimes} k' \longrightarrow \mathrm{X}$ *est galoisienne.*

Démonstration : Remarquons tout d'abord qu'un élément de $\mathrm{Gal}(k' : k)$ définit un automorphisme de $\mathrm{X}' = \mathrm{X} \otimes k'$: on a un monomorphisme de groupes $\mathrm{Gal}(k' : k) \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathrm{X}}\, \mathrm{X} \otimes k'$. Soit maintenant un automorphisme φ de $\mathrm{X} \otimes k'$ au dessus de X.

Supposons pour commencer que X est un schéma. Localement, φ est de la forme

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Spec}\, \mathrm{A} \otimes_k k' \arrow[rr] \arrow[dr] & & \mathrm{Spec}\, \mathrm{A} \otimes_k k' \arrow[dl] \\
& \mathrm{Spec}\, \mathrm{A} &
\end{tikzcd}$$

donc il provient, localement, d'un automorphisme uniquement déterminé de k' au dessus de k. Comme X est connexe, cela définit un unique élément du groupe de Galois.

Regardons maintenant le cas d'un champ algébrique X, dont on choisit une présentation $s, b : \mathrm{R} \rightrightarrows \mathrm{U}$. On peut recouvrir U par des ouverts affines $\mathrm{Spec}\, \mathrm{A}_i$. De même, on peut recouvrir $s^{-1}(\mathrm{Spec}\, \mathrm{A}_i)$ par des ouverts affines $\mathrm{Spec}\, \mathrm{B}'_{i,j}$ et $b^{-1}(\mathrm{Spec}\, \mathrm{A}_i)$ par des ouverts affines $\mathrm{Spec}\, \mathrm{B}''_{ik}$. On peut alors recouvrir les $\mathrm{Spec}\, \mathrm{B}'_{ij} \cap \mathrm{Spec}\, \mathrm{B}''_{i'k}$ par des ouverts affines $\mathrm{Spec}\, \mathrm{B}_{ii'l}$; comme s et b sont surjectifs, ces ouverts affines recouvrent R. Un automorphisme de X′ au dessus de X induit un automorphisme de $\mathrm{R}' \rightrightarrows \mathrm{U}'$ au dessus de $\mathrm{R} \rightrightarrows \mathrm{U}$, donc un automorphisme des $\mathrm{Spec}\, k' \otimes \mathrm{B}_{ii'l} \longrightarrow \bar{k}' \otimes \mathrm{Spec}\, \mathrm{A}_i$ et des $\mathrm{Spec}\, k' \otimes \mathrm{B}_{ii'l} \longrightarrow \mathrm{Spec}\, k' \otimes \mathrm{A}_{i'}$ au dessus des $\mathrm{Spec}\, \mathrm{B}_{ii'l} \longrightarrow \mathrm{Spec}\, \mathrm{A}_i$ et des $\mathrm{Spec}\, \mathrm{B}_{ii'l} \longrightarrow \mathrm{Spec}\, \mathrm{A}_{i'}$. À chaque fois, cela définit un automorphisme de k'

9. Un champ algébrique est *quasi-compact* s'il possède une présentation $\mathrm{R} \rightrightarrows \mathrm{U}$ avec R et U tous deux quasi-compacts.

au dessus de k, mais comme le groupoïde $\mathrm{R} \rightrightarrows \mathrm{U}$ est connexe,[10] il s'agit du même automorphisme. L'automorphisme de X' est entièrement déterminé par cet automorphisme de k'.

L'isomorphisme que l'on vient d'établir permet aussi de montrer que X' est un revêtement galoisien de X. On a

$$\mathrm{X}' \underset{\mathrm{X}}{\times} \mathrm{Aut}_{\mathrm{X}}\,\mathrm{X}' = \mathrm{X} \underset{\mathrm{Spec}\,k}{\times} (\mathrm{Spec}\,k' \times \mathrm{Gal}(k' : k)) \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{X}' \underset{\mathrm{X}}{\times} \mathrm{X}' &= \left(\mathrm{X} \underset{\mathrm{Spec}\,k}{\times} \mathrm{Spec}\,k'\right) \underset{\mathrm{X}}{\times} \left(\mathrm{X} \underset{\mathrm{Spec}\,k}{\times} \mathrm{Spec}\,k'\right) \\ &= \mathrm{X} \underset{\mathrm{Spec}\,k}{\times} \left(\mathrm{Spec}\,k' \underset{\mathrm{Spec}\,k}{\times} \mathrm{Spec}\,k'\right). \end{aligned} \tag{2}$$

Or $k' : k$ est galoisienne : on a donc bien un isomorphisme $(1) \simeq (2)$. $\square$

On a alors des suites exactes courtes, d'après 5.1,

$$1 \longrightarrow \widehat{\pi}_1(\mathrm{X} \otimes_k k') \longrightarrow \widehat{\pi}_1(\mathrm{X}) \longrightarrow \mathrm{Gal}(k' : k) \longrightarrow 1,$$

puis, en prenant la limite projective dans la catégorie des progroupes, des suites exactes courtes

$$1 \longrightarrow \varprojlim_{k'} \widehat{\pi}_1(\mathrm{X} \otimes_k k') \longrightarrow \widehat{\pi}_1(\mathrm{X}) \longrightarrow \text{“}\varprojlim\text{”}\, \mathrm{Gal}(k' : k) \longrightarrow 1.$$

Nous avons besoin d'un autre lemme pour identifier le premier terme.

Lemme 5.7. — *Soient* X *un champ algébrique sur un corps* k*, connexe et quasi-compact et* $\bar{k}$ *la clôture séparable de* k*. On a un isomorphisme de groupes profinis*

$$\widehat{\pi}_1(\mathrm{X} \otimes_k \bar{k}) \simeq \underset{\substack{k':k \text{ extension} \\ \text{galoisienne finie}}}{\text{“}\varprojlim\text{”}} \widehat{\pi}_1(\mathrm{X} \times_k k').$$

Démonstration : Cela revient en fait à montrer que tout revêtement étale de $\bar{\mathrm{X}} = \mathrm{X} \otimes \bar{k}$ provient d'un revêtement d'un $\mathrm{X}' = \mathrm{X} \otimes k'$ pour une extension (galoisienne) finie $k' : k$. Commençons par le montrer dans le cas où X est un schéma. Soit F un revêtement étale de X. Il existe un recouvrement de X par des ouverts affines $\mathrm{Spec}\,\mathrm{A}_i$ sur lesquels le revêtement F s'écrit

$$\mathrm{Spec}\,\frac{\mathrm{A}_i \otimes \bar{k}[x_1, \ldots, x_{n_i}]}{(f_{i,1}, \ldots, f_{i,n_i})} \longrightarrow \mathrm{Spec}\,\mathrm{A}_i \otimes \bar{k}.$$

10. Les composantes connexes d'un groupoïde étale $\mathrm{R} \rightrightarrows \mathrm{U}$ sont les composantes connexes du groupoïde ensembliste $\pi_0\mathrm{R} \rightrightarrows \pi_0\mathrm{U}$.

Comme X est quasi-compact, on peut se ramener à un nombre fini d'ouverts. Comme les coefficients des $f_{i,j}$ ne font intervenir qu'un nombre fini d'éléments du corps $\bar{k}$, on conclut que F est défini sur l'extension galoisienne *finie* k' engendrée par tous ces éléments.

Passons maintenant au cas des champs algébriques. Soit $s, b : \mathrm{R} \rightrightarrows \mathrm{U}$ une présentation du champ algébrique X, avec R et U quasi-compacts. Soit F un revêtement étale du champ $\bar{\mathrm{X}}$, que l'on peut voir comme un revêtement équivariant de $\bar{\mathrm{U}}$: c'est la donnée d'un revêtement étale F de $\bar{\mathrm{U}}$ et d'un morphisme $\alpha : \bar{\mathrm{R}}\ {}_s\!\times_{\bar{\mathrm{U}}} \mathrm{F} \longrightarrow \mathrm{F}$ faisant commuter certains diagrammes (voir 3.11). On applique le raisonnement précédent pour obtenir un recouvrement fini de U par des ouverts affines $\operatorname{Spec} \mathrm{A}_i$, puis un recouvrement fini de chacun des $\alpha^{-1}(\operatorname{Spec} \mathrm{A}_i)$ par des ouverts affines $\operatorname{Spec} \mathrm{B}_{i,j}$. Au dessus de $\operatorname{Spec} \mathrm{A}_i$, le revêtement F s'écrit

$$\operatorname{Spec} \frac{\mathrm{A}_i \otimes \bar{k}[x_1, \dots, x_{n_i}]}{(f_{i,1}, \dots, f_{i,n_i})} \longrightarrow \operatorname{Spec} \mathrm{A}_i \otimes \bar{k},$$

en ne faisant intervenir qu'un nombre fini d'éléments de $\bar{k}$ et les morphismes

$$\operatorname{Spec} \mathrm{B}_{ij} \underset{\mathrm{A}_i}{\otimes} \frac{\mathrm{A}_i \otimes \bar{k}[x_1, \dots, x_{n_i}]}{(f_{i,1}, \dots, f_{i,n_i})} \longrightarrow \operatorname{Spec} \frac{\mathrm{A}_i \otimes \bar{k}[x_1, \dots, x_{n_i}]}{(f_{i,1}, \dots, f_{i,n_i})}$$

ne font intervenir qu'un nombre fini d'éléments de $\bar{k}$. Le revêtement F est donc défini sur l'extension finie k' engendrée par ces éléments de $\bar{k}$. □

Finalement, on obtient la suite exacte recherchée

$$1 \longrightarrow \widehat{\pi}_1(\mathrm{X} \otimes_k \bar{k}) \longrightarrow \widehat{\pi}_1(\mathrm{X}) \longrightarrow \operatorname{Gal}(\bar{k} : k) \longrightarrow 1,$$

où $\operatorname{Gal}(\bar{k} : k)$ est le groupe de Galois profini. □

Chapitre II

Points-bases tangentiels

Commençons par rappeler comment construire un point-base tangentiel d'un schéma X sur $\mathbb{C}$ le long d'un diviseur à croisements normaux [Deligne, Ihara 1, Emsalem–Lochak] à l'aide de séries de Puiseux : on définit un foncteur-fibre en associant à un revêtement R l'ensemble

$$\mathrm{Hom}_{k(\mathrm{X})}\big(k(\mathrm{R}), k\{\{x_1, \ldots, x_n\}\}\big),$$

où les x_i forment un système régulier de paramètres définissant le diviseur au voisinage d'un point. Nous reprenons cette construction, de manière plus formelle, sur un corps algébriquement clos de caractéristique quelconque, puis nous la généralisons aux champs algébriques. Nous expliquons ensuite comment construire un tel point-base tangentiel à partir de morphismes finis et non ramifiés depuis $\mathbb{P}^1$, dont les images sont les strates de dimension un du diviseur, *i.e.*, à partir d'une paramétrisation des strates de dimension un de ce diviseur.

1 Présentation informelle de la notion de point-base tangentiel

Dans cette section, nous nous contentons de motiver la notion de point-base tangenciel et sa description en termes de séries de Puiseux, sans rien démontrer. Nous reprendrons tout cela plus rigoureusement dans la section suivante.

Quand on cherche à calculer le groupe fondamental d'une variété différentielle Y, il faut choisir un point-base : il peut s'agir d'un point de Y ou, de manière plus générale, d'une partie simplement connexe de Y.

C'est ce que l'on choisit en particulier quand la variété est obtenue en retirant un ou plusieurs points à une autre variété, $\mathrm{Y} = \mathrm{X} \setminus \{x\}$. On aimerait bien prendre ce point, x, comme point-base (très souvent, pour des raisons de symétrie). On ne peut pas, mais on peut prendre une partie connexe et simplement connexe autour de x, dans une certaine direction. La figure 1 donne deux exemples.

(a) Une partie simplement connexe de $\mathrm{Y} = \mathrm{X} \setminus \{x\}$

(b) Sur la droite projective moins trois points, $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$, l'intervalle $]0, 1[$ est un point-base

Figure 1 – Exemples de points-bases tangenciels

On remarque que remplacer cette partie simplement connexe par une autre plus petite, ou par une famille filtrante de parties plus petites, ne change rien. Ainsi, dans l'exemple (b), on peut remplacer l'intervalle $]0, 1[$ par n'importe quel intervalle $]0, \varepsilon[$ plus petit (avec $0 < \varepsilon < 1$). L'ensemble de tous ces intervalles définit un point-base tangenciel, que l'on peut voir comme un vecteur tangent au point 0 (nous le noterons $\overrightarrow{01}$).

Plus généralement, on peut remplacer l'intervalle $]0, 1[$ par une courbe, ou par le germe de cette courbe au point x. En fait, le point-base que l'on obtient ne dépend que du vecteur tangent en x.

Cet exemple suggère de tenter de définir un point-base sur $\mathrm{X} \setminus \{x\}$, où X est une variété complexe, à partir d'un vecteur tangent *réel* en x. Pour le faire plus rigoureusement, nous allons décrire ce point-base de manière plus algébrique, *i.e.*, en termes de foncteurs-fibres.

Notons $\mathfrak{Rev}\,\mathrm{X}$ la catégorie des revêtements (finis) connexes de X. Un point $x \in \mathrm{X}$ définit un foncteur

$$\mathcal{F}_x : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathfrak{Rev}\,\mathrm{X} & \longrightarrow & \mathfrak{Ens} \\ (\pi : \mathrm{R} \longrightarrow \mathrm{X}) & \longmapsto & \pi^{-1}(\{x\}). \end{array} \right.$$

Le groupe fondamental (profini) de X en x est isomorphe au groupe des automorphismes de ce foncteur. Nous allons expliquer comment généraliser cette construction aux points-bases tangenciels.

Pour simplifier, supposons X de dimension complexe un. Il convient tout d'abord de décrire les revêtements (connexes) de $\mathrm{X} \setminus \{x\}$: ce sont les revêtement de X ramifiés en x, *i.e.*, localement en x, ils sont de la forme $z \longmapsto z^n$, pour un certain entier n (figure 2).

On peut voir un point-base tangenciel en x comme un point « infiniment proche de x dans une certaine direction » : on définira donc $\mathcal{F}_x(\mathrm{R})$ comme

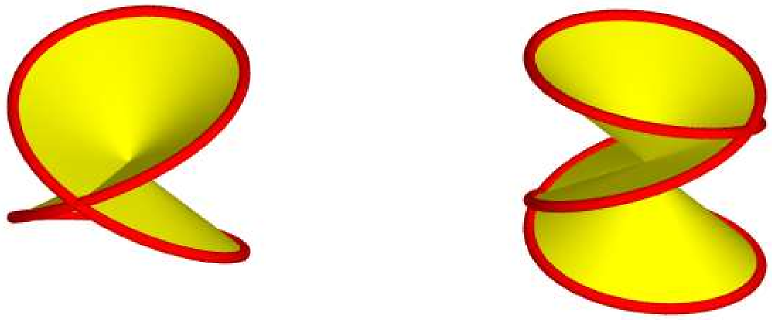


Figure 2 – Revêtements ramifiés d'un disque, d'indice de ramification deux et trois

l'ensemble des points de R « infiniment proches d'un point de $\pi^{-1}(x)$ dans la même direction ». Pour obtenir une description plus algébrique (sans guillemets) du foncteur $\mathcal{F}$, utilisons le fait que notre revêtement est localement de la forme $z \longmapsto z^n$, *i.e.*, en termes plus algébriques,

$$\begin{aligned} \mathrm{R} = \operatorname{Spec} \mathbb{C}[\![t]\!] &\longrightarrow \mathrm{X} = \operatorname{Spec} \mathbb{C}[\![x]\!] \\ t^n &\longleftarrow\!\shortmid x \end{aligned}$$

ce qui peut encore s'écrire, en notant $x^{1/n}$ l'indéterminée t,

$$\begin{aligned} \mathrm{R} = \operatorname{Spec} \mathbb{C}[\![x^{1/n}]\!] &\longrightarrow \mathrm{X} = \operatorname{Spec} \mathbb{C}[\![x]\!] \\ (x^{1/n})^n &\longleftarrow\!\shortmid x. \end{aligned}$$

On définit le foncteur-fibre associé au point $1 \in \mathbb{C}$ par

$$\mathcal{F}(\mathrm{R}) = \{\, z \in \mathbb{C} \ : \ z^n = 1 \,\}$$

On peut le voir comme un point-base tangenciel, car

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\mathrm{R}) &\simeq \{\, \mathrm{C} = \,]0, z] \ \text{ où } z \in \mathbb{C} \text{ et } z^n = 1 \,\} \\ &\simeq \{\, \text{parties connexes et simplement connexes } \mathrm{C} \subset \mathbb{C} \\ &\qquad\quad \text{telles que } \mathrm{C}^n = \,]0,1] \,\} \\ &\simeq \{\, \text{parties connexes et simplement connexes } \mathrm{C} \subset \mathbb{C} \\ &\qquad\quad \text{telles que } \mathrm{C}^n = \,]0,\varepsilon] \,\}, \end{aligned}$$

où $\varepsilon > 0$. Remarquons maintenant que

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\mathrm{R}) &= \{\, z \in \mathbb{C} \;:\; z^n = 1 \,\} \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[\![x]\!]}\big(\mathbb{C}[\![x^{1/n}]\!], \mathbb{C}[\![x^{1/n}]\!]\big)\end{aligned}$$

car un $\mathbb{C}[\![x]\!]$-morphisme $\mathbb{C}[\![x^{1/n}]\!] \longrightarrow \mathbb{C}[\![x^{1/n}]\!]$ est entièrement déterminé par l'image de $x^{1/n}$, qui doit être une racine $n^{\text{ième}}$ de x, *i.e.*, être de la forme $zx^{1/n}$ avec $z^n = 1$. De même :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\mathrm{R}) &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}(\!(x)\!)}\big(\mathbb{C}(x^{1/n}), \mathbb{C}(x^{1/n})\big) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}(\!(x)\!)}\big(\mathbb{C}(x^{1/n}), \mathbb{C}(\!(x^{1/n})\!)\big).\end{aligned}$$

Pour l'instant, ça n'a pas l'air fonctoriel, mais remarquons que si m est un multiple de n, cela s'écrit aussi

$$\simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}(\!(x)\!)}\big(\mathbb{C}(x^{1/n}), \mathbb{C}(\!(x^{1/m})\!)\big)$$

et si on note $\mathbb{C}\{\{x\}\} = \varinjlim \mathbb{C}(\!(x^{1/m})\!)$ le corps des séries de Puiseux, il vient

$$\begin{aligned}&\simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}(\!(x)\!)}\big(\mathbb{C}(\!(x^{1/n})\!), \mathbb{C}\{\{x\}\}\big) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{k(\mathrm{X})}\big(k(\mathrm{R}), \mathbb{C}\{\{x\}\}\big).\end{aligned}$$

2 Points-bases et points-bases tangentiels pour les schémas

Nous allons maintenant montrer que cette description des points-bases tangenciels à l'aide de séries de Puiseux définit effectivement un foncteur-fibre, sur un corps algébriquement clos.

Sauf mention du contraire, tous les schémas sont séparés, localement de type fini, normaux et définis sur un corps algébriquement clos. Tous les anneaux sont bien évidemment commutatifs.

Définition 2.1. — Soit $\mathscr{T}$ un topos. Un *foncteur-fibre (profini)* sur SLCF $\mathscr{T}$ est le foncteur image réciproque d'un morphisme de topos $\mathfrak{Ens} \longrightarrow \mathrm{SLCF}\,\mathscr{T}$, *i.e.*, un foncteur SLCF $\mathscr{T} \longrightarrow \mathfrak{Ens}$ exact à gauche et possédant un adjoint à droite.

Par abus de langage, si $\mathfrak{Rev}\,\mathscr{T}$ est la catégorie des objets localement constants finis connexes de $\mathscr{T}$, on dira qu'un foncteur $\mathcal{F} : \mathfrak{Rev}\,\mathscr{T} \longrightarrow \mathfrak{Ens}$ est un foncteur-fibre si le foncteur

$$\begin{cases} \mathrm{SLCF}\,\mathscr{T} & \longrightarrow \quad \mathfrak{Ens} \\ \mathrm{U} = \coprod_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{U}_i & \longmapsto \quad \coprod_{i\in\mathrm{I}} \mathcal{F}\mathrm{U}_i \end{cases}$$

(où les U_i sont les composantes connexes de U, donc des objets de $\mathfrak{Rev}\,\mathscr{T}$) est un foncteur-fibre.

Définition 2.2. — Les revêtements étales d'un schéma X, *i.e.*, les morphismes étales et finis vers X, forment une catégorie galoisienne. Nous noterons $\mathfrak{Rev}\,\mathrm{X}$ la sous-catégorie pleine des revêtements connexes.[1] Un point géométrique x de X définit un foncteur-fibre et on note $\pi_1(\mathrm{X}, x)$ le groupe fondamental correspondant [SGA 1].

Théorème 2.3. — ***Soient* X *un schéma intègre et* $x \in$ X *un point fermé régulier de corps résiduel algébriquement clos. Le foncteur***

$$\begin{cases} \mathfrak{Rev}\,\mathrm{X} & \longrightarrow \quad \mathfrak{Ens} \\ \mathrm{R} & \longmapsto \quad \mathrm{Hom}_{k(\mathrm{X})}\big(k(\mathrm{R}), \mathrm{Frac}\,\widehat{\mathscr{O}_{\mathrm{X},x}}\big) \end{cases}$$

est un foncteur fibre.

Avant d'établir ce théorème, nous allons énoncer un résultat similaire pour un schéma privé d'un diviseur à croisements normaux pour ensuite présenter les deux démonstrations parallèlement. Nous avons d'abord besoin de quelques définitions.

Définition 2.4. — On dit qu'un diviseur D sur un schéma X est *à croisements strictement normaux* si son support ne contient que des points réguliers de X et si, sur un voisinage de tout point s de ce support, il s'écrit $\mathrm{D} = \sum_{i=1}^{m'} \mathrm{div}\, x_i$, où $m' \leqslant m$ et les $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$ forment un système regulier de paramètres en s. On dit qu'un diviseur est *à croisement normaux* s'il est localement, pour la topologie étale, à croisements strictement normaux [Grothendieck–Murre, 1.8.2]

Définition 2.5. — Un *revêtement de Kummer* est un morphisme de la forme

$$\mathrm{Spec}\,\frac{\mathrm{A}[t_1,\ldots,t_m]}{(t_1^{n_1}-a_1,\ldots,t_m^{n_m}-a_m)} \longrightarrow \mathrm{Spec}\,\mathrm{A}$$

1. Nous nous limitons aux revêtements connexes car, d'une part, tout revêtement est somme disjointe de revêtements connexes et, d'autre part, le foncteur que nous allons construire s'exprime à l'aide du corps de fonctions d'un revêtement.

où

- A est un anneau,
- pour tout idéal premier $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} \mathrm{A}$, les a_i non inversibles dans $\mathrm{A}_\mathfrak{p}$ font partie d'un système régulier de paramètres[2] de $\mathrm{A}_\mathfrak{p}$ et
- les n_i sont des entiers qui ne sont divisibles par aucune des caractéristiques résiduelles de A.

Comme les a_i définissent un diviseur à croisements strictement normaux, nous dirons qu'il s'agit d'un revêtement de Kummer relatif à ce diviseur.

Définition 2.6. — Un *revêtement modérément ramifié* sur un schéma normal par rapport à un diviseur à croisements normaux est un morphisme vers ce schéma qui est, localement pour la topologie étale, une somme disjointe de revêtements de Kummer par rapport à ce diviseur.

Remarque 2.7. — On peut donner une autre définition d'un revêtement modérément ramifié, plus algébrique, voir [Grothendieck–Murre, 2.3.4] ou [SGA 1, 13.5].

Soit K un corps de caractéristique p (éventuellement nulle) muni d'une valuation discrète non triviale v. Notons $\mathrm{A}_v = \{ x \in \mathrm{K} \ : \ v(x) \geqslant 0 \}$ son anneau de valuation, $\mathfrak{m}_v = \{ x \in \mathrm{K} \ : \ v(x) > 0 \}$ son idéal maximal, $k_v = \mathrm{A}_v/\mathfrak{m}_v$ son corps résiduel et $\Gamma_v = \operatorname{Im}(v : \mathrm{K} \longrightarrow \mathbb{R})$ le groupe des valeurs de v. Si L : K est une extension finie séparable, alors il existe un nombre fini d'extensions de la valuation v en une valuation discrète v de L. On dit que l'extension L : K est *modérément ramifiée* si pour tout prolongement w de v à L,

(*i*) si la caractéristique est non nulle, elle ne divise pas l'indice de ramification : $p \nmid [\Gamma_w : \Gamma_v]$;

(*ii*) l'extension résiduelle $k_w : k_v$ est séparable.

Soit D un diviseur à croisements normaux sur un schéma localement noethérien S. On dit qu'un morphisme $f : \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{S}$ est *modérément ramifié* le long de D si

(*i*) f est de type fini ;

(*ii*) f est étale sur $\mathrm{S} \setminus \mathrm{D}$;

(*iii*) toute composante irréductible de X domine une composante irréductible de S ;

2. La définition usuelle ne demande pas qu'ils fassent partie d'un système régulier de paramètres dans les localisés, mais simplement qu'ils n'y soient pas des diviseurs de zéro. Toutefois, comme nous nous limiterons aux revêtements de Kummer au dessus de diviseurs *à croisements strictement normaux*, nous pouvons le supposer dès maintenant.

(*iv*) X est normal ;

(*v*) pour tout point s de D de codimension 1 dans S, le schéma X est modérément ramifié sur l'anneau local $\mathscr{O}_{S,s}$, *i.e.*, si on pose

$$\begin{tikzcd} \coprod_{i\in I}\operatorname{Spec} L_i \arrow[r, equal] \arrow[d] & \operatorname{Spec}\operatorname{Frac} B \arrow[r] \arrow[d] & X' = \operatorname{Spec} B \arrow[r, hook] \arrow[d] & X \arrow[d] \\ \operatorname{Spec} K \arrow[r, equal] & \operatorname{Spec}\operatorname{Frac}\mathscr{O}_{S,s} \arrow[r] & \operatorname{Spec}\mathscr{O}_{S,s} \arrow[r] & S, \end{tikzcd}$$

alors l'anneau total de B est un produit d'extensions séparables finies L_i du corps $K = \operatorname{Frac}\mathscr{O}_{S,s}$ et pour tout i, l'extension $L_i : K$ est modérément ramifiée pour la valuation provenant de $\mathscr{O}_{S,s}$.

Définition 2.8. — Les revêtement modérément ramifiés d'un schéma (normal) X le long d'un diviseur à croisements normaux D forment une catégorie galoisienne (donc leurs sommes disjointes forment un topos localement galoisien profini) ; nous noterons $\mathfrak{Rev}^{D}X$ la sous-catégorie pleine des revêtements connexes.[3] Un point géométrique x en dehors du diviseur définit un foncteur fibre et on note $\pi_1^{D}(X, x)$ le groupe fondamental correspondant [Grothendieck–Murre].

Remarque 2.9. — Les groupes fondamentaux $\pi_1^{D}(X, x)$ et $\pi_1(X \setminus D, x)$ sont généralement distincts et on ne sait pas dire grand-chose sur le second.

Définition 2.10. — Soient A un anneau local régulier[4], $\mathfrak{m}$ son idéal maximal, $\widehat{A}$ son complété $\mathfrak{m}$-adique et $x_1, \ldots, x_n$ un système régulier de paramètres. Notons Ω une clôture algébrique de $\operatorname{Frac}\widehat{A}$. Soit m un entier premier à la caractéristique de Ω. Pour tout i on choisit $x_i^{1/m}$ une racine primitive $m^{\text{ième}}$ de x_i dans Ω (d'après le théorème de l'élément primitif, il en existe) et on note $\widehat{A}[x_1^{1/m}, \ldots, x_n^{1/m}]$ la sous-$\widehat{A}$-algèbre qu'ils engendrent.

L'*anneau de Puiseux* de A relatif à $(x_1, \ldots, x_n)$ est

$$\widetilde{A} = \varinjlim \widehat{A}[x_1^{1/m}, \ldots, x_n^{1/m}].$$

Les morphismes injectifs définissant le système inductif sont les

$$\begin{cases} \widehat{A}[x_1^{1/k}, \ldots, x_n^{1/k}] & \longrightarrow & \widehat{A}[x_1^{1/k\ell}, \ldots, x_n^{1/k\ell}] \\ x_i^{1/k} & \longmapsto & \left(x_i^{1/k\ell}\right)^{\ell}. \end{cases}$$

3. Nous nous limitons aux revêtements connexes pour les mêmes raisons que ci-dessus.

4. Il est alors automatiquement intègre ([Eisenbud, 10.14])

Les images des $x_i^{1/m}$ dans $\widetilde{\mathrm{A}}$, encore notées $x_i^{1/m}$, forment un *système cohérent* de racines des x_i, *i.e.*, pour tous i, k, ℓ,

$$\left(x_i^{1/k\ell}\right)^{\ell} = x_i^{1/k}.$$

On en déduit en particulier que pour tous i, k, ℓ,

$$\begin{aligned} x_i^{1/k}x_i^{1/\ell} &= \left(x_i^{\frac{1}{k\vee\ell}}\right)^{\frac{k\vee\ell}{k}}\left(x_i^{\frac{1}{k\vee\ell}}\right)^{\frac{k\vee\ell}{\ell}} \\ &= \left(x_i^{\frac{1}{k\vee\ell}}\right)^{\frac{k\vee\ell}{k}+\frac{k\vee\ell}{\ell}}. \end{aligned}$$

Remarque 2.11. — L'anneau $\widetilde{\mathrm{A}}$ n'est pas simplement un anneau, mais un anneau muni d'un système cohérent de racines des x_i. Muni de cette donnée supplémentaire, il est déterminé à unique isomorphisme près.

Théorème 2.12. — ***Soient*** X ***un schéma intègre,*** D ***un diviseur à croisements normaux sur*** X***,*** $x \in \mathrm{D}$ ***un point fermé de corps résiduel algébriquement clos et*** $x_1, \ldots, x_n$ ***un système régulier de paramètres tel que*** $(x_1, \ldots, x_m)$***, avec*** $m \leqslant n$***, définissent le diviseur*** D ***en*** x***. Le foncteur***

$$\left\{\begin{array}{ccc} \mathfrak{Rev}^{\mathrm{D}}\mathrm{X} & \longrightarrow & \mathfrak{Ens} \\ \mathrm{R} & \longmapsto & \mathrm{Hom}_{k(\mathrm{X})}\big(k(\mathrm{R}), \mathrm{Frac}\,\widetilde{\widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{X},x}}\big) \end{array}\right.$$

est un foncteur-fibre.

Nous allons maintenant démontrer nos deux théorèmes 2.3 et 2.12.

Démonstration : Nous donnons la démonstration pour le cas non ramifié et précisons entre parenthèses ce qui se passe pour les revêtements modérément ramifiés. Pour voir qu'il s'agit d'un foncteur-fibre, il suffit de montrer qu'il est isomorphe à un foncteur-fibre défini par un point géométrique (respectivement, un point géométrique en dehors du diviseur) : nous allons prendre un point géométrique d'image le point générique[5] du spectre de l'anneau local formel en x.

Notons Ω le corps de fractions de l'anneau local formel $\widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{X},x}$ de X en x (respectivement de l'anneau de Puiseux $\widetilde{\mathscr{O}}_{\mathrm{X},x}$) et $\bar{\Omega}$ une clôture algébrique

5. Au lieu de prendre le point générique, on pourrait prendre un point dont l'adhérence contienne x ou même, dans le cas du théorème 2.3, le point x lui-même.

de Ω. Le morphisme $\operatorname{Spec}\bar{\Omega} \longrightarrow \mathrm{X}$ est un point géométrique (respectivement un point géométrique en dehors du diviseur). Considérons un revêtement R et notons $\operatorname{Spec}\mathrm{B} = \mathrm{R} \times_{\mathrm{X}} \operatorname{Spec}\mathscr{O}_{\mathrm{X},x}$. L'anneau B est toujours intègre et le morphisme $\operatorname{Spec}\mathrm{B} \longrightarrow \operatorname{Spec}\widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{X},x}$ est encore étale (respectivement modérément ramifié).

La démonstration consiste à justifier les isomorphismes suivants.

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Hom}_{\mathrm{X}}(\operatorname{Spec}\bar{\Omega}, \mathrm{R}) &\simeq \operatorname{Hom}_{\operatorname{Spec}\mathscr{O}_{\mathrm{X},x}}(\operatorname{Spec}\bar{\Omega}, \operatorname{Spec}\mathrm{B}) && (1)\\
&\simeq \operatorname{Hom}_{\operatorname{Spec}\mathscr{O}_{\mathrm{X},x}}(\operatorname{Spec}\widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{X},x}, \operatorname{Spec}\mathrm{B}) && (2)\\
&\simeq \operatorname{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{X},x}}(\mathrm{B}, \widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{X},x}) && (3)\\
&\simeq \operatorname{Hom}_{\operatorname{Frac}\mathscr{O}_{\mathrm{X},x}}(\operatorname{Frac}\mathrm{B}, \Omega) && (4)\\
&\simeq \operatorname{Hom}_{k(\mathrm{X})}\big(k(\mathrm{R}), \Omega\big) && (5)
\end{aligned}
$$

(1) Le premier isomorphisme résulte de la propriété universelle du produit fibré définissant Spec B.

$$
\begin{tikzcd}
 & & & \operatorname{Spec}\mathrm{B} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & \mathrm{R} \arrow[d] \\
\operatorname{Spec}\bar{\Omega} \arrow[r] \arrow[urrr, dotted] \arrow[urrrr, bend left] & \operatorname{Spec}\Omega \arrow[r] & \operatorname{Spec}\widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{X},x} \arrow[r] & \operatorname{Spec}\mathscr{O}_{\mathrm{X},x} \arrow[r] & \mathrm{X}
\end{tikzcd}
$$

(2) Considérons d'abord la situation où $\mathrm{R} \longrightarrow \mathrm{X}$, et donc $\operatorname{Spec}\mathrm{B} \longrightarrow \operatorname{Spec}\mathscr{O}_{\mathrm{X},x}$, est un revêtement étale. D'après la propriété universelle définissant l'hensélisé $\mathscr{O}^h_{\mathrm{X},x}$, et comme le corps résiduel de x est algébriquement clos, étant donné un morphisme $\operatorname{Spec}\bar{\Omega} \longrightarrow \operatorname{Spec}\mathrm{B}$ au dessus de $\operatorname{Spec}\mathscr{O}_{\mathrm{X},x}$, on a un unique morphisme en pointillés tel que

$$
\begin{tikzcd}
 & & & & \operatorname{Spec}\mathrm{B} \arrow[d] \\
\operatorname{Spec}\bar{\Omega} \arrow[r] \arrow[urrrr] & \operatorname{Spec}\Omega \arrow[r] & \operatorname{Spec}\widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{X},x} \arrow[r] & \operatorname{Spec}\mathscr{O}^h_{\mathrm{X},x} \arrow[r] \arrow[ur, dotted] & \operatorname{Spec}\mathscr{O}_{\mathrm{X},x}
\end{tikzcd}
$$

donc des bijections

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Hom}_{\operatorname{Spec}\mathscr{O}_{\mathrm{X},x}}(\operatorname{Spec}\bar{\Omega}, \operatorname{Spec}\mathrm{B}) &\simeq \operatorname{Hom}_{\operatorname{Spec}\mathscr{O}_{\mathrm{X},x}}(\operatorname{Spec}\mathscr{O}^h_{\mathrm{X},x}, \operatorname{Spec}\mathrm{B})\\
&\simeq \operatorname{Hom}_{\operatorname{Spec}\mathscr{O}_{\mathrm{X},x}}(\operatorname{Spec}\widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{X},x}, \operatorname{Spec}\mathrm{B}).
\end{aligned}
$$

Considérons maintenant le cas où $\mathrm{R} \longrightarrow \mathrm{X}$ est un revêtement modérément ramifié. On sait que $\operatorname{Spec}\mathrm{B} \longrightarrow \operatorname{Spec}\mathscr{O}_{\mathrm{X},x}$ est localement, pour la topologie étale, une somme disjointe de revêtements de Kummer. En particulier, au dessus de Spec $\mathscr{O}^h_{\mathrm{X},x}$ ou Spec $\widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{X},x}$, on a une somme disjointe de revêtements de Kummer.

$$\begin{tikzcd}
 & \operatorname{Spec}\widehat{\mathrm{B}} \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Spec}\mathrm{B} \arrow[d] \\
\operatorname{Spec}\widetilde{\mathscr{O}}_{\mathrm{X},x} \arrow[r] & \operatorname{Spec}\widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{X},x} \arrow[r] & \operatorname{Spec}\mathscr{O}_{\mathrm{X},x}
\end{tikzcd}$$

Un morphisme Spec $\bar{\Omega} \longrightarrow$ Spec $\widehat{\mathrm{B}}$ détermine une composante connexe Spec $\widehat{\mathrm{B}}_i$ de Spec $\widehat{\mathrm{B}}$. Par définition de $\widetilde{\mathscr{O}}_{\mathrm{X},x}$, le morphisme $\widehat{\mathrm{B}}_i \longrightarrow \bar{\Omega}$ a son image contenue dans $\widetilde{\mathscr{O}}_{\mathrm{X},x}$, on a donc un morphisme en pointillés

$$\begin{tikzcd}
 & & \operatorname{Spec}\widehat{\mathrm{B}}_i \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Spec}\widehat{\mathrm{B}} \arrow[d] \\
\operatorname{Spec}\bar{\Omega} \arrow[r] \arrow[urr] & \operatorname{Spec}\widetilde{\mathscr{O}}_{\mathrm{X},x} \arrow[r] \arrow[ur, dotted] & \operatorname{Spec}\widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{X},x} \arrow[r] & \operatorname{Spec}\widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{X},x}.
\end{tikzcd}$$

On a donc des isomorphismes comme précédemment,

$$\begin{aligned}
\operatorname{Hom}_{\operatorname{Spec}\mathscr{O}_{\mathrm{X},x}}(\operatorname{Spec}\bar{\Omega}, \operatorname{Spec}\mathrm{B}) &\simeq \operatorname{Hom}_{\operatorname{Spec}\widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{X},x}}(\operatorname{Spec}\bar{\Omega}, \operatorname{Spec}\widehat{\mathrm{B}}) \\
&\simeq \operatorname{Hom}_{\operatorname{Spec}\mathscr{O}_{\mathrm{X},x}}(\operatorname{Spec}\widetilde{\mathscr{O}}_{\mathrm{X},x}, \operatorname{Spec}\mathrm{B}).
\end{aligned}$$

(3) Le troisième isomorphisme passe du langage des schémas affines à celui des anneaux.

(4) Le quatrième isomorphisme est beaucoup plus technique : nous l'avons isolé dans le lemme suivant, dans lequel nous avons posé $\mathrm{A} = \mathscr{O}_{\mathrm{X},x}$.

(5) Le cinquième isomorphisme repasse à un langage plus géométrique : le corps des fractions de l'anneau $\mathscr{O}_{\mathrm{X},x}$ est le corps des fonctions rationnelles sur X et le corps des fractions de B est le corps des fonctions rationnelles sur R. □

Remarque 2.13. — Tous les isomorphismes du résultat précédent sont canoniques. Ce qui n'est pas canonique, c'est le *choix* de $\widetilde{\mathscr{O}}_{\mathrm{X},x}$: cet anneau est bien déterminé une fois que l'on a *choisi* un système régulier de paramètres ; si on choisit un autre système régulier de paramètres, on aura un anneau, isomorphe, mais pas canoniquement.

Par contre, si le point x est bien dans le schéma, on n'utilise plus l'anneau de Puiseux $\widetilde{\mathscr{O}}_{\mathrm{X},x}$, mais l'anneau local formel $\widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{X},x}$. Dans ce cadre, un point-base tangenciel en x est canoniquement isomorphe au point x lui-même. En effet, comme $\mathrm{R} \longrightarrow \mathrm{X}$ est étale, tout morphisme Spec $k(x) \longrightarrow \mathrm{R}$ définit de manière unique un morphisme $\operatorname{Spec} \mathscr{O}^h_{X,x} \longrightarrow R$

$$\begin{tikzcd} & & & R \arrow[d] \\ \operatorname{Spec} k(x) \arrow[r] \arrow[rrru] & \operatorname{Spec} \widehat{\mathscr{O}}_{X,x} \arrow[r] & \operatorname{Spec} \mathscr{O}^h_{X,x} \arrow[r] \arrow[ru, dotted] & X, \end{tikzcd}$$

par conséquent

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}_X(\operatorname{Spec} k(x), R) &\simeq \operatorname{Hom}_X(\operatorname{Spec} \widehat{\mathscr{O}}_{X,x}, R) \\ &\simeq \operatorname{Hom}_X(\operatorname{Spec} \Omega, R). \end{aligned}$$

Lemme 2.14. — *On a bien un isomorphisme en* (4) *dans la démonstration ci-dessus. Plus précisément, soit* A *un anneau local, noethérien, régulier,*[6] *de corps résiduel algébriquement clos, soit* B *une algèbre finie intègre sur* A *et soit* $A \longmapsto \widehat{A}$ *un foncteur (de la catégorie des anneaux vérifiant les propriétés précédentes vers celle des anneaux) qui préserve l'intégrité et qui commute au produit tensoriel avec les algèbres finies. On a alors*

$$\operatorname{Hom}_A(B, \widehat{A}) \simeq \operatorname{Hom}_{\operatorname{Frac} A}(\operatorname{Frac} B, \operatorname{Frac} \widehat{A}).$$

Démonstration : Pour établir cette bijection, il suffit de voir que les A-morphismes $B \longrightarrow \widehat{A}$ sont injectifs. Procédons par récurrence sur la dimension de A.

Si l'anneau intègre A est de dimension nulle, c'est un corps, donc A coïncide avec son corps résiduel, qui est algébriquement clos. Comme l'algèbre B est intègre et finie sur A, elle coïncide avec A. Le lemme est alors immédiat.

Supposons maintenant ce résultat établit pour les anneaux A de dimension strictement inférieure à n et supposons A de dimension n. Soit $\varphi : B \longrightarrow \widehat{A}$ un morphisme, de noyau $\mathfrak{p}$. Comme $B/\mathfrak{p}$ est isomorphe à un sous-anneau de $\widehat{A}$, il est intègre et l'idéal $\mathfrak{p}$ est premier. Mais d'après [Eisenbud, 10.14], il existe $t \in A$ tel que l'idéal (t) soit premier et que l'anneau $A/(t)$ soit local régulier de dimension $n-1$. On peut alors écrire

$$\begin{tikzcd} B \underset{A}{\otimes} \big(A/(t)\big) \simeq B/tB \arrow[rr, "\varphi'"] & & \widehat{A} \underset{A}{\otimes} A/(t) \simeq \widehat{A/(t)} \\ & A/(t). \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

6. Rappelons qu'un anneau local et régulier est intègre [Eisenbud, 10.14] et qu'un anneau local noethérien est de dimension finie [Eisenbud, 10.7].

L'isomorphisme de gauche est immédiat, celui de droite résulte du fait que $\mathrm{A}/(t)$ est un module de type fini et de l'hypothèse faite sur le foncteur $\widehat{\cdot}$. Appliquons maintenant l'hypothèse de récurrence : le noyau de φ' est nul. Mais ce noyau est $(\mathfrak{p}+t\mathrm{B})/t\mathrm{B}$, donc $\mathfrak{p}+t\mathrm{B}=t\mathrm{B}$, donc $\mathfrak{p}\subset t\mathrm{B}$. La situation est désormais la suivante : B est un anneau ; $\mathfrak{p}$ un idéal premier ; t un élément de B, non nul dans $\mathrm{B}/\mathfrak{p}$, car son image dans A n'est pas nulle ; enfin, $\mathfrak{p}\subset t\mathrm{B}$. En termes géométriques, $\operatorname{Spec}\mathrm{B}$ est un schéma, $\operatorname{Spec}\mathrm{B}/t\mathrm{B}$ est une hypersurface et $\operatorname{Spec}\mathrm{B}/\mathfrak{p}$ est un sous-schéma irréductible contenant cette hypersurface. Par conséquent, pour des raisons de dimension, ce sous-schéma coïncide avec l'hypersurface ou avec le schéma tout entier, *i.e.*, $\mathfrak{p}=t\mathrm{B}$ ou $\mathfrak{p}=0$. Le premier cas est à exclure, car t est non nul dans $\mathrm{B}/\mathfrak{p}$. L'idéal $\mathfrak{p}$ est donc nul. □

Pour achever la démonstration du théorème, il faut remarquer que la complétion vérifie ces hypothèses [Eisenbud, 7.2], de même que le foncteur $\widetilde{\cdot}$. C'est l'objet du lemme suivant.

Lemme 2.15. — *Soit* A *un anneau vérifiant les hypothèses ci-dessus (local, noethérien, régulier, de corps résiduel algébriquement clos) ; alors :*

(*i*) $\widetilde{\mathrm{A}}$ *est intègre ;*

(*ii*) *si* B *est une* A*-algèbre finie, alors* $\widetilde{\mathrm{B}}\simeq\widetilde{\mathrm{A}}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{B}$ *et* $\widetilde{\mathrm{B}}$ *est une* $\widetilde{\mathrm{A}}$*-algèbre finie ;*

Démonstration : L'anneau $\widetilde{\mathrm{A}}$ est intègre, car il est inclus dans une clôture algébrique de $\operatorname{Frac}\widehat{\mathrm{A}}$.

Pour le deuxième point, il suffit d'écrire

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathrm{B}}&=\varinjlim\widehat{\mathrm{B}}[x_1^{1/m},\dots,x_n^{1/m}]\\&\simeq\varinjlim(\mathrm{B}\otimes_{\mathrm{A}}\widehat{\mathrm{A}})[x_1^{1/m},\dots,x_n^{1/m}]\\&\simeq\varinjlim\mathrm{B}\otimes_{\mathrm{A}}\widehat{\mathrm{A}}[x_1^{1/m},\dots,x_n^{1/m}]\\&\simeq\mathrm{B}\otimes_{\mathrm{A}}\varinjlim\widehat{\mathrm{A}}[x_1^{1/m},\dots,x_n^{1/m}]\\&\simeq\mathrm{B}\otimes_{\mathrm{A}}\widetilde{\mathrm{A}}.\end{aligned}$$

Le premier isomorphisme est la définition de $\widetilde{\mathrm{B}}$; le second utilise le fait que $\widehat{\mathrm{B}}\simeq\mathrm{B}\otimes\widehat{\mathrm{A}}$, car B est une algèbre finie sur l'anneau noethérien A [Eisenbud, 7.2] ; l'avant-dernier isomorphisme résulte du fait que le produit tensoriel commute aux limites inductives. □

3 Structure locale d'un champ algébrique

Nous montrons qu'un champ algébrique « ressemble localement » à un schéma quotienté par un groupe fini.[7] Nous utilisons ce résultat pour donner la structure locale d'un diviseur à croisements normaux sur un champ algébrique. Nous définissons ensuite l'espace tangent à un champ algébrique en un point : ce n'est pas simplement un espace vectoriel, mais un espace vectoriel muni de l'action d'un groupe.

Remarque 3.1. — La définition d'un diviseur à croisements normaux (pour un schéma) était locale pour la topologie étale, elle s'étend donc sans changement au cas des champs : un sous-champ fermé D d'un champ X est un *diviseur à croisements normaux* si et seulement si c'en est un localement pour la topologie étale, *i.e.*, s'il existe un morphisme surjectif et étale depuis un schéma $\mathrm{U} \twoheadrightarrow \mathrm{X}$ tel que $\mathrm{U} \times_{\mathrm{X}} \mathrm{D}$ soit un diviseur à croisements normaux de U. La figure 3 donne quelques exemples, sur $\mathbb{R}$, en dimension deux.

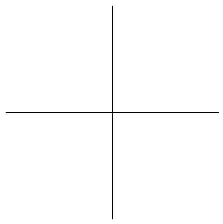
Lemme 3.2. — *Un champ algébrique* X *ressemble localement à un schéma affine quotienté par un groupe fini. Plus précisément, soient* X *un champ algébrique sur un corps algébriquement clos* k*,* $\mathrm{U} \twoheadrightarrow \mathrm{X}$ *un morphisme surjectif et étale depuis un schéma,* $y : \operatorname{Spec} k \longrightarrow \mathrm{U}$ *un point de* U *et* G *le groupe d'automorphismes du point correspondant de* X*, défini par le carré* 2*-cartésien*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{G} \times \operatorname{Spec} k \arrow[rr] \arrow[dd] \arrow[drr, phantom, "\lrcorner", very near start] & & \operatorname{Spec} k \arrow[d, "y"] \\
 & & \mathrm{U} \arrow[d] \\
\operatorname{Spec} k \arrow[r, "y"'] & \mathrm{U} \arrow[r] & \mathrm{X}.
\end{tikzcd}$$

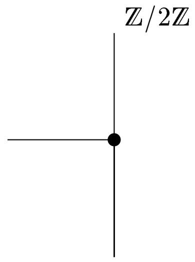
On a alors un carré 2*-cartésien*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{G} \times \operatorname{Spec} \widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{U},y} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & \operatorname{Spec} \widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{U},y} \arrow[d] \\
\operatorname{Spec} \widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{U},y} \arrow[r] & \mathrm{X}.
\end{tikzcd}$$

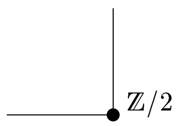
7. On connait d'autres résultats de ce genre [Keel–Mori] : Soient F un champ algébrique, M son espace de modules, il existe un morphisme étale surjectif $\mathrm{U} \longrightarrow \mathrm{M}$, un espace algébrique X, un faisceau en groupes G localement constant sur X, une action de G sur X tels que $\mathrm{F} \times_{\mathrm{M}} \mathrm{U} \approx [\mathrm{X}/\mathrm{G}]$.



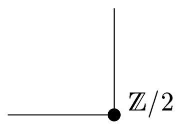
(a) Sur un schéma



(b) Quotient par une symétrie axiale, d'axe vertical

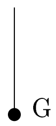


(c) Quotient par une symétrie axiale, d'axe en diagonale



(d) Quotient par une symétrie centrale

(e) Quotient par une rotation d'angle $\pi/2$



(f) Quotient par le groupe du carré (c'est le groupe des automorphismes d'un carré dans le plan euclidien ; on peut aussi le décrire comme le produit semi-direct $\mathbb{Z}/4 \rtimes \mathbb{Z}/2$)

Figure 3 – Exemples de (points réels de) diviseurs à croisements normaux dans le plan $\mathbb{A}^2$. Les exemples (c) et (d) diffèrent : dans le premier cas, le diviseur n'a qu'une composante irréductible, dans le second, il en a deux.

Démonstration : Considérons le diagramme suivant.

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Spec}\widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{U},y} \underset{\mathrm{U}}{\times} \mathrm{R} \underset{\mathrm{U}}{\times} \operatorname{Spec}\widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{U},y} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & \mathrm{R} \underset{\mathrm{U}}{\times} \operatorname{Spec}\widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{U},y} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & \operatorname{Spec}\widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{U},y} \arrow[d] \\
\operatorname{Spec}\widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{U},y} \underset{\mathrm{U}}{\times} \mathrm{R} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & \mathrm{R} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & \mathrm{U} \arrow[d] \\
\operatorname{Spec}\widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{U},y} \arrow[r] & \mathrm{U} \arrow[r] & \mathrm{X}
\end{tikzcd}$$

Comme le morphisme $\mathrm{R} \longrightarrow \mathrm{U}$ est étale, il en va de même pour

$$\mathrm{R} \underset{\mathrm{U}}{\times} \operatorname{Spec}\widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{U},y} \longrightarrow \operatorname{Spec}\widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{U},y}.$$

Or, $\widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{U},y}$ est un anneau hensélien strict, donc $\mathrm{R} \times_{\mathrm{U}} \operatorname{Spec}\widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{U},y}$ est une somme disjointe de copies de $\operatorname{Spec}\widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{U},y}$, on peut l'écrire $\mathrm{R} \times_{\mathrm{U}} \operatorname{Spec}\widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{U},y} \simeq \mathrm{A} \times \operatorname{Spec}\widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{U},y}$ pour un ensemble A. De même, $\operatorname{Spec}\widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{U},y} \times_{\mathrm{U}} \mathrm{R} \simeq \mathrm{B} \times \operatorname{Spec}\widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{U},y}$ pour un ensemble B.

Le morphisme $\operatorname{Spec}\widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{U},y} \times_{\mathrm{U}} \mathrm{R} \longrightarrow \mathrm{R}$ se factorise par

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Spec}\widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{U},y} \times_{\mathrm{U}} \mathrm{R} \arrow[rr] \arrow[dr, "f"'] & & \mathrm{R} \\
& \coprod_{r \in \mathrm{R}(k)} \operatorname{Spec}\widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{R},r}. \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

et le morphisme f est étale. De même pour $\mathrm{R} \times_{\mathrm{U}} \operatorname{Spec}\widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{U},y} \longrightarrow \mathrm{R}$.

On a donc un carré cartésien

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Spec}\widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{U},y} \underset{\mathrm{U}}{\times} \mathrm{R} \underset{\mathrm{U}}{\times} \operatorname{Spec}\widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{U},y} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{A} \times \operatorname{Spec}\widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{U},y} \arrow[d] \\
\mathrm{B} \times \operatorname{Spec}\widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{U},y} \arrow[r] & \coprod_{r \in \mathrm{R}(k)} \operatorname{Spec}\widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{R},r}
\end{tikzcd}$$

où tous les morphismes sont étales : pour les mêmes raisons que précédemment, il existe un ensemble C tel que $\operatorname{Spec}\widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{U},y} \times_{\mathrm{U}} \mathrm{R} \times_{\mathrm{U}} \operatorname{Spec}\widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{U},y} \simeq \mathrm{C} \times \operatorname{Spec}\widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{U},y}$.

Dans le diagramme suivant,

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{G} \times \operatorname{Spec} k \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{C} \times \operatorname{Spec} k \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Spec} k \arrow[d] \\
\mathrm{C} \times \operatorname{Spec} k \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{C} \times \operatorname{Spec} \widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{U},y} \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Spec} \widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{U},y} \arrow[d] \\
\operatorname{Spec} k \arrow[r] & \operatorname{Spec} \widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{U},y} \arrow[r] & \mathrm{X}
\end{tikzcd}$$

tous les carrés sont 2-cartésiens, donc $\mathrm{C} = \mathrm{G}$: cela démontre le lemme. □

Remarque 3.3. — On a le même résultat en remplaçant le complété formel par l'hensélisé. Le résultat demeure même sans l'hypothèse que le corps résiduel de x est algébriquement clos si on remplace le complété formel par l'hensélisé strict.

Remarque 3.4. — Localement (au sens précédent), au voisinage d'une strate de dimension nulle, un diviseur à croisements normaux sur $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$ correspond à l'action d'un sous-groupe du produit semi-direct $\mathbb{Z}/2 \rtimes \mathfrak{S}_n$, où le groupe symétrique permute les vecteurs d'une base et $\mathbb{Z}/2$ envoie un vecteur sur son opposé. Par exemple, en dimension deux, il s'agit de l'action d'un sous-groupe du groupe du carré (figure 3). Sur d'autres corps et en dimension n, il s'agit de l'action d'un sous-groupe fini de $\Gamma(k)^n \rtimes \mathfrak{S}_n$, où $\Gamma(k)$ est le groupe des racines de l'unité dans k.

Démontrons-le. En prenant un voisinage formel, on se ramène à un problème d'algèbre linéaire : soit V un espace vectoriel sur k de dimension n, et $e_1, \dots, e_n$ une base et $e_1^\vee, \dots, e_n^\vee$ la base duale. On cherche le plus grand sous-groupe de $\mathrm{GL}(\mathrm{V})$ dont les éléments sont d'ordre fini et fixent (globalement) la réunion d'hyperplans $\bigcup \operatorname{Ker} e_i^\vee$.

Par dualité, il revient au même de chercher le plus grand sous-groupe G de $\mathrm{GL}(\mathrm{V}^\vee)$ dont les éléments sont de type fini et fixent (globalement) la réunion de droites $\bigcup \operatorname{Vect} e_i^\vee$. Montrons que l'on a une suite exacte scindée

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Gamma(k)^n \arrow[r] & \mathrm{G} \arrow[r] & \mathfrak{S}_n \arrow[l, dotted, bend left] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

et donc une expression de G comme produit semi-direct, $\mathrm{G} = \Gamma(k)^n \rtimes \mathfrak{S}_n$. Tout élément de G permute les $\operatorname{Vect} e_i^\vee$; il définit donc un élément de $\mathfrak{S}_n$. On a un morphisme $\mathrm{G} \longrightarrow \mathfrak{S}_n$. Réciproquement, tout élément de $\mathfrak{S}_n$ définit une permutation des $e_i^\vee$ puis un élément de G : on a une section

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{G} \arrow[r] & \mathfrak{S}_n . \arrow[l, dotted, bend left]
\end{tikzcd}$$

Les éléments du noyau de $\mathrm{G} \longrightarrow \mathfrak{S}_n$ sont de la forme

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \mathrm{V}^\vee & \longrightarrow & \mathrm{V}^\vee \\ e_i^\vee & \longmapsto & \lambda_i e_i^\vee \end{array} \right.$$

où $\lambda_i \in k$. Comme tous les éléments de G sont d'ordre fini, les λ_i sont donc nécessairement des racines de l'unité ; réciproquement, toute racine de l'unité convient.

Proposition 3.5. — *Soient* X *un champ algébrique, sur un corps algébriquement clos* k*, et* $x : \operatorname{Spec} k \longrightarrow \mathrm{X}$ *un point de* X*. On choisit un morphisme surjectif et étale* $\mathrm{U} \twoheadrightarrow \mathrm{X}$ *depuis un schéma et un point* y *de* U *au dessus de* x*. L'espace tangent* $\mathrm{T}_y\mathrm{U}$ *est un espace vectoriel sur* k*, muni d'une action du groupe* G *du point* x*. Un autre choix de* $\mathrm{U} \twoheadrightarrow \mathrm{X}$ *donne un* G*-espace vectoriel isomorphe (mais cet isomorphisme n'est pas unique).*

Démonstration : A priori, $\mathrm{T}_y\mathrm{U}$ est juste un espace vectoriel sur une extension séparable de k, mais comme on a supposé k algébriquement clos, c'est sur k.

Montrons que cet espace vectoriel est muni d'une action du groupe G. Soit $\mathrm{R} \rightrightarrows \mathrm{U} \longrightarrow \mathrm{X}$ la présentation du champ X obtenue à partir de U. Pour définir l'action du groupe G sur $\mathrm{T}_x\mathrm{X}$, remarquons que l'on a des morphismes de groupoïdes

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{G} \times \operatorname{Spec} k \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d] & \operatorname{Spec} k \arrow[d] \\
\mathrm{G} \times \operatorname{Spec} \widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{U},y} \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d] & \operatorname{Spec} \widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{U},y} \arrow[d] \\
\mathrm{R} \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \mathrm{U}
\end{tikzcd}$$

et qu'un élément $g \in \mathrm{G}$ définit un morphisme

$$\{g\} \times \operatorname{Spec} \widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{U},y} \longrightarrow \mathrm{G} \times \operatorname{Spec} \widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{U},y} \longrightarrow \operatorname{Spec} \widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{U},y},$$

donc des morphisme entre les espaces tangents

$$\{g\} \times \mathrm{T}_x\mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{T}_x\mathrm{X}.$$

On obtient donc une application

$$\mathrm{G} \times \mathrm{T}_x\mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{T}_x\mathrm{X},$$

qui défini bien une action de groupe, car c'en était une sur $\operatorname{Spec} \widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{U},y}$.

Pour montrer qu'il est unique à isomorphisme près, considérons un autre morphisme surjectif et étale $V \twoheadrightarrow X$ depuis un schéma et un point z de V au dessus de x. On en déduit un morphisme surjectif et étale depuis le schéma $U \times_X V$ et un point (y, z) au dessus de x. Comme les morphismes

$$\begin{tikzcd} & U \underset{X}{\times} V \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ U & & V \end{tikzcd}$$

sont étales, on en déduit des isomorphismes entre les espaces tangents

$$\begin{tikzcd} & T_{(y,z)} U \underset{X}{\times} V \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ T_y U & & T_z V. \end{tikzcd}$$

Néanmoins, comme il ne s'agit pas d'un produit fibré mais d'un 2-produit-fibré, ces isomorphismes ne sont pas définis de manière unique.

Pour vérifier que ces isomorphismes respectent l'action du groupe G, on peut se ramener à la situation $U \twoheadrightarrow V \twoheadrightarrow X$. Mais on a alors un morphisme de groupoïdes (flèches horizontales)

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Spec} \widehat{\mathscr{O}}_{U,y} \times_X \operatorname{Spec} \widehat{\mathscr{O}}_{U,y} \arrow[r, "f \times f"] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & \operatorname{Spec} \widehat{\mathscr{O}}_{V,z} \times_X \operatorname{Spec} \widehat{\mathscr{O}}_{V,z} \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] \\ \operatorname{Spec} \widehat{\mathscr{O}}_{U,y} \arrow[r] & \operatorname{Spec} \widehat{\mathscr{O}}_{V,z}, \end{tikzcd}$$

i.e.,

$$\begin{tikzcd} G \times \operatorname{Spec} \widehat{\mathscr{O}}_{U,y} \arrow[r, "1 \times f"] \arrow[d, shift right, "\alpha"'] \arrow[d, shift left, "\mathrm{pr}_2"] & G \times \operatorname{Spec} \widehat{\mathscr{O}}_{V,z} \arrow[d, shift right, "\alpha'"'] \arrow[d, shift left, "\mathrm{pr}_2"] \\ \operatorname{Spec} \widehat{\mathscr{O}}_{U,y} \arrow[r] & \operatorname{Spec} \widehat{\mathscr{O}}_{V,z}. \end{tikzcd}$$

Cela nous dit bien que le morphisme induit par f est équivariant. □

Définition 3.6. — Soient X un champ algébrique, sur un corps algébriquement clos k et x un k-point de X de groupe G. On choisit un morphisme surjectif et étale $U \twoheadrightarrow X$ depuis un schéma et un point y de U au dessus de x. L'*espace tangent* $T_x X$ est défini comme le G-espace vectoriel $T_y U$.

Remarque 3.7. — On ne peut pas espérer que l'espace tangent soit défini à *unique* isomorphisme près. Pour nous en convaincre, considérons le champ $X = \mathbb{A}^2/(\mathbb{Z}/2)$, où l'action de $\mathbb{Z}/2$ est la symétrie par rapport à la diagonale.

L'espace tangent possède un automorphisme non trivial : celui qui permute les deux vecteurs $(1,0)$ et $(0,1)$. Si l'espace tangent est uniquement défini pour les schémas ou les variétés différentielles, c'est parce qu'une courbe tracée sur la variété permet de définir un vecteur de manière unique : ici, ce n'est plus le cas, tout ce que l'on obtient, c'est une orbite.

On peut remarquer que les isomorphismes entre les espaces tangents de U, $\mathrm{U} \times_{\mathrm{X}} \mathrm{V}$ et V préservent les orbites : l'*espace tangent est donc bien défini à un isomorphisme équivariant préservant les orbites près.*

Remarque 3.8. — [Laumon–Moret-Bailly] définissent une notion de fibré tangent, qui induit une notion d'espace tangent en un point $x : \operatorname{Spec} k \longrightarrow \mathrm{X}$ que l'on peut décrire comme la catégorie

$$\mathfrak{hom}_{\operatorname{Spec} k}\left(\operatorname{Spec} \frac{k[\varepsilon]}{\langle \varepsilon^2 \rangle}, \mathrm{X}\right),$$

i.e., la catégorie dont les objets sont les diagrammes commutatifs

$$\begin{tikzcd} & \operatorname{Spec} k \arrow[dl] \arrow[dr, "x"] & \\ \operatorname{Spec} \frac{k[\varepsilon]}{\langle \varepsilon^2 \rangle} \arrow[rr] & & \mathrm{X} \end{tikzcd}$$

et dont les morphismes sont les 2-morphismes de champs

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Spec} \frac{k[\varepsilon]}{\langle \varepsilon^2 \rangle} \arrow[r, bend left] \arrow[r, bend right] \arrow[r, phantom, "\Downarrow"] & \mathrm{X}. \end{tikzcd}$$

Soit $\mathrm{R} \rightrightarrows \mathrm{U}$ une présentation de X : l'espace tangent peut alors s'écrire

$$\mathfrak{hom}_{\operatorname{Spec} k}\left(\operatorname{Spec} \frac{k[\varepsilon]}{\langle \varepsilon^2 \rangle}, \mathrm{U}/\mathrm{R}\right).$$

En reprenant les notations de A.4.6, c'est une sous-catégorie de

$$\mathrm{F}\left(\operatorname{Spec} \frac{k[\varepsilon]}{\langle \varepsilon^2 \rangle}\right).$$

Comme les morphismes étales $\mathrm{T}' \longrightarrow \operatorname{Spec} k[\varepsilon]/\langle \varepsilon^2 \rangle$ sont tous de la forme

$$\mathrm{A} \times \operatorname{Spec} \frac{k[\varepsilon]}{\langle \varepsilon^2 \rangle} \longrightarrow \operatorname{Spec} \frac{k[\varepsilon]}{\langle \varepsilon^2 \rangle}$$

pour un ensemble A, on a

$$\mathrm{F}\left(\operatorname{Spec}\frac{k[\varepsilon]}{\langle\varepsilon^2\rangle}\right) = \underrightarrow{2\text{-lim}}\,\mathrm{F}\left(\mathrm{A}\times\operatorname{Spec}\frac{k[\varepsilon]}{\langle\varepsilon^2\rangle}\longrightarrow\operatorname{Spec}\frac{k[\varepsilon]}{\langle\varepsilon^2\rangle}\right)$$

$$= \underrightarrow{2\text{-lim}}\,\mathfrak{hom}\begin{pmatrix} \mathrm{A}\times\mathrm{A}\times\operatorname{Spec}\frac{k[\varepsilon]}{\langle\varepsilon^2\rangle} & & \mathrm{R} \\ \mathrm{pr}_1\Big\downarrow\Big\downarrow\mathrm{pr}_2 & , & \Big\downarrow\Big\downarrow \\ \mathrm{A}\times\operatorname{Spec}\frac{k[\varepsilon]}{\langle\varepsilon^2\rangle} & & \mathrm{U} \end{pmatrix}.$$

Mais les groupoïdes

$$\mathrm{A}\times\mathrm{A}\times\operatorname{Spec}\frac{k[\varepsilon]}{\langle\varepsilon^2\rangle}\rightrightarrows\mathrm{A}\times\operatorname{Spec}\frac{k[\varepsilon]}{\langle\varepsilon^2\rangle}$$

sont tous équivalents au groupoïde trivial

$$\operatorname{Spec}\frac{k[\varepsilon]}{\langle\varepsilon^2\rangle}\rightrightarrows\operatorname{Spec}\frac{k[\varepsilon]}{\langle\varepsilon^2\rangle}.$$

On a donc

$$\mathrm{F}\left(\operatorname{Spec}\frac{k[\varepsilon]}{\langle\varepsilon^2\rangle}\right)\approx\mathfrak{hom}\begin{pmatrix} \operatorname{Spec}\frac{k[\varepsilon]}{\langle\varepsilon^2\rangle} & & \mathrm{R} \\ \mathrm{Id}\Big\downarrow\Big\downarrow\mathrm{Id} & , & \Big\downarrow\Big\downarrow \\ \operatorname{Spec}\frac{k[\varepsilon]}{\langle\varepsilon^2\rangle} & & \mathrm{U} \end{pmatrix}$$

et

$$\mathfrak{hom}_{\operatorname{Spec}k}\left(\operatorname{Spec}\frac{k[\varepsilon]}{\langle\varepsilon^2\rangle},\mathrm{U}/\mathrm{R}\right)\approx\mathfrak{hom}_{\operatorname{Spec}k}\begin{pmatrix} \operatorname{Spec}\frac{k[\varepsilon]}{\langle\varepsilon^2\rangle} & & \mathrm{R} \\ \mathrm{Id}\Big\downarrow\Big\downarrow\mathrm{Id} & , & \Big\downarrow\Big\downarrow \\ \operatorname{Spec}\frac{k[\varepsilon]}{\langle\varepsilon^2\rangle} & & \mathrm{U} \end{pmatrix}.$$

On peut ensuite se ramener à une situation plus locale (quitte à remplacer la présentation, on peut supposer qu'il n'y a qu'un seul point $y \in \mathrm{U}$ au dessus de x),

$$\mathfrak{hom}_{\operatorname{Spec} k}\left(\begin{array}{ccc} \operatorname{Spec} \dfrac{k[\varepsilon]}{\langle\varepsilon^2\rangle} & & \mathrm{G} \times \operatorname{Spec} \widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{U},y} \\ \mathrm{Id}\Big\Downarrow\mathrm{Id} & , & \mathrm{pr}_2\Big\Downarrow\alpha \\ \operatorname{Spec} \dfrac{k[\varepsilon]}{\langle\varepsilon^2\rangle} & & \operatorname{Spec} \widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{U},y} \end{array}\right).$$

Les objets de cette « catégorie tangente », *i.e.*, les fonceurs entre ces deux groupoïdes, sont les éléments de l'espace tangent

$$\operatorname{Hom}_{\operatorname{Spec} k}\left(\operatorname{Spec} \frac{k[\varepsilon]}{\langle\varepsilon^2\rangle}, \operatorname{Spec} \widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{U},y}\right).$$

Les morphismes de la catégorie tangente sont les éléments de

$$\mathrm{G} \times \operatorname{Hom}_{\operatorname{Spec} k}\left(\operatorname{Spec} \frac{k[\varepsilon]}{\langle\varepsilon^2\rangle}, \operatorname{Spec} \widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{U},y}\right).$$

L'espace tangent est donc le groupoïde

$$\mathrm{G} \times \mathrm{T}_y\mathrm{U} \rightrightarrows \mathrm{T}_y\mathrm{U},$$

où la structure de groupoïde provient de celle sur

$$\mathrm{G} \times \operatorname{Spec} \widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{U},y} \rightrightarrows \operatorname{Spec} \widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{U},y},$$

c'est bien la même notion que la nôtre.

4 Points-bases et points-bases tangentiels pour les champs

Nous allons utiliser les résultats de la section précédente sur la structure de l'espace tangent d'un champ algébrique pour construire des points-bases tangenciels sur un champ algébrique privé d'un diviseur à croisements normaux.

Théorème 4.1. — ***Soit*** $x : \operatorname{Spec} k \longrightarrow \mathrm{X}$ ***un point sur un champ algébrique lisse*** X ***sur un corps algébriquement clos*** k. ***On* choisit *un***

morphisme étale $U \longrightarrow X$ ***depuis un schéma connexe*** U ***et*** y ***un point de*** U ***au dessus de*** x***.***

(i) Le foncteur suivant est un foncteur fibre,

$$\begin{cases} \mathfrak{Rev}\, X & \longrightarrow \mathfrak{Ens} \\ R & \longmapsto \coprod_{i \in I} \mathrm{Hom}_{k(U)}\big(k(R_i), \mathrm{Frac}\, \widehat{\mathscr{O}}_{U,y}\big), \end{cases}$$

où on a noté R_i ***les composantes connexes du revêtement*** $R \times_X U$ ***de*** U ***(il est connexe comme revêtement équivariant de*** U***, mais a priori pas comme revêtement de*** U***).***

(ii) Soit D ***un diviseur à croisements normaux sur*** X***, passant par*** x***. On choisit un système régulier de paramètres pour le diviseur*** $D \times_X U$ ***en*** y ***(de sorte que l'on peut maintenant parler de l'anneau*** $\widetilde{\mathscr{O}}_{U,y}$ ***et que l'on a un morphisme*** $k(U) \longrightarrow \widetilde{\mathscr{O}}_{U,y}$***). Le foncteur suivant est un foncteur-fibre de*** $X \setminus D$***.***

$$\begin{cases} \mathfrak{Rev}\, X & \longrightarrow \mathfrak{Ens} \\ R & \longmapsto \coprod_{i} \mathrm{Hom}_{k(U)}\big(k(R_i), \mathrm{Frac}\, \widetilde{\mathscr{O}}_{U,y}\big) \end{cases}$$

Nous allons procéder comme pour les schémas et montrer que ces foncteurs sont équivalents à des foncteurs-fibres définis par un point géométrique, Nous commençons donc par expliciter les foncteurs-fibres qui proviennent d'un point géométrique.

Lemme 4.2. — *Soient* X *un champ algébrique connexe,* $x : \mathrm{Spec}\, k \longrightarrow X$ *un point géométrique de* X *et* $U \twoheadrightarrow X$ *un morphisme surjectif et étale depuis un schéma. On peut voir les revêtements étales de* X *comme des revêtements équivariants sur une présentation* $(S = U \times_X U \rightrightarrows U)$ *de* X*. Le choix d'un point* y *de* U *au dessus de* x *définit un foncteur fibre sur* X,

$$\begin{cases} \mathrm{SLCF}\, \mathfrak{Sh}(S \rightrightarrows U) & \longrightarrow \mathfrak{Ens} \\ R & \longmapsto \mathrm{Hom}_U(\mathrm{Spec}\, k, R). \end{cases}$$

Démonstration : Pour démontrer que ce foncteur est bien un foncteur-fibre, nous allons montrer que c'est le foncteur image réciproque d'un morphisme de topos $\mathfrak{Ens} \longrightarrow \mathfrak{Sh}\, X$.

Rappelons tout d'abord que le champ algébrique X ressemble localement à un schéma affine quotienté par un groupe fini, en particulier, on a un morphisme de champs $[\operatorname{Spec}\widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{U},y}/\mathrm{G}] \longrightarrow \mathrm{X}$ et un morphisme entre leurs présentations.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{G} \times \operatorname{Spec}\widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{U},y} \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d] & \operatorname{Spec}\widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{U},y} \arrow[r] \arrow[d] & {[\operatorname{Spec}\widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{U},y}/\mathrm{G}]} \arrow[d] \\
\mathrm{S} \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \mathrm{U} \arrow[r] & {[\mathrm{U}/\mathrm{S}] \approx \mathrm{X}}
\end{tikzcd}$$

Le choix d'un point $y : \operatorname{Spec} k \longrightarrow \mathrm{U}$ au dessus de x définit un morphisme de topos $\mathfrak{Ens} \longrightarrow \mathrm{SLCF}\mathfrak{Sh}\,\mathrm{U}$ que l'on peut factoriser par $\mathrm{SLCF}\mathfrak{Sh}\operatorname{Spec}\widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{U},y}$.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{SLCF}\mathfrak{Sh}\operatorname{Spec}\widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{U},y} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{SLCF}\mathfrak{Sh}[\operatorname{Spec}\widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{U},y}/\mathrm{G}] \arrow[d] & \\
\mathfrak{Ens} \arrow[ur] \arrow[r, "y"'] & \mathrm{SLCF}\mathfrak{Sh}\,\mathrm{U} \arrow[r] & \mathrm{SLCF}\mathfrak{Sh}_{\mathrm{S}}\mathrm{U} \arrow[r] & \mathrm{SLCF}\mathfrak{Sh}\,\mathrm{X}
\end{tikzcd}$$

Explicitons ces morphismes de topos. Le morphisme

$$\mathfrak{Ens} \longrightarrow \mathrm{SLCF}\mathfrak{Sh}\operatorname{Spec}\widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{U},y}$$

a pour foncteur image réciproque un foncteur du type de ceux du théorème 2.3. Le morphisme $\mathrm{SLCF}\mathfrak{Sh}\operatorname{Spec}\widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{U},y} \longrightarrow \mathrm{SLCF}\mathfrak{Sh}_{\mathrm{G}}\operatorname{Spec}\widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{U},y}$ a pour foncteur image réciproque le foncteur d'oubli de l'action de G. En les composant, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{ccc} \mathfrak{Rev}\,\mathrm{C} \approx \mathfrak{Rev}_{\mathrm{S}}\mathrm{U} & \longrightarrow & \mathfrak{Ens} \\ \mathrm{R} & \longmapsto & \operatorname{Hom}_{\mathrm{U}}(\operatorname{Spec} k, \mathrm{R}). \end{array}\right.$$

C'est bien le foncteur annoncé. □

Passons maintenant à la démonstration du théorème.

Démonstration : Le lemme précédent nous donne un foncteur-fibre de la forme $\operatorname{Hom}_{\mathrm{U}}(\operatorname{Spec}\bar{\Omega}, \cdot)$ sur $\mathfrak{Rev}\,\mathrm{X} = \mathfrak{Rev}(\mathrm{S} \rightrightarrows \mathrm{U})$ et le theorème 2.12 nous dit que, pour des revêtements connexes, on a un isomorphisme

$$\operatorname{Hom}_{\mathrm{U}}(\operatorname{Spec} k, \cdot) \simeq \operatorname{Hom}_{k(\mathrm{U})}\big(k(\mathrm{R}), \widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{U},y}\big).$$

Mais si R est un revêtement connexe de X, on peut le voir comme un revêtement équivariant de $\mathrm{S} \rightrightarrows \mathrm{U}$, connexe en tant que revêtement équivariant, mais pas nécessairement connexe en tant que revêtement de U. Notons $\mathrm{R} = \coprod_i \mathrm{R}_i$ sa décomposition en composantes connexes. On a

$$\operatorname{Hom}_{\mathrm{U}}\left(\operatorname{Spec} k, \coprod_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{R}_i\right) \simeq \coprod_{i\in\mathrm{I}} \operatorname{Hom}_{\mathrm{U}}\left(\operatorname{Spec} k, \mathrm{R}_i\right)$$

car $\operatorname{Spec} k$ est un point, donc un morphisme $\operatorname{Spec} k \longrightarrow \mathrm{R}$ a son image contenue dans l'une des composantes connexes de R. On a donc

$$\operatorname{Hom}_{\mathrm{U}}\left(\operatorname{Spec} k, \coprod_{i\in \mathrm{I}} \mathrm{R}_i\right) \simeq \coprod_{i\in \mathrm{I}} \operatorname{Hom}_{k(\mathrm{U})}\big(k(\mathrm{R}_i), \widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{U},y}\big).$$

Ceci achève la démonstration. □

Remarque 4.3. — Au lieu de se donner un morphisme surjectif et étale depuis un schéma U et un système régulier de paramètres $y_1, \ldots, y_n \in \mathscr{O}_{\mathrm{U},y}$, il suffit en fait de se donner un système régulier de paramètres dans l'hensélisé $\mathscr{O}^h_{\mathrm{U},y}$, dans le complété formel $\widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{U},y}$ ou même une base de l'espace tangent (ce qui définit un système régulier de paramètres dans l'anneau local formel). On peut remarquer que, tout comme pour l'espace tangent, les anneaux $\mathscr{O}^h_{\mathrm{U},y}$ et $\widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{U},y}$ ne dépendent pas du choix du revêtement étale (ce qui inciterait à les noter $\mathscr{O}^h_{\mathrm{X},x}$ et $\widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{X},x}$) mais ne sont pas définis à *unique* isomorphisme près (c'est pourquoi nous ne les noterons pas ainsi).

Remarque 4.4. — Montrons que, si on définit un point-base tangenciel à partir d'une base de l'espace tangent, il reste inchangé par (*i.e.*, est *canoniquement* isomorphe après application d') un isomorphisme équivariant qui préserve les orbites. Soit donc V l'espace tangent en $x \in \mathrm{X}$, défini à partir d'un morphisme surjectif et étale $\mathrm{U} \twoheadrightarrow \mathrm{X}$ et d'un point $y \in \mathrm{U}$ au dessus de x et soit $\varphi : \mathrm{V} \longrightarrow \mathrm{V}$ un G-automorphisme préservant les orbites. Il induit un isomorphisme $\widehat{\operatorname{Sym}}\,\mathrm{V} \longrightarrow \widehat{\operatorname{Sym}}\,\mathrm{V}$, *i.e.*, $\widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{U},y} \longrightarrow \widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{U},y}$ puis $\operatorname{Spec} \widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{U},y} \longrightarrow \operatorname{Spec} \widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{U},y}$. Mais comme φ est un G-isomorphisme qui préserve les orbites, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Spec} \widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{U},y} & \xrightarrow{\varphi} & \operatorname{Spec} \widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{U},y} \\ \downarrow & & \downarrow \\ [\operatorname{Spec} \widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{U},y}/\mathrm{G}] & = & [\operatorname{Spec} \widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{U},y}/\mathrm{G}]. \end{array}$$

Les points-bases tangenciels sont entièrement définis par les morphismes de topos $\mathfrak{Ens} \longrightarrow \mathrm{SLCF}\mathfrak{Sh}[\operatorname{Spec} \widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{U},y}/\mathrm{G}]$, qui coïncident.

5 Point-base tangenciel à partir d'un diviseur à croisements normaux

Nous allons maintenant expliquer comment des morphismes $\mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathrm{X}$ décrivant les strates de dimension un d'un diviseur à croisement normaux (par exemple, des *chemins* le long des strates de dimension un) permettent de définir des coordonnées et donc un point-base tangentiel au voisinage d'un point de X, d'abord dans la cas où X est un schéma puis dans celui où il est un champ.

Rappelons que nous considérons des schémas ou des champs sur un corps algébriquement clos k.

Remarque 5.1. — Dans les résultats suivants, on peut remplacer les morphismes non ramifiés $\mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathrm{X}$ par des morphismes non ramifiés $\mathrm{T} \longrightarrow \mathrm{X}$, où T est un ouvert de $\mathbb{P}^1$ contenant 0, ou même par des morphismes non ramifiés $\operatorname{Spec} \widehat{\mathscr{O}}_{\mathbb{P}^1,0} \longrightarrow \mathrm{X}$.

Proposition 5.2. — *Soient* X *un schéma de dimension* n, D *un diviseur à croisements normaux,* x *une strate de dimension nulle de* D *et* $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$: $\mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathrm{X}$ *des morphismes finis non ramifiés d'image les strates de dimension un du diviseur* D *qui passent par* x *et tels que* $\varphi_i(0) = x$ *pour tout* i. *Il peut arriver qu'une même strate de dimension un passe par le point* x *plusieures fois : dans ce cas, on prend plusieurs morphismes* φ_i, *comme sur la figure 4. Cette donnée permet de définir des coordonnées au voisinage de* x, *donc une base de vecteurs tangents puis un point-base tangenciel.*

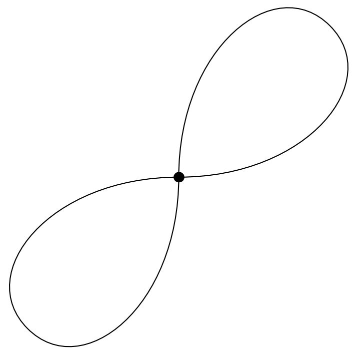


Figure 4 – Ce point se trouve à l'intersection d'une seule strate de simension un, qui y passe deux fois : on en choisira donc deux paramétrages différents. Si cette strate est paramétrée par $\varphi_1 : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathrm{X}$ et si le point double a pour antécédents 0 et ∞, on pourra par exemple considérer les morphismes φ_1 et φ_2, où φ_2 est défini par $\varphi_2(t) = \varphi_1(1/t)$.

Démonstration : Chaque morphisme φ_i induit un morphisme

$$\operatorname{Spec} \widehat{\mathscr{O}}_{\mathbb{P}^1,0} \longrightarrow \operatorname{Spec} \widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{X},x}$$

donc un morphisme local d'anneaux locaux

$$\widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{X},x} \longrightarrow \widehat{\mathscr{O}}_{\mathbb{P}^1,0} \simeq k[\![t]\!].$$

Si on note $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de $\widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{X},x}$, on obtient un morphisme

$$\frac{\widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{X},x}}{\mathfrak{m}} \longrightarrow \frac{k[\![t]\!]}{(t)} \simeq k,$$

soit encore, après restriction

$$\frac{\mathfrak{m}^2}{\mathfrak{m}} \longrightarrow k,$$

c'est à dire un élément, que nous noterons f_i, de l'espace tangent $\mathrm{V} = (\mathfrak{m}^2/\mathfrak{m})^\vee$.

Comme les morphismes φ_i sont non ramifiés, les f_i sont non nuls. En effet, remarquons que le complété formel $\widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{X},x}$ est isomorphe à l'anneau $k[\![x_1,\ldots,x_n]\!]$ des séries formelles à n indéterminées. Notons $\mathrm{P}_1,\ldots,\mathrm{P}_n$ les images des x_j. Comme il s'agit d'un morphisme local d'anneaux locaux, on sait que le terme constant de chacun des P_j est nul, et comme φ_i est non ramifié, on sait que $(\mathrm{P}_1,\ldots,\mathrm{P}_n) = (t)$, donc l'un des P_j au moins a son terme de degré un non nul : cela nous dit que le morphisme $f_i : \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \longrightarrow k$ a une valeur non nulle en x_j.

Les sous-espaces vectoriels de dimension un engendrés par chacun des f_i sont les espaces tangents aux strates de dimension un : comme il s'agit d'un diviseur à croisements normaux, ces sous-espaces sont linéairement indépendants et $(f_1,\ldots,f_n)$ est une base de l'espace tangent.

Pour définir le point-base tangenciel, remarquons que le complété formel de l'algèbre symétrique sur l'espace tangent V est cannoniquement isomorphe au complété formel de l'anneau local, *i.e.*, $\widehat{\mathrm{Sym}\,\mathrm{V}} \simeq \widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{X},x}$. On obtient donc des éléments $f_i \in \widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{X},x}$ qui constituent un système régulier de paramètres pour le diviseur. D'après les résultats précédents 2.12, on obtient donc un point-base tangenciel. □

Pour un champ algébrique, la donnée des morphismes φ_i ne suffit pas, il faut aussi dire comment le groupe du point agit sur eux. Nous commençons par remarquer qu'un morphisme $\mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathrm{X}$ ne définit pas *un* vecteur tangent, mais *plusieurs*, comme l'illustre la figure 5.

Lemme 5.3. — *Un morphisme fini non ramifié* $\varphi : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathrm{X}$ *vers un champ algébrique définit plusieurs vecteurs tangents en* $x = \varphi(0)$, *qui forment une orbite. Plus précisément, si* (U, y) *est un schéma étale (pointé) au dessus de*

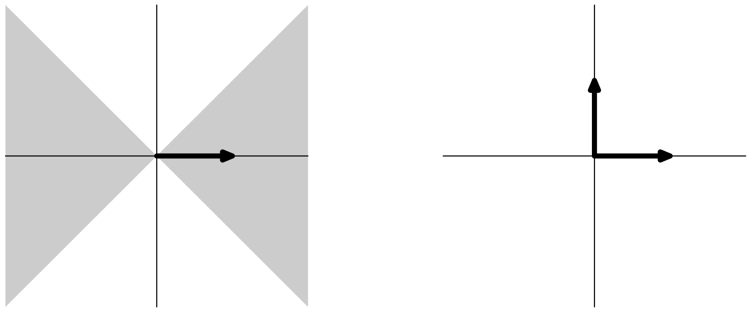


Figure 5 – Sur le champ $\mathbb{A}^2/(\mathbb{Z}/2)$, dont nous avons représenté en gris un domaine fondamental, un morphisme $\mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{A}^2/(\mathbb{Z}/2)$, représenté par une flèche (à gauche), définit deux vecteurs tangents (à droite).

(X, x), *les différents relèvements de* $\operatorname{Spec} \widehat{\mathscr{O}}_{\mathbb{P}^1,0} \longrightarrow (\mathrm{X}, x)$

$$\begin{tikzcd}
 & & (\mathrm{U}, y) \arrow[d] \\
\operatorname{Spec} \widehat{\mathscr{O}}_{\mathbb{P}^1,0} \arrow[r] \arrow[urr, dotted] & \mathbb{P}^1 \arrow[r] & (\mathrm{X}, x)
\end{tikzcd}$$

définissent des vecteurs tangents dans $\mathrm{T}_x\mathrm{X} = \mathrm{T}_y\mathrm{U}$, *qui forment une orbite sous l'action du groupe* G *du point* x.

Démonstration : Nous avons besoin de deux lemmes.

Lemme 5.4. — *Le diagramme suivant est* 2*-cartésien.*

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Spec} \widehat{\mathscr{O}}_{\mathbb{P}^1,0} \arrow[r] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & {[\operatorname{Spec} \widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{U},y}/\mathrm{G}]} \arrow[d] \\
\operatorname{Spec} \widehat{\mathscr{O}}_{\mathbb{P}^1,0} \arrow[r] & \mathrm{X}
\end{tikzcd}$$

Démonstration : Il existe au moins une manière de factoriser le morphisme $\operatorname{Spec} \widehat{\mathscr{O}}_{\mathbb{P}^1,0} \longrightarrow [\operatorname{Spec} \widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{U},y}/\mathrm{G}]$ par $\operatorname{Spec} \widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{U},y}$: choisissons-en une. Nous allons montrer que les deux carrés suivants sont 2-cartésiens.

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Spec} \widehat{\mathscr{O}}_{\mathbb{P}^1,0} \arrow[r] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & \operatorname{Spec} \widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{U},y} \arrow[r] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & {[\operatorname{Spec} \widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{U},y}/\mathrm{G}]} \arrow[d] \\
\operatorname{Spec} \widehat{\mathscr{O}}_{\mathbb{P}^1,0} \arrow[r] & \operatorname{Spec} \widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{U},y} \arrow[r] & \mathrm{X}
\end{tikzcd}$$

Celui de gauche ne pose pas de problème. Pour celui de droite, nous allons reprendre la construction du 2-produit fibré de deux catégories fibrées (A.3.5). On peut décrire les objets de $[\mathrm{Spec}\,\widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{U},y}/\mathrm{G}]$ au dessus d'un schéma T comme les diagrammes

$$\mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{T} \longrightarrow \mathrm{Spec}\,\widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{U},y} \tag{1}$$

où $\mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{T}$ est un G-espace principal homogène sur T (les morphismes sont les morphismes G-équivariants sur T). De même, on peut décrire les objets de $\mathrm{Spec}\,\widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{U},y}$ au dessus d'un schéma T comme les diagrammes

$$\mathrm{G} \times \mathrm{T} \longrightarrow \mathrm{T} \longrightarrow \mathrm{Spec}\,\widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{U},y}. \tag{2}$$

Nous n'aurons pas besoin de la description du champ X à l'aide de sa présentation U, il nous suffira de savoir que l'image de ces deux morphismes (1) et (2) est donnée par la composition avec le morphisme

$$\mathrm{Spec}\,\widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{U},y} \longrightarrow \mathrm{X}.$$

Dès lors, le 2-produit fibré recherché a pour objets au dessus d'un schéma T les diagrammes

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{E} \arrow[dr] \arrow[dd, "\wr"', no head] & & & \\
& \mathrm{T} \arrow[r] & \mathrm{Spec}\,\widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{U},y} \arrow[r] & \mathrm{X} \\
\mathrm{G} \times \mathrm{T} \arrow[ur] & & &
\end{tikzcd}$$

i.e., les G-fibrés principaux sur T munis d'une trivialisation (les morphismes sont les morphismes de G-fibrés principaux qui respectent cette trivialisation). On retrouve les mêmes fibres que pour $\mathrm{Spec}\,\widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{U},y}$. □

Lemme 5.5. — *Le diagramme suivant est* 2*-cartésien.*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{G} \times \mathrm{Spec}\,\widehat{\mathscr{O}}_{\mathbb{P}^1,0} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Spec}\,\widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{U},y} \arrow[d] \\
\mathrm{Spec}\,\widehat{\mathscr{O}}_{\mathbb{P}^1,0} \arrow[r] & {[\mathrm{Spec}\,\widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{U},y}/\mathrm{G}]}
\end{tikzcd}$$

Démonstration : Il existe au moins une manière de factoriser le morphisme $\mathrm{Spec}\,\widehat{\mathscr{O}}_{\mathbb{P}^1,0} \longrightarrow [\mathrm{Spec}\,\widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{U},y}/\mathrm{G}]$ par $\mathrm{Spec}\,\widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{U},y}$. Il suffit alors de remarquer que les deux carrés suivants sont cartésiens.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{G} \times \mathrm{Spec}\,\widehat{\mathscr{O}}_{\mathbb{P}^1,0} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{G} \times \mathrm{Spec}\,\widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{U},y} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Spec}\,\widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{U},y} \arrow[d] \\
\mathrm{Spec}\,\widehat{\mathscr{O}}_{\mathbb{P}^1,0} \arrow[r] & \mathrm{Spec}\,\widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{U},y} \arrow[r] & {[\mathrm{Spec}\,\widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{U},y}/\mathrm{G}]}.
\end{tikzcd}$$

□

Terminons la démonstration du premier lemme 5.3 : on a un diagramme cartésien

$$\begin{tikzcd}
G \times \operatorname{Spec} \widehat{\mathscr{O}}_{\mathbb{P}^1,0} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & \operatorname{Spec} \widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{U},y} \arrow[d] \\
\operatorname{Spec} \widehat{\mathscr{O}}_{\mathbb{P}^1,0} \arrow[r] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & {[\operatorname{Spec} \widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{U},y}/\mathrm{G}]} \arrow[d] \\
\operatorname{Spec} \widehat{\mathscr{O}}_{\mathbb{P}^1,0} \arrow[r] & \mathrm{X}.
\end{tikzcd}$$

et le morphisme du haut définit Card G morphismes $\operatorname{Spec} \widehat{\mathscr{O}}_{\mathbb{P}^1} \longrightarrow \operatorname{Spec} \widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{U}}$, *i.e.*, Card G vecteurs tangents. Le groupe G agit sur l'ensemble de ces vecteurs tangents et comme le diagramme du haut est cartésien, cette action est bien celle de G sur l'espace tangent : les vecteurs que l'on obtient forment une orbite. □

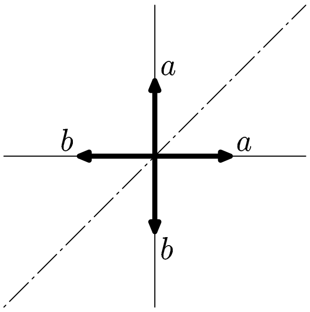
Remarque 5.6. — Localement, au voisinage d'une strate x de dimension nulle, un diviseur à croisements normaux sur un champ de dimension n n'a généralement pas n strates de dimension un, mais moins. En effet, localement, la situation peut se décrire en termes d'algèbre linéaire : un espace vectoriel V de dimension n, des sous-espaces $\mathrm{L}_1, \ldots, \mathrm{L}_n$ de dimension un, linéairement indépendants, et une action linéaire du groupe G qui préserve (globalement) la réunion $\bigcup_i \mathrm{L}_i$ de ces droites. Les composantes irréductibles du diviseur ne correspondent pas aux droites L_i, mais à leurs orbites : a priori, il y en a moins. C'est ce qui se passe sur les figure 3 (page 68) ou 5.

Proposition 5.7. — *Soient x une strate de dimension nulle d'un diviseur à croisements normaux* D *sur un champ algébrique* X *de dimension n et des morphismes non ramifiés $\varphi_i : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathrm{X}$, pour $1 \leqslant i \leqslant k$ qui décrivent les strates de dimension un qui passent par x (on a $k < n$ en général, d'après la remarque précédente). Ces morphismes définissent un point-base tangenciel en x.*

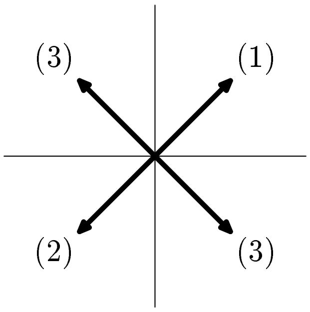
Démonstration : D'après la proposition 5.2 et le lemme 5.3, ces données définissent un système régulier de paramètres pour le diviseur dans un voisinage formel, donc un point-base tangenciel. □

Remarque 5.8. — La proposition précédente ne nous donne pas tous les points-bases tangenciels que l'on pouvait espérer. Reprenons l'exemple de

$\mathbb{A}^2/\mathbb{Z}/2$, le plan quotienté par la symétrie par rapport à la première bissectrice. Le diviseur n'a qu'une composante irréductible, on n'a donc essentiellement que deux manières de le paramétrer. Cela ne nous donne que deux points-bases tangenciels, alors que l'on en attendait trois (figure 6).



(a) Deux manières a et b de paramétrer l'unique composante du diviseur



(b) Les trois points-bases tangenciels que l'on voudrait obtenir

Figure 6 – Les deux paramétrages différents du diviseur de $\mathbb{A}^2/\mathbb{Z}/2$ donnent les points-bases tangenciels 1 et 2, mais on n'obtient pas ainsi le troisième point-base tangenciel.

Proposition 5.9. — *Soit x une strate de dimension nulle d'un diviseur à croisements normaux* D *dans un champ algébrique* X *de dimension n. Soient n morphismes non ramifiés $\varphi_i : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathrm{X}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, décrivant les strates de dimension un qui passent par x, comptées avec multiplicité et une action du groupe* G *du point x sur l'espace vectoriel libre*

$$\mathrm{V} = \mathrm{Vect}\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$$

engendré par les φ_i. Si cette action induit un isomorphisme G*-équivariant entre* V *et l'espace tangent $\mathrm{T}_x\mathrm{X}$, alors ces données définissent un point-base tangenciel en x.*

Démonstration : Il s'agit juste de préciser comment l'action de G sur V pourrait induire un G-isomorphisme $\mathrm{F} : \mathrm{V} \longrightarrow \mathrm{T}_x\mathrm{X}$.

Le premier morphisme φ_1 définit une orbite de vecteurs tangents : choisissons-en un, e_1, et posons $\mathrm{F}(\varphi_1) = e_1$. Pour que le morphisme F soit équivariant, on doit avoir

$$\forall g \in \mathrm{G} \qquad \mathrm{F}(g \cdot \varphi_1) = g \cdot e_1.$$

On demande que cela permette de définir une application linéaire F sur le sous-espace vectoriel engendré par l'orbite de φ_1. On procède de même pour les autres composantes du diviseur : on choisit l'un des φ_i qui décrit cette composante et on choisit son image parmi l'orbite de vecteurs tangents qu'il définit et on demande que cela permette de définir F sur le sous-espace vectoriel engendré par l'orbite de φ_i. Comme les φ_i forment une base de V, cela suffit pour définir le morphisme F.

On remarquera que si on effectue des choix différents lors de la construction précédente, on obtient un morphisme F qui diffère du précédent par un automorphisme équivariant de l'espace tangent $T_x X$ qui préserve les orbites. D'après la remarque 4.3, cela définit le même point-base tangenciel. □

Exemple 5.10. — Vérifions que, dans le cas du plan quotienté par la symétrie par rapport à la bissectrice $X = \mathbb{A}^2/\mathbb{Z}/2$, la discussion précédente permet de définir les trois points-bases tangenciels auxquels on s'attend. Il n'y a qu'une strate de dimension un, que l'on peut paramétrer essentiellement de deux manières $a, b : \mathbb{A}^1 \longrightarrow X$ (figure 6). Notons $\bar{1}$ l'élément non nul de $\mathbb{Z}/2$. On peut décrire les trois vecteurs tangents de la manière suivante.

(*i*) Si on pose $\varphi_1 = a$, $\varphi_2 = a$ et $\bar{1} \cdot \varphi_1 = \varphi_2$, cela correspond au point-base tangenciel 1 de la figure 6 (b).

(*ii*) Si on pose $\varphi_1 = b$, $\varphi_2 = b$ et $\bar{1} \cdot \varphi_1 = \varphi_2$, cela correspond au point-base tangenciel 2 de la figure 6 (b).

(*iii*) Si on pose $\varphi_1 = a$, $\varphi_2 = b$ et $\bar{1} \cdot \varphi_1 = -\varphi_2$, cela correspond au point-base tangenciel 3 de la figure 6 (b).

(*iv*) Si on pose $\varphi_1 = b$, $\varphi_2 = a$ et $\bar{1} \cdot \varphi_1 = -\varphi_2$, cela correspond encore au point-base tangenciel 3 de la figure 6 (b).

On remarquera aussi qu'il y a des actions sur $V = \mathrm{Vect}\{\varphi_1, \varphi_2\}$ qui ne reflètent pas l'action sur l'espace tangent et donc, qui ne définissent pas de point-base tangenciel : par exemple, $\varphi_1 = a$, $\varphi_2 = a$, $\bar{1} \cdot \varphi_1 = \varphi_1$.

6 Dans le voisinage tubulaire

Pour définir la notion de voisinage tubulaire d'un sous-schéma fermé, on pourrait penser prendre le système projectif de ses voisinages étales. Mais si un point possède « suffisamment » de voisinages étales, il n'en va pas de même pour un sous-schéma fermé quelconque[8] ; on est donc tenté de

8. Plus précisément, il arrive que les voisinages étales soient tous des voisinages de Zariski.

les remplacer par des recouvrements par des schémas étales, chaque schéma étant un voisinage étale d'un point du sous-schéma. C'est ce que formalise la notion de schéma simplicial et la définition suivante [Cox 2].

Définition 6.1. — Soit Y un sous-schéma fermé d'un schéma X. Le *voisinage tubulaire* de Y dans X est la catégorie $t_{\mathrm{Y}|\mathrm{X}}$ des schémas simpliciaux localement noethériens étales et séparés sur X dont le produit fibré avec Y est un hyper-recouvrement de Y.

De manière équivalente, c'est la catégorie des schémas simpliciaux $\mathrm{V}_\bullet$ (localement noethériens, étales et séparés sur X) tels qu'il existe un hyper-recouvrement $\mathrm{U}_\bullet \twoheadrightarrow \mathrm{X}$ et une immersion ouverte $\mathrm{V}_\bullet \longrightarrow \mathrm{U}_\bullet$ induisant un isomorphisme $\mathrm{V}_\bullet \times_\mathrm{X} \mathrm{Y} \simeq \mathrm{U}_\bullet \times_\mathrm{X} \mathrm{Y}$.

Définition 6.2. — Soit Y un sous-champ fermé d'un champ algébrique X. Le voisinage tubulaire $t_{\mathrm{Y}|\mathrm{X}}$ de Y dans X est la catégorie des schémas simpliciaux localement noethériens étales et séparés sur X dont le produit fibré avec Y est un hyper-recouvrement de Y. Un morphisme de cette catégorie entre des objets $\mathrm{U}_\bullet$ et $\mathrm{V}_\bullet$ est la donnée d'un morphisme f et d'un 2-isomorphisme α tels que

$$\begin{tikzcd} \mathrm{U}_\bullet \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] & \arrow[d, phantom, "\Rightarrow \alpha"] & \mathrm{V}_\bullet \arrow[dl] \\ & \mathrm{X}. & \end{tikzcd}$$

De manière équivalente, c'est la catégorie des schémas simpliciaux $\mathrm{V}_\bullet$ (localement noethériens, étales et séparés sur X) tels qu'il existe un hyper-recouvrement $\mathrm{U}_\bullet \longrightarrow \mathrm{X}$ et une immersion ouverte $\mathrm{V}_\bullet \longrightarrow \mathrm{U}_\bullet$ induisant un isomorphisme $\mathrm{V}_\bullet \times_\mathrm{X} \mathrm{Y} \simeq \mathrm{U}_\bullet \times_\mathrm{X} \mathrm{Y}$.

Remarque 6.3. — Comme les morphismes dans le voisinage tubulaire sont des morphismes *vers* des schémas (simpliciaux), c'est bien une catégorie et pas une 2-catégorie.

Remarque 6.4. — Nous allons légèrement modifier cette définition afin de pouvoir facilement l'adapter aux calculs homotopiques, qui font intervenir des points-bases. Pour les schémas, on procède généralement ainsi : on se donne des points $\eta_i \in X \setminus Y$ et $\xi_i \in Y$ tels que $\xi_i \in \overline{\{\eta_i\}}$ et on considère la catégorie, toujours notée $t_{X|Y}$, des schémas simpliciaux $V_\bullet \longrightarrow X$ (noethériens, étales et séparés sur X) tels que $V_\bullet \times_X Y \longrightarrow Y$ soit un hyper-recouvrement, munis de relèvements $\eta'_i \in V_0 \setminus (V_0 \times_X Y)$ et $\xi'_i \in V_0 \times_X Y$ des η_i et des ξ_i, tels que $\xi'_i \in \overline{\{\eta'_i\}}$.

Comme les points-bases que nous utiliserons sont en fait des points-bases tangenciels, *i.e.*, des foncteurs-fibres, nous allons donner une définition comparable en décrivant les points-bases par leurs foncteurs-fibres.

Lemme 6.5. — *Soient* Y *un diviseur à croisement normaux d'un champ algébrique* X *et* $V_\bullet \longrightarrow X$ *un schéma simplicial étale (noethérien, séparé) sur* X *tel que* $V_\bullet \times_X Y \longrightarrow Y$ *soit un hyper-recouvrement. Dans cette situation, un point-base tangenciel de* $X \setminus Y$ *au voisinage d'un point de* Y *peut se relever en un point-base tangenciel de* $V_0 \setminus V_0 \times_X Y$ *au voisinage de* $V_0 \times_X Y$.

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{SLCF}\,\mathfrak{Sh}\,V_0 \setminus (V_0 \times_X Y) \arrow[d] \\ \mathfrak{Ens} \arrow[ur, dotted, "y"] \arrow[r, "x"'] & \mathrm{SLCF}\,\mathfrak{Sh}\,X \setminus Y \end{tikzcd}$$

Démonstration : Un point-base tangenciel sur X en un point $x \in Y$ est défini par un morphisme étale depuis un schéma $U \longrightarrow X$, un point $y \in U$ au dessus de x et un système régulier de paramètres de $\mathscr{O}_{U,y}$. Soit $V_\bullet \longrightarrow X$ un objet du voisinage tubulaire. Considérons le diagramme suivant.

$$\begin{tikzcd} & U \times_X V_0 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ V_0 \arrow[dr] & & U \arrow[dl] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Comme le morphisme $V_0 \times_X Y \longrightarrow Y$ est surjectif, il en va de même pour $U \times_X V_0 \times_X Y \longrightarrow U \times_X Y$, il existe donc un point z de $U \times_X V_0$ au dessus de y. Le système régulier de paramètres en y définit un système régulier de paramètres en z et, d'après la remarque 4.3, cela définit un point-base tangenciel sur X, *canoniquement* isomorphe à celui dont on était parti. Le morphisme $U \times_X V_0 \longrightarrow V_0$ définit un point-base tangenciel sur V_0 qui relève le précédent. □

Définition 6.6. — Soient Y un diviseur à croisement normaux dans un champ algébrique X et $(x_i)_{i\in \mathrm{I}}$ des points-bases tangenciels de $\mathrm{X}\setminus\mathrm{Y}$ au voisinage de points de Y. On définit le voisinage tubulaire pointé de Y dans X, toujours noté $t_{\mathrm{Y}|\mathrm{X}}$, comme la catégorie des schémas simpliciaux noethériens étales et séparés $\mathrm{U}_\bullet$ sur X, tels que $\mathrm{U}_\bullet\times_{\mathrm{X}}\mathrm{Y}\longrightarrow\mathrm{Y}$ soit un hyper-recouvrement, munis de relèvements $(y_i)_{i\in\mathrm{I}}$ de $(x_i)_{i\in\mathrm{I}}$.

Définition 6.7. — Le type d'homotopie du voisinage tubulaire $t_{\mathrm{Y}|\mathrm{X}}$ est

$$\{t_{\mathrm{Y}|\mathrm{X}}\}_{\text{ét}} = \text{“}\varprojlim_{\mathrm{U}_\bullet\in t_{\mathrm{Y}|\mathrm{X}}}\text{”}\ \pi\mathrm{U}_\bullet,$$

dans la catégorie $(\mathrm{Pro}\,\mathscr{H})_\sharp$ définie en I.4.1.

Remarque 6.8. — (*i*) D'après [Cox 2, 1.2.1] ou [Artin–Mazur, 8.13], c'est bien un système projectif filtrant.

(*ii*) Si on part d'un voisinage tubulaire muni d'une famille de points $(x_i)_{i\in\mathrm{I}}$, on obtient un proobjet simplicial muni d'une famille de points $(x_i)_{i\in\mathrm{I}}$.

Remarque 6.9. — On définit de même le type d'homotopie du voisinage tubulaire de Y dans X privé de Y,

$$\{t_{\mathrm{Y}|\mathrm{X}}\setminus\mathrm{Y}\}_{\text{ét}} = \text{“}\varprojlim_{\mathrm{U}_\bullet\in t_{\mathrm{Y}|\mathrm{X}}}\text{”}\ \pi\big(\mathrm{U}_\bullet\setminus(\mathrm{U}_\bullet\underset{\mathrm{X}}{\times}\mathrm{Y})\big).$$

Nous allons maintenant voir ce que devient la notion de point-base tangenciel dans le voisinage tubulaire.

Lemme 6.10. — *Soit* Y *un diviseur à croisements normaux dans un champ algébrique* X. *Une famille* $(x_i : \mathfrak{Ens}\longrightarrow \mathrm{SLCF}\,\mathscr{T}\mathfrak{Sh}\,\mathrm{X}\setminus\mathrm{Y})_{i\in\mathrm{I}}$ *de points-bases tangenciels de* $\mathrm{X}\setminus\mathrm{Y}$ *définit naturellement une famille de points-bases du type d'homotopie* $\{t_{\mathrm{Y}|\mathrm{X},(x_i)_{i\in\mathrm{I}}}\setminus\mathrm{Y}\}_{\text{ét}}$ *du voisinage tubulaire pointé par* $(x_i)_{i\in\mathrm{I}}$.

Démonstration : Chaque objet $\mathrm{U}_\bullet$ du voisinage tubulaire $t_{\mathrm{Y}|\mathrm{X},(x_i)_{i\in\mathrm{I}}}$ est muni d'une famille de points-bases tangenciels

$$\big(y_i : \mathfrak{Ens}\longrightarrow \mathrm{SLCF}\,\mathscr{T}\mathfrak{Sh}\,(\mathrm{U}_0\setminus\mathrm{U}_0\underset{\mathrm{X}}{\times}\mathrm{Y})\big)_{i\in\mathrm{I}}$$

relevant les x_i. chacun de ces points-bases tangenciel définit une composante connexe du schéma $\mathrm{U}_0 \setminus \mathrm{U}_0 \underset{\mathrm{X}}{\times} \mathrm{Y}$, *i.e.*, un point de l'ensemble simplicial

$$\pi(\mathrm{U}_\bullet \setminus \mathrm{U}_\bullet \underset{\mathrm{X}}{\times} \mathrm{Y}). \qquad \square$$

Chapitre III

Espaces de modules de courbes et graphes en rubans

Après quelques rappels sur la construction des espaces de modules de courbes, les morphismes d'accrochage qui les relient et la description de la stratification par le type topologique à l'aide de graphes, nous montrons que l'on peut décrire les strates ouvertes à l'aide de groupes d'automorphismes de graphes et des espaces de modules de courbes lisses de dimension inférieure, puis, que l'on peut utiliser la notion de graphe en ruban pour trouver la structure de l'espace tangent en un point correspondant à une courbe dégénérée maximale (*i.e.*, une strate de dimension nulle) et construire des points-bases tangenciels.

1 Rappels sur les $\bar{\mathscr{M}}_{g,n}$

Dans cette section, nous rappelons des résultats de [Deligne–Mumford] et [Knudsen].

Définition 1.1. — Une *courbe stable à n points marqués de genre g* est un morphisme propre et plat $\pi : \mathrm{C} \longrightarrow \mathrm{S}$ muni de n sections $s_i : \mathrm{S} \longrightarrow \mathrm{C}$ (pour $1 \leqslant i \leqslant n$) tel que

- (i) Les fibres géométriques C_s de π sont des courbes réduites, connexes, de genre arithmétique $\dim \mathrm{H}^1(\mathrm{C}_s, \mathscr{O}_{\mathrm{C}_s}) = g$, dont les singularités sont des points doubles ordinaires ;
- (ii) Dans chaque fibre géométrique, les images des sections s_i sont des points P_i lisses et distincts ;
- (iii) Chaque fibre géométrique n'a qu'un nombre fini d'automorphismes fixant les points marqués P_i.

Remarque 1.2. — La dernière condition revient à demander les deux choses suivantes.

(i) Les composantes de genre géométrique nul de C_s ont au moins trois points spéciaux (on appelera *point spécial* de C un point de sa normalisée $\widetilde{C}$ au dessus d'un point singulier ou d'un point marqué) ;

(ii) Les composantes de genre géométrique un ont au moins un point spécial.

Remarque 1.3. — Pour que ces conditions soient vérifiées, il est nécessaire que $2(g-1)+n>0$, *i.e.*, que n soit au moins égal à trois si $g=0$ et que n soit au moins égal à un si $g=1$ (il n'y a pas de condition en genre supérieur).

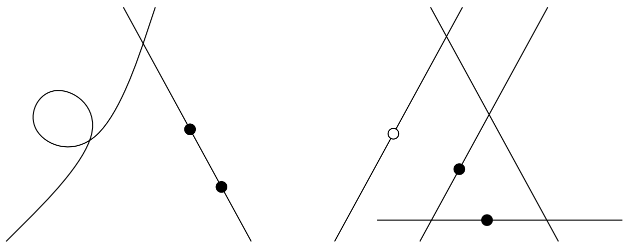


Figure 1 – Exemples de courbes stables (celle de gauche est dégénérée maximale). On indique les courbes de genre géométrique g en mettant g disques blancs dessus.

Définition 1.4. — Une *courbe dégénérée maximale* est une courbe stable à points marqués, dont toutes les composantes sont de genre géométrique nul avec trois points spéciaux.

Définition 1.5. — Un *morphisme de courbes à n points marqués* $(C, S, s_i) \longrightarrow (C', S', s'_i)$ est un carré cartésien

$$\begin{tikzcd} C' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi'"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & C \arrow[d, "\pi"] \\ S' \arrow[r, "g"'] & S \end{tikzcd}$$

tel que pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$ on ait $fs'_i = s_i g$.

Remarque 1.6. — On définirait de même les courbes stables de genre g à points marqués indexés par un ensemble fini I (au lieu de $\{1, \ldots, n\}$) et leurs morphismes.

Remarque 1.7. — Un *ensemble avec répétitions* $\mathscr{I} = (\mathrm{I}, (\mathrm{I}_j)_{j\in \mathrm{J}})$ est un ensemble I et une partition $\mathrm{I} = \coprod_{j\in\mathrm{J}} \mathrm{I}_j$. Cet ensemble est alors canoniquement muni d'une action de $\mathfrak{S}_{\mathscr{I}} = \prod_{j\in\mathrm{J}} \mathfrak{S}_{\mathrm{I}_j}$. On peut aussi définir un ensemble avec répétitions comme une suite finie non ordonnée : par exemple $\{1, a, a, b, b\}$ est un ensemble à répétitions à cinq éléments, isomorphe à $\{\,\{1\}, \{2, 3\}, \{4, 5\}\,\}$ (un isomorphisme d'ensembles à répétition de $\mathscr{I} = (\mathrm{I}, (\mathrm{I}_j)_{j\in\mathrm{J}})$ vers $\mathscr{I}' = (\mathrm{I}', (\mathrm{I}'_j)_{j\in\mathrm{J}})$ est une bijection $\varphi : \mathrm{I} \longrightarrow \mathrm{I}'$ qui préserve la partition, *i.e.*, telle que $\forall j \in \mathrm{J} \quad \varphi(\mathrm{I}_j) = \mathrm{I}'_j$).

On définit comme précédemment une courbe stable de genre g à points marqués indexés par un ensemble fini avec répétitions $\mathscr{I}$, mais les morphismes de telles courbes peuvent permuter les points coloriés de la même couleur, *i.e.*, ce sont les carrés cartésiens

$$\begin{tikzcd} \mathrm{C}' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi'"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & \mathrm{C} \arrow[d, "\pi"] \\ \mathrm{S}' \arrow[r, "g"'] & \mathrm{S} \end{tikzcd}$$

tels que

$$\forall j \in \mathrm{J} \quad \exists \sigma \in \mathfrak{S}_{\mathrm{I}_j} \quad \forall i \in \mathrm{I}_j \quad f s'_i = s_{\sigma(i)} g.$$

[Knudsen] démontre les résultats suivants.

Théorème 1.8. —

(*i*) ***Les courbes stables de genre*** g ***à*** n ***points marqués forment un champ algébrique*** $\bar{\mathscr{M}}_{g,n}$***, de dimension*** $3(g-1)+n$***, projectif et lisse sur*** $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ ***;***

(*ii*) ***La courbe universelle sur*** $\bar{\mathscr{M}}_{g,n}$ ***est l'espace de modules*** $\bar{\mathscr{M}}_{g,n+1}$ ***; le morphisme*** $\bar{\mathscr{M}}_{g,n+1} \longrightarrow \bar{\mathscr{M}}_{g,n}$ ***est construit à l'aide de l'oubli du*** $n+1^{\text{ième}}$ ***point et le la stabilisation (figure 0.4 page 10).***

(*iii*) ***Les courbes singulières forment un diviseur à croisements normaux, noté*** $\mathscr{S}_{g,n}$ ***et appelé*** **diviseur à l'infini**. ***On notera*** $\mathscr{M}_{g,n} = \bar{\mathscr{M}}_{g,n} \setminus \mathscr{S}_{g,n}$ ***l'espace de modules de courbes lisses.***

Remarque 1.9. — Le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ agit sur l'espace de modules $\bar{\mathscr{M}}_{g,n}$ en permutant les points marqués sur les courbes stables.

Remarque 1.10. — Ces résultats se généralisent aux courbes stables de genre g à points marqués indexés par un ensemble fini I, car une bijection $\mathrm{I} \longrightarrow \{1, \ldots, n\}$ définit une équivalence de champs $\bar{\mathscr{M}}_{g,\mathrm{I}} \longrightarrow \bar{\mathscr{M}}_{g,n}$. On a toujours une action de $\mathfrak{S}_{\mathrm{I}}$ sur $\bar{\mathscr{M}}_{g,\mathrm{I}}$.

Remarque 1.11. — Ces résultats se généralisent aussi aux courbes stables à points marqués indexés par un ensemble avec répétitions $\mathscr{I} = (\mathrm{I}, (\mathrm{I}_j)_{j \in \mathrm{J}})$: le morphisme de catégorie fibrées $\bar{\mathscr{M}}_{g,\mathrm{I}} \longrightarrow \bar{\mathscr{M}}_{g,\mathscr{I}}$ identifie $\bar{\mathscr{M}}_{g,\mathscr{I}}$ au quotient de $\bar{\mathscr{M}}_{g,\mathrm{I}}$ par le sous-groupe $\mathfrak{S}_{\mathscr{I}} \subset \mathfrak{S}_{\mathrm{I}}$.

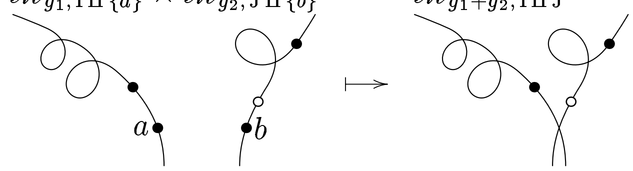
	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$
$g = 0$				0	1	2
$g = 1$		1	2	3	4	5
$g = 2$	3	4	5	6	7	8

Figure 2 – Dimension de $\bar{\mathscr{M}}_{g,n}$ pour de petites valeurs de g et n.

Proposition 1.12. —

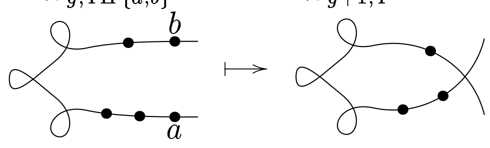
(*i*) *Ces champs sont reliés par des morphismes d'accrochage, (pour tous ensembles finis* I *et* J*)*

$$\mathrm{A}_{a,b} : \left\{ \bar{\mathscr{M}}_{g_1, \mathrm{I} \amalg \{a\}} \times \bar{\mathscr{M}}_{g_2, \mathrm{J} \amalg \{b\}} \longrightarrow \bar{\mathscr{M}}_{g_1+g_2, \mathrm{I} \amalg \mathrm{J}} \right.$$



et d'auto-accrochage (pour tout ensemble fini I*)*

$$\mathrm{A}_{a,b} : \left\{ \bar{\mathscr{M}}_{g, \mathrm{I} \amalg \{a,b\}} \longrightarrow \bar{\mathscr{M}}_{g+1, \mathrm{I}} \right.$$



(*ii*) *Ces morphismes induisent des immersions fermées*

$$\bar{\mathscr{M}}_{g_1, \mathrm{I} \amalg \{a\}} \times \bar{\mathscr{M}}_{g_2, \mathrm{J} \amalg \{b\}} \longrightarrow \bar{\mathscr{M}}_{g_1+g_2, \mathrm{I} \amalg \mathrm{J}} \text{ si } g_1 \neq g_2 \text{ ou } n_1 + n_2 \neq 0$$

ou des morphismes non ramifiés

$$\bar{\mathscr{M}}_{g,\{a\}} \times \bar{\mathscr{M}}_{g,\{b\}} \longrightarrow \bar{\mathscr{M}}_{2g,\varnothing}$$
$$\bar{\mathscr{M}}_{g,\mathrm{I} \amalg \{a,b\}} \longrightarrow \bar{\mathscr{M}}_{g+1,\mathrm{I}}.$$

(*iii*) *La réunion des images des morphismes d'accrochage de but $\bar{\mathscr{M}}_{g,n}$ est le diviseur $\mathscr{S}_{g,n}$ des courbes singulières.*

Exemple 1.13. — L'espace $\mathscr{M}_{0,3}$ est réduit à un point. L'action de $\mathfrak{S}_3$ qui permute les points marqués sur une courbe rationnelle à trois points marqués est triviale.

Exemple 1.14. — L'espace $\bar{\mathscr{M}}_{0,4}$ est une droite projective ; le diviseur $\mathscr{S}_{0,4}$ est réduit à trois points ; l'action de $\mathfrak{S}_4$ est entièrement définie par sa restriction à $\mathscr{M}_{0,4} \simeq \mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ et se factorise donc par celle de $\operatorname{Aut} \mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\} \simeq \mathfrak{S}_3$.

Exemple 1.15. — Décrivons l'espace de modules des courbes elliptiques $\bar{\mathscr{M}}_{1,1}$.

Une *courbe elliptique* (lisse) est une courbe lisse de genre un à un point marqué. On peut montrer [Hartshorne] qu'elles sont en fait (isomorphes à des courbes) planes. Comme le genre d'une courbe plane lisse de degré d est $\frac{1}{2}(d-1)(d-2)$, il s'agit des courbes de degré trois. L'équation d'une telle courbe peut s'écrire sous *forme de Weierstrass*,

$$y^2 + a_1 xy + a_3 y = x^3 + a_2 x^2 + a_4 x + a_5 \tag{$*$}$$

qui peut se simplifier, en caractéristique différente de deux ou trois, en

$$y^2 = x^3 + ax + b. \tag{$*'$}$$

En général, une telle courbe n'a qu'un seul automorphisme non trivial, donné par $(x, y) \longmapsto (x, -y)$. À l'aide du discriminant du second membre de $(*')$, on peut construire l'invariant j, qui classifie les courbes elliptiques à isomorphisme près. En caractéristique différente de deux ou trois, cet invariant identifie l'espace de modules grossier de $\mathscr{M}_{1,1}$ à la droite affine. Toutes les courbes elliptiques ont $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ comme groupe d'automorphismes, sauf deux d'entre elles :[1]

(*i*) la courbe correspondant à $j = 0$ a pour groupe d'automorphismes $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$; on peut la voir comme la courbe d'équation $y^2 = x^3 + 1$ et le groupe des automorphismes est alors engendré par $(x, y) \longmapsto (\zeta_3 x, -y)$, où ζ_3 est une racine primitive cubique de l'unité ; sur $\mathbb{C}$, on peut la voir comme le tore $\mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \zeta_3\mathbb{Z})$ et le groupe des automorphismes est engendré par la rotation d'angle $\pi/3$;

(*ii*) la courbe correspondant à $j = 12^3$ a pour groupe d'automorphismes $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$; on peut la voir comme la courbe d'équation $y^2 = x^3 + x$ et le groupe des automorphismes est alors engendré par $(x, y) \longmapsto (-x, \zeta_4 y)$, où ζ_4 est une racine quatrième de l'unité ; sur $\mathbb{C}$, on peut la voir comme le tore $\mathbb{C}/(\mathbb{Z} + i\mathbb{Z})$ et le groupe des automorphismes est engendré par la rotation d'angle $\pi/2$;

(*iii*) la courbe correspondant à $j = \infty$ est une courbe singulière, avec un point double ordinaire, par exemple la courbe d'équation $y^2 = x^2(x-1)$, qui provient du morphisme d'accrochage $\mathscr{M}_{0,3} \longrightarrow \bar{\mathscr{M}}_{1,1}$; son groupe d'automorphismes est toujours $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Si l'espace de modules grossier de $\bar{\mathscr{M}}_{1,1}$ est bien la droite projective et si l'on connait aussi le groupe d'automorphismes de chaque point, cela ne suffit pas pour définir entièrement cet espace : il nous faut au moins connaître l'action des groupes sur les espaces tangents. Prenons par exemple le point $j = 0$: il s'agit de trouver l'action (linéaire) de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ sur l'espace vectoriel tangent, qui est de dimension un. Comme tous les points ont au moins $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ comme stabilisateur, l'élément $\bar{3} \in \mathbb{Z}/6$ (c'est le seul élément d'ordre deux) doit agir trivialement. Il ne reste que deux actions possibles : l'action triviale, exclue, car tous les points auraient $\mathbb{Z}/6$ comme stabilisateur, et l'action de $\bar{1} \in \mathbb{Z}/6$ par multiplication par une racine primitive troisième de l'unité. De même, on peut voir que dans l'action de $\mathbb{Z}/4$ sur l'espace tangent (toujours de dimension un) en $j = 12^3$, l'élément $\bar{1} \in \mathbb{Z}/4$ agit par multiplication par -1.

Exemple 1.16. — Examinons maintenant ce que l'on peut dire de $\bar{\mathscr{M}}_{1,2}$ à l'aide des résultats précédents. Rappelons que le diviseur à l'infini est l'image

1. En caractéristique deux ou trois, l'invariant j classifie toujours les courbes elliptiques à isomorphisme près ; en général ($j \neq 0, \infty$), il n'y a toujours qu'un automorphisme non trivial ; la valeur $j = \infty$ correspond toujours à une courbe singulière, dont le groupe des automorphismes est $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$; mais le point $j = 0 = 12^3$ est une courbe dont le groupe d'automorphismes est respectivement $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ et $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_3)$. Voir par exemple [Silvermann].

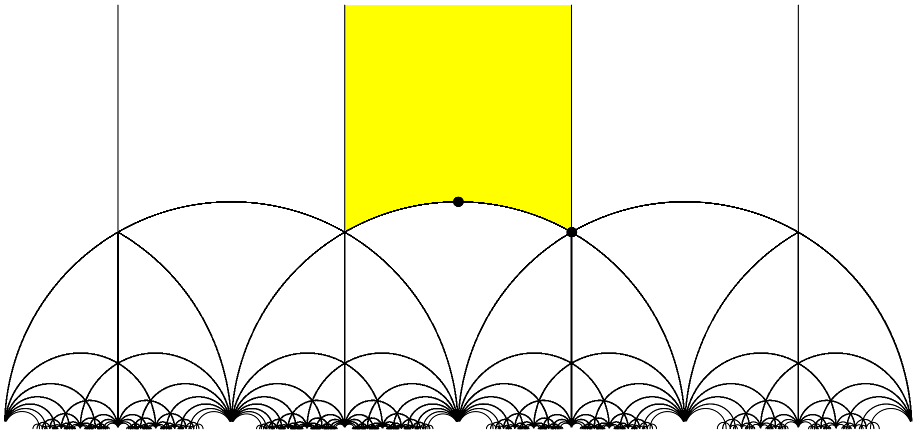


Figure 3 – On peut aussi voir les courbes elliptiques sur $\mathbb{C}$ comme des tores, de la forme $\mathbb{C}/\Lambda$, où $\Lambda = \omega_1\mathbb{Z} + \omega_2\mathbb{Z}$ est un réseau de $\mathbb{C}$; on peut se ramener à des réseaux de la forme $\Lambda = \mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$, avec $\operatorname{Im}\tau > 0$. Deux réseaux donnent des tores isomorphes s'ils se déduisent l'un de l'autre par un élément du groupe modulaire $\mathrm{SL}_2\mathbb{Z}$. La figure ci-dessus représente un domaine fondamental de cette action sur le demi-plan $\mathfrak{H} = \{\, \tau \in \mathbb{C} \ : \ \operatorname{Im}\tau > 0 \,\}$. Les deux gros points correspondent aux courbes $j = 0$ (point d'affixe $\exp(i\pi/3)$) et $j = 12^3$ (point d'affixe i), qui ont plus d'automorphismes.

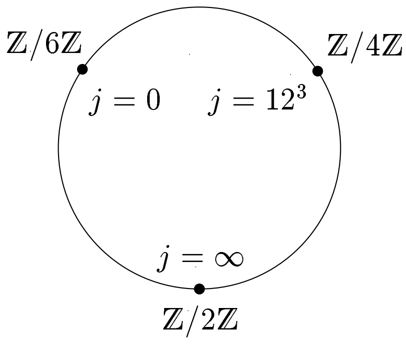


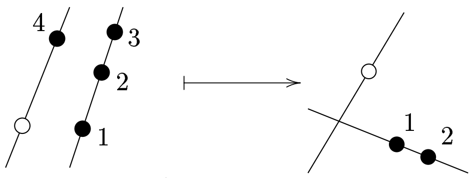
Figure 4 – Points réels de l'espace de modules $\bar{\mathscr{M}}_{1,1}$

des morphismes d'accrochage

$$\bar{\mathscr{M}}_{0,4} \longrightarrow \bar{\mathscr{M}}_{0,4}/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \hookrightarrow \bar{\mathscr{M}}_{1,2}$$

et

$$\bar{\mathscr{M}}_{1,1} = \bar{\mathscr{M}}_{1,1} \times \mathscr{M}_{0,3} \hookrightarrow \bar{\mathscr{M}}_{1,2}$$



L'action de $\mathbb{Z}/2$ sur $\bar{\mathscr{M}}_{0,4}$ est la permutation des points 3 et 4 ; en paramétrant $\bar{\mathscr{M}}_{0,4}$ par le birapport, on voit que cette action est l'inverse sur $\mathbb{P}^1$. Nous savons que le second morphisme d'accrochage est une immersion fermée, nous verrons un peu plus loin (3.2) que le premier, après avoir quotienté par $\mathbb{Z}/2$, en est aussi une.

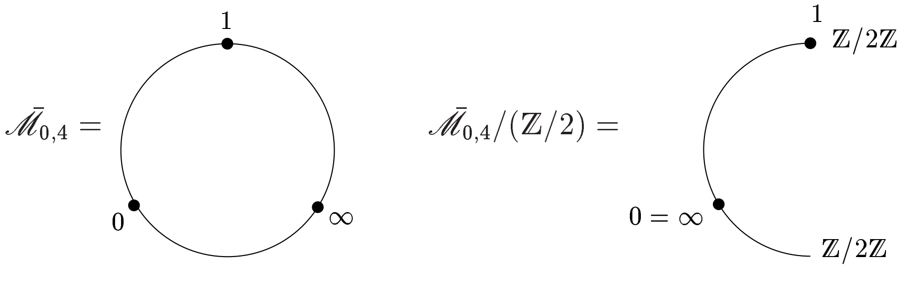
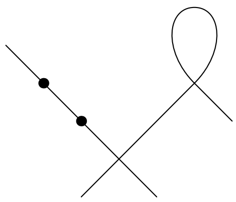


Figure 5 – Les points réels de $\bar{\mathscr{M}}_{0,4}$ et $\bar{\mathscr{M}}_{0,4}/(\mathbb{Z}/2)$

Pour obtenir $\mathscr{S}_{1,2}$, il suffit de recoller $\bar{\mathscr{M}}_{1,1}$ et $\bar{\mathscr{M}}_{0,4}/(\mathbb{Z}/2)$ le long des images des morphismes d'accrochages, *i.e.*, le long de leur point commun, qui correspond à la courbe suivante.



L'espace $\mathscr{S}_{1,2}$ est donc décrit par la figure 7 (voir aussi 17). Il reste encore à expliquer quelle est la structure de $\bar{\mathscr{M}}_{1,2}$ au voisinage des points 1 et $0 = \infty$ de l'image de $\bar{\mathscr{M}}_{0,4}/(\mathbb{Z}/2)$: nous verrons (5.16 page 135) qu'au point 1 la situation est celle de la figure II.2(b) et qu'en $0 = \infty$, celle de la figure II.2(c) page 68. En particulier, au point $0 = \infty$, il y a bien *deux* strates qui se rencontrent, bien qu'il n'y ait qu'*une* composante irréductible.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathscr{S}_{1,2} & \\
\bar{\mathscr{M}}_{1,2}/(\mathbb{Z}/2) \arrow[ur] & & \bar{\mathscr{M}}_{1,1} \arrow[ul] \\
* \arrow[u] & & * \arrow[u] \arrow[ull]
\end{tikzcd}$$

Figure 6 – La stratification de $\bar{\mathscr{M}}_{1,2}$

Remarque 1.17. — En composant plusieurs morphismes d'accrochage ou d'auto-accrochage, on obtient des *morphismes d'accrochage généralisés*. Si $\mathrm{I}_1, \ldots, \mathrm{I}_m$ sont des ensembles finis et $g_1, \ldots, g_m$ des entiers, un morphisme d'accrochage généralisé peut se voir comme la donnée d'une partition $\mathrm{J} = \mathrm{J}_1 \amalg \cdots \amalg \mathrm{J}_r$ d'une partie J de $\mathrm{I}_1 \amalg \cdots \amalg \mathrm{I}_m$ en parties J_i à deux éléments. Le morphisme d'accrochage généralisé s'écrit alors

$$\bar{\mathscr{M}}_{g_1,\mathrm{I}_1} \times \cdots \times \bar{\mathscr{M}}_{g_m,\mathrm{I}_m} \longrightarrow \bar{\mathscr{M}}_{g'_1,\mathrm{K}_1} \times \cdots \times \bar{\mathscr{M}}_{g'_k,\mathrm{K}_k}.$$

(Pour l'instant, nous n'avons pas de moyen simple de décrire le membre de droite : nous en verrons un en 2.5.)

D'après [Knudsen, 3.4.1], l'ordre dans lequel on compose les morphismes d'accrochage n'a pas d'importance : on peut donc remplacer la partition de J par des parties à deux éléments indexée par $[\![1, r]\!]$ par une partition de J en parties à deux éléments indexées par un ensemble quelconque C, ou, ce qui

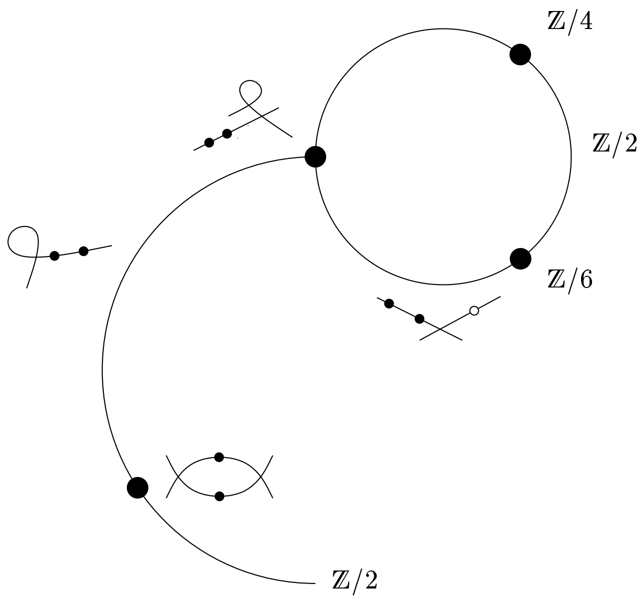


Figure 7 – Le diviseur à l'infini $\mathscr{S}_{1,2}$

revient au même, par une application $c : \mathrm{J} \longrightarrow \mathrm{C}$ dont toutes les fibres ont deux éléments.

Définition 1.18. — On dit que l'image d'un morphisme d'accrochage généralisé de la forme

$$\bar{\mathscr{M}}_{g_1,\mathrm{I}_1} \times \cdots \times \bar{\mathscr{M}}_{g_m,\mathrm{I}_m} \longrightarrow \bar{\mathscr{M}}_{g,\mathrm{I}\setminus\mathrm{J}}$$

est une *strate fermée* de la *stratifiction par le type topologique* de $\bar{\mathscr{M}}_{g,\mathrm{I}\setminus\mathrm{J}}$. De même, l'image de

$$\mathscr{M}_{g_1,\mathrm{I}_1} \times \cdots \times \mathscr{M}_{g_m,\mathrm{I}_m} \longrightarrow \bar{\mathscr{M}}_{g,\mathrm{I}\setminus\mathrm{J}}$$

est une *strate ouverte* de la stratifiction de $\bar{\mathscr{M}}_{g,\mathrm{I}\setminus\mathrm{J}}$ par le type topologique.

2 Courbes et graphes

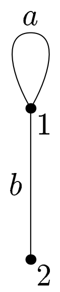
La description de la stratification par le type topologique en termes de morphismes d'accrochage est suffisante mais peu pratique : si on essaye par exemple d'énumérer toutes les strates de $\bar{\mathscr{M}}_{2,2}$, on est presque sûr d'en oublier.

Heureusement, on dispose d'une autre description de ces strates, en termes de graphes.

Définition 2.1. — Un *graphe* est un quadruplet $\mathrm{G} = (\mathrm{F}, \mathrm{V}, j, \partial)$, où
- F est un ensemble (dont on appelera les éléments les *demi-arrêtes* de G),
- V est un ensemble (dont on appelera les éléments des *sommets* de G),
- $j : \mathrm{F} \longrightarrow \mathrm{F}$ est une involution et
- $\partial : \mathrm{F} \longrightarrow \mathrm{V}$ est une application.

Une *arrête* de G est une partie de F à deux éléments de la forme $\{\varphi, j\varphi\}$. Les *jambes* de G sont les points fixes de j.

Un *morphisme de graphes* $(\mathrm{F}, \mathrm{V}, j, \partial) \longrightarrow (\mathrm{F}', \mathrm{V}', j', \partial')$ est la donnée de deux bijections $f_1 : \mathrm{F} \longrightarrow \mathrm{F}'$ et $f_2 : \mathrm{V} \longrightarrow \mathrm{V}'$ telles que $f_1 j = j' f_1$ et $f_0 \partial = \partial' f_1$.



$$\mathrm{F} = \{\, (1,a), (1,a'), (1,b), (2,b) \,\}$$

$$\mathrm{V} = \{\, 1, 2 \,\}$$

$\varphi \in \mathrm{F}$	$(2,b)$	$(1,b)$	$(1,a)$	$(1,a')$
$j\varphi$	$(1,b)$	$(2,b)$	$(1,a')$	$(1,a)$
$\partial\varphi$	2	1	1	1

Figure 8 – Exemple de graphe. Il possède un automorphisme non trivial.

Remarque 2.2. — On peut définir la *réalisation géométrique* d'un graphe $\mathrm{G} = (\mathrm{F}, \mathrm{V}, j, \partial)$ comme un quotient de

$$\left(\coprod_{\varphi \in \mathrm{F}} [0, \tfrac{1}{2}] \right) \amalg \left(\coprod_{v \in \mathrm{V}} \{\, 0_v \,\} \right).$$

Si $t \in [0, \frac{1}{2}]$ est dans la composante indexée par $\varphi \in \mathrm{F}$, on le note t_φ. On quotiente l'espace topologique ci-dessus par la relation d'équivalence engendrée par les relations

$$\forall \varphi \in \mathrm{F} \qquad 0_\varphi \sim 0_{\partial\varphi} \qquad (\tfrac{1}{2})_\varphi \sim (\tfrac{1}{2})_{j\varphi}.$$

Définition 2.3. — Soit $\mathrm{G} = (\mathrm{F}, \mathrm{V}, j, \partial)$ un graphe. La *valence* d'un sommet $v \in \mathrm{V}$ est le nombre de demi-arrêtes qui en partent,

$$\mathrm{valence}(v) = \mathrm{Card}\{\, \varphi \in \mathrm{F} \;:\; \partial\varphi = v \,\}.$$

Les *composantes connexes* de G sont les classes d'équivalence de la relation d'équivalence engendrée par les relations

$$v \sim v' \qquad \text{si} \qquad \exists \varphi \in \mathrm{F} \quad v = \partial\varphi \text{ et } v' = \partial j\varphi.$$

Un graphe est *connexe* s'il n'a qu'une composante connexe. Il revient au même de demander que sa réalisation géométrique soit connexe. Un *coloriage* de G par un ensemble C (ou un ensemble avec répétitions $\mathscr{C} = (\mathrm{C}, (\mathrm{C}_j)_{j\in \mathrm{J}}))$ est une bijection entre l'ensemble des jambes de G et C,

$$c : \{\,\text{jambes}\,\} \longrightarrow \mathrm{C}.$$

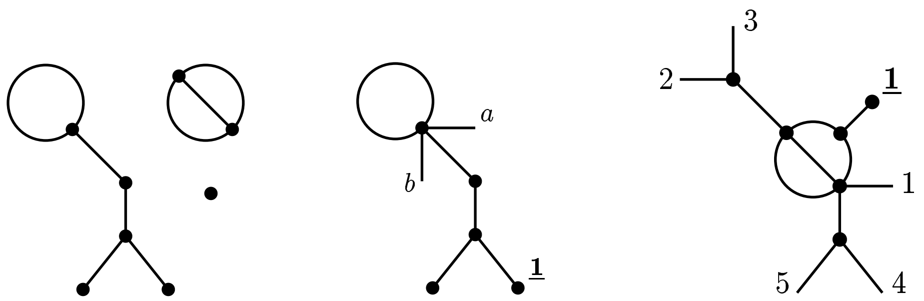
Une *pondération* de G est une application

$$g : \mathrm{V} \longrightarrow \mathbb{N}.$$

Si $v \in \mathrm{V}$ est un sommet, on dira que $g(v)$ est le *genre* de v. Le *genre* d'un graphe G est l'entier

$$\begin{aligned}\text{genre}(\mathrm{G}) = \sum_{v\in \mathrm{V}} g(v) &+ \text{nombre d'arrêtes}\\ &- \text{nombre de sommets} + 1.\end{aligned}$$

Un *morphisme* de graphes coloriés pondérés est un morphisme de graphes respectant coloriage et pondération.

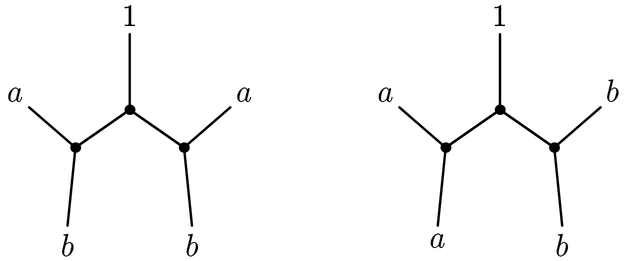


(a) Graphe non connexe

(b) Graphe connexe non stable (car il y a un sommet monovalent et un autre bivalent), colorié par $\{a, b\}$, de genre 2

(c) Graphe stable colorié par $[\![1, 5]\!]$, de genre 3

Figure 9 – Quelques exemples de graphes (le genre des sommets, quand il est non nul, est indiqué par un entier gras souligné)



(a) graphe colorié par $\{1, a, a, b, b\}$

(b) graphe colorié par $\{1, a, a, b, b\}$

Figure 10 – Graphes coloriés par des ensembles avec répétitions

De même que nous nous étions limités aux courbes stables, *i.e.*, aux courbes à points marqués vérifiant certaines propriétés, nous allons nous limiter à certains graphes, dits « stables ».

Définition 2.4. — Un *graphe stable* de type (g, n) est un graphe à n jambes, pondéré, colorié par $[\![1, n]\!]$, de genre g, tel que

(i) les sommets de genre nul sont au moins de valence 3 (nous dirons qu'ils sont *trivalents*) ;

(ii) les sommets de genre un sont au moins de valence 1 (monovalents) ;

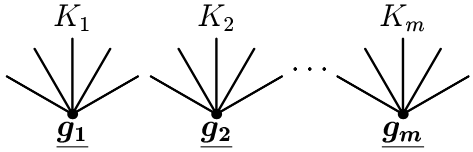
Désormais, par « *graphe* », nous entendrons toujours « graphe stable ».

On peut maintenant énoncer le rapport entre courbes stables et graphes stables.

Proposition 2.5. — *Les classes d'isomorphie de graphes stables connexes de genre g à n jambes décrivent les strates de la stratification de $\bar{\mathscr{M}}_{g,n}$ par le type topologique.*

Démonstration : À un graphe stable non nécessairement connexe, on associe un morphisme d'accrochage généralisé, par récurrence sur le nombre d'arrêtes du graphe.

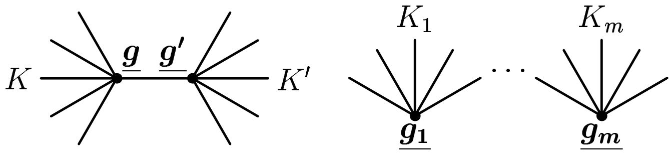
(a) S'il n'y a aucune arrête, on associe au graphe



le morphisme d'accrochage identité

$$\mathrm{Id} : \bar{\mathscr{M}}_{g_1,\mathrm{K}_1} \times \cdots \times \bar{\mathscr{M}}_{g_m,\mathrm{K}_m} \longrightarrow \bar{\mathscr{M}}_{g_1,\mathrm{K}_1} \times \cdots \times \bar{\mathscr{M}}_{g_m,\mathrm{K}_m}.$$

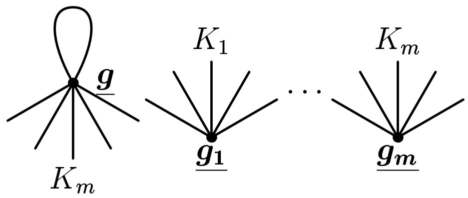
(b) S'il n'y a qu'une arrête, entre deux sommets différents,



on lui associe le morphisme d'accrochage

$$\begin{aligned}\mathrm{A}_{a,b} \times \mathrm{Id} : \bar{\mathscr{M}}_{g,\mathrm{K}\amalg\{a\}} \times \bar{\mathscr{M}}_{g',\mathrm{K}'\amalg\{b\}} \times \bar{\mathscr{M}}_{g_1,\mathrm{K}_1} \times \cdots \times \bar{\mathscr{M}}_{g_m,\mathrm{K}_m} \longrightarrow \\ \bar{\mathscr{M}}_{g+g',\mathrm{K}\amalg\mathrm{K}'} \times \bar{\mathscr{M}}_{g_1,\mathrm{K}_1} \times \cdots \times \bar{\mathscr{M}}_{g_m,\mathrm{K}_m}.\end{aligned}$$

(c) S'il n'y a qu'une arrête, formant une boucle,



on associe au graphe le morphisme d'auto-accrochage

$$\mathrm{A}_{a,b}\times\mathrm{Id} : \bar{\mathscr{M}}_{g,\mathrm{K}\amalg\{a,b\}}\times\bar{\mathscr{M}}_{g_1,\mathrm{K}_1}\times\cdots\times\bar{\mathscr{M}}_{g_m,\mathrm{K}_m}\longrightarrow\bar{\mathscr{M}}_{g+1,\mathrm{K}}\times\bar{\mathscr{M}}_{g_1,\mathrm{K}_1}\times\cdots\times\bar{\mathscr{M}}_{g_m,\mathrm{K}_m}.$$

(d) Supposons que l'on sache déjà associer un morphisme d'accrochage généralisé à tout graphe stable (de genre quelconque, dont les jambes sont indexées par un ensemble fini K quelconque) comportant au plus n arrêtes et soit $\mathrm{G} = (\mathrm{F}, \mathrm{V}, \partial, j, g, c)$ un graphe à $n+1$ arrêtes. On choisit une arrête $e = \{\, \varphi_0, j\varphi_0 \,\}$ et on coupe le graphe G en cette arrête, *i.e.*, on considère le graphe G′ défini par (figure 11) :

$$\mathrm{F}' = \mathrm{F}, \qquad \mathrm{V}' = \mathrm{V}, \qquad \partial' = \partial, \qquad g' = g,$$

$$j' : \begin{cases} \mathrm{F} \longrightarrow \mathrm{F} \\ \varphi \longmapsto \begin{cases} j(\varphi) & \text{si } \varphi \neq \varphi_0, j\varphi_0 \\ \varphi_0 & \text{si } \varphi = \varphi_0 \\ j\varphi_0 \text{ si } \varphi = j\varphi_0 \end{cases} \end{cases}$$

$$c' : \begin{cases} \{\text{jambes de } \mathrm{G}'\} \longrightarrow \mathrm{K} \amalg \{\, a, b \,\} \\ \varphi \longmapsto \begin{cases} c\varphi & \text{si } \varphi \text{ est une jambe de G} \\ a & \text{si } \varphi = \varphi_0 \\ b & \text{si } \varphi = j\varphi_0 \end{cases} \end{cases}$$

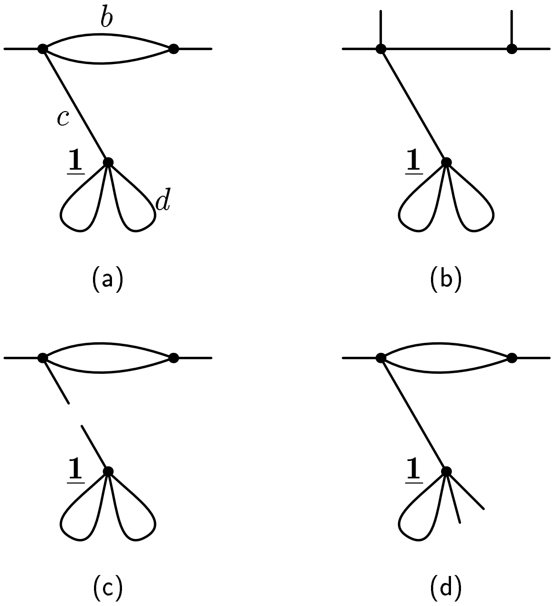


Figure 11 – Le graphe (a), coupé en l'arrête b, c ou d.

Comme le graphe G′ comporte une jambe de moins, par hypothèse de récurrence, il décrit un morphisme d'accrochage

$$\mathrm{A} : \bar{\mathscr{M}}_{g_1,\mathrm{K}_1} \times \cdots \times \bar{\mathscr{M}}_{g_m,\mathrm{K}_m} \longrightarrow \bar{\mathscr{M}}_{g'_1,\mathrm{K}'_1} \times \cdots \times \bar{\mathscr{M}}_{g'_{m'},\mathrm{K}'_{m'}}.$$

On définit alors le morphisme d'accrochage associé au graphe G comme le composé de A et du morphisme d'accrochage $\mathrm{A}_{a,b}$ identifiant a et b. Ce morphisme d'accrochage est bien défini, *i.e.*, il ne dépend pas de l'arrête $(\varphi_0, j\varphi_0)$ que l'on a choisie, d'après [Knudsen, 3.4.1]. Dès lors, on voit, par récurrence, que

- on a une bijection entre morphismes d'accrochage généralisés (composé de n morphismes d'accrochages) et graphes stables non nécessairement connexes (à n arrêtes) ;
- le nombre de composantes connexes du graphe est le nombre de facteurs intervenant dans le but du morphisme d'accrochage ;
- les jambes correspondent aux points marqués ;
- en particulier, on a une bijection entre les morphismes d'accrochages généralisés de but $\bar{\mathscr{M}}_{g,\mathrm{K}}$ et les (classes d'isomorphismes de) graphes connexes de genre g dont les jambes sont indexées par K. □

Définition 2.6. — Le *graphe associé* à une courbe stable C (sur un corps algébriquement clos) à points marqués indexés par un ensemble fini I est le suivant.

$$\begin{aligned} \mathrm{V} &= \{\, \text{composantes connexes de } \widetilde{\mathrm{C}} \,\} \\ &\simeq \{\, \text{composantes irréductibles de C} \,\} \\ \mathrm{F} &= \{\, \text{points spéciaux de C, } \textit{i.e.}\text{, points de } \widetilde{\mathrm{C}} \text{ au} \\ &\qquad \text{dessus d'un point singulier ou marqué de C} \,\} \end{aligned}$$

$$j : \begin{cases} \mathrm{F} \longrightarrow \mathrm{F} \\ \varphi \longmapsto \varphi' \text{ où } \pi^{-1}\pi\varphi = \{\,\varphi, \varphi'\,\}, \text{ avec éventuellement } \varphi = \varphi' \\ \qquad \text{si } \pi^{-1}\pi\varphi \text{ n'a qu'un élément, } \textit{i.e.}\text{, si } \varphi \text{ est un point} \\ \qquad \text{spécial au dessus d'un point marqué.} \end{cases}$$

$$\partial : \begin{cases} \mathrm{F} \longrightarrow \mathrm{V} \\ \varphi \longmapsto \text{composante connexe de } \widetilde{\mathrm{C}} \text{ sur laquelle } \varphi \text{ se trouve} \end{cases}$$

$$g : \begin{cases} \mathrm{V} \longrightarrow \mathbb{N} \\ v \longmapsto \text{genre géométrique de } v \end{cases}$$

$$c : \begin{cases} \{\,\text{jambes}\,\} \longrightarrow \mathrm{I} \\ \varphi \longmapsto i \text{ où } \mathrm{P}_i = \pi\varphi \text{ et les } (\mathrm{P}_i)_{i\in\mathrm{I}} \text{ sont les points marqués} \end{cases}$$

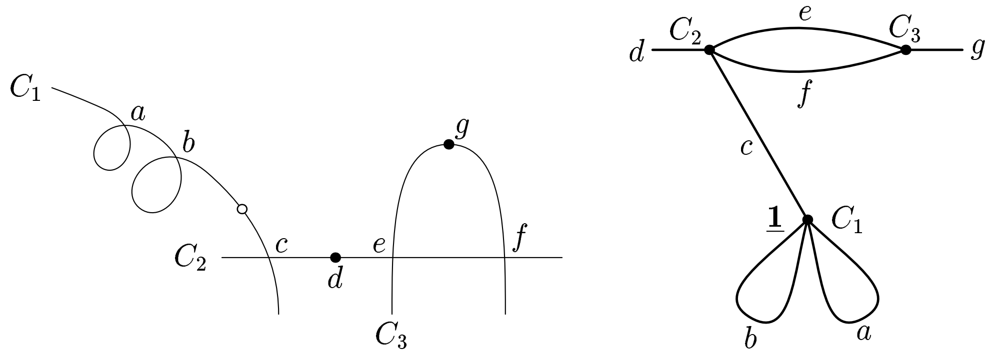


Figure 12 – Une courbe stable et le graphe associé

Remarque 2.7. — Les graphes associés aux courbes dégénérées maximales sont les graphes trivalents dont tous les sommets sont de genre nul. Une telle courbe (qui est une réunion de droites projectives) est entièrement déterminée (à isomorphisme près) par son graphe.

Nous allons maintenant voir comment les différentes relations entre les strates des espaces de modules de courbes (inclusion d'une strate dans l'adhérence d'une autre, morphismes d'accrochage) s'interprètent en termes de graphes.

Définition 2.8. — La *contraction* d'une arrête $(\varphi, j\varphi)$ entre deux sommets a et b d'un graphe $\mathrm{G} = (\mathrm{F}, \mathrm{V}, j, \partial)$ est définie par la figure 13. Plus formelle-

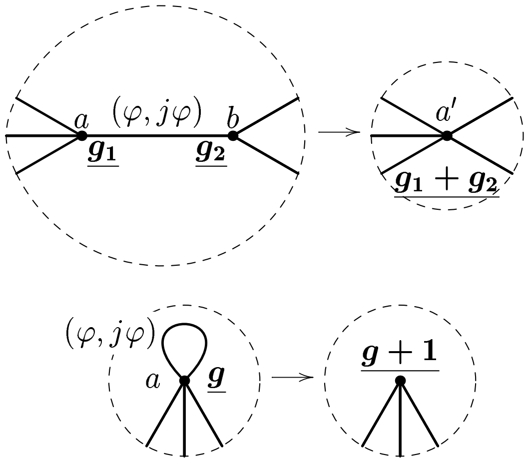


Figure 13 – Contraction d'une arrête φ d'un graphe. Nous n'avons représenté qu'une partie du graphe : en dehors des pointillés, il reste inchangé.

ment, c'est le graphe $\mathrm{G}' = (\mathrm{F}', \mathrm{V}', j', \partial')$ défini par

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{V}' = \mathrm{V} \setminus \{\, a, b \,\} \amalg \{\, a' \,\} = \mathrm{V}/\{\, a, b \,\}\\
&\mathrm{F}' = \mathrm{F} \setminus \{\, \varphi, j\varphi \,\}\\
&j' = j|_{\mathrm{F}'}\\
&\partial' : \mathrm{F}' \hookrightarrow \mathrm{F} \xrightarrow{\partial} \mathrm{V} \longrightarrow \mathrm{V}'\\
&c' = c\\
&g' : \begin{cases} \mathrm{V} \longrightarrow \mathbb{N} \\ v \longmapsto g'(v) = \begin{cases} g(v) & \text{si } v \neq a' \\ g(a) + g(b) & \text{si } v = a' \text{ et } a \neq b \\ g(a) + 1 & \text{si } v = a' \text{ et } a = b \end{cases} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Remarque 2.9. — Comme l'illustrent les figures 14 et 15, la contraction s'interprète au niveau des espaces de modules de courbes comme l'inclusion d'une strate dans l'adhérence d'une autre.

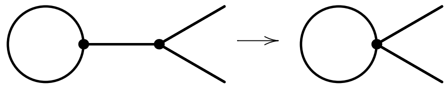


Figure 14 – Cette contraction s'interprète comme l'inclusion d'un point dans $\mathscr{S}_{1,2}$. Voir aussi la figure 17 pour les autres strates de $\bar{\mathscr{M}}_{1,2}$.

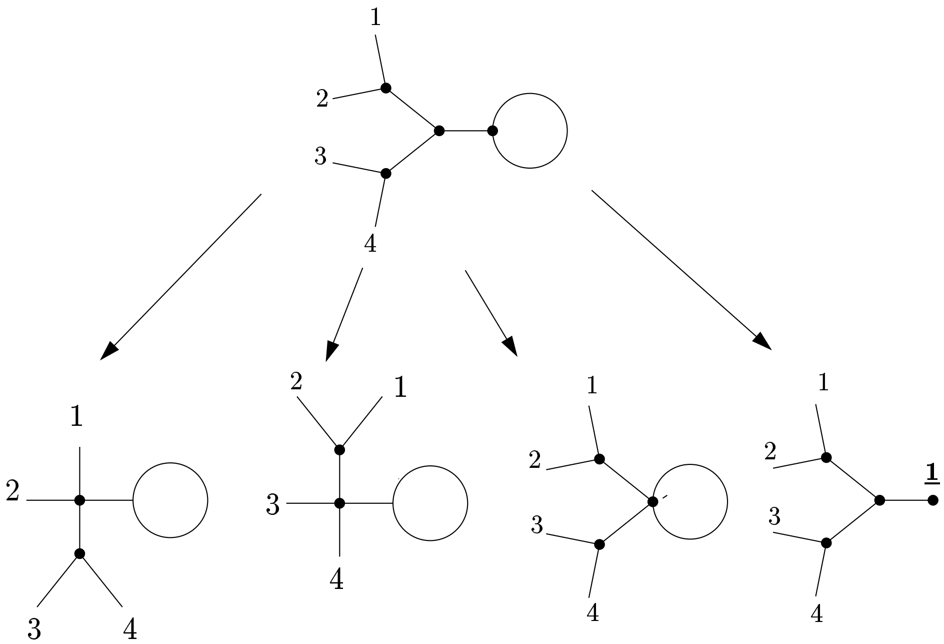


Figure 15 – Un graphe trivalent, correspondant à une strate de dimension nulle, et les graphes correspondant aux strates de dimension un sur lesquelles elle se trouve. Ici, il s'agit de l'intersection de quatre strates de dimension un, dans $\bar{\mathscr{M}}_{1,4}$, qui est de dimension quatre.

Définition 2.10. — Soient G un graphe non nécessairement connexe et a et b deux jambes différentes. On définit le *recollement* de a et b comme le graphe de la figure 16.

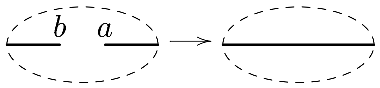


Figure 16 – Recollement de deux jambes a et b d'un graphe

Plus formellement, on définit le recollement des jambes a et b de $\mathrm{G} = (\mathrm{F}, \mathrm{V}, j, \partial)$ comme le graphe $\mathrm{G}' = (\mathrm{F}', \mathrm{V}', j', \partial')$ où

$$\mathrm{V}' = \mathrm{V} \qquad \mathrm{F}' = \mathrm{F} \qquad \partial' = \partial$$

$$g' = g \qquad c' = c|_{\{\text{jambes de } \mathrm{G}'\}}$$

$$j'(v) = \begin{cases} j(v) & \text{si } v \neq a, b \\ a & \text{si } v = b \\ b & \text{si } v = a. \end{cases}$$

Remarque 2.11. — Les morphismes d'accrochage (ou d'auto-accrochage) entre les espaces de modules de courbes s'interprètent, au niveau des graphes, comme des recollements, $\mathrm{G}_1 \amalg \mathrm{G}_2 \longrightarrow \mathrm{G}'$ ou $\mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{G}'$.

Lemme 2.12. — *Soient* C *une courbe stable dégénérée maximale,* i.e., *une courbe stable dont chaque composante irréductible soit de genre géométrique nul avec trois points spéciaux et* G *le graphe associé. Leurs groupes d'automorphismes sont canoniquement isomorphes :* $\mathrm{Aut}\,\mathrm{C} \simeq \mathrm{Aut}\,\mathrm{G}$.

Démonstration : (a) Construisons une application $\mathrm{Aut}\,\mathrm{C} \longrightarrow \mathrm{Aut}\,\mathrm{G}$. Soit f un automorphisme de la courbe C et $\widetilde{\mathrm{C}}$ sa normalisée. Il existe un unique automorphisme $\widetilde{f}$ de $\widetilde{\mathrm{C}}$ tel que

$$\begin{tikzcd} \widetilde{\mathrm{C}} \arrow[r, "\widetilde{f}"] \arrow[d, "\pi"'] & \widetilde{\mathrm{C}} \arrow[d, "\pi"] \\ \mathrm{C} \arrow[r, "f"'] & \mathrm{C}. \end{tikzcd}$$

Rappelons que le graphe $G = (F, V, j, \partial, c, g)$ associé à la courbe C est défini par

$$\begin{aligned} F &= \{\,\text{composantes connexes de } \widetilde{C}\,\} \\ V &= \{\,\text{points spéciaux de } C\,\}. \end{aligned}$$

On définit alors un automorphisme de G par

$$f_0 : \begin{cases} V \longrightarrow V \\ v \longmapsto f(v) \text{ où } v \text{ est une composante connexe de } \widetilde{C} \end{cases}$$
$$f_1 : \begin{cases} F \longrightarrow F \\ \varphi \longmapsto \widetilde{f}(\varphi) \text{ où } \varphi \text{ est un point spécial de } \widetilde{C}. \end{cases}$$

Vérifions qu'il s'agit bien d'un morphisme de graphes. Montrons que (f_1, f_0) préserve bien j. Si $\varphi \in F$ est une jambe de G, *i.e.*, si $j\varphi = \varphi$, alors φ correspond à un point marqué de C et son image $\widetilde{f}\varphi$ est nécessairement un point marqué : $j\widetilde{f}\varphi = \widetilde{f}\varphi$, donc $j\widetilde{f}\varphi = \widetilde{f}\varphi = \widetilde{f}j\varphi$. Comme ce point marqué a la même couleur, on a aussi $c\widetilde{f}\varphi = c\varphi$.

Si $\varphi \in F$ n'est pas une jambe de G, on a $j\varphi \neq \varphi$ et φ et $j\varphi$ sont les deux points de $\widetilde{C}$ au dessus d'un point singulier $\pi\varphi = \pi j\varphi$. On a donc $f\pi\varphi = f\pi j\varphi$. Mais comme le carré ci-dessus commute, *i.e.*, $f\pi = \pi\widetilde{f}$, on en déduit $\pi\widetilde{f}\varphi = \pi\widetilde{f}j\varphi$, donc $\widetilde{f}\varphi$ et $\widetilde{f}j\varphi$, qui sont distincts, sont les deux points de $\widetilde{C}$ au dessus du point singulier $\pi\widetilde{f}\varphi = \pi\widetilde{f}j\varphi$ et j les permute : $\widetilde{f}j\varphi = j\widetilde{f}\varphi$.

Montrons que (f_1, f_0) préserve ∂. Dire que $\partial\varphi = v$ signifie que le point φ de $\widetilde{C}$ est sur la composante connexe v de $\widetilde{C}$, donc que son image $\widetilde{f}\varphi$ est sur la composante $\widetilde{f}v$, *i.e.*, $\partial\widetilde{f}\varphi = fv = f\partial\varphi$.

Le genre g des sommets est bien évidemment préservé par (f_0, f_1) (il est toujours nul).

(b) Construisons maintenant une application $\operatorname{Aut} G \longrightarrow \operatorname{Aut} C$. Soit (f_1, f_0) un automorphisme du graphe G. Comme $\widetilde{C}$ est une somme disjointe de droites projectives à trois points marqués, f_0 définit une permutation de ses composantes connexes. Comme $f_0\partial = \partial f_1$, l'automorphisme (f_1, f_0) définit, pour toute composante connexe v de $\widetilde{C}$, une bijection entre les trois points marqués de v et ceux de f_0v, qui se prolonge en un isomorphisme entre v et f_0v. On a donc un automorphisme $\widetilde{f}$ de $\widetilde{C}$. Le morphisme $\pi : \widetilde{C} \longrightarrow C$ est défini par l'identification des points φ et $j\varphi$ pour tout $\varphi \in F$: comme f_1 et j commuttent, (f_1, f_0) définit bien un automorphisme de C.

(c) Les applications $\operatorname{Aut} C \longrightarrow \operatorname{Aut} G$ et $\operatorname{Aut} G \longrightarrow \operatorname{Aut} C$ que nous venons de construire sont clairement des morphismes de groupes, inverses l'un de l'autre. □

Nous pouvons maintenant continuer notre liste d'exemples d'espaces de modules. Nous avons déjà décrit $\mathscr{S}_{1,2}$ en termes de courbes, la figure 17 le fait en termes de graphes.

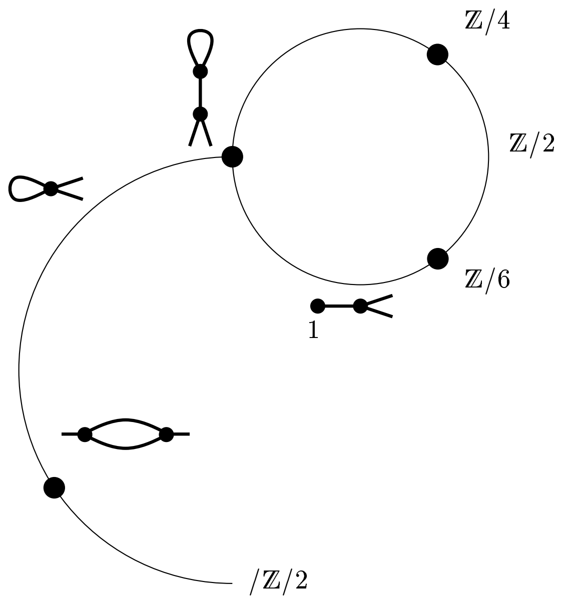


Figure 17 – $\mathscr{S}_{1,2}$ (avec des graphes)

Exemple 2.13. — Examinons l'espace de modules $\bar{\mathscr{M}}_{0,5}$. Les morphismes d'accrochage sont donnés par la figure 18. Il y a 10 strates de codimension 1 (de dimension un), chacune contenant trois strates de codimension 2 (des points). Chacune des 15 strates de codimension 2 est contenue dans deux strates de codimension 1. Les figures 19 et 20 représentent le diviseur à l'infini $\mathscr{S}_{0,5}$.

Exemple 2.14. — Examinons maintenant $\bar{\mathscr{M}}_{0,\{1,a,a,b,b\}}$: c'est le quotient de $\bar{\mathscr{M}}_{0,5}$ par $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$. Son diviseur à l'infini est représenté sur la figure 21.

3 Morphismes d'accrochage

Nous allons maintenant décrire la structure des strates ouvertes de $\bar{\mathscr{M}}_{g,n}$ à l'aide du graphe décrivant une telle strate et des espaces de modules de courbes *lisses* de dimensions inférieures.

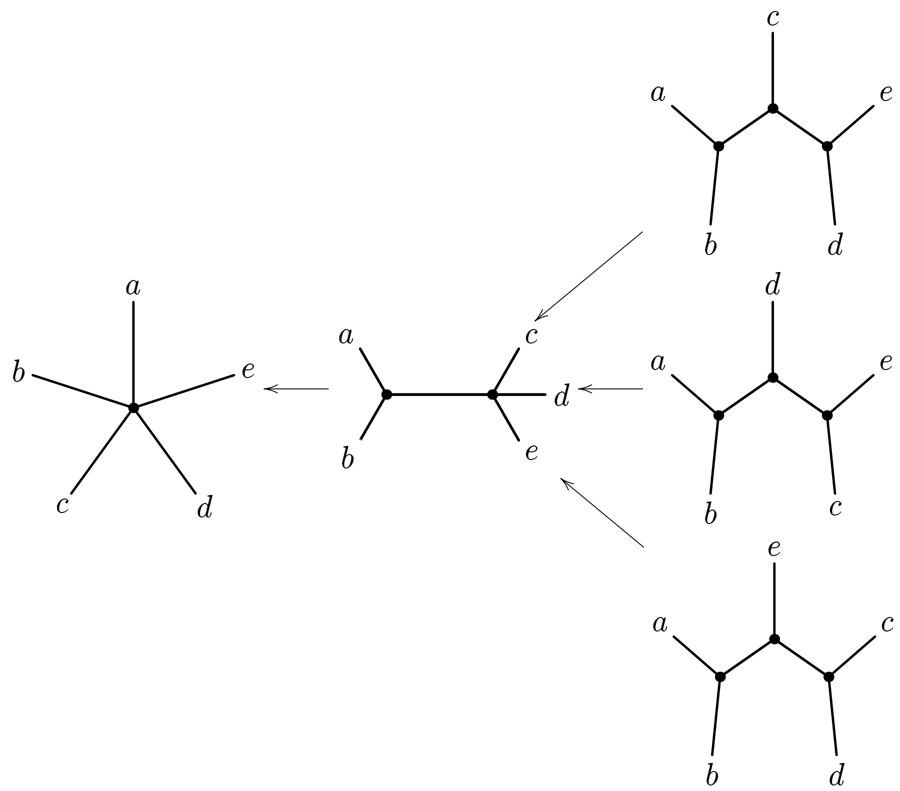


Figure 18 – Les morphismes d'accrochage de $\bar{\mathscr{M}}_{0,5}$ (il y a en fait dix strates de dimension un, qui ne diffèrent que par un coloriage différent des jambes des graphes)

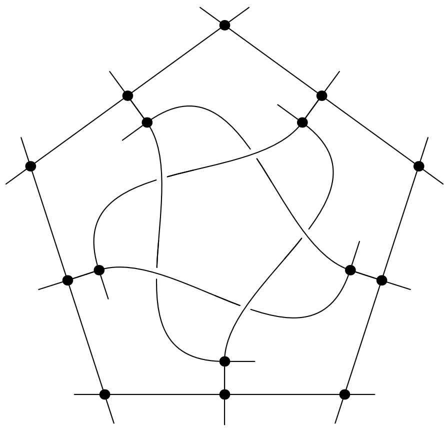


Figure 19 – Le diviseur à l'infini $\mathscr{S}_{0,5}$

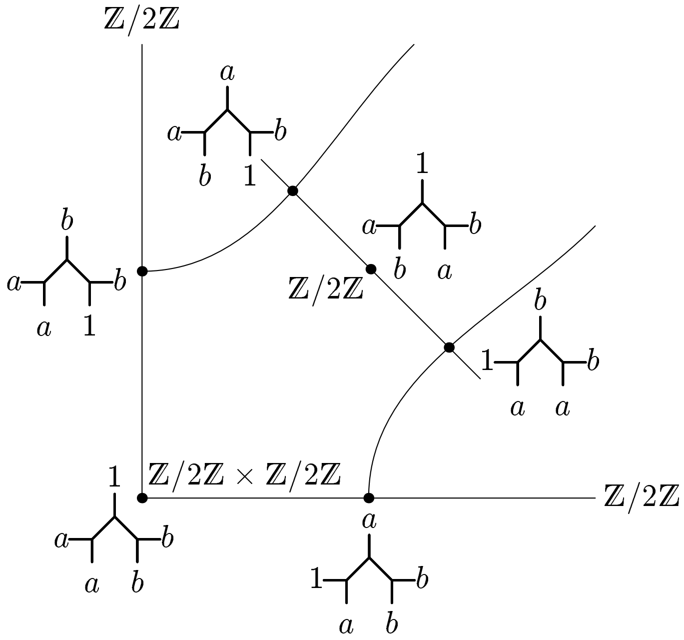


Figure 21 – Le diviseur à l'infini de $\bar{\mathscr{M}}_{0,\{1,a,a,b,b\}}$

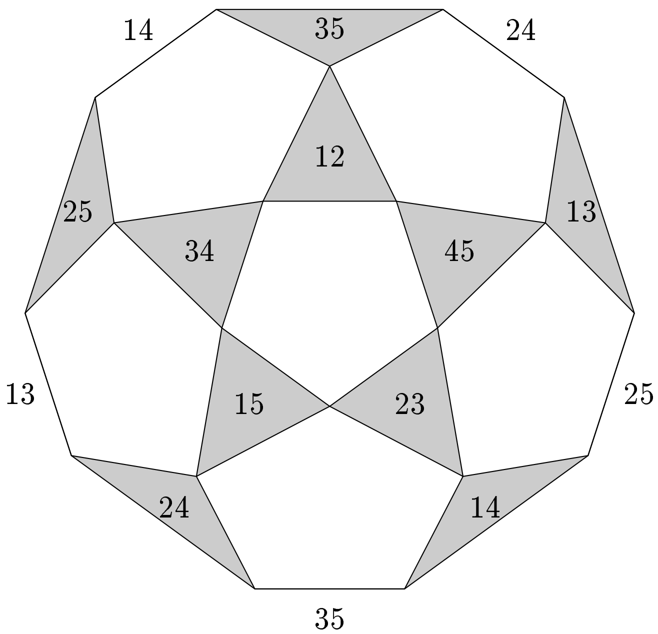
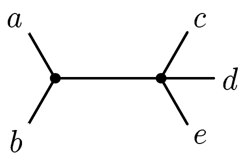


Figure 20 – Une autre vue de $\mathscr{S}_{0,5}$: les triangles représentent les composantes de dimension un, décrites par des graphes de la forme

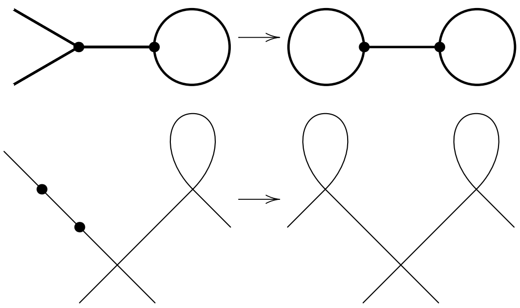


(les numéros sont les valeurs de a et b) ; deux triangles se touchent quand les composantes correspondantes se rencontrent ; enfin, il faut identifier les côtés opposés du décagone externe.

Remarque 3.1. — Nous avons signalé en 1.12 que les morphismes d'accrochage n'étaient pas toujours des immersions fermées. On peut remarquer que, dans ces cas, le morphisme d'accrochage se factorise par

$$\begin{aligned}(\bar{\mathscr{M}}_{g,1} \times \bar{\mathscr{M}}_{g,1})/\mathbb{Z}/2 &\longrightarrow \bar{\mathscr{M}}_{2g,0}\\ \bar{\mathscr{M}}_{g,n+2}/\mathbb{Z}/2 &\longrightarrow \bar{\mathscr{M}}_{g+1,n}.\end{aligned}$$

On peut donc se demander si ces morphismes ne seraient pas des immersions fermées : ce n'est pas le cas, comme le montre la figure 22.



$$\begin{tikzcd} {*/\mathbb{Z}/2} \arrow[rr] \arrow[dr] & & {*/\mathbb{Z}/8} \\ & {(*/\mathbb{Z}/2)/\mathbb{Z}/2} \arrow[ur, dotted] & \end{tikzcd}$$

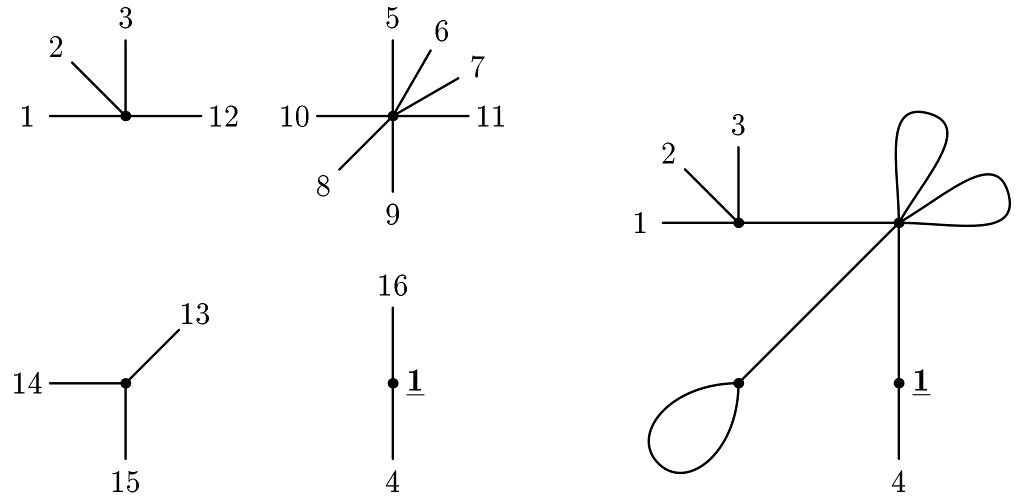
Figure 22: Même après avoir quotienté par $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, les morphismes d'accrochage ne sont pas toujours des immersions fermées : dans cet exemple (décrit en haut avec des graphes, au milieu avec des courbes, en bas avec les espaces de modules correspondants), on ne représente qu'une strate de dimension nulle, dont le groupe d'automorphismes passe de $\mathbb{Z}/2$ à $(\mathbb{Z}/2)^3$. Le morphisme en pointillés n'est pas une équivalence.

Proposition 3.2. — *Soient* $\mathscr{M}_{g_1,n_1} \times \cdots \times \mathscr{M}_{g_k,n_k} \longrightarrow \mathscr{S}_{g,n}$ *un morphisme d'accrochage et* G *le graphe qui le décrit. Alors le morphisme*

$$(\mathscr{M}_{g_1,n_1} \times \cdots \times \mathscr{M}_{g_k,n_k})/\operatorname{Aut}\mathrm{G} \longrightarrow \mathscr{S}_{g,n}$$

est une équivalence sur la strate ouverte définie par G.

Démonstration : Notons $\mathscr{M}_{\mathrm{G}}$ l'espace de modules de courbes de type G, *i.e.*, l'image du morphisme d'accrochage associé au graphe G, *i.e.*, la strate



(a) Le graphe H (avant accrochage)

(b) Le graphe G (après accrochage)

Figure 23 – Des graphes H et G décrivant un morphisme d'accroghage généralisé $\mathscr{M}_{\mathrm{H}}/\operatorname{Aut}\mathrm{G} \longrightarrow \mathscr{M}_{\mathrm{G}}$

ouverte (ou le produit de strates ouvertes) décrite par le graphe G ; notons H le graphe (non nécessairement connexe) obtenu à partir de G en coupant toutes les arrêtes et en numérotant les jambes ainsi créées par des numéros distincts (voir figure 23) : ainsi, $\mathscr{M}_{\mathrm{H}} = \mathscr{M}_{g_1,n_1} \times \cdots \times \mathscr{M}_{g_k,n_k}$. Le groupe $\operatorname{Aut}\mathrm{G}$ induit une action sur $\mathscr{M}_{\mathrm{H}}$. Pour démontrer l'équivalence des catégories fibrées $\mathscr{M}_{\mathrm{H}}/\operatorname{Aut}\mathrm{G}$ et $\mathscr{M}_{\mathrm{G}}$, nous allons juste montrer que les fibres au dessus d'un schéma T sont des catégories équivalentes. Pour mieux comprendre les choses, commençons par regarder ce qui se passe au dessus d'un corps algébriquement clos : on ne considère alors plus des familles de courbes mais simplement des courbes.

(a) Notons $\mathfrak{A}$ la catégorie des courbes de type G sur k (c'est la fibre de $\mathscr{M}_{\mathrm{G}}$ au dessus de $\operatorname{Spec} k$) et $\mathfrak{B}$ la catégorie des orbites de courbes de type H sous l'action du groupe $\operatorname{Aut}\mathrm{G}$ (c'est la fibre de $\mathscr{M}_{\mathrm{H}}/\operatorname{Aut}\mathrm{G}$ au dessus de $\operatorname{Spec} k$). Décrivons plus précisément cette catégorie $\mathfrak{B}$.

(i) Ses objets sont les familles $(\mathrm{C}_g)_{g\in\operatorname{Aut}\mathrm{G}}$ de courbes de type H indexées par $\operatorname{Aut}\mathrm{G}$ telles que $\mathrm{C}_g = g\cdot\mathrm{C}_1$ pour tout $g \in \operatorname{Aut}\mathrm{G}$.

(ii) Les morphismes $(\mathrm{C}_g)_g \longrightarrow (\mathrm{D}_g)_g$ sont les couples (h,φ) où $h \in \operatorname{Aut}\mathrm{G}$ et $\varphi : \mathrm{C}_1 \longrightarrow \mathrm{D}_h$ est un isomorphisme. Cela induit en particulier des isomorphismes $g\cdot\varphi : \mathrm{C}_g \longrightarrow \mathrm{D}_{gh}$.

On remarquera que l'indexation des objets d'une orbite importe peu : si

$(\mathrm{C}_g)_g \in \mathrm{Ob}\mathfrak{B}$ et $h \in \mathrm{Aut}\,\mathrm{G}$, on a un isomorphisme

$$(h^{-1}, \mathrm{Id}_{\mathrm{C}_1}) : (\mathrm{C}_g)_g \longrightarrow (\mathrm{C}_{gh})_g.$$

On aurait pu définir la catégorie $\mathfrak{B}$ comme la catégorie des orbites non pas indexées par Aut G mais simplement munies d'une action de Aut G : on aurait obtenu une catégorie équivalente.

(b) Décrivons maintenant le foncteur d'accrochage $\mathfrak{B} \longrightarrow \mathfrak{A}$. L'image d'un objet $(\mathrm{C}_g)_g$ de $\mathfrak{B}$ est la courbe, que nous noterons $\overline{\mathrm{C}}_1$, obtenue en recollant C_1. Remarquons que si on avait recollé C_g pour un $g \in \mathrm{Aut}\,\mathrm{G}$, on aurait obtenu une courbe canoniquement isomorphe : nous noterons g cet isomorphisme $\overline{\mathrm{C}}_1 \longrightarrow \overline{\mathrm{C}}_g$. Pour définir l'image d'un morphisme $(h, \varphi) : (\mathrm{C}_g)_g \longrightarrow (\mathrm{D}_g)_g$, on remarque que le morphisme $\varphi : \mathrm{C}_1 \longrightarrow \mathrm{D}_h$ induit un morphisme $\overline{\mathrm{C}}_1 \longrightarrow \overline{\mathrm{D}}_h$ que l'on peut composer avec l'isomorphisme canonique $h^{-1} : \overline{\mathrm{D}}_h \longrightarrow \overline{\mathrm{D}}_1$.

(c) Montrons que le foncteur d'accrochage $\mathfrak{B} \longrightarrow \mathfrak{A}$ est essentiellement surjectif. Soit C un objet de $\mathfrak{A}$, *i.e.*, une courbe de type G. Sa normalisée C_1 a pour composantes connexes les normalisées des composantes irréductibles de C, avec comme points marqués les points marqués de C et les points qui étaient singuliers sur C (numérotés par des numéros distincts) ; c'est un objet de $\mathfrak{B}$ dont l'image est (isomorphe à) C.

(d) Montrons que le foncteur d'accrochage $\mathfrak{B} \longrightarrow \mathfrak{A}$ est pleinement fidèle. Soient $(\mathrm{C}_g)_g$ et $(\mathrm{D}_g)_g$ des objets de $\mathfrak{B}$, *i.e.*, des orbites de courbes de type H, et $\overline{\mathrm{C}}_1$ et $\overline{\mathrm{D}}_1$ les courbes recollées correspondantes. Nous voulons montrer que

$$\mathrm{Hom}\Big((\mathrm{C}_g)_g, (\mathrm{D}_g)_g\Big) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\overline{\mathrm{C}}_1, \overline{\mathrm{D}}_1) \qquad (*)$$

est une bijection. Soit $\psi : \overline{\mathrm{C}}_1 \longrightarrow \overline{\mathrm{D}}_1$ un morphisme. Les composantes irréductibles de $\overline{\mathrm{C}}_1$ et $\overline{\mathrm{D}}_1$ sont indexées par les sommets de G ; les points spéciaux, *i.e.*, les points au dessus des points marqués ou singuliers des composantes irréductibles de C_1 et D_1, sont indexés par les demi-arrêtes de G. Donc ψ définit une permutation de ces demi-arrêtes. Comme ces permutations respectent la relation d'appartenance d'un point à une composante, elles respectent la relation d'incidence définissant le graphe G : ψ induit un automorphisme h de G. Considérons maintenant l'isomorphisme

$$\overline{\mathrm{C}}_1 \xrightarrow{\ \psi\ } \overline{\mathrm{D}}_1 \xrightarrow{\ h^{-1}\ } \overline{\mathrm{D}}_{h^{-1}}.$$

Les composantes irréductibles de $\overline{\mathrm{C}}_1$ et $\overline{\mathrm{D}}_{h^{-1}}$ sont indexées par les sommets de H ; les points spéciaux des composantes irréductibles de $\overline{\mathrm{C}}_1$ et $\overline{\mathrm{D}}_{h^{-1}}$ sont indexées par les demi-arrêtes de H et l'isomorphisme préserve ces indexations. Par conséquent, il provient d'un isomorphisme

$$\varphi : \mathrm{C}_1 \longrightarrow \mathrm{D}_{h^{-1}}$$

et ainsi ψ est l'image de (h^{-1}, φ) : nous venons de montrer que l'application $(*)$ est surjective. Comme, dans la discussion précédente, on n'avait pas le choix de h et de φ, elle est aussi injective.

(e) Nous passons maintenant au cas général, au dessus d'un schéma quelconque T. Il nous faut décrire les nouvelles catégories $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$. La catégorie $\mathfrak{A}$ est la catégorie des familles de courbes de type G au dessus de T. La catégorie $\mathfrak{B}$ est la catégorie des « familles d'orbites de courbes de type H sous l'action de Aut G au dessus de T ». Pour mieux comprendre la définition de $\mathfrak{B}$, revenons sur le cas d'un corps algébriquement clos et décrivons la fibre un peu différemment. Nous l'avions définie comme la catégorie des orbites $(\mathrm{C}_g)_{g\in\mathrm{Aut}\,\mathrm{G}}$ (avec certains morphismes). On peut aussi la voir comme la catégorie des morphismes $\coprod_{g\in\mathrm{Aut}\,\mathrm{G}} \mathrm{C}_g \longrightarrow \mathrm{Aut}\,\mathrm{G} \times \mathrm{Spec}\, k$, avec les mêmes morphismes qu'avant. Pour avoir une description plus simple de ces morphismes, on peut remplacer $\mathrm{Aut}\,\mathrm{G}\times\mathrm{Spec}\, k$ par un schéma, muni d'une action de Aut G et Aut G-isomorphe à $\mathrm{Aut}\,\mathrm{G} \times \mathrm{Spec}\, k$ (c'est ce que l'on appelle un Aut G-espace principal homogène sur $\mathrm{Spec}\, k$) et remplacer $\mathrm{X} = \coprod_{g\in\mathrm{Aut}\,\mathrm{G}} \mathrm{C}_g$ par un schéma muni d'une action de Aut G qui lui est Aut G-isomorphe. On peut alors voir $\mathfrak{B}$ comme la catégorie dont les objets sont la donnée de

(*i*) un espace principal homogène E sur T, pour le groupe Aut G, *i.e.*, un schéma E sur T, muni d'une action de Aut G, isomorphe à $\mathrm{Aut}\,\mathrm{G} \times \mathrm{T}$ (mais on ne se donne pas cet isomorphisme) ;

(*ii*) une famille de courbes $(\mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{E})$ de type H sur E, munie d'une action de Aut G sur X, telle que le morphisme $\mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{E}$ soit équivariant et que les diagrammes suivants soient catésiens pour tout $g \in \mathrm{Aut}\,\mathrm{G}$,

$$\begin{tikzcd} \mathrm{X} \arrow[r, "g"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & \mathrm{X} \arrow[d] \\ \mathrm{E} \arrow[r, "g"'] & \mathrm{E}, \end{tikzcd}$$

et dont les morphismes sont les diagrammes équivariants, commutatifs et cartésiens

$$\begin{tikzcd} \mathrm{X} \arrow[rr] \arrow[d] & & \mathrm{Y} \arrow[d] \\ \mathrm{E} \arrow[rr] \arrow[dr] & & \mathrm{F} \arrow[dl] \\ & \mathrm{T}. & \end{tikzcd}$$

(f) Pour décrire la catégorie $\mathfrak{B}$ d'une manière semblable à celle utilisée au dessus d'un corps algébriquement clos, remarquons que la catégorie des

$\mathrm{Aut\,G}$-espaces principaux sur T est équivalente à la catégorie dont l'unique objet est $\coprod_{g\in \mathrm{Aut\,G}} \mathrm{T}_g$, où $\forall g \in \mathrm{Aut\,G}$, $\mathrm{T}_g = \mathrm{T}$ et dont les morphismes sont les diagrammes commutatifs équivariants

$$\begin{tikzcd} \coprod_{g\in \mathrm{Aut\,G}} \mathrm{T}_g \arrow[rr] \arrow[dr] & & \coprod_{g\in \mathrm{Aut\,G}} \mathrm{T}_g \arrow[dl] \\ & \mathrm{T}. & \end{tikzcd}$$

Un $\mathrm{Aut\,G}$-morphisme $\coprod_g \mathrm{T}_g \longrightarrow \coprod_g \mathrm{T}_g$ au dessus de T est entièrement défini par l'image de T_e (où e est l'élément neutre de $\mathrm{Aut\,G}$). Si T est connexe, l'image de T_e est l'un des T_g et le morphisme $\mathrm{T}_e \longrightarrow \mathrm{T}_g$ est l'identité. Mais si T n'est pas connexe, l'image de T_e peut provenir des composantes connexes de différents T_g. Plus précisément, si $\mathrm{T} = \coprod_{i\in \mathrm{I}} \mathrm{T}_i$ est la décomposition de T en somme de ses composantes connexes, on peut écrire $\coprod_g \mathrm{T}_g = \coprod_{g,i} \mathrm{T}_{g,i}$ avec $\mathrm{T}_{g,i} = \mathrm{T}_i$ et l'image de $\coprod_i \mathrm{T}_{e,i}$ peut s'écrire $\coprod_i \mathrm{T}_{g_i,i}$ où les g_i sont des éléments de $\mathrm{Aut\,G}$. Par conséquent, la catégorie des $\mathrm{Aut\,G}$-espaces principaux homogènes sur T est équivalente à la catégorie dont l'unique objet est $\coprod_{g,i} \mathrm{T}_{g,i}$ et dont les morphismes sont la donnée, pour tout $i \in \mathrm{I}$ d'un $g_i \in \mathrm{Aut\,G}$, *i.e.*,

$$\mathrm{Hom}\Big(\coprod_{i\in \mathrm{I}} \mathrm{T}_{g_i}, \coprod_{i\in \mathrm{I}} \mathrm{T}_{g_i}\Big) = \prod_{i\in \mathrm{I}} \mathrm{Aut\,G}.$$

(g) On peut maintenant décrire (une catégorie équivalente à) la catégorie $\mathfrak{B}$ d'une manière très proche de celle utilisée au dessus d'un corps algébriquement clos. Ses objets sont les morphismes $\mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{Aut\,G} \times \mathrm{T}$ où $\mathrm{X} = \coprod_{g\in \mathrm{Aut\,G}} \mathrm{X}_g$, avec $\mathrm{X}_g = g \cdot \mathrm{X}_1$ et $\mathrm{X}_1 \longrightarrow \mathrm{T}$ une courbe de type H. Pour définir les morphismes, notons $\mathrm{T} = \coprod_{i\in \mathrm{I}} \mathrm{T}_i$ la décomposition de T en ses composantes connexes. Un morphisme $\mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{Y}$ est la donnée tout $i \in \mathrm{I}$ d'un $h_i \in \mathrm{Aut\,G}$ pour et d'un morphisme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{X}_{1,i} \arrow[rr] \arrow[dr] & & \mathrm{Y}_{h_i,i} \arrow[dl] \\ & \mathrm{T}_i, & \end{tikzcd}$$

où $\mathrm{X}_{g,i} = \mathrm{X}_g \times_{\mathrm{T}} \mathrm{T}_i$ et $\mathrm{Y}_{g,i} = \mathrm{Y}_g \times_{\mathrm{T}} \mathrm{T}_i$.

(h) Cette nouvelle description de la catégorie $\mathfrak{B}$ nous permet d'appliquer textuellement le même raisonnement qu'au dessus d'un corps algébriquement clos et de conclure que les catégories $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ sont encore équivalentes. $\square$

4 Graphes en rubans

Grace aux différentielles de Strebel (voir par exemple [Mulase–Penkawa]), on peut construire des surfaces de Riemann à points marqués à partir d'un graphe en rubans métrique. On a même un isomorphisme d'orbifolds *topologiques*

$$\mathscr{M}_{g,n} \times \mathbb{R}_+^n \longrightarrow \mathscr{M}_{g,n}^{\text{graphes}}$$

où $\mathscr{M}_{g,n}^{\text{graphes}}$ est l'espace de modules de graphes en rubans métriques de type (g,n) : cela nous donne une description combinatoire de $\mathscr{M}_{g,n}$. Cette remarque explique l'omniprésence de la notion de graphe en rubans, que nous allons maintenant décrire et qui nous permettra de définir des points-bases tangenciels sur les espaces de modules $\mathscr{M}_{g,n}$.

Définition 4.1. — Un *graphe en rubans* $(\mathrm{X}, \sigma_0, \sigma_1)$ est la donnée d'un ensemble X, d'une involution σ_1 de X et d'une bijection σ_0 de X.

Un *morphisme de graphes en rubans* $f : (\mathrm{X}, \sigma_0, \sigma_1) \longrightarrow (\mathrm{X}', \sigma_0', \sigma_1')$ est une bijection $f : \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{X}'$ qui commute avec σ_0 et σ_1.

Définition 4.2. — Soit $\mathrm{G} = (\mathrm{X}, \sigma_0, \sigma_1)$ un graphe en rubans. On note X_0 l'ensemble des orbites de σ_0. Le *graphe sous-jacent* à G est défini par

$$\mathrm{V} = \mathrm{X}_0, \qquad \mathrm{F} = \mathrm{X}, \qquad j = \sigma_1,$$

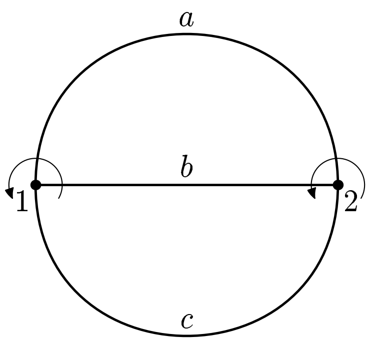
$$\partial : \begin{cases} \mathrm{F} & \longrightarrow \quad \mathrm{X}_0 \\ \varphi & \longmapsto \quad \text{orbite de } \varphi \text{ sous l'action de } \sigma_0. \end{cases}$$

De même, un morphisme de graphes en rubans définit un morphisme de graphes. On a un foncteur fidèle de la catégorie des graphes en rubans vers celle des graphes.

Remarque 4.3. — Un graphe en rubans peut aussi se définir comme un graphe muni d'un ordre cyclique en chaque sommet (figure 24).

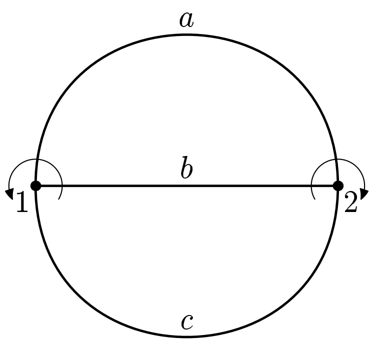
Remarque 4.4. — Les *demi-arrêtes* sont les éléments de X, les *arrêtes* sont les orbites à deux éléments de l'action de σ_1, les *jambes* sont les points fixes de σ_1, les *sommets* sont les orbites de σ_0. La bijection σ_0 définit un ordre cyclique sur les demi-arrêtes qui partent d'un sommet. Nous noterons X_0 l'ensemble de ses sommets et X_1 l'ensemble de ses arrêtes.

On pose parfois aussi $\sigma_2 = \sigma_1\sigma_0$ et on note X_2 l'ensemble de ses orbites : ce sont les *cycles* de G.



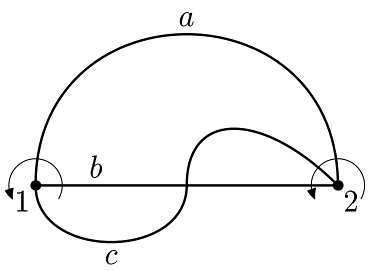
$$X = \{ (1,a), (1,b), (1,c), (2,a), (2,b), (2,c) \}$$

$x \in X$	$1, a$	$1, b$	$1, c$	$2, a$	$2, b$	$2, c$
$\sigma_1 x$	$2, a$	$2, b$	$2, c$	$1, a$	$1, b$	$1, c$
$\sigma_0 x$	$1, c$	$1, a$	$1, b$	$2, b$	$2, c$	$2, a$



$$X = \{ (1,a), (1,b), (1,c), (2,a), (2,b), (2,c) \}$$

$x \in X$	$1, a$	$1, b$	$1, c$	$2, a$	$2, b$	$2, c$
$\sigma_1 x$	$2, a$	$2, b$	$2, c$	$1, a$	$1, b$	$1, c$
$\sigma_0 x$	$1, c$	$1, a$	$1, b$	$2, c$	$2, a$	$2, b$



$$X = \{ (1,a), (1,b), (1,c), (2,a), (2,b), (2,c) \}$$

$x \in X$	$1, a$	$1, b$	$1, c$	$2, a$	$2, b$	$2, c$
$\sigma_1 x$	$2, a$	$2, b$	$2, c$	$1, a$	$1, b$	$1, c$
$\sigma_0 x$	$1, c$	$1, a$	$1, b$	$2, c$	$2, a$	$2, b$

Figure 24 – Exemples de graphes en rubans (les deux derniers sont les mêmes)

On dit qu'un graphe en rubans est *connexe* si le graphe sous-jacent l'est.

Remarque 4.5. — On peut définir la réalisation géométrique d'un graphe en rubans G de la manière suivante. S'il est possible de plonger la réalisation géométrique du graphe sous-jacent dans le plan de manière que l'ordre cyclique en chaque sommet coïncide avec celui induit par l'orientation du plan, une réalisation géométrique de G est un voisinage tubulaire de ce plongement. En général, il n'est pas possible de plonger ainsi le graphe dans un plan, mais il suffit de le faire localement pour ensuite « recoller » les morceaux. Voir figure 25. Comme nous n'utiliserons pas cette notion, nous n'en donnons pas de définition formelle.

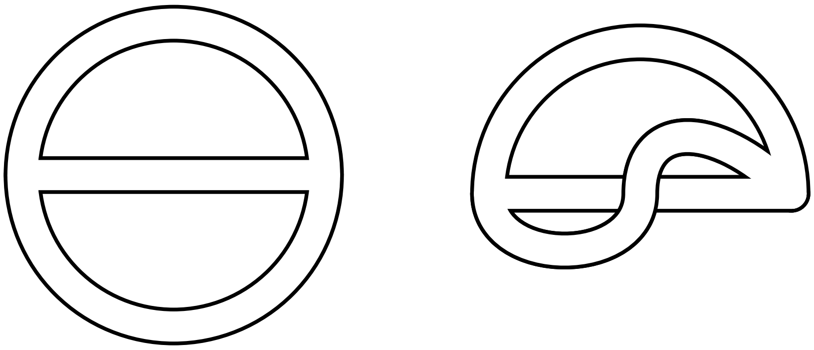


Figure 25 – Réalisation géométrique de deux graphes en rubans ayant le même graphe sous-jacent ; si on voit cette réalisation géométrique comme une surface de Riemann, il s'agit à gauche d'une sphère privée de trois points et à droite d'un tore privé d'un point.

Définition 4.6. — Un *graphe stable en rubans* est la donnée d'un graphe en rubans et d'une structure de graphe stable sur le graphe sous-jacent. Dorénavant, par « graphe en rubans », nous entendrons toujours « graphe stable en rubans ».

Pour les graphes en rubans, nous disposons toujours des opérations de contraction et de recollement.

Définition 4.7. — La *contraction* d'une arrête $\{e, \sigma_1 e\}$ d'un graphe en rubans $(\mathrm{X}, \sigma_0, \sigma_1)$ est le graphe $(\mathrm{X}', \sigma_0', \sigma_1')$ défini par (voir figure 26)

$$\mathrm{X}' = \mathrm{X} \setminus \{\, e, \sigma_1 e \,\}, \qquad \sigma_1' = \sigma_1|_{\mathrm{X}'},$$

$$\sigma_0'(f) = \begin{cases} \sigma_0(f) & \text{si } \sigma_0(f) \notin \{e, \sigma_0(f)\} \\ \sigma_0^2(f) & \text{si } \sigma_0(f) \in \{e, \sigma_0(f)\} \text{ et } \sigma_0^2(f) \notin \{e, \sigma_0(f)\} \\ \sigma_0^3(f) & \text{si } \{\sigma_0(f), \sigma_0^2(f)\} \subset \{e, \sigma_0(f)\}. \end{cases}$$

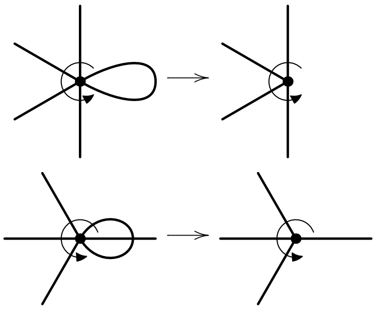


Figure 26 – Ce qu'il advient de l'ordre cyclique en un sommet lors de la contraction de l'arrête $(e, \sigma_1 e)$.

Définition 4.8. — Le recollement de deux jambes différentes a et b d'un graphe en rubans $(\mathrm{X}, \sigma_0, \sigma_1)$ est le graphe en rubans $(\mathrm{X}', \sigma_0', \sigma_1')$ défini par

$$\mathrm{X}' = \mathrm{X}, \qquad \sigma_0' = \sigma_0,$$

$$\sigma_1'(x) = \begin{cases} \sigma_1 x & \text{si } x \neq a \text{ et } x \neq b \\ a & \text{si } x = b \\ b & \text{si } x = a. \end{cases}$$

Par rapport aux graphes, il y a une nouvelle opération sur les graphes en rubans : la fusion. Elle concerne les graphes trivalents.

Définition 4.9. — Soient G un graphe en rubans trivalent, $e = \{\, a, b \,\}$ une arrête entre deux sommets distincts. On définit la *fusion* $\mathrm{fus}_e\,\mathrm{G}$ comme sur la figure 27.

Plus formellement, le graphe $\mathrm{fus}_e\,\mathrm{G}$ est défini par $\mathrm{X}' = \mathrm{X} \setminus \{a, b\} \amalg \{c, d\}$ et les applications σ_0 et σ_1 sont inchangées sauf dans les cas suivants.

$$\begin{array}{lll} \sigma_1'(c) = d, & \sigma_0'(c) = \sigma_0^2 b, & \sigma_0'(d) = \sigma_0^2 a, \\ \sigma_1'(d) = c, & \sigma_0'(\sigma_0^2 b) = \sigma_0 a, & \sigma_0'(\sigma_0^2 a) = \sigma_0 b, \\ & \sigma_0'(\sigma_0 a) = c, & \sigma_0'(\sigma_0 b) = d. \end{array}$$

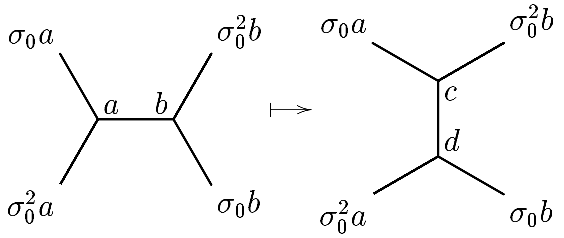


Figure 27 – La fusion d'un graphe en rubans

5 Espace tangent de $\bar{\mathscr{M}}_{g,n}$

Nous allons commencer par rappeler ce que sont des déformations universelles de courbes et comment elles permettent de décrire l'espace tangent de l'espace de modules $\bar{\mathscr{M}}_{g,n}$. Nous rappelerons aussi que l'on peut décrire les déformations d'une courbe dégénérée maximale en regardant simplement ses singularités. Enfin, nous expliquerons comment les graphes en rubans permettent de décrire cet espace tangent et de construire des points-bases tangenciels.

Pour simplifier, nous nous placerons sur un corps, algébriquement clos, de caractéristique nulle.[2]

Définition 5.1. — Une *déformation* d'une courbe propre $\mathrm{C} \longrightarrow \operatorname{Spec} k$ est un carré cartésien

$$\begin{tikzcd} \mathrm{C} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & \mathscr{C} \arrow[d] \\ \operatorname{Spec} k \arrow[r] & \operatorname{Spec} \mathrm{A} \end{tikzcd}$$

où $\mathscr{C} \longrightarrow \operatorname{Spec} \mathrm{A}$ est une courbe (propre et plate) et A une algèbre artinienne locale sur k, de corps résiduel k.

Un morphisme de déformations

$$\begin{tikzcd} \mathrm{C} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & \mathscr{C} \arrow[d] \\ \operatorname{Spec} k \arrow[r] & \mathscr{M} \end{tikzcd} \longrightarrow \begin{tikzcd} \mathrm{C} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & \mathscr{C}' \arrow[d] \\ \operatorname{Spec} k \arrow[r] & \mathscr{M}' \end{tikzcd}$$

2. Sur un corps k de caractéristique p, il faudrait considérer des algèbres artiniennes locales de corps résiduel k sur un anneau A_k local régulier complet, d'idéal maximal $p\mathrm{A}_k$ et de corps résiduel k (voir [Deligne–Mumford, p. 79]).

est un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
& \mathrm{C} \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[dd] & \\
\mathscr{C} \arrow[rr] \arrow[dd] & & \mathscr{C}' \arrow[dd] \\
& \operatorname{Spec} k \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\mathscr{M} \arrow[rr] & & \mathscr{M}'.
\end{tikzcd}$$

Les *iso*morphismes de déformations sont donc les morphismes de familles de courbes dont la restriction à C est l'identité.

Définition 5.2. — Une *déformation généralisée* d'une courbe propre $\mathrm{C} \longrightarrow \operatorname{Spec} k$ est un carré cartésien

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{C} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & \mathscr{C} \arrow[d] \\
\operatorname{Spec} k \arrow[r] & \operatorname{Spec} \mathrm{A}
\end{tikzcd}$$

où $\mathscr{C} \longrightarrow \operatorname{Spec} \mathrm{A}$ est une courbe (propre et plate) et A une algèbre locale sur k, de corps résiduel k, d'idéal maximal $\mathfrak{m}$, telle que tous les quotients $\mathrm{A}/\mathfrak{m}^n$, pour $n \in \mathbb{N}^\times$, soient des algèbres artiniennes sur k. On définit les *morphismes* de déformations généralisées comme précédemment.

Définition 5.3. — Une *déformation universelle* d'une courbe $\mathrm{C} \longrightarrow \operatorname{Spec} k$ est une déformation généralisée

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{C} \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{C} \arrow[d] \\
\operatorname{Spec} k \arrow[r] & \mathscr{M}
\end{tikzcd}$$

telle que pour toute déformation

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{C} \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{C}' \arrow[d] \\
\operatorname{Spec} k \arrow[r] & \mathscr{M}',
\end{tikzcd}$$

il existe un unique morphisme $f : \mathscr{M}' \longrightarrow \mathscr{M}$ et un unique morphisme $\widetilde{f}$: $\mathscr{C}' \longrightarrow \mathscr{C}$ tel que le diagramme suivant soit commutatif et le carré (sur la face avant) cartésien.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{C} \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[dd] & \\
\mathscr{C}' \arrow[rr, dotted] \arrow[dd] \arrow[drr, phantom, "\lrcorner", very near start] & & \mathscr{C} \arrow[dd] \\
 & \operatorname{Spec} k \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\mathscr{M}' \arrow[rr, dotted, "f"'] & & \mathscr{M}
\end{tikzcd}$$

On dira que $\mathscr{M}$ est la *base* de la déformation universelle.

Remarque 5.4. — On peut reformuler cette définition en termes de foncteurs proreprésentables. Soit $\mathfrak{Art}\,k$ la catégorie des k-algèbres locales artiniennes de corps résiduel k et de leurs morphismes locaux. On dit qu'un foncteur $\mathrm{D} : \mathfrak{Art}\,k \longrightarrow \mathfrak{Ens}$ est *proreprésentable* [Schlessinger] s'il existe une k-algèbre locale complète A, d'idéal maximal $\mathfrak{m}$, telle que, pour tout entier n, le quotient $\mathrm{A}/\mathfrak{m}^n$ soit dans $\mathfrak{Art}\,k$ et un isomorphisme de foncteurs

$$\mathrm{D} \simeq \mathrm{Hom}_{k\text{-loc}}(\mathrm{A}, \cdot),$$

(où $\mathrm{Hom}_{k\text{-loc}}$ désigne les k-morphismes *locaux* d'algèbres locales). Dire qu'une courbe C possède une déformation universelle revient à dire que le foncteur

$$\mathrm{D} : \begin{cases} \mathfrak{Art}\,k & \longrightarrow \quad \mathfrak{Ens} \\ \quad \mathrm{A} & \longmapsto \quad \{\, \text{classes d'isomorphismes de déformations de C sur A} \,\} \end{cases}$$

est proreprésentable.

Lemme 5.5. — *Les courbes stables ont des déformations universelles.*

Démonstration : Voir [Deligne–Mumford, p. 80]. □

Définition 5.6. — Soient C une courbe stable sur k et x un point singulier.

(i) Une *déformation locale* de C en x sur une k-algèbre artinienne locale A de corps résiduel k est la donnée d'une A-algèbre plate $\mathscr{O}$ et d'un isomorphisme $\mathscr{O} \otimes_{\mathrm{A}} k \simeq \widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{X},x}$, *i.e.*, c'est la donnée d'un carré cartésien

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Spec} \widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{X},x} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & \operatorname{Spec} \mathscr{O} \arrow[d] \\
\operatorname{Spec} k \arrow[r] & \operatorname{Spec} \mathrm{A}
\end{tikzcd}$$

où le morphisme $\operatorname{Spec} \mathscr{O} \longrightarrow \operatorname{Spec} \mathrm{A}$ est plat.

(ii) La courbe C possède une *déformation universelle locale* au point $x \in \mathrm{C}$ si le foncteur

$$\mathrm{D}_{\mathrm{loc}} : \left\{ \begin{array}{ccl} \mathfrak{Art}\, k & \longrightarrow & \mathfrak{Ens} \\ \mathrm{A} & \longmapsto & \{\text{classes d'isomorphismes de déformations} \\ & & \quad \text{locales de C en } x \text{ sur A}\,\} \end{array} \right.$$

est proreprésentable. On dira qu'un anneau A proreprésentant ce foncteur est la *base* de la déformation locale universelle de C en x. Par abus de langage, on appellera aussi Spec A la *base* de la déformation.

Exemple 5.7. — Soit x un point double ordinaire d'une courbe C. Il existe un isomorphisme

$$\widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{X},x} \simeq \frac{k[\![u,v]\!]}{\langle uv \rangle}$$

(on dit alors que (u,v) sont des *coordonnées locales* au voisinage de x) et d'après [Deligne–Mumford, 1.4 p.80], la déformation universelle locale de C en x est donnée par

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Spec} \dfrac{k[\![u,v]\!]}{\langle uv \rangle} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & \operatorname{Spec} \dfrac{k[\![u,v,\varepsilon]\!]}{\langle uv-\varepsilon \rangle} \arrow[d] \\ \operatorname{Spec} k \arrow[r] & \operatorname{Spec} k[\![\varepsilon]\!]. \end{tikzcd}$$

Remarque 5.8. — Soient C une courbe stable, $x_1, \ldots, x_n$ ses points singuliers (ce sont des points-doubles ordinaires) et, pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, $\operatorname{Spec} \mathrm{A}_i$ la base de la déformation universelle locale en x_i. On définit la *base* de la déformation locale de C comme $\mathscr{M}_{\mathrm{loc}} = \operatorname{Spec} \mathrm{M}_{\mathrm{loc}} = \operatorname{Spec} \mathrm{A}_1 \,\widehat{\otimes} \cdots \widehat{\otimes}\, \mathrm{A}_n$. D'après l'exemple précédent, si on choisit des coordonnées au voisinage de chacun des x_i, on a des isomorphismes $\mathrm{A}_i \simeq k[\![\varepsilon_i]\!]$ et $\mathrm{M}_{\mathrm{loc}} \simeq k[\![\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n]\!]$.

Lemme 5.9. — *Soient* C *une courbe stable dégénérée maximale,* $\mathscr{M}_{\mathrm{gl}} = \operatorname{Spec} \mathrm{M}_{\mathrm{gl}}$ *la base de sa déformation universelle et* $\mathscr{M}_{\mathrm{loc}} = \operatorname{Spec} \mathrm{M}_{\mathrm{loc}}$ *la base de sa déformation universelle locale. On a un isomorphisme canonique* $\mathscr{M}_{\mathrm{gl}} \longrightarrow \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}$.

Démonstration : Voir [Deligne–Mumford, 1.5 p.80–81]. Rappelons simplement la construction de ce morphisme. Notons $x_1, \ldots, x_n$ les points singuliers de C et considérons sa déformation universelle

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{C} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & \mathscr{C} \arrow[d] \\
\operatorname{Spec} k \arrow[r] & \operatorname{Spec} \mathrm{M}_{\mathrm{gl}}.
\end{tikzcd}$$

En prenant les anneaux locaux formels de $\mathscr{C}$ aux points images des x_i, on obtient une déformation locale des x_i,

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Spec} \widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{C},x_i} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & \operatorname{Spec} \widehat{\mathscr{O}}_{\mathscr{C},x_i} \arrow[d] \\
\operatorname{Spec} k \arrow[r] & \operatorname{Spec} \mathrm{M}_{\mathrm{gl}}.
\end{tikzcd}$$

Donc, d'après la propriété universelle définissant la déformation locale universelle en x_i, on a un morphisme $\mathrm{M}_i \longrightarrow \mathrm{M}_{\mathrm{gl}}$, où $\operatorname{Spec} \mathrm{M}_i$ est la base de cette déformation locale universelle. On en déduit un morphisme

$$\mathrm{M}_{\mathrm{loc}} = \mathrm{M}_1 \mathbin{\widehat{\otimes}} \cdots \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathrm{M}_n \longrightarrow \mathrm{M}_{\mathrm{gl}}. \qquad \square$$

Lemme 5.10. — *Soit* C *une courbe projective sur* k*. Alors son groupe d'automorphismes* $\mathrm{G} = \operatorname{Aut} \mathrm{C}$ *agit sur la base* $\mathscr{M}_{\mathrm{gl}}$ *de ses déformations universelles.*

Démonstration : Soit $g \in \mathrm{G}$. On a un diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathrm{C} \arrow[dl, "g^{-1}"'] \arrow[ddd] \arrow[ddrr, "\lambda"] & & \\
 & \mathrm{C} \arrow[dl, "\lambda"'] \arrow[ddr] & & & \\
\mathscr{C} \arrow[dd] & & & & \mathscr{C} \arrow[dd] \\
 & & \operatorname{Spec} k \arrow[dll] \arrow[drr] & & \\
\mathscr{M} & & & & \mathscr{M}
\end{tikzcd}$$

donc, d'après la propriété universelle définissant $\mathscr{M}_{\mathrm{gl}}$, il existe un carré cartésien

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{C} \arrow[r, dotted] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & \mathscr{C} \arrow[d] \\
\mathscr{M} \arrow[r, dotted, "\widetilde{g}"'] & \mathscr{M}
\end{tikzcd}$$

tel que

$$\begin{tikzcd}
& & \mathrm{C} \arrow[dl, "g^{-1}"'] \arrow[ddrr, "\lambda"] \arrow[ddd] \\
& \mathrm{C} \arrow[dl, "\lambda"'] \\
\mathscr{C} \arrow[rrrr, dotted] \arrow[dd] & & & & \mathscr{C} \arrow[dd] \\
& & \operatorname{Spec} k \arrow[dll] \arrow[drr] \\
\mathscr{M} \arrow[rrrr, dotted, "\widetilde{g}"'] & & & & \mathscr{M}
\end{tikzcd}$$

Comme $\widetilde{g}$ est défini par une propriété universelle, c'est bien une action de groupe : $\forall g, h \in \mathrm{G} \quad \widetilde{gh} = \widetilde{g}\widetilde{h}$. En effet, le composé $\widetilde{g}\widetilde{h}$ est défini par

$$\begin{tikzcd}
& & \mathrm{C} \arrow[dl, "h^{-1}"'] \arrow[ddrr, "\lambda"] \arrow[ddd] & & & & \mathrm{C} \arrow[dl, "g^{-1}"'] \arrow[ddrr, "\lambda"] \arrow[ddd] \\
& \mathrm{C} \arrow[dl, "\lambda"'] & & & & \mathrm{C} \arrow[dl, "\lambda"'] \\
\mathscr{C} \arrow[rrrr, dotted] \arrow[dd] & & & & \mathscr{C} \arrow[rrrr, dotted] \arrow[dd] & & & & \mathscr{C} \arrow[dd] \\
& & \operatorname{Spec} k \arrow[dll] \arrow[drr] & & & & \operatorname{Spec} k \arrow[dll] \arrow[drr] \\
\mathscr{M} \arrow[rrrr, dotted, "\widetilde{h}"'] & & & & \mathscr{M} \arrow[rrrr, dotted, "\widetilde{g}"'] & & & & \mathscr{M},
\end{tikzcd}$$

ce qui peut s'écrire

$$\begin{tikzcd}
& \mathrm{C} \arrow[dl, "\lambda"'] & \mathrm{C} \arrow[l, "h^{-1}"'] \arrow[d, "\lambda"] & \mathrm{C} \arrow[l, "g^{-1}"'] \arrow[dr, "\lambda"] & \\
\mathscr{C} \arrow[rr, dotted] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & & \mathscr{C} \arrow[rr, dotted] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & & \mathscr{C} \arrow[d] \\
\mathscr{M} \arrow[rr, dotted, "\widetilde{h}"'] & & \mathscr{M} \arrow[rr, dotted, "\widetilde{g}"'] & & \mathscr{M},
\end{tikzcd}$$

ou encore

$$\begin{tikzcd}
& & \mathrm{C} \arrow[dl, "(gh)^{-1}=h^{-1}g^{-1}"'] \arrow[ddrr, "\lambda"] \arrow[ddd] \\
& \mathrm{C} \arrow[dl, "\lambda"'] \\
\mathscr{C} \arrow[rrrr, dotted] \arrow[dd] & & & & \mathscr{C} \arrow[dd] \\
& & \operatorname{Spec} k \arrow[dll] \arrow[drr] \\
\mathscr{M} \arrow[rrrr, dotted, "\widetilde{g}\widetilde{h}"'] & & & & \mathscr{M},
\end{tikzcd}$$

mais c'est le diagramme définissant $\widetilde{gh}$, on a donc bien $\widetilde{g}\widetilde{h} = \widetilde{gh}$. $\square$

Lemme 5.11. — *Soient* C *une courbe stable de genre* g *à* n *points marqués et* $\mathscr{M}_{\mathrm{gl}} = \operatorname{Spec} \mathrm{M}_{\mathrm{gl}}$ *la base de sa déformation universelle. On a un isomorphisme* $\operatorname{Aut} \mathrm{C}$*-équivariant entre l'espace tangent à* $\bar{\mathscr{M}}_{g,n}$ *en* $[\mathrm{C}]$ *(muni de l'action définie en II.3.6) et l'espace tangent à* $\mathscr{M}_{\mathrm{gl}}$ *en* 0 *(muni de l'action définie par le lemme précédent),*

$$\mathrm{T}_{[\mathrm{C}]}\bar{\mathscr{M}}_{g,n} \simeq \mathrm{T}_0\mathscr{M}_{\mathrm{gl}}.$$

Démonstration : Nous allons justifier les isomorphismes suivants.

$$\begin{aligned}
\mathrm{T}_{[\mathrm{C}]}\bar{\mathscr{M}}_{g,n} &= \mathfrak{hom}_{[\mathrm{C}]}\left(\operatorname{Spec} \frac{k[\varepsilon]}{\langle \varepsilon^2 \rangle}, \bar{\mathscr{M}}_{g,n}\right) && (1)\\
&\simeq \mathrm{D}\left(\frac{k[\varepsilon]}{\langle \varepsilon^2 \rangle}\right) && (2)\\
&\simeq \operatorname{Hom}_k\left(\mathrm{M}_{\mathrm{gl}}, \frac{k[\varepsilon]}{\langle \varepsilon^2 \rangle}\right). && (3)\\
&\simeq \operatorname{Hom}_k\left(\operatorname{Spec} \frac{k[\varepsilon]}{\langle \varepsilon^2 \rangle}, \mathscr{M}_{\mathrm{gl}}\right) && (4)\\
&= \mathrm{T}_0\mathscr{M}_{\mathrm{gl}}. && (5)
\end{aligned}$$

Chacun de ces objets peut se voir comme un espace vectoriel muni d'une action du groupe G ou comme une catégorie. Comme les structures d'espace vectoriel sont préservées, il s'agit de montrer que les catégories sont *isomorphes.* Le point (1) résulte de la définition de l'espace tangent, le point (3) de la représentabilité du foncteur D, le point (4) est évident et le point (5) est la définition de l'espace tangent. Dans (2), (3), (4) et (5), l'action du groupe $\mathrm{G} = \operatorname{Aut} \mathrm{C}$ est celle donnée par la propriété universelle de la déformation universelle explicitée dans le lemme 5.10. Afin d'établir le point (2), nous allons montrer comment décrire les catégories (1) et (2), puis montrer qu'elles sont équivalentes et même isomorphes.

La catégorie $\mathfrak{hom}_{[\mathrm{C}]}(\operatorname{Spec} k[\varepsilon]/\langle \varepsilon^2 \rangle, \bar{\mathscr{M}}_{g,n})$ a pour objets les diagrammes commutatifs

$$\begin{tikzcd}
& \operatorname{Spec} k \arrow[dl] \arrow[dr, "{[\mathrm{C}]}"] & \\
\operatorname{Spec} \frac{k[\varepsilon]}{\langle \varepsilon^2 \rangle} \arrow[rr] & & \bar{\mathscr{M}}_{g,n}
\end{tikzcd}$$

et pour morphismes les 2-morphismes[3]

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Spec}\,\dfrac{k[\varepsilon]}{\langle\varepsilon^2\rangle} \arrow[r, bend left=60] \arrow[r, bend right=60] \arrow[r, phantom, "\Downarrow"] & \bar{\mathscr{M}}_{g,n}. \end{tikzcd}$$

La catégorie $\mathrm{D}(k[\varepsilon]/\langle\varepsilon^2\rangle)$ a pour objets les familles de courbes stables de genre g à n points marqués sur $\mathrm{Spec}\,k[\varepsilon]/\langle\varepsilon^2\rangle$ dont la fibre en 0 est C, modulo les isomorphismes dont la restriction à C est l'identité et pour morphismes sont les isomorphismes de familles de courbes stables à points marqués.

Montrons que le foncteur

$$\left\{\begin{array}{ccc} \mathfrak{hom}_{[\mathrm{C}]}\left(\mathrm{Spec}\,\dfrac{k[\varepsilon]}{\langle\varepsilon^2\rangle}, \bar{\mathscr{M}}_{g,n}\right) & \longrightarrow & \mathrm{D}\left(\dfrac{k[\varepsilon]}{\langle\varepsilon^2\rangle}\right) \\ \begin{tikzcd} & \mathrm{Spec}\,k \arrow[dl] \arrow[dr, "{[\mathrm{C}]}"] & \\ \mathrm{Spec}\,\dfrac{k[\varepsilon]}{\langle\varepsilon^2\rangle} \arrow[rr] & & \bar{\mathscr{M}}_{g,n} \end{tikzcd} & \longmapsto & \begin{tikzcd} \mathrm{C} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & \mathscr{C} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & \bar{\mathscr{M}}_{g,n+1} \arrow[d] \\ \mathrm{Spec}\,k \arrow[r] & \mathrm{Spec}\,\dfrac{k[\varepsilon]}{\langle\varepsilon^2\rangle} \arrow[r] & \bar{\mathscr{M}}_{g,n} \end{tikzcd} \end{array}\right.$$

est essentiellement surjectif. Soit

$$\begin{tikzcd} \mathrm{C} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & \mathscr{C} \arrow[d] \\ \mathrm{Spec}\,k \arrow[r] & \mathrm{Spec}\,\dfrac{k[\varepsilon]}{\langle\varepsilon^2\rangle} \end{tikzcd}$$

un objet de $\mathrm{D}(k[\varepsilon]/\langle\varepsilon^2\rangle)$. La famille de courbes $\mathscr{C} \longrightarrow \mathrm{Spec}\,k[\varepsilon]/\langle\varepsilon^2\rangle$ est un objet de la fibre $\bar{\mathscr{M}}_{g,n}(\mathrm{Spec}\,k[\varepsilon]/\langle\varepsilon^2\rangle)$ de la catégorie fibrée $\bar{\mathscr{M}}_{g,n}$ au dessus de $\mathrm{Spec}\,k[\varepsilon]/\langle\varepsilon^2\rangle$, or cette fibre est équivalente à $\mathfrak{hom}(\mathrm{Spec}\,k[\varepsilon]/\langle\varepsilon^2\rangle, \bar{\mathscr{M}}_{g,n})$.

3. On ne demande pas que le diagramme

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Spec}\,k \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \mathrm{Spec}\,\dfrac{k[\varepsilon]}{\langle\varepsilon^2\rangle} \arrow[rr, bend left=10] \arrow[rr, bend right=10] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow"] & & \bar{\mathscr{M}}_{g,n} \end{tikzcd}$$

soit 2-commutatif, car cela reviendrait à se limiter aux morphismes qui induisent l'identité sur C, *i.e.*, à oublier que C peut avoir des automorphismes non triviaux.

La composition $\operatorname{Spec} k \longrightarrow \operatorname{Spec} k[\varepsilon]/\langle\varepsilon^2\rangle \longrightarrow \bar{\mathscr{M}}_{g,n}$ est donnée par le produit fibré

$$\begin{tikzcd} \mathrm{C} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & \mathscr{C} \arrow[d] \\ \operatorname{Spec} k \arrow[r] & \operatorname{Spec} \dfrac{k[\varepsilon]}{\langle\varepsilon^2\rangle}, \end{tikzcd}$$

c'est donc $[\mathrm{C}] : \operatorname{Spec} k \longrightarrow \bar{\mathscr{M}}_{g,n}$; la famille de courbes $\mathscr{C} \longrightarrow \operatorname{Spec} k[\varepsilon]/\langle\varepsilon^2\rangle$ est donc un objet de $\mathfrak{Hom}_{[\mathrm{C}]}(\operatorname{Spec} k[\varepsilon]/\langle\varepsilon^2\rangle, \bar{\mathscr{M}}_{g,n})$.

Montrons que ce foncteur est pleinement fidèle. Comme il s'agit de groupoïdes, il suffit de montrer qu'il induit des isomorphismes entre les groupes d'automorphismes. Or, par définition, les automorphismes de

$$\begin{tikzcd} & \operatorname{Spec} k \arrow[dl] \arrow[dr, "{[\mathrm{C}]}"] & \\ \operatorname{Spec} \dfrac{k[\varepsilon]}{\langle\varepsilon^2\rangle} \arrow[rr] & & \bar{\mathscr{M}}_{g,n} \end{tikzcd}$$

sont les automorphismes de

$$\operatorname{Spec} \frac{k[\varepsilon]}{\langle\varepsilon^2\rangle} \longrightarrow \bar{\mathscr{M}}_{g,n},$$

i.e., (d'après le lemme d'Yoneda pour les catégories fibrées), les automorphismes de

$$\mathscr{C} \longrightarrow \operatorname{Spec} \frac{k[\varepsilon]}{\langle\varepsilon^2\rangle}.$$

Pour montrer qu'il s'agit en fait d'un *isomorphisme* de catégories, on peut remarquer que dans les deux cas, les morphismes qui partent d'un objet donné sont en bijection avec l'ensemble *fini* $\mathrm{G} = \operatorname{Aut} \mathrm{C}$. □

Théorème 5.12. — ***Soient*** C ***une courbe stable dégénérée maximale correspondant à un point*** $[\mathrm{C}]$ ***de*** $\bar{\mathscr{M}}_{g,n}$ ***et*** G ***le graphe associé. Toute structure de graphe en rubans sur*** G ***définit un point-base tangenciel en*** $[\mathrm{C}]$ ***sur*** $\bar{\mathscr{M}}_{g,n}$***.***

Démonstration : Soit $\widetilde{\mathrm{G}}$ une structure de graphe en rubans sur G. Notons $x_1, \ldots, x_n$ les points singuliers de C.

(a) Montrons que cela permet de définir des coordonnées au voisinage de chaque point spécial de C. Un point spécial x est un point de la normalisée $\widetilde{\mathrm{C}}$ au dessus d'un point singulier ou marqué de C : il se trouve sur une composante connexe de $\widetilde{\mathrm{C}}$, qui comporte exactement deux autres points spéciaux. D'après la construction du graphe associé à une courbe stable, cette composante est un sommet de G et les trois points sont les trois demi-arrêtes qui en partent. La structure de graphe en rubans nous donne un ordre cyclique sur ces trois points, par exemple (x, y, z). En décidant d'appeler ces trois points 0, $+1$ et -1, on définit un isomorphisme entre la composante connexe de $\widetilde{\mathrm{C}}$ et $\mathbb{P}^1$, qui nous donne des coordonnées au voisinage du point x.

(b) Ces coordonnées permettent de définir des coordonnées au voisinage de chaque point singulier de C et nous donnent donc des isomorphismes

$$\widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{C},\,x_i} \simeq \frac{k[\![u_i, v_i]\!]}{\langle u_i v_i\rangle}.$$

(c) Comme la déformation universelle de $k[\![u_i, v_i]\!]/\langle u_i v_i\rangle$ est

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Spec} \dfrac{k[\![u_i, v_i]\!]}{\langle u_i v_i\rangle} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & \operatorname{Spec} \dfrac{k[\![u_i, v_i, \varepsilon_i]\!]}{\langle u_i v_i - \varepsilon_i\rangle} \arrow[d] \\
\operatorname{Spec} k \arrow[r] & \operatorname{Spec} k[\![\varepsilon_i]\!],
\end{tikzcd}$$

les isomorphismes précédents définissent un isomorphisme

$$\mathrm{M}_{\mathrm{loc}} \simeq k[\![\varepsilon_1]\!] \mathbin{\widehat{\otimes}} \cdots \mathbin{\widehat{\otimes}} k[\![\varepsilon_n]\!] = k[\![\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n]\!],$$

puis, d'après 5.9, $\mathrm{M}_{\mathrm{gl}} \simeq k[\![\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n]\!]$.

(d) L'isomorphisme $\mathrm{T}_{[\mathrm{C}]}\overline{\mathscr{M}}_{g,n} \simeq \mathrm{T}_0\mathscr{M}_{\mathrm{loc}}$ identifie la trace du diviseur $\mathscr{S}_{g,n}$ dans l'espace tangent à la réunion des hyperplans d'équations $\varepsilon_i = 0$; d'après II.5.9, les ε_i définissent alors un point-base tangenciel. □

Corollaire 5.13. — *Soit* C *une courbe stable dégénérée maximale et* G *le graphe associé. Le choix d'une structure de graphe en rubans sur* G *induit un isomorphisme d'espaces vectoriels*

$$\mathrm{T}_{[\mathrm{C}]}\overline{\mathscr{M}}_{g,n} \simeq \mathrm{V} = \mathrm{Vect}\{\text{ arrêtes } e \text{ de } \mathrm{G}\,\}.$$

L'action du groupe $\operatorname{Aut}\mathrm{C} = \operatorname{Aut}\mathrm{G}$ *sur cet espace vectoriel est la suivante. Si* $g \in \operatorname{Aut}\mathrm{G}$ *est un élément du groupe,* e *une arrête et* $v_e \in \mathrm{V}$ *le vecteur associé à cette arrête, on pose*

$$g \cdot v_e = \pm v_{g\cdot e}.$$

Le signe est choisi ainsi :

$+1$ *si l'automorphisme g préserve l'ordre cyclique aux deux extrémités de l'arrête e, ou s'il est renversé en ces deux extrémités ;*

-1 *en cas contraire,* i.e., *si g préserve l'ordre cyclique d'une des extrémités de e mais pas celui de l'autre.*

Démonstration : Nous avons déjà vu les isomorphismes équivariants

$$\mathrm{T}_{[\mathrm{C}]}\bar{\mathscr{M}}_{g,n} \simeq \mathrm{T}_0\mathscr{M}_{\mathrm{gl}} \simeq \mathrm{T}_0\mathscr{M}_{\mathrm{loc}}.$$

Une structure de graphe en rubans $\widetilde{\mathrm{G}}$ sur G définit un isomorphisme $\mathrm{M}_{\mathrm{loc}} \simeq k[\![\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n]\!]$, donc un isomorphisme

$$\alpha_1 : \mathrm{T}_{[\mathrm{C}]}\bar{\mathscr{M}}_{g,n} \longrightarrow \mathrm{Vect}\{\, \varepsilon_1^\vee, \ldots, \varepsilon_n^\vee \,\}$$

(où $(\varepsilon_i^\vee)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est la base duale de $(\varepsilon_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$). Soit $g \in \mathrm{Aut}\,\mathrm{G}$. La structure de graphe en rubans $g\widetilde{\mathrm{G}}$ sur G définit un autre isomorphisme

$$\alpha_2 : \mathrm{T}_{[\mathrm{C}]}\bar{\mathscr{M}}_{g,n} \longrightarrow \mathrm{Vect}\{\, \varepsilon_1^\vee, \ldots, \varepsilon_n^\vee \,\}.$$

L'action de g sur $\mathrm{V} = \mathrm{Vect}\{\, \varepsilon_1^\vee, \ldots, \varepsilon_n^\vee \,\}$ est alors donnée par

$$\mathrm{V} \xrightarrow{\alpha_1^{-1}} \mathrm{T}_{[\mathrm{C}]}\bar{\mathscr{M}}_{g,n} \xrightarrow{\alpha_2} \mathrm{V}.$$

Pour expliciter cette action, reprenons les coordonnées locales (u_i, v_i) en $x_i \in \mathrm{C}$ (pour $1 \leqslant i \leqslant n$) définies par $\widetilde{\mathrm{G}}$ et $(g\widetilde{\mathrm{G}})$ au voisinage des points singuliers $x_1, \ldots, x_n$. Si on note $\varphi_{\mathrm{loc}} : \mathscr{M}_{\mathrm{loc}} \longrightarrow \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}$ le morphisme défini par l'action de $g \in \mathrm{Aut}\,\mathrm{G}$, on a un diagramme

$$\begin{tikzcd} \displaystyle\coprod_i \frac{k[\![u_i, v_i, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n]\!]}{\langle u_i v_i - \varepsilon_i\rangle} \arrow[r, "\widetilde{\varphi}_{\mathrm{loc}}"] \arrow[d] & \displaystyle\coprod_i \frac{k[\![u_i, v_i, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n]\!]}{\langle u_i v_i - \varepsilon_i\rangle} \arrow[d] \\ \mathrm{Spec}\, k[\![\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n]\!] \arrow[r, "\varphi_{\mathrm{loc}}"'] & \mathrm{Spec}\, k[\![\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n]\!]. \end{tikzcd}$$

Explicitions le changement de coordonnées. Soit $i \in \{\, 1, \ldots, n \,\}$ et j tel que $\varphi(x_i) = x_j$. On a

$$\begin{cases} \widetilde{\varphi}_{\mathrm{loc}}(u_i) = \eta_i u_i \\ \widetilde{\varphi}_{\mathrm{loc}}(v_i) = \eta_i' v_i \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \widetilde{\varphi}_{\mathrm{loc}}(u_i) = \eta_i v_i \\ \widetilde{\varphi}_{\mathrm{loc}}(v_i) = \eta_i' u_i \end{cases} \quad \text{où } \eta_i, \eta_i' \in \{\, \pm 1 \,\}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\widetilde{\varphi}_{\mathrm{loc}}(\varepsilon_i) &= \widetilde{\varphi}_{\mathrm{loc}}(u_i v_i)\\ &= \widetilde{\varphi}_{\mathrm{loc}}(u_i)\widetilde{\varphi}_{\mathrm{loc}}(v_i)\\ &= \eta_i\eta_i' u_j v_i\\ &= \eta_i\eta_i'\varepsilon_j\end{aligned}$$

et le signe est bien celui annoncé par le corollaire. □

Remarque 5.14. — On peut reformuler le corollaire ainsi. Le choix de deux structures de graphe en rubans G_1 et G_2 sur le graphe G définit deux actions de Aut G sur

$$\mathrm{V} = \mathrm{Vect}\{\text{arrêtes } e \text{ de } \mathrm{G}\}$$

et deux isomorphismes

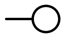
$$\mathrm{V}_1 \simeq \mathrm{T}_{[\mathrm{C}]}\bar{\mathscr{M}}_{g,n} \simeq \mathrm{V}_2.$$

Ce G-isomorphisme $\mathrm{V}_1 \longrightarrow \mathrm{V}_2$ peut se décrire ainsi :

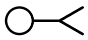
$$v_e \longmapsto \pm v_e$$

où le signe est le suivant

- $+1$ si l'ordre cyclique aux deux extrémités de l'arrête e est le même dans G_1 et G_2, ou s'il s'agit pour les deux extrémités de l'ordre opposé ;
- $+1$ si l'ordre cyclique à une extrémité de l'arrête e est le même dans G_1 et G_2 et l'ordre cyclique à l'autre extrémité est opposé dans G_1 et G_2.

Exemple 5.15. — Dans le cas de $\bar{\mathscr{M}}_{1,1}$, la seule strate de dimension nulle correspond à la courbe elliptique singulière, *i.e.*, au graphe , qui possède un seul automorphisme. D'après le théorème précédent, son action sur l'anneau de déformations est donné par Id : $k[\![\varepsilon]\!] \longrightarrow k[\![\varepsilon]\!]$. Localement, en ce point, $\bar{\mathscr{M}}_{1,1}$ ressemble donc à la droite quotientée par l'action triviale de $\mathbb{Z}/2$.

Exemple 5.16. — Examinons maintenant ce qui se passe au voisinage des strates de $\bar{\mathscr{M}}_{1,2}$ de dimension nulle : cela nous permettra de terminer la description de $\mathscr{S}_{1,2}$ entamée un peu plus haut (1.16 page 96).

Le graphe  possède un unique automorphisme, qui agit sur les complétés formels de la manière suivante

$$\left\{\begin{array}{ccc} k[\![\varepsilon_1,\varepsilon_2]\!] & \longrightarrow & k[\![\varepsilon_1,\varepsilon_2]\!]\\ \varepsilon_1 & \longmapsto & +\varepsilon_1\\ \varepsilon_2 & \longmapsto & -\varepsilon_2.\end{array}\right.$$

L'action sur l'espace tangent est donc une symétrie par rapport à l'une des composantes du diviseur (figure II.2(b) page 68).

Le graphe $-\!\!\bigcirc\!\!-$ possède un unique automorphisme, qui agit sur les complétés formels de la manière suivante

$$\begin{cases} k[\![\varepsilon_1,\varepsilon_2]\!] & \longrightarrow & k[\![\varepsilon_1,\varepsilon_2]\!] \\ \varepsilon_1 & \longmapsto & \varepsilon_2 \\ \varepsilon_2 & \longmapsto & \varepsilon_1. \end{cases}$$

L'action sur l'espace tangent est donc une symétrie par rapport à la première bissectrice (figure II.2(c) page 68). En particulier, on retrouve le fait qu'il n'y a qu'une composante irréductible en ce point.

Exemple 5.17. — Considérons à nouveau l'espace tangent à $\bar{\mathscr{M}}_{1,2}$ au point défini par le graphe $-\!\!\bigcirc\!\!-$: comme il s'agit du plan quotienté par la symétrie par rapport à la diagonale, on peut définir trois points-bases tangenciels (figure II.6). Néanmoins, la description précédente ne nous donne que deux de ces points (ceux de la proposition II.5.7 et pas ceux de la proposition II.5.9) : nous n'utiliserons donc pas tous les points-bases tangenciels, mais juste ceux que l'on peut décrire à l'aide de graphes trivalents.

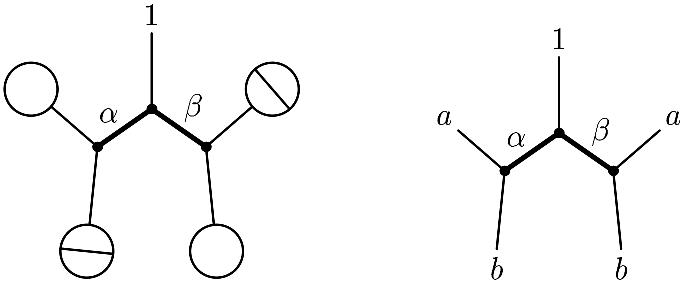
Exemple 5.18. — La situation de la figure 28(b) est localement la même que dans l'exemple précédent (plan quotienté par la symétrie par rapport à la diagonale), mais cette fois-ci, nous aurons les trois points-bases tangenciels auxquels on est en droit de s'attendre. Commençons par examiner la structure de l'espace tangent en ce point. Appelons α et β les deux arrêtes ; on a $\mathrm{V} = \mathrm{Vect}\{\alpha,\beta\}$. Le groupe d'automorphismes du graphe est $\mathrm{Aut}\,\mathrm{G} = \mathbb{Z}/2$: l'automorphisme non trivial agit sur le graphe (b) comme une symétrie d'axe vertical, intervertissant α et β. Sur l'espace tangent, il agit donc comme

$$\begin{aligned} \alpha &\longmapsto \pm\beta \\ \beta &\longmapsto \pm\alpha. \end{aligned}$$

Pour trouver le signe, on choisit une structure de graphe en rubans (par exemple, celle donnée par la figure) et on regarde ce qui lui arrive : elle est inchangée. L'action est donc

$$\begin{aligned} \alpha &\longmapsto +\beta \\ \beta &\longmapsto +\alpha \end{aligned}$$

et l'espace tangent est le plan quotienté par la symétrie par rapport à la diagonale, comme dans l'exemple précédent.

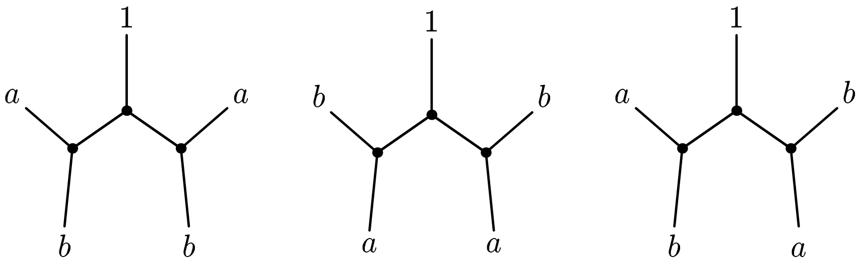


(a) Dans $\bar{\mathscr{M}}_{6,0}$

(b) La même situation, dans $\bar{\mathscr{M}}_{0,\{1,a,a,b,b\}}$

Figure 28 – Dans l'introduction, nous avions décrit les points-bases tangenciels des $\bar{\mathscr{M}}_{g,n}$ à l'aide de la fusion : avec cette interprétation, ces deux exemples peuvent sembler, de prime abord, problématiques. La fusion par rapport à α et β correspond à des chemins dans la même strate mais dans des directions différentes — cela correspond exactement à la description du point-base tangenciel (3) de la figure II.6.

Regardons maintenant quels sont les points-bases tangenciels, *i.e.*, quelles sont les différentes structures de graphe en ruban. Modulo isomorphisme et modulo un changement global d'orientation, il n'y en a que trois.



(a) (b) (c)

Pour comparer ces différents points-bases tangenciels, fixons des coordonnées (u, v) définies par le graphe en rubans (a). Dans cette base, le graphe en rubans (a) définit le point-base tangenciel (1) de la figure II.6.

Regardons maintenant le graphe (b) : il définit des coordonnées (u', v') ; le changement de coordonnées est donné par

$$\begin{aligned} u' &\longmapsto \pm u \\ v' &\longmapsto \pm v. \end{aligned}$$

Pour connaître le signe, on compare les ordres cycliques à l'extrémité de u et u' (respectivement v et v') : comme l'ordre est le même à une extrémité et différent à l'autre (idem pour v et v'), on a

$$\begin{aligned} u' &\longmapsto -u \\ v' &\longmapsto -v. \end{aligned}$$

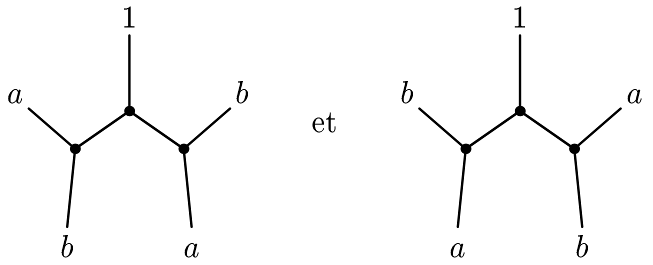
Le graphe en rubans (b) définit donc le point-base tangenciel (2).

De même, pour le troisième graphe en rubans (c), il viendrait

$$\begin{aligned} u' &\longmapsto +u \\ v' &\longmapsto -v. \end{aligned}$$

Il s'agit du point-base tangenciel (3).

On retrouverait aussi de cette manière le fait que les deux graphes



qui sont isomorphes modulo un changement global d'orientation, définissent des coordonnées

$$\begin{aligned} u' &\longmapsto +u & \qquad u'' &\longmapsto -u \\ v' &\longmapsto -v & \qquad v'' &\longmapsto +v, \end{aligned}$$

donc, d'après la remarque II.4.4, des points-bases tangenciels canoniquement isomorphes.

Remarque 5.19. — On pourrait penser indexer les points-bases tangenciels sur $\mathscr{M}_{g,n}$ par les graphes stables trivalents en rubans modulo un changement global d'orientation, mais nous allons prendre les graphes stables en rubans (sans quotienter), si bien que chaque point-base sera compté deux fois. Expliquons pourquoi.

Notons tout d'abord que les morphismes d'accrochage ne sont pas entre les espaces de modules de courbes *lisses* $\mathscr{M}_{g,n}$, mais entre les espaces de modules de courbes *stables* $\bar{\mathscr{M}}_{g,n}$. Ainsi, des points-bases de $\mathscr{M}_{g,n}$ et de $\mathscr{M}_{g',n'}$ ne permettent pas d'en définir un sur $\mathscr{M}_{g+g',n+n'}$, mais juste sur $\mathscr{S}_{g+g',n+n'}$ — ce qui ne nous intéresse pas vraiment.

En fait, un point-base sur $\mathscr{M}_{g,n}$ et un sur $\mathscr{M}_{g',n'}$ permettent de définir *deux* points-bases sur $\mathscr{M}_{g+g',n+n'}$, que l'on ne peut pas distinguer. La structure de graphe en rubans permet de les distinguer.

Chapitre IV

La tour de Teichmüller–Grothendieck

Dans le chapitre précédent, nous avons construit des points-bases tangenciels sur les espaces de modules de courbes lisses $\mathscr{M}_{g,n}$. Nous allons maintenant construire des chemins entre ces points-bases, *i.e.*, des transformations naturelles entre les foncteurs-fibres correspondants. Nous montrerons ensuite certaines relations vérifiées par ces chemins, dans l'espoir d'établir un isomorphisme avec un quotient du groupoïde de Lyubashenko.

1 Exemples de groupoïdes fondamentaux

Après avoir défini ce qu'est une présentation d'un groupoïde, nous donnons quelques exemples de calcul de groupoïdes fondamentaux de champs algébriques ou, plus exactement, des groupoïdes fondamentaux usuels (et pas profinis) d'orbifolds correspondants, construits à partir des espaces de modules de courbes lisses ou stables, essentiellement à l'aide du théorème de Van Kampen. Le théorème de Van Kampen pour les orbifolds est démontré dans [Haefliger].

Remarque 1.1. — Une *présentation* $\langle (x_i)_{i\in \mathrm{I}}, (r_j)_{j\in \mathrm{J}}\rangle$ d'un groupe G, c'est la donnée de

(i) un ensemble $(x_i)_{i\in \mathrm{I}}$ d'éléments de G, appelés *générateurs* ;

(ii) un ensemble $(r_j)_{j\in \mathrm{J}}$ de mots en les x_i et les x_i^{-1}, appelés *relations* ;

telle que le morphisme $\mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{F}\{x_i, i\in \mathrm{I}\}$ de G vers le groupe libre engendré par les générateurs induise un isomorphisme

$$\mathrm{G} \longrightarrow \frac{\mathrm{F}\{x_i, i\in \mathrm{I}\}}{\langle r_j, j\in \mathrm{J}\rangle}$$

entre G et le quotient de ce groupe libre par le sous-groupe normal engendré par les relations.

Définition 1.2. — Une *présentation* d'un groupoïde est la donnée de

(*i*) un ensemble G_0 d'objets ;

(*ii*) un ensemble G_1 de générateurs ;

(*iii*) deux applications (source et but) $s, b : \mathrm{G}_1 \longrightarrow \mathrm{G}_0$;

(*iv*) un ensemble G_2 de relations, *i.e.*, des lacets composés de générateurs et de leurs inverses, *i.e.*, des suites $(f_1^{\varepsilon_1}, f_2^{\varepsilon_2}, \ldots, f_n^{\varepsilon_n})$ avec $n \in \mathbb{N}^\times$, $f_i \in \mathrm{G}_1$, $\varepsilon_i \in \{\pm 1\}$, telles que $b(f_i^{\varepsilon_i}) = s(f_{i+1}^{\varepsilon_{i+1}})$ pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$ et $s(f_1^{\varepsilon_1}) = b(f_n^{\varepsilon_n})$, où on a posé $b(f^{+1}) = b(f)$, $s(f^{+1}) = s(f)$, $b(f^{-1}) = s(f)$ et $s(f^{-1}) = b(f)$.

Cela définit un groupoïde de la manière suivante. Ses objets sont les éléments de G_0. Les morphismes de a vers b sont les chaînes $(f_1^{\varepsilon_1}, f_2^{\varepsilon_2}, \ldots, f_n^{\varepsilon_n})$ telles que $b(f_i^{\varepsilon_i}) = s(f_{i+1}^{\varepsilon_{i+1}})$ pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, $s(f_1^{\varepsilon_1}) = a$ et $b(f_n^{\varepsilon_n}) = b$, modulo la relation d'équivalence compatible avec la composition engendrée par les relations « $c = \mathrm{Id}$ » pour tout $c \in \mathrm{G}_2$.

Remarque 1.3. — Nous écrirons la présentation d'un groupoïde de manière partiellement graphique : nous dessinerons les objets et les générateurs et nous écrirons les relations au dessous, comme sur la figure 1.

Remarque 1.4. — Étant données des présentations de trois groupes

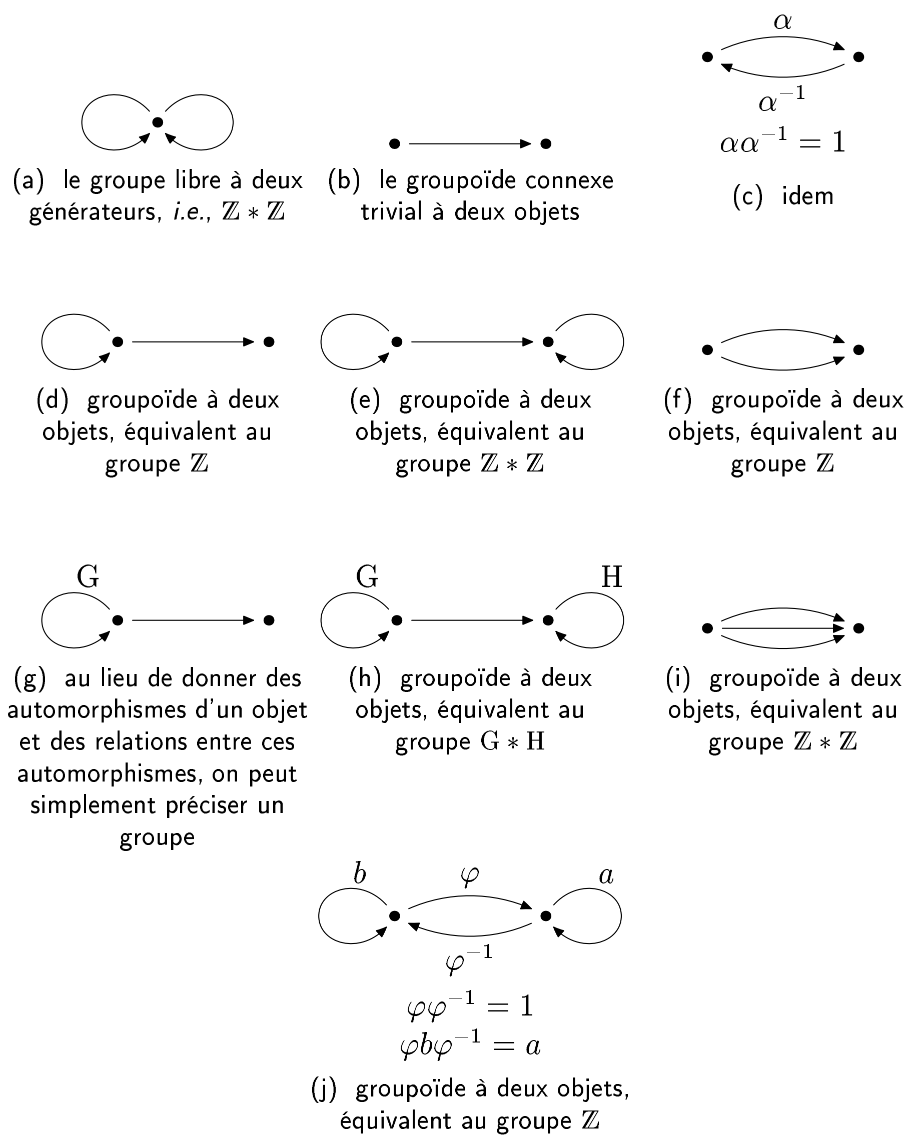
$$\begin{aligned}
\mathrm{G} &= \langle (x_i)_{i \in \mathrm{I}}; (r_{i'})_{i' \in \mathrm{I}'} \rangle \\
\mathrm{H} &= \langle (y_j)_{j \in \mathrm{J}}; (r_{j'})_{j' \in \mathrm{J}'} \rangle \\
\mathrm{K} &= \langle (z_l)_{l \in \mathrm{L}}; (r_{l'})_{l' \in \mathrm{L}'} \rangle
\end{aligned}$$

et deux morphismes

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{K} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\psi"'] & \mathrm{G} \\
\mathrm{H},
\end{tikzcd}$$

on vérifie aisément qu'une présentation de leur somme amalgamée est donnée par

$$\mathrm{G} \mathop{*}_{\mathrm{K}} \mathrm{H} = \big\langle (x_i)_{i \in \mathrm{I}}, (y_j)_{j \in \mathrm{J}}; (r_{i'})_{i' \in \mathrm{I}}, (s_{j'})_{j' \in \mathrm{J}}, (\varphi(z_l)\psi(z_l)^{-1})_{l \in \mathrm{L}} \big\rangle,$$



(a) le groupe libre à deux générateurs, *i.e.*, $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$

(b) le groupoïde connexe trivial à deux objets

(c) idem

(d) groupoïde à deux objets, équivalent au groupe $\mathbb{Z}$

(e) groupoïde à deux objets, équivalent au groupe $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$

(f) groupoïde à deux objets, équivalent au groupe $\mathbb{Z}$

(g) au lieu de donner des automorphismes d'un objet et des relations entre ces automorphismes, on peut simplement préciser un groupe

(h) groupoïde à deux objets, équivalent au groupe $\mathrm{G} * \mathrm{H}$

(i) groupoïde à deux objets, équivalent au groupe $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$

(j) groupoïde à deux objets, équivalent au groupe $\mathbb{Z}$

Figure 1 – Quelques exemples de groupoïdes définis par une présentation.

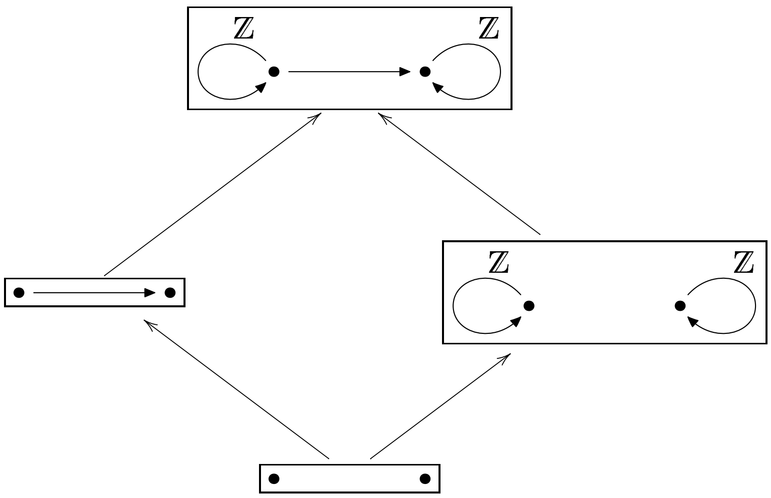
où $\varphi(z_l)$ (respectivement $\psi(z_l)$) désigne *une* écriture de $\varphi(z_l)$ (respectivement $\psi(z_l)$) à l'aide des générateurs de G (respectivement H). On peut remarquer que les relations de K n'interviennent pas.

Cette description de la somme amalgamée s'étend au cas des groupoïdes si les morphismes φ et ψ sont des bijections sur les ensembles d'objets ; une présentation de $\mathrm{G} *_{\mathrm{K}} \mathrm{H}$ est donnée par :

- objets : ceux de K (que l'on identifiera à ceux de G ou de H) ;
- générateurs : ceux de G et ceux de H ;
- relations : celles de G, de H et celles de la forme $\varphi(z)\psi(z)^{-1}$ pour tout générateur z de K.

Exemple 1.5. — On a bien sûr $\pi_1\bar{\mathscr{M}}_{0,3} = \pi_1(*) = 0$ et $\pi_1\bar{\mathscr{M}}_{0,4} = \pi_1\mathbb{P}^1 = 0$.

Exemple 1.6. — La figure 2 montre, à l'aide du Théorème de Van Kampen que le groupe fondamental de $\mathscr{M}_{0,4}$ est donné par le coproduit suivant.



On a donc $\pi_1\mathscr{M}_{0,4} = \pi_1\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\} = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$. On n'a utilisé ici que deux points-bases tangenciels au lieu de six.

Exemple 1.7. — Calculons maintenant $\pi_1(\mathscr{M}_{0,4}/\mathbb{Z}/2)$ où $\mathbb{Z}/2$ agit en permutant deux des quatre points marqués. Si on identifie $\mathscr{M}_{0,4}$ et le plan affine moins deux points, $\mathbb{P}^1 \setminus \{+1, -1, \infty\}$, le groupe $\mathbb{Z}/2$ agit par le passage à

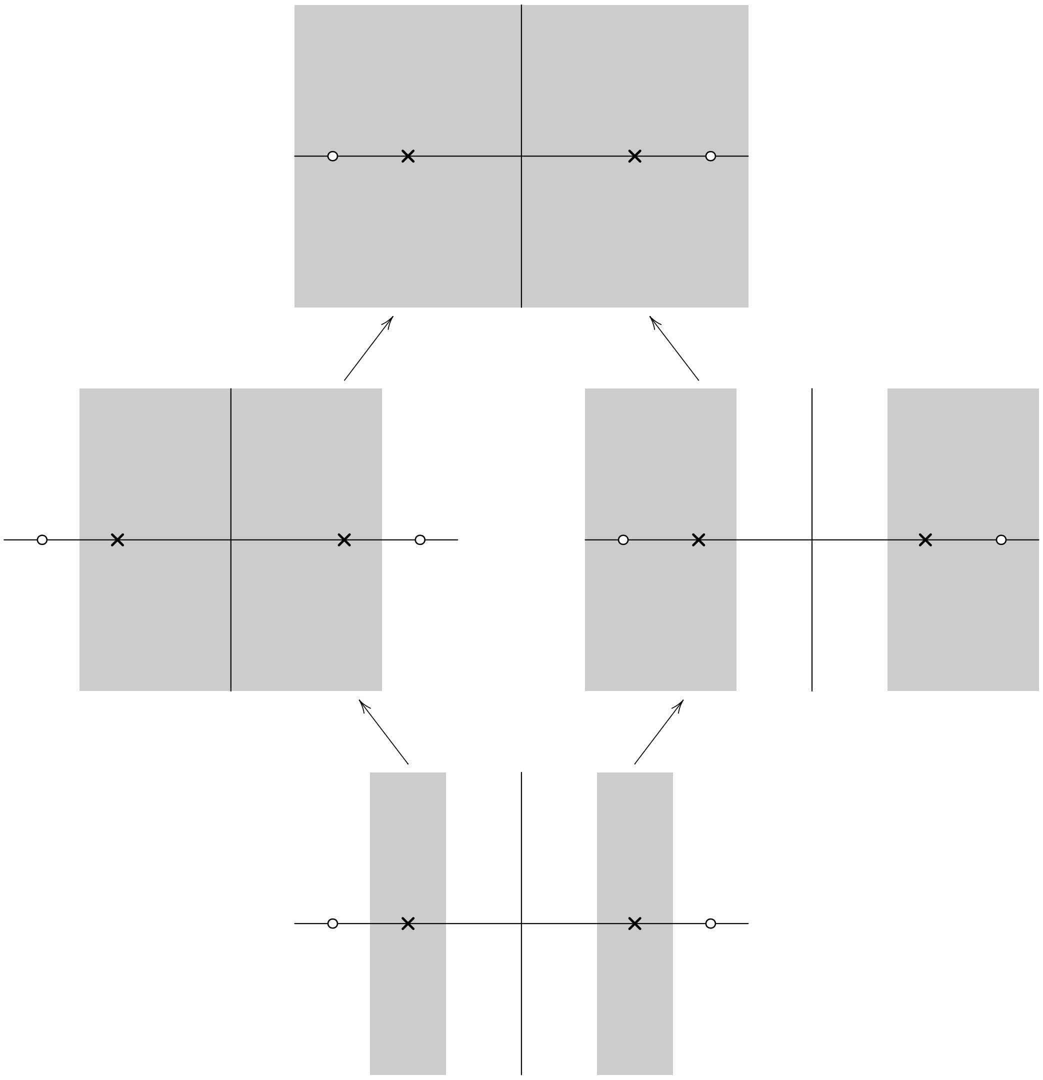


Figure 2: Application du théorème de Van Kampen au calcul de $\pi_1 \mathscr{M}_{0,4}$. On peut voir $\mathscr{M}_{0,4}$ comme le plan $\mathbb{A}^1(\mathbb{C})$ privé de deux points $+1$ et -1, représentés par des disques blancs. On a choisi deux points-bases, représentés par des croix. Les zônes grisées sont les ouverts de $\mathscr{M}_{0,4}$ que l'on utilise pour appliquer le théorème de Van Kampen.

l'opposé. D'après la figure 3, il s'agit du coproduit $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2$,

$$\begin{tikzcd} & \pi_1(\mathscr{M}_{0,4}/\mathbb{Z}/2) & \\ \mathbb{Z}/2 \arrow[ur] & & \mathbb{Z} \arrow[ul] \\ & 0. \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Comme $\mathscr{M}_{0,4}$ est un revêtement à deux feuillets de $\mathscr{M}_{0,4}/\mathbb{Z}/2$, on a une suite exacte (voir I.5.4)

$$0 \longrightarrow \pi_1 \mathscr{M}_{0,4} \longrightarrow \pi_1(\mathscr{M}_{0,4}/\mathbb{Z}/2) \longrightarrow \mathbb{Z}/2 \longrightarrow 0.$$

On peut expliciter les groupes fondamentaux et les morphismes qui y interviennent et ainsi vérifier, sur cet exemple, que la suite est bien exacte.

$$\pi_1 \mathscr{M}_{0,4} = \langle a, b \rangle = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$$
$$\pi_1(\mathscr{M}_{0,4}/\mathbb{Z}/2) = \langle \alpha, \beta ; \beta^2 = 1 \rangle = \mathbb{Z} * (\mathbb{Z}/2)$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \pi_1 \mathscr{M}_{0,4} & \longrightarrow & \pi_1(\mathscr{M}_{0,4}/\mathbb{Z}/2) \\ a & \longmapsto & \alpha \\ b & \longmapsto & \beta\alpha\beta \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \pi_1(\mathscr{M}_{0,4}/\mathbb{Z}/2) & \longrightarrow & \mathbb{Z}/2 \\ \alpha & \longmapsto & 0 \\ \beta & \longmapsto & 1 \end{array} \right.$$

Exemple 1.8. — Utilisons encore une fois le théorème de Van Kampen pour calculer le groupe fondamental de $\mathscr{M}_{1,1}$. D'après la figure 4, il s'agit du coproduit

$$\begin{tikzcd} & \pi_1 \mathscr{M}_{1,1} & \\ \mathbb{Z}/6 \arrow[ur] & & \mathbb{Z}/4 \arrow[ul] \\ & \mathbb{Z}/2. \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

On a donc

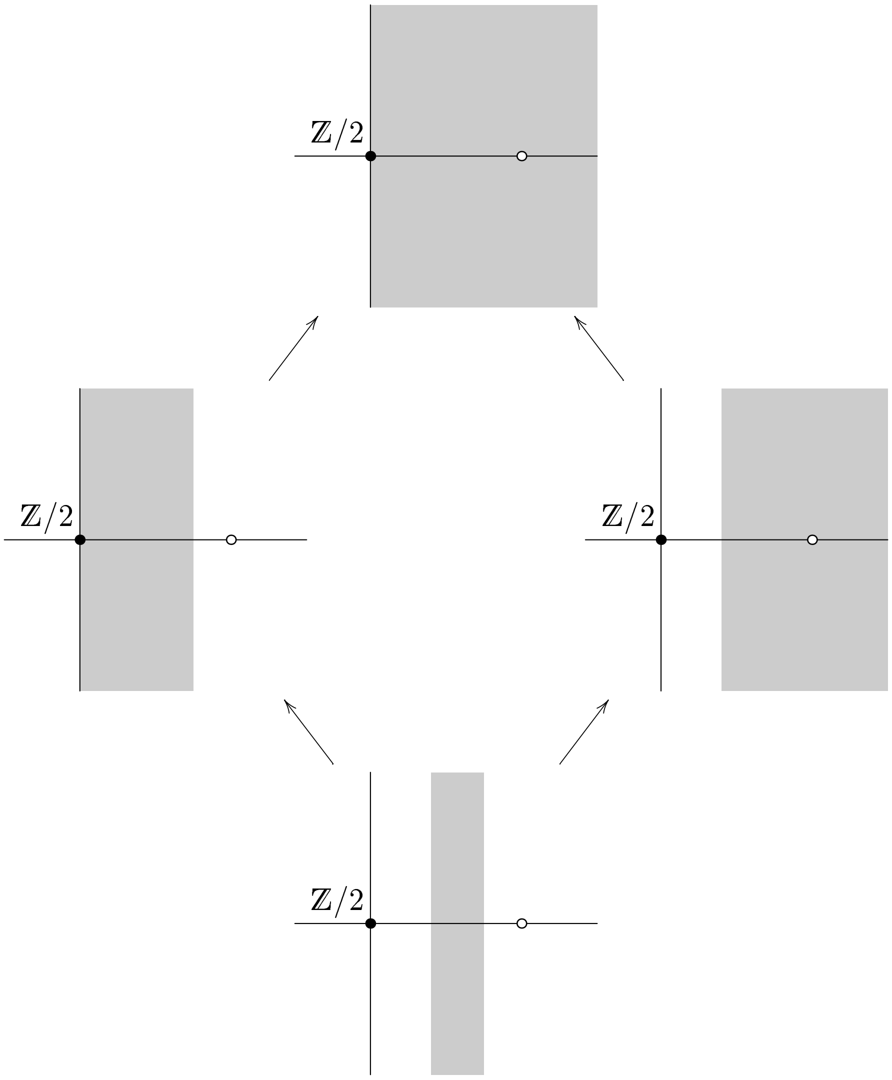


Figure 3: Application du théorème de Van Kampen au calcul de $\pi_1(\mathscr{M}_{0,4}/\mathbb{Z}/2)$. On peut voir $\mathscr{M}_{0,4}$ comme le plan $\mathbb{A}^1(\mathbb{C})$ privé de deux points $+1$ et -1 ; le groupe $\mathbb{Z}/2$ agit alors par le passage à l'opposé. Nous avons représenté en gris un domaine fondamental pour cette action. À gauche, le quotient $\{\, z \in \mathbb{C} \;:\; -\frac{2}{3} < \operatorname{Re} z < \frac{2}{3} \,\}/\mathbb{Z}/2$ est une partie contractile de $\mathbb{C}$, quotientée par rotation d'un demi-tour : le groupe fondamental est $\mathbb{Z}/2$. À droite, le quotient $\{\, z \in \mathbb{C} \;:\; |\operatorname{Re} z| > \frac{1}{3},\ z \neq \pm 1 \,\}/\mathbb{Z}/2$ est isomorphe à $\{\, z \in \mathbb{C} \;:\; \operatorname{Re} z > \frac{1}{3},\ z \neq 1 \,\}$, car l'action est libre : c'est isomorphe au plan privé d'un point ; le groupe fondamental est $\mathbb{Z}$. Enfin, en bas, l'action est toujours libre et le quotient $\{\, z \in \mathbb{C} \;:\; \frac{1}{3} < |\operatorname{Re} z| < \frac{2}{3} \,\}/\mathbb{Z}/2$ est isomorphe à $\{\, z \in \mathbb{C} \;:\; \frac{1}{3} < \operatorname{Re} z < \frac{2}{3} \,\}$, qui est contractile : le groupe fondamental est trivial.

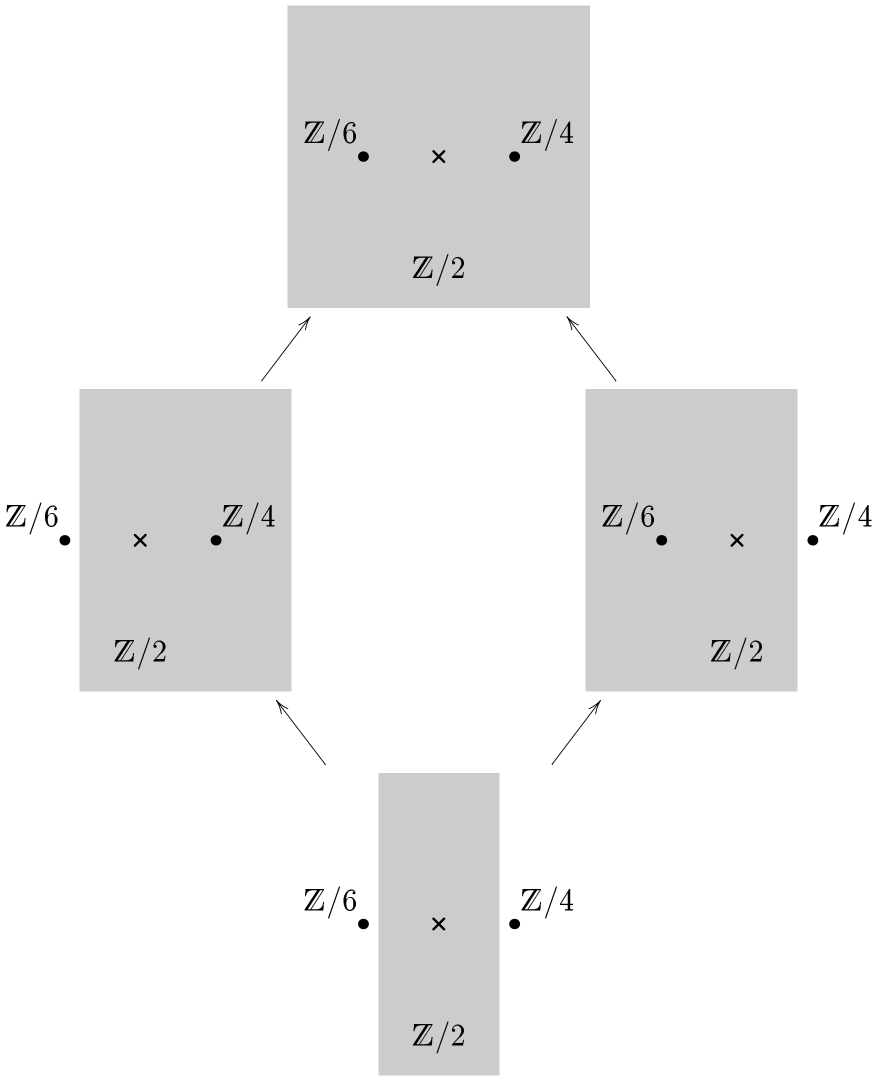


Figure 4 – Application du théorème de Van Kampen au calcul de $\pi_1\mathscr{M}_{1,1}$. On peut voir $\mathscr{M}_{1,1}$ comme la droite affine $\mathbb{A}^1$, dont tous les points ont $\mathbb{Z}/2$ comme groupe d'automorphismes, sauf deux d'entre eux, dont les groupes sont $\mathbb{Z}/4$ et $\mathbb{Z}/6$. On peut supposer que ces deux points ont pour coordonnées $+1$ et -1 et on choisit comme point-base celui de coordonnée 0 (il est repéré par une croix). À gauche, l'espace de modules grossiers est $\{\, z \;:\; \operatorname{Re} z > -\frac{1}{2}\,\}$, isomorphe au plan $\mathbb{A}^1(\mathbb{C})$, et tous les points ont $\mathbb{Z}/2$ comme groupe d'automorphisme, sauf l'un d'entre eux, qui a $\mathbb{Z}/4$: cet orbifold est isomorphe au plan $\mathbb{A}^1(\mathbb{C})$ quotienté par $\mathbb{Z}/4$, où $\bar{1} \in \mathbb{Z}/4$ agit par rotation d'un demi-tour ; le groupe fondamental est $\mathbb{Z}/4$. De même, à droite, le groupe fondamental est $\mathbb{Z}/6$. Enfin, en bas l'orbifold est isomorphe au plan quotienté par l'action triviale de $\mathbb{Z}/2$: le groupe fondamental est $\mathbb{Z}/2$.

$$\begin{aligned}\pi_1\mathscr{M}_{1,1} &= \langle a, b; a^4 = b^6 = 1, a^2 = b^3\rangle \\ &= \langle a, b; a^4 = 1, a^2 = b^3\rangle \\ &= \langle \mathrm{S}, \mathrm{T}; \mathrm{S}^4 = 1, (\mathrm{ST})^3 = \mathrm{S}^2\rangle\end{aligned}$$

donc, en posant $a = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0\end{smallmatrix}\right)$, $b = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1\end{smallmatrix}\right)$ ou $\mathrm{S} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right)$, $\mathrm{T} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$,

$$= \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}).$$

Exemple 1.9. — Utilisons encore une fois le théorème de Van Kampen, pour calculer le groupe fondamental de $\bar{\mathscr{M}}_{1,1}$. D'après la figure 5, il s'agit du coproduit

$$\begin{tikzcd} & \pi_1\bar{\mathscr{M}}_{1,1} & \\ \mathbb{Z}/6 \arrow[ur] & & \mathbb{Z}/4 \arrow[ul] \\ & \pi_1\big(\mathbb{S}^1/(\mathbb{Z}/2)\big). \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

On est donc ramené au calcul de $\pi_1\mathbb{S}^1/(\mathbb{Z}/2)$ où l'action de $\mathbb{Z}/2$ est triviale. D'après I.2.4, il s'agit de $\pi_1(\mathbb{S}^1)\times(\mathbb{Z}/2) = \mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}/2)$. Le groupe fondamental de $\bar{\mathscr{M}}_{1,1}$ est donc le coproduit

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & \mathbb{Z}/4 \arrow[d] \\ \mathbb{Z}/6 \arrow[r] & \pi_1\bar{\mathscr{M}}_{1,1} \end{tikzcd}$$

où les morphismes f et g sont donnés par

$$f : \left\{\begin{array}{rcl} \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2 & \longrightarrow & \mathbb{Z}/4 \\ x & \longmapsto & a \\ y & \longmapsto & a^2 \end{array}\right. \qquad g : \left\{\begin{array}{rcl} \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2 & \longrightarrow & \mathbb{Z}/6 \\ x & \longmapsto & b \\ y & \longmapsto & b^3 \end{array}\right.$$

en notant

$$\begin{aligned}\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2 &= \langle x, y; xy = yx, y^2 = 1\rangle \\ \mathbb{Z}/4 &= \langle a; a^4\rangle \\ \mathbb{Z}/6 &= \langle b; b^6\rangle.\end{aligned}$$

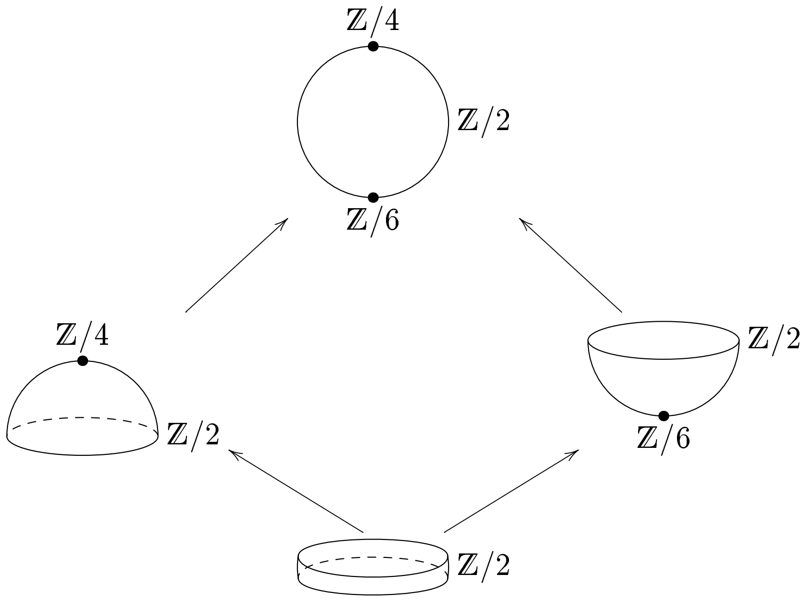


Figure 5: Application du théorème de Van Kampen au calcul de $\pi_1\bar{\mathscr{M}}_{1,1}$: on peut voir $\bar{\mathscr{M}}_{1,1}(\mathbb{C})$ comme une sphère dont les points ont $\mathbb{Z}/2$ comme groupe d'automorphisme, sauf deux d'entre eux, dont les groupes sont $\mathbb{Z}/4$ et $\mathbb{Z}/6$.

On en déduit une présentation de $\pi_1\bar{\mathscr{M}}_{1,1}$,

$$\pi_1\bar{\mathscr{M}}_{1,1} = \langle a, b; a^4 = b^6 = 1, a = b, a^3 = b^2 \rangle = 1.$$

L'espace de modules de courbes elliptiques stables $\bar{\mathscr{M}}_{1,1}$ est donc simplement connexe.

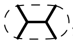
2 Groupoïde de Lyubashenko

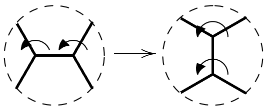
Nous allons décrire le groupoïde $\Gamma'_{g,n}$ de [Lyubashenko 3] qui est une extension centrale du groupoïde qui nous intéresse. Ses objets sont les graphes en rubans (qui, nous l'avons vu, correspondent à des points-bases tangenciels sur $\mathscr{M}_{g,n}$) et ses morphismes sont d'une part les isomorphismes de graphes, d'autre part certains morphismes que l'on rajoute et qui sont soumis à certaines relations.

Les morphismes que nous rajouterons seront tout d'abord définis sur des graphes assez simples (correspondant à des points d'espaces de modules de dimension 0 ou 1), puis nous les généraliserons à des graphes quelconques qui contiennent ces graphes plus simples, par « recollement ». Une manière de formaliser cela est de considérer la catégorie dont les objets sont les graphes en rubans non nécessairement connexes, dont les morphismes sont les automorphismes morphismes de graphes, les recollements de graphes et les générateurs que l'on construira, en dimension 0 ou 1, le tout soumis aux mêmes relations, en demandant deux choses supplémentaires : tous les morphismes sont des épimorphismes et les générateurs commuttent aux recollement.

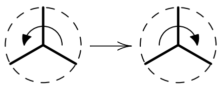
Grace à la procédure de « dédoublement » de la figure 8, on peut aussi interpréter ces graphes en rubans comme des surfaces de Riemann à bord, dont le bord est colorié par les éléments de $[\![1, n]\!]$, munies d'un découpage (modulo isotopie) en pantalons — c'est l'opération inverse de celle décrite dans l'introduction, page 15. Les morphismes que l'on rajoute s'interprèteront alors naturellement comme des homéomorphismes modulo isotopie (*i.e.*, des éléments du groupe d'homéotopie).

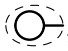
Définition 2.1. — Le groupoïde de Lyubashenko $\Gamma'_{g,n}$ est défini à partir du groupoïde dont les objets sont les graphes en rubans stables, trivalents, et dont les morphismes sont les isomorphismes de graphes (pas les isomorphismes de graphes en rubans) par adjonction des générateurs suivants :

- pour tout graphe contenant un sous-graphe isomorphe à , un morphisme dit de *fusion*

fus : 

- pour tout graphe et toute arrête a de ce graphe, un automorphisme dit de *torsion* T_a ;
- pour tout graphe contenant un sous-graphe isomorphe à , (la flèche indique l'ordre cyclique au sommet) trois morphismes dits de *tressage*

Br : 

- pour tout graphe et tout sous-graphe isomorphe à , un automorphisme dit de *retournement* S ;

soumis aux relations suivantes :

1. Tous les morphismes sont inversibles.
2. Les générateurs dont les supports sont disjoints commuttent.
3. $\mathrm{fus}^2 = \mathrm{Id}$.
4. Le pentagone (ou associativité), figure 13.

5. La composée de deux tressages s'exprime en termes de torsions, de la manière suivante
$$\begin{aligned} \mathrm{Br}_{\mathrm{BC}}^2 &= \mathrm{T}_{\mathrm{A}}\mathrm{T}_{\mathrm{B}}^{-1}\mathrm{T}_{\mathrm{C}}^{-1} \\ \mathrm{Br}_{\mathrm{AB}} \circ \mathrm{Br}_{\mathrm{BC}} &= \mathrm{T}_{\mathrm{B}}^{-1} \\ \mathrm{Br}_{\mathrm{AC}} \circ \mathrm{Br}_{\mathrm{BC}} &= \mathrm{T}_{\mathrm{C}}^{-1}. \end{aligned}$$
comme sur les figures 14, 15 et 16.
6. Deux relations relient la fusion et le tressage, données par la figure 6 ;

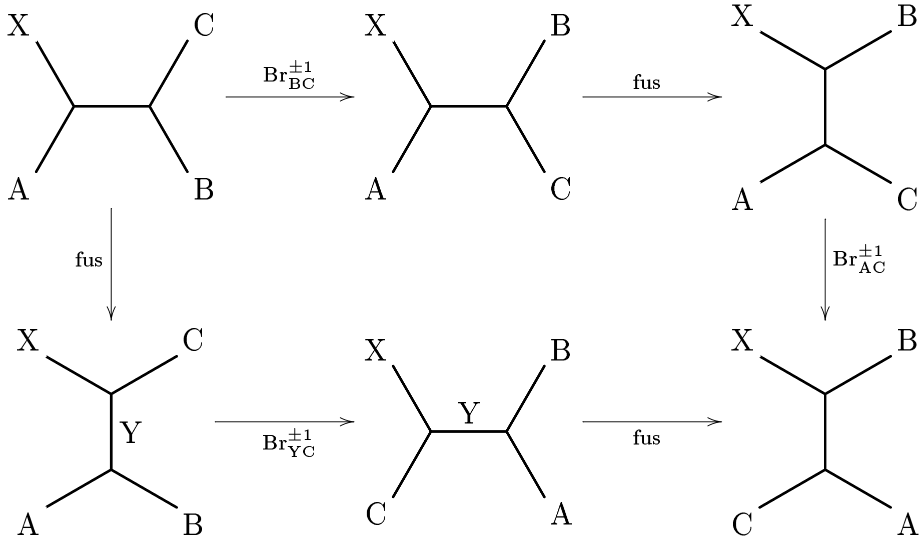


Figure 6 – Les deux relations reliant fusion et tressage

7. $(\mathrm{T} \circ \mathrm{S})^3 = \mathrm{S}^2$.
8. $\mathrm{S}^2 = \mathrm{T}^{-1} \circ \mathrm{Br}^{-1}$
9. Une relation pour les graphes (contenant un sous-graphe) de genre un à deux jambes, donnée par la figure 7.

Définition 2.2. — Nous noterons $\Gamma_{g,n}$ le quotient de $\Gamma'_{g,n}$ par la torsion autour des jambes : c'est le groupoïde qui nous intéresse.

Exemple 2.3. — La figure 17 représente les groupoïdes $\Gamma_{0,3}$ et $\Gamma'_{0,3}$. Ils ont deux objets, représentés par la figure 18.

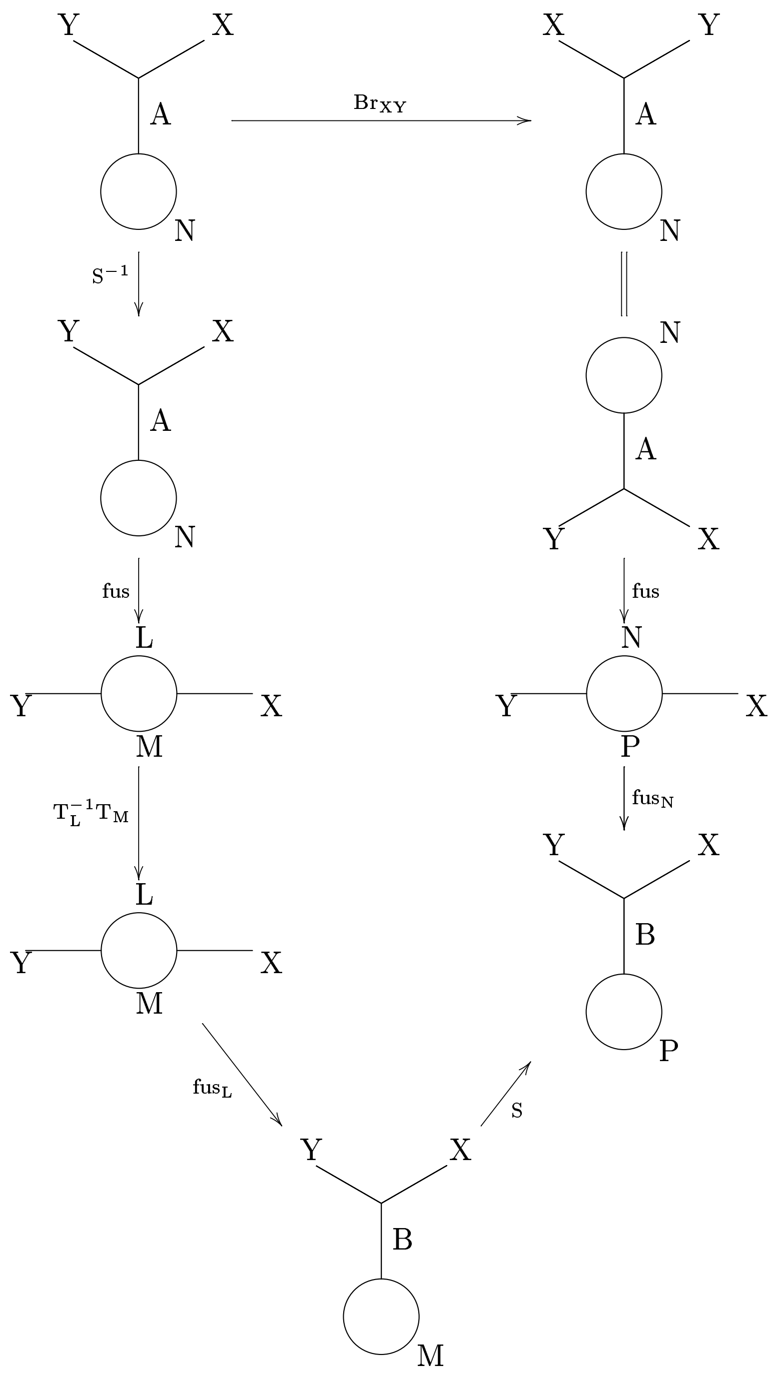


Figure 7 – Relation pour les graphes de genre un à deux jambes

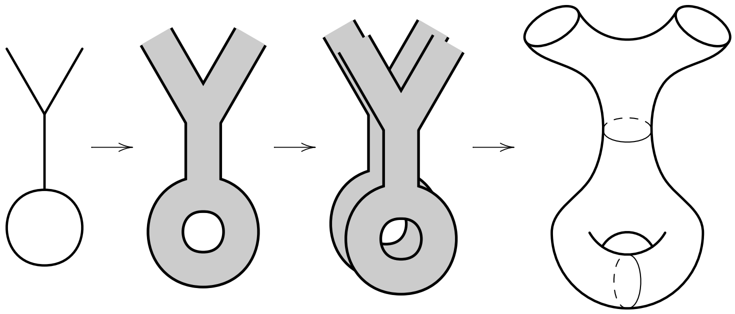


Figure 8 – Comment obtenir une surface en « dédoublant » un graphe en rubans et en recollant les deux morceaux.

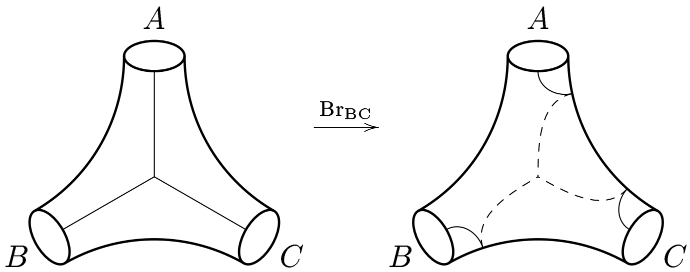


Figure 9 – Le morphisme de tressage

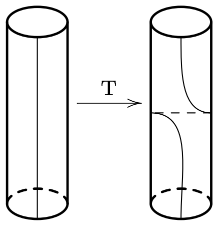


Figure 10 – Le morphisme de torsion

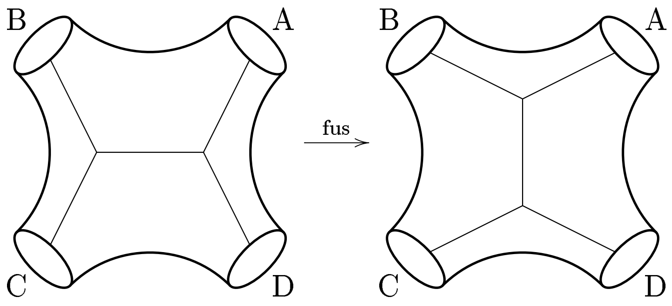


Figure 11 – Le morphisme de fusion

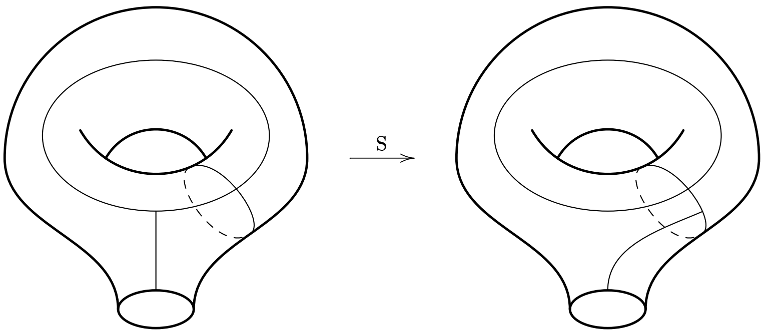


Figure 12 – Le retournement, chemin dans $\mathscr{M}_{1,1}$

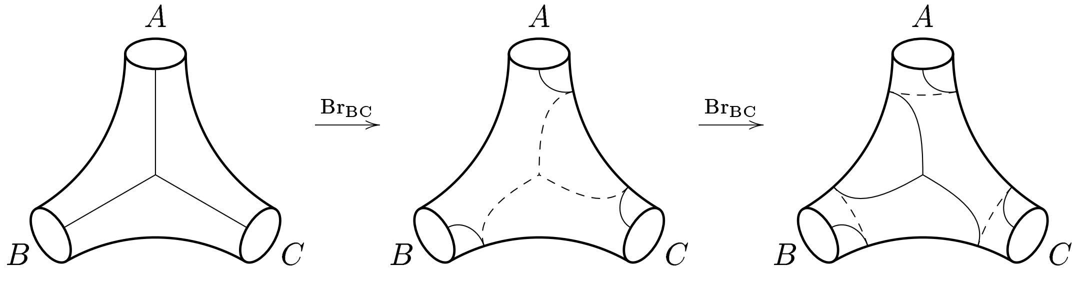


Figure 14 – Le carré du tressage

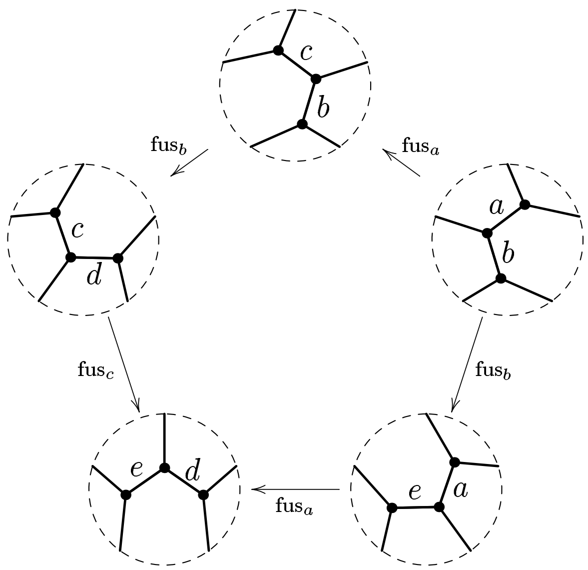


Figure 13 – La relation du pentagone (associativité)

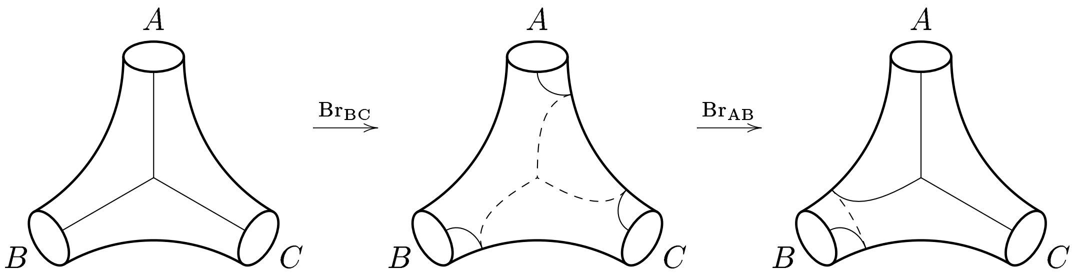


Figure 15 – La composition de deux tressages

Figure 17 – Les groupoïdes $\Gamma_{0,3}$ et $\Gamma'_{0,3}$

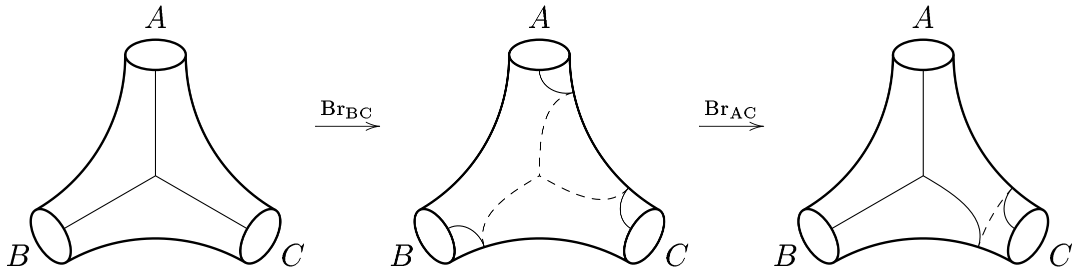


Figure 16 – La composition de deux autres tressages

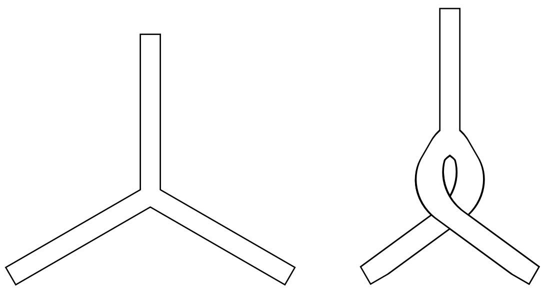


Figure 18 – Les objets du groupoïde $\Gamma_{0,3}$

3 Torsion et tressage

Nous allons maintenant définir des chemins dans le groupe fondamental de $\mathscr{M}_{g,n}$, *i.e.*, des transformations naturelles entre nos différents foncteurs-fibres. Ces morphismes de foncteurs peuvent s'écrire

$$\mathrm{Hom}\big(\cdot,\ k\{\{x_1,\dots,x_m\}\}\big) \longrightarrow \mathrm{Hom}\big(\cdot,\ k\{\{y_1,\dots,y_m\}\}\big).$$

Avant de les décrire, examinons une transformation naturelle de ce type, dans une situation un peu plus simple.

Exemple 3.1. — Sur la droite affine privée d'un point, $\mathrm{X} = \mathbb{P}^1 \setminus \{0,\infty\} = \mathrm{Spec}\, k[x,x^{-1}]$, définissons deux points-bases tangenciels.

$$\overrightarrow{01} : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathfrak{Rev}\,\mathrm{X} & \longrightarrow & \mathfrak{Ens} \\ (\mathrm{R},y) & \longmapsto & \mathrm{Hom}_{k(x)}\big(k(\mathrm{R}),\ k\{\{x\}\}\big) \end{array} \right.$$

$$\overrightarrow{0\infty} : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathfrak{Rev}\,\mathrm{X} & \longrightarrow & \mathfrak{Ens} \\ (\mathrm{R},y) & \longmapsto & \mathrm{Hom}_{k(x)}\left(k(\mathrm{R}),\ k\left\{\left\{\dfrac{x}{x-1}\right\}\right\}\right) \end{array} \right.$$

Ici, $x/(x-1)$ est juste une manière un peu compliquée d'écrire l'indéterminée t de $k\{\{t\}\}$ en soulignant le fait que le morphisme $k(x) \longrightarrow k\{\{t\}\}$ est défini par $x/(x-1) \longmapsto t$. Nous allons décrire de deux manières le chemin γ de la figure 19.

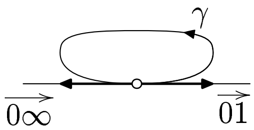


Figure 19 – Chemin γ dans la droite affine privée d'un point

(a) Pour la description la plus géométrique, nous allons utiliser le langage de la géométrie complexe. Tout d'abord, remarquons que dans la définition des foncteurs-fibres, on peut remplacer $k\{\{x\}\}$ par le corps $\mathrm{M}_{\overrightarrow{01}}$ des germes de fonctions méromorphes sur $]0,1[$ qui possèdent un développement de Puiseux en 0 et 1.

$$\overrightarrow{01} : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathfrak{Rev}\,\mathrm{X} & \longrightarrow & \mathfrak{Ens} \\ (\mathrm{R},y) & \longmapsto & \mathrm{Hom}_{k(x)}(k(\mathrm{R}), \mathrm{M}_{\overrightarrow{01}}) \end{array} \right.$$

$$\overrightarrow{0\infty} : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathfrak{Rev}\,\mathrm{X} & \longrightarrow & \mathfrak{Ens} \\ (\mathrm{R},y) & \longmapsto & \mathrm{Hom}_{k(x)}(k(\mathrm{R}), \mathrm{M}_{\overrightarrow{0\infty}}) \end{array} \right.$$

Le prolongement analytique le long du chemin γ de la figure 19 nous donne un morphisme de corps

$$\mathrm{M}_{\overrightarrow{01}} \longrightarrow \mathrm{M}_{\overrightarrow{0\infty}}$$

puis une transformation naturelle

$$\overrightarrow{01} \longrightarrow \overrightarrow{0\infty}.$$

(b) Repassons maintenant au cadre algébrique. Pour définir une transformation naturelle $\overrightarrow{01} \longrightarrow \overrightarrow{0\infty}$, il suffit de se donner un morphisme

$$k\{\{x\}\} \longrightarrow k\left\{\left\{\frac{x}{x-1}\right\}\right\}.$$

Commençons par remarquer que

$$\begin{aligned} x &= \frac{\dfrac{x}{x-1}}{\dfrac{x}{x-1}-1} \\ &= -\frac{x}{x-1}\left(1-\frac{x}{x-1}\right)^{-1} \\ &= -\frac{x}{x-1}\sum_{n\geqslant 0} c_n\left(\frac{x}{x-1}\right)^n \in k\left[\left[\frac{x}{x-1}\right]\right], \end{aligned}$$

où les $c_n \in \mathbb{Q}$ sont les coefficients du développement en série

$$(1-\varepsilon)^{-1} = \sum_{n\geqslant 0} c_n \varepsilon^n \in k[\![\varepsilon]\!].$$

D'après le lemme suivant, cela nous donne un morphisme d'anneaux

$$\left\{\begin{array}{ccl} k[\![x]\!] & \longrightarrow & k[\![t]\!] \\ x & \longmapsto & \dfrac{t}{t-1} = -t(1-t)^{-1} = -t\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} c_n t^n \end{array}\right.$$

que l'on peut écrire

$$k\,[\![x]\!] \longrightarrow k\left[\left[\frac{x}{x-1}\right]\right] \longrightarrow k\left\{\left\{\frac{x}{x-1}\right\}\right\}.$$

Lemme 3.2. — *Un morphisme de k-algèbres $\Phi : k[x] \longrightarrow k[\![x]\!]$ tel que* $\deg \Phi(x) \geqslant 1$ *se prolonge en un morphisme $\widetilde{\Phi} : k[\![x]\!] \longrightarrow k[\![x]\!]$ en posant*

$$\widetilde{\Phi}\Big(\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n\Big) = \sum_{n\geqslant 0} a_n \Phi(x)^n.$$

Démonstration : Il suffit de vérifier que $\widetilde{\Phi}$ est bien défini, *i.e.*, que les coefficients de $\widehat{\Phi}(\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n)$ ne font intervenir que des sommes *finies* : mais cela résulte de l'hypothèse $\deg \Phi(x) \geqslant 1$. $\square$

Pour étendre ce morphisme à l'anneau des séries de Puiseux, on pose

$$\begin{aligned} x^{1/n} \longmapsto & \zeta_n \left(\frac{x}{x-1}\right)^{1/n} \left(1 - \frac{x}{x-1}\right)^{-1/n} \\ &= \zeta_n \left(\frac{x}{x-1}\right)^{1/n} \sum_{k\geqslant 0} c_{n,k} \left(\frac{x}{x-1}\right)^{n} \in k\left\{\left\{\frac{x}{x-1}\right\}\right\}, \end{aligned}$$

où les ζ_n forment un système cohérent de racines primitives $n^{\text{ièmes}}$ de -1 et les $c_{n,k} \in \mathbb{Q}$ sont les coefficients du développement de

$$(1-\varepsilon)^{-1/n} = \sum_{k\geqslant 0} c_{n,k}\varepsilon^k \in k[\![\varepsilon]\!].$$

(Comme le dénominateur des $c_{n,k}$ peut être à peu près quelconque, on est obligé de se limiter à la caractéristique nulle.)

D'après le lemme suivant, c'est un isomorphisme d'anneaux, il induit donc un isomorphisme entre les corps de fractions

$$k\{\{x\}\} \longrightarrow k\left\{\left\{\frac{x}{x-1}\right\}\right\}$$

puis entre les foncteurs-fibres

$$\overrightarrow{01} \longrightarrow \overrightarrow{0\infty}.$$

Lemme 3.3. — *Considérons le morphisme d'anneaux*

$$\Phi_\zeta : \left\{ \begin{array}{ccc} k\{\{x\}\} & \longrightarrow & k\{\{y\}\} \\ x^{1/n} & \longmapsto & \zeta_n y^{1/n} \sum_{k\geqslant 0} c_{n,k} y^n, \end{array} \right.$$

où les ζ_n forment un système cohérent de racines primitives $n^{\text{ièmes}}$ de -1.

(*i*) *Le carré de Φ est donné par*

$$\Phi_\zeta \circ \Phi_\zeta : \left\{ \begin{array}{ccc} k\{\{x\}\} & \longrightarrow & k\{\{x\}\} \\ x^{1/n} & \longmapsto & \zeta_n^2 x^{1/n} \end{array} \right.$$

et les ζ_n^2 forment un système cohérent de racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité.

(*ii*) *Le morphisme* Φ_ζ *est un isomorphisme, et son inverse* $\Phi_{\bar\zeta}$ *est défini de la même manière, en prenant le système cohérent des racines* $n^{\text{ièmes}}$ *de* -1 *inverses de* ζ_n.

(*iii*) *L'isomorphisme d'anneaux* Φ *s'étend en un isomorphisme entre les corps de fractions.*

Démonstration : Le morphisme Φ est défini par

$$\begin{cases} k\{\{t\}\} & \longrightarrow & k\{\{x\}\} \\ t & \longmapsto & \dfrac{d}{x-1} = -x \displaystyle\sum_{k\geqslant 0} c_k x^k \\ t^{1/n} & \longmapsto & \zeta_n x^{1/n} \displaystyle\sum_{k\geqslant 0} c_{n,k} x^k \end{cases}$$

donc son carré

$$k\{\{t\}\} \xrightarrow{\Phi} k\{\{x\}\} \xrightarrow{\Phi} k\{\{t\}\}$$

est défini par

$$\begin{aligned} \Phi^2(t^{1/n}) &= \zeta_n \Phi(x^{1/n}) \sum_{k\geqslant 0} c_{n,k} \Phi(x)^k \\ &= \zeta_n \big(\zeta_n t^{1/n} \sum_{k\geqslant 0} c_{n,k} t^k\big) \sum_{k\geqslant 0} c_{n,k} \left(\frac{t}{t-1}\right)^k \\ &= \zeta_n^2 t^{1/n} \left(\sum_{k\geqslant 0} c_{n,k} t^k\right) \left(\sum_{k\geqslant 0} c_{n,k} \left(\frac{t}{t-1}\right)^k\right) \\ &= \zeta_n^2 t^{1/n}. \end{aligned}$$

Pour justifier la dernière égalité, on peut remarquer que les séries entre parenthèses sont le développement en série entière convergent de fonctions réelles positives sur un voisinage à droite de 0,

$$\frac{1}{(1-t)^{1/n}} \times \frac{1}{\left(1 - \dfrac{t}{t-1}\right)^{1/n}} = 1,$$

et l'égalité des séries résulte de l'égalité des fonctions.

La seconde partie du lemme se démontre de même.

Comme ces morphismes d'anneaux sont en fait des isomorphismes, ils définissent des isomorphismes entre les corps de fractions. □

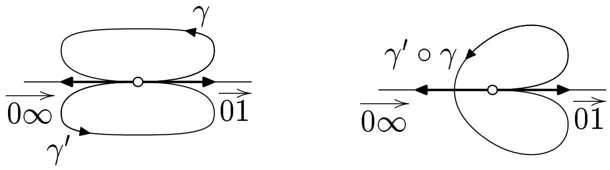


Figure 20 – On obtient un lacet en composant un chemin γ de $\overrightarrow{01}$ vers $\overrightarrow{0\infty}$ et un chemin γ' dans l'autre sens.

Remarque 3.4. — La même construction permet de définir un chemin dans l'autre sens $\gamma' : \overrightarrow{0\infty} \longrightarrow \overrightarrow{01}$ qui n'est pas l'inverse de γ. Si on compose ces deux chemins, on obtient un lacet $\gamma' \circ \gamma$ qui engendre $\pi_1(\mathrm{X}, \overrightarrow{01})$ (figure 20).

Remarque 3.5. — Si l'on revient à la situation qui nous intéresse, en dimensions supérieures, on s'apperçoit que l'on peut définir des isomorphismes d'anneaux (puis de corps)

$$\Phi_i : \begin{cases} k\{\{x_1, \dots, x_n\}\} & \longrightarrow & k\{\{y_1, \dots, y_n\}\} \\ x_i^{1/n} & \longmapsto & \zeta_n y_i^{1/n} \sum_{k \geqslant 0} c_{n,k} y_i^k \\ x_j^{1/n} & \longmapsto & y_j^{1/n} \text{ si } j \neq i. \end{cases}$$

Nous pouvons maintenant définir les chemins de torsion et de tressage dans les espaces de modules de courbes. Dans la suite, on fixe un système cohérent $(\zeta_n)_{n \in \mathbb{N}^\times}$ de racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité.

Définition 3.6. — Soit e une arrête d'extrémités distinctes d'un graphe en rubans G décrivant un point-base tangenciel de $\mathscr{M}_{g,n}$. La *torsion* de l'arrête e est définie comme la transformation naturelle

$$\mathrm{T}_e = \Phi_i^2 : \mathrm{Hom}\big(\cdot,\, k\{\{x_1, \dots, x_m\}\}\big) \longrightarrow \mathrm{Hom}\big(\cdot,\, k\{\{x_1, \dots, x_m\}\}\big)$$

où Φ_i agit sur la $i^{\text{ième}}$ composante, celle correspondant à l'arrête e.

Définition 3.7. — Soient G un graphe en rubans décrivant un point-base tangenciel de $\mathscr{M}_{g,n}$, v un sommet *sans boucle* de G, e_1 une arrête issue de v et e_2 et e_3 les deux autres arrêtes issues de v. Notons G$'$ le graphe en rubans obtenu après application du tressage défini par e_2 et e_3 et v', e_1', e_2', e_3' les mêmes données après transformation. Les foncteurs-fibres correspondant peuvent s'écrire

$$\mathrm{Hom}\big(\cdot,\, k\{\{x_1, \dots, x_m\}\}\big) \text{ et } \mathrm{Hom}\big(\cdot,\, k\{\{y_1, \dots, y_m\}\}\big)$$

où les trois premières coordonnées correspondent e_1, e_2 et e_3 (respectivement e'_1, e'_2 et e'_3). Le tressage de e_2 et e_3 est la transformation naturelle

$$\mathrm{Br}_{e_2,e_3} : \mathrm{Hom}\big(\cdot,\ k\{\{x_1,\dots,x_m\}\}\big) \longrightarrow \mathrm{Hom}\big(\cdot,\ k\{\{y_1,\dots,y_m\}\}\big)$$

induite par le morphisme

$$\left\{\begin{array}{rcl} k\{\{x_1,\dots,x_m\}\} & \longrightarrow & k\{\{y_1,\dots,y_m\}\} \\ x_1 & \longmapsto & +\zeta_n y_1^{1/n} \sum\limits_{k\geqslant 0} c_{n,k} y_1^k \\ x_2 & \longmapsto & -\zeta_n y_2^{1/n} \sum\limits_{k\geqslant 0} c_{n,k} y_2^k \\ x_3 & \longmapsto & -\zeta_n y_3^{1/n} \sum\limits_{k\geqslant 0} c_{n,k} y_3^k \\ x_i & \longmapsto & y_i \text{ si } i \notin \{\,1,2,3\,\}. \end{array}\right.$$

Remarque 3.8. — D'après le lemme 3.3, les relations attendues pour le carré du tressage (figures 14, 15 et 16),

$$\begin{aligned} \mathrm{Br}_{\mathrm{BC}}^2 &= \mathrm{T}_{\mathrm{A}}\mathrm{T}_{\mathrm{B}}^{-1}\mathrm{T}_{\mathrm{C}}^{-1} \\ \mathrm{Br}_{\mathrm{AB}} \circ \mathrm{Br}_{\mathrm{BC}} &= \mathrm{T}_{\mathrm{B}}^{-1} \\ \mathrm{Br}_{\mathrm{AC}} \circ \mathrm{Br}_{\mathrm{BC}} &= \mathrm{T}_{\mathrm{C}}^{-1}. \end{aligned}$$

sont bien satisfaites.

Remarque 3.9. — Il reste encore à définir torsion et tressage pour les graphes avec une boucle. On peut remarquer que, d'après 1.8, on a $\mathrm{T} = ab$, où a et b sont les générateurs des groupes des points $j = 12^3$ et $j = 0$ et construire la torsion comme le retournement un peu plus loin 4.4. Quant au tressage, on peut remarquer que comme on doit avoir $\mathrm{S}^2 = \mathrm{T}^{-1} \circ \mathrm{Br}^{-1}$, il suffit de poser $\mathrm{Br} = \mathrm{S}^{-2} \circ \mathrm{T}^{-1}$. Le fait que la fusion et le tressage soient définis différemment pour les boucles rendra la propagation des générateurs et des relations au travers des morphismes d'accrochage plus problématique.

4 Retournement

Nous allons juste construire le retournement comme un chemin dans $\mathscr{M}_{1,1}$: ce sera le chemin qui part de $j = \infty$, puis va (par fusion) vers $j = 12^3$, y applique le générateur (on en choisit un, une fois pour toutes) de $\mathbb{Z}/4$ et revient enfin à $j = \infty$. Montrons que cette description a bien un sens.

Lemme 4.1. — *Soient x un point d'un champ algébrique* X *et* G *son groupe d'automorphismes. Tout élément de* G *définit un automorphisme du foncteur-fibre défini par x.*

Démonstration : Rappelons que le morphisme $x : \operatorname{Spec} k \longrightarrow \mathrm{X}$ peut se factoriser par

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Spec} k \arrow[rr, "x"] \arrow[dr, "x"'] & & \mathrm{X} \\ & \operatorname{Spec} k/\mathrm{G}, \arrow[ur, "b"'] & \end{tikzcd}$$

ce qui donne une factorisation du foncteur-fibre x^*

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{Ens} & & \mathrm{SLC}\mathfrak{Sh}\,\mathrm{X} \arrow[ll, "x^*"'] \arrow[dl, "b^*"] \\ & \mathrm{G}\text{-}\mathfrak{Ens}. \arrow[ul, "a^*"] & \end{tikzcd}$$

A priori, ce diagramme est juste commutatif à isomorphisme près, mais quitte à remplacer x^* par un foncteur isomorphe, on peut le supposer commutatif. Tout élément de G définit un automorphisme du foncteur d'oubli a^*, donc un automorphisme du foncteur-fubre x^*. □

Lemme 4.2. — *Soient* X *un champ algébrique,* D *un diviseur à croisements normaux et x un point fermé de* D*. Un point-base tangenciel de* X\D *en x définit (grace au morphisme d'inclusion* $\mathrm{X} \supset \mathrm{D} \hookrightarrow \mathrm{X}$*) un point-base tangenciel de* X*, qui est* canoniquement *isomorphe à x.*

Démonstration : Voir II.2.13. □

Remarque 4.3. — Pour définir les points-bases tangenciels sur $\mathscr{M}_{1,1}$, on prend les points-bases tangenciels sur $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 12^3, \infty\}$ et, grace au morphisme

$$\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 12^3, \infty\} \longrightarrow \mathbb{P}^1 \setminus \{0, 12^3, \infty\}/\mathbb{Z}/2 \simeq \mathscr{M}_{1,1} \setminus \{0, 12^3\} \longrightarrow \mathscr{M}_{1,1},$$

on obtient des points-bases sur $\mathscr{M}_{1,1}$.

Définition 4.4. — On peut maintenant définir le retournement dans $\mathscr{M}_{1,1}$: c'est la composée des chemins suivants.

(i) La fusion de $j = \infty$ vers $j = 12^3$, définie par prolongement analytique [Ihara 1] ;

(*ii*) L'isomorphisme canonique entre le point-base tangenciel en $j = 12^3$ et le point $j = 12^3$;

(*iii*) Le générateur du groupe du point $j = 12^3$, *i.e.*, $\mathbb{Z}/4$;

(*iv*) L'isomorphisme canonique entre le point $j = 12^3$ et le point-base tangenciel en $j = 12^3$ dans la direction de $j = \infty$;

(*v*) la fusion de $j = 12^3$ vers $j = \infty$.

Remarque 4.5. — Nous n'avons pas encore de description du retournement, du tressage et de la torsion (en présence d'une boucle) en dimensions supérieures.

Annexe A

Rappels succincts sur les champs algébriques

Il s'agit de rappels : nous nous contentons d'énoncer brièvement les définitions, sans les motiver et en donnant très peu d'exemples.

1 Topologie sur une catégorie

Définition 1.1. — Un *crible* d'un objet X d'une catégorie $\mathfrak{C}$ est un ensemble de flèches de but X, stable par composition à droite.

On parle parfois de crible d'une catégorie $\mathfrak{C}$: c'est un ensemble d'objets contenant la source de tout morphisme dont il contient le but. Un crible d'un objet X de $\mathfrak{C}$ est donc un crible de $\mathfrak{C}/\mathrm{X}$.

Définition 1.2. — Une *topologie* sur une catégorie $\mathfrak{C}$ est la donnée, pour tout objet X de $\mathfrak{C}$, d'un ensemble J(X) de cribles de X, dits *cribles couvrants*, telle que

(*i*) le crible maximal (contenant toutes les flèches de but X) est couvrant ;

(*ii*) la restriction d'un crible couvrant l'est encore : si R est un crible couvrant X et $f : \mathrm{Y} \longrightarrow \mathrm{X}$ un morphisme, alors

$$f^*\mathrm{R} = \{g : \mathrm{Z} \longrightarrow \mathrm{Y} \ : \ f \circ g \in \mathrm{R}\}$$

est un crible couvrant Y ;

(*iii*) pour vérifier qu'un crible est couvrant, il suffit de le vérifier localement (au travers d'un crible couvrant) : si R est un crible de X, si R′ est un crible couvrant X et si pour tout morphisme f de R′ le crible $f^*\mathrm{R}$ est couvrant, alors R est couvrant.

Définition 1.3. — Un *site* est une catégorie munie d'une topologie.

2 Faisceaux

Définition 2.1. — Un *préfaisceau* sur une catégorie est un foncteur contravariant vers la catégorie des ensembles. On notera $\widehat{\mathfrak{C}}$ la catégorie des préfaisceaux de $\mathfrak{C}$. Un *préfaisceau représentable* est un préfaisceau isomorphe à un préfaisceau de la forme $\mathrm{Hom}(\cdot, \mathrm{X})$, pour un objet X de $\mathfrak{C}$.

Remarque 2.2. — Se donner un crible d'un objet X de $\mathfrak{C}$ revient à se donner un sous-préfaisceau de $\mathrm{X} = \mathrm{Hom}(\cdot, \mathrm{X})$. L'image réciproque d'un crible R par un morphisme $f : \mathrm{Y} \longrightarrow \mathrm{X}$ est le produit fibré $f^*\mathrm{R} = \mathrm{R} \times_{\mathrm{X}} \mathrm{Y}$ dans la catégorie des préfaisceaux.

Remarque 2.3. — Le foncteur d'Yoneda

$$\begin{cases} \mathfrak{C} & \longrightarrow & \widehat{\mathfrak{C}} \\ \mathrm{X} & \longmapsto & \mathrm{Hom}(\cdot, \mathrm{X}) \end{cases}$$

est pleinement fidèle. De plus, pour tout préfaisceau $\mathscr{F}$ et tout objet X, on a des isomorphismes canoniques

$$\mathcal{F}\mathrm{X} \simeq \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathfrak{C}}}(\mathrm{X}, \mathcal{F}).$$

Définition 2.4. — Un *faisceau* sur un site $(\mathfrak{C}, \mathrm{J})$ est un préfaisceau $\mathcal{F}$ tel que pour tout objet X de $\mathfrak{C}$, pour tout crible R couvrant X, l'inclusion $\mathrm{R} \longrightarrow \mathrm{X}$ induise un isomorphisme

$$\mathrm{Hom}(\mathrm{X}, \mathcal{F}) \simeq \mathrm{Hom}(\mathrm{R}, \mathcal{F}).$$

Définition 2.5. — La *topologie canonique* est la topologie la plus fine pour laquelle les préfaisceaux représentables sont des faisceaux. Les topologies que nous rencontrerons seront moins fines que la topologie canonique, *i.e.*, les préfaisceaux représentables seront toujours des faisceaux.

3 Catégories fibrées en groupoïdes

Remarque 3.1. — La notion de préfaisceau de groupoïde, *i.e.*, de foncteur contravariant $\mathcal{F} : \mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{Groupo\ddot{i}des}$ à valeurs dans la 2-catégorie des groupoïdes, généralise celle de préfaisceau. On peut mettre une structure de catégorie sur $\mathfrak{F} = \coprod_{\mathrm{X} \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{C}} \mathcal{F}\mathrm{X}$ telle que la projection $\mathfrak{F} \longrightarrow \mathfrak{C}$ soit un foncteur. C'est un exemple de ce que l'on appelle une catégorie fibrée en groupoïdes.

Dans les exemples que nous rencontrerons, l'image d'un morphisme de $\mathfrak{C}$ par $\mathcal{F}$ est définie par une propriété universelle (produit fibré de schémas ou image réciproque de d'un faisceau de modules), ce qui laisse une certaine latitude de choix. On peut effectuer tous ces choix de manière à obtenir un foncteur ; si on ne le fait pas, l'image de la composée de deux morphismes n'est pas égale mais simplement isomorphe à la composée des images et on parle alors de pseudo-foncteur.

Définition 3.2. — Une *catégorie fibrée en groupoïdes* sur une catégorie $\mathfrak{C}$ est un foncteur $\mathcal{F} : \mathfrak{F} \longrightarrow \mathfrak{C}$ tel que

(*i*) pour tout morphisme $f : \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{Y}$ dans $\mathfrak{C}$ et tout objet y au dessus de Y (*i.e.*, pour tout $y \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{F}$ tel que $\mathcal{F}y = \mathrm{F}$), il existe un objet x au dessus de X (on en choisira un et on le notera f^*y) et une flèche $x \longrightarrow y$ au dessus de f ;

(*ii*) pour tous objets X, Y et Z dans $\mathfrak{C}$, pour tous morphismes f, g et h comme dans le diagramme ci-dessous, pour tous objets x, y et z de $\mathfrak{F}$ au dessus de X, Y et Z, pour tous morphismes φ et ψ au dessus de f et g,

$$\begin{tikzcd} z \arrow[dr, dotted] \arrow[drr, "\varphi"] & & \\ & x \arrow[r, "\psi"'] & y \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Z} \arrow[dr, "h"'] \arrow[drr, "f"] & & \\ & \mathrm{X} \arrow[r, "g"'] & \mathrm{Y} \end{tikzcd}$$

il existe une unique flèche (en pointillés) au dessus de h, faisant commuter le triangle du haut.

Définition 3.3. — Un *morphisme de catégories fibrées* (en groupoïdes) de $\mathfrak{F}$, vers $\mathfrak{G}$ au dessus de $\mathfrak{C}$ est un foncteur $\mathfrak{F} \longrightarrow \mathfrak{G}$ compatible aux projections,

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{F} \arrow[rr, "\mathrm{H}"] \arrow[dr, "\mathrm{F}"'] & & \mathfrak{G} \arrow[dl, "\mathrm{G}"] \\ & \mathfrak{C}. & \end{tikzcd}$$

Un 2-*morphisme de catégories fibrées* est une transformation naturelle

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{F} \arrow[rr, bend left] \arrow[rr, bend right] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow\alpha"] \arrow[dr, "\mathrm{F}"'] & & \mathfrak{G} \arrow[dl, "\mathrm{G}"] \\ & \mathfrak{C}. & \end{tikzcd}$$

telle que pour tout objet X de $\mathfrak{F}$ on aie $\mathrm{G}\alpha_{\mathrm{X}} = \mathrm{Id}_{\mathrm{FX}}$. Les catégories fibrées sur $\mathfrak{C}$ forment une 2-catégorie $\mathfrak{Fib}\,\mathfrak{C}$.

Définition 3.4. — La *fibre* d'une catégorie fibrée $\mathfrak{F} \longrightarrow \mathfrak{C}$ au dessus d'un objet X de $\mathfrak{C}$ est la catégorie $\mathfrak{F}_{\mathrm{X}}$ dont les objets sont les objets de $\mathfrak{F}$ au dessus de X et les morphismes ceux au dessus de Id_{X}.

Définition 3.5. — Considérons des morphismes de catégories fibrées sur $\mathfrak{C}$.

$$\begin{tikzcd} & \mathfrak{F} \arrow[d] \arrow[ddr] & \\ \mathfrak{G} \arrow[r] \arrow[drr] & \mathfrak{H} \arrow[dr] & \\ & & \mathfrak{C} \end{tikzcd}$$

Le 2-*produit fibré* de $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{G}$ au dessus de $\mathfrak{H}$, noté $\mathfrak{F} \overset{2}{\times}_{\mathfrak{H}} \mathfrak{G}$, ou plus simplement $\mathfrak{F} \times_{\mathfrak{H}} \mathfrak{G}$ est la catégorie fibrée dont

- les objets sont les triplets (f, g, α) d'un objet f de $\mathfrak{F}$, d'un objet g de $\mathfrak{G}$ et d'un isomorphisme α entre $\mathrm{F}f$ et $\mathrm{G}g$, au dessus d'un morphisme identité de $\mathfrak{C}$;
- les morphismes de (f, g, α) vers (f', g', α') sont les couples (φ, ψ) tels que

$$\begin{tikzcd} f \arrow[d, "f"'] & \mathrm{F}f \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\mathrm{F}\varphi"'] & \mathrm{G}g \arrow[d, "\mathrm{G}\psi"] & g \arrow[d, "\psi"] \\ f' & \mathrm{F}f' \arrow[r, "\alpha'"] & \mathrm{G}g & g'. \end{tikzcd}$$

On obtient alors un carré commutatif à isomorphisme près.

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{F} \times_{\mathfrak{H}} \mathfrak{G} \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{G} \arrow[d] \\ \mathfrak{F} \arrow[r] \arrow[ur, Rightarrow] & \mathfrak{H} \end{tikzcd}$$

4 Champs algébriques

Définition 4.1. — Un *champ en groupoïdes* sur un site $(\mathfrak{C}, \mathrm{J})$ est une catégorie fibrée en groupoïdes $\mathfrak{F}$ sur $\mathfrak{C}$ telle que pour tout objet X de $\mathfrak{C}$, pour tout crible R couvrant X, le foncteur induit par l'inclusion $\mathrm{R} \longrightarrow \mathrm{X}$ soit une équivalence de catégories,

$$\mathfrak{hom}_{\mathfrak{Fib}_{\mathfrak{C}}}(\mathrm{X}, \mathfrak{F}) \simeq \mathfrak{hom}_{\mathfrak{Fib}_{\mathfrak{C}}}(\mathrm{R}, \mathfrak{F}).$$

Remarque 4.2. — Dire que le foncteur ci-dessus est pleinement fidèle revient à demander que pour tout objet X, pour tous objets $\xi_1, \xi_2 \in \mathfrak{F}\mathrm{X}$, le foncteur

$$\mathrm{Isom}_{\mathrm{X}}(\xi_1, \xi_2) : \mathfrak{C}/\mathrm{X} \longrightarrow \mathfrak{Ens}$$

est un faisceau (pour la topologie induite sur $\mathfrak{C}/\mathrm{X}$ par celle de $\mathfrak{C}$).

Dire qu'il est essentiellement surjectif revient à demander que pour tout recouvrement $(\mathrm{X}_i \longrightarrow \mathrm{X})_i$ d'un objet X de $\mathfrak{C}$, pour tous $\xi_i \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{F}\mathrm{X}_i$, pour tous isomorphismes

$$\varphi_{i,j} : \xi_i|_{\mathrm{X}_i \times_{\mathrm{X}} \mathrm{X}_j} \longrightarrow \xi_j|_{\mathrm{X}_i \times_{\mathrm{X}} \mathrm{X}_j}$$

vérifiant la propriété de cocycle, il existe $\xi \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{F}\mathrm{X}$ et des isomorphismes $\psi_i : \xi|_{\mathrm{X}_i} \longrightarrow \xi_i$ tels que

$$\begin{tikzcd} & \xi|_{\mathrm{X}_i \times_{\mathrm{X}} \mathrm{X}_j} \arrow[dl, "\psi_j|_{\mathrm{X}_i \times_{\mathrm{X}} \mathrm{X}_j}"'] \arrow[dr, "\psi_i|_{\mathrm{X}_i \times_{\mathrm{X}} \mathrm{X}_j}"] & \\ \xi_j|_{\mathrm{X}_i \times_{\mathrm{X}} \mathrm{X}_j} \arrow[rr, "\varphi_{i,j}"'] & & \xi_i|_{\mathrm{X}_i \times_{\mathrm{X}} \mathrm{X}_j}. \end{tikzcd}$$

On peut exprimer cette condition de manière plus concise : toute donnée de descente (pour des objets de $\mathfrak{F}$) relative à une famille couvrante $(\mathrm{X}_i \longrightarrow \mathrm{X})_i$ dans $\mathfrak{C}$ est effective.

Définition 4.3. — Le (grand) *site étale* d'un schéma X est la catégorie dont les objets sont les schémas sur X et les morphismes, les morphismes au dessus de X ; les familles couvrantes sont les familles surjectives de morphismes étales. Un crible est couvrant s'il contient une telle famille.

Nous considérons dorénavant le site étale d'un schéma S.

Définition 4.4. — Un morphisme de champs $\mathscr{S} \longrightarrow \mathscr{T}$ est *représentable* si pour tout morphisme $\mathrm{X} \longrightarrow \mathscr{T}$ depuis un schéma, le 2-produit fibré $\mathrm{X} \times_{\mathscr{T}} \mathscr{S}$ est équivalent à un schéma.

Définition 4.5. — On dit qu'un champ est *algébrique* si
- sa diagonale est représentable (il revient au même de demander que tout morphisme depuis un schéma soit représentable), quasi-compacte et séparée (*i.e.*, quasi-compacte et séparée après un quelconque changement de base) ;
- il existe un morphisme surjectif et étale depuis un schéma (*i.e.*, surjectif et étale après un quelconque changement de base).

Nous noterons $\mathfrak{Champs}\,\mathrm{S}$ la 2-catégorie des champs algébriques au dessus d'un schéma S : les objets sont les champs algébriques sur S, les morphismes, les morphismes de champs, non nécessairement représentables, et les 2-morphismes sont les 2-morphismes de champs (qui sont en fait des 2-isomorphismes).

Comme les champs algébriques sont des objets assez compliqués, on essaye souvent de se ramener à des schéma.

Théorème 4.6. — ***Si*** X ***est un champ algébrique et*** $\mathrm{U} \twoheadrightarrow \mathrm{X}$ ***un morphisme surjectif et étale, alors***

$$\mathrm{R} = \mathrm{U} \underset{\mathrm{X}}{\times} \mathrm{U} \rightrightarrows \mathrm{U}$$

est un groupoïde étale (*i.e.*, dont le morphisme source est étale) dans la catégorie des schémas, dont la diagonale $\mathrm{R} \longrightarrow \mathrm{U} \times \mathrm{U}$ ***est quasi-compacte et séparée. On dit que c'est une* présentation *du champ*** X.

Réciproquement, si $\mathrm{R} \rightrightarrows \mathrm{U}$ ***est un groupoïde étale dans la catégorie des champs dont la diagonale est quasi-compacte et séparée, on peut construire un champ algébrique*** X ***et un morphisme surjectif et étale*** $\mathrm{U} \twoheadrightarrow \mathrm{X}$ ***tel que*** $\mathrm{R} = \mathrm{U} \times_{\mathrm{X}} \mathrm{U}$.

Démonstration : Voir [Vistoli, 7.20]. Nous rappelons simplement la construction de la catégorie fibrée associée à un groupoïde étale $\mathrm{R} \rightrightarrows \mathrm{U}$. Pour tout schéma T et tout morphisme étale surjectif $T' \longrightarrow T$, notons $F(T' \longrightarrow T)$ la catégorie dont les objets sont les foncteurs du groupoïde $T' \times_T T' \rightrightarrows T'$ vers $R \rightrightarrows U$ et les morphismes les transformations naturelles. La catégorie fibrée associée au groupoïde $R \rightrightarrows U$ est définie par $F(T) = \underrightarrow{\text{2-lim}}\, F(T' \longrightarrow T)$. □

Remarque 4.7. — Comme pour les groupoïdes et leurs présentations, la 2-catégorie des champs n'est pas équivalente à celle des groupoïdes dans la catégorie des schémas.

Définition 4.8. — Un *espace de modules grossier* d'un champ algébrique X est un espace algébrique M est un morphisme $X \longrightarrow M$, universels pour cette propriété, *i.e.*, si M′ est un espace algébrique et $X \longrightarrow M$ un morphismes, il existe un unique morphisme faisant commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr] \arrow[dr] & & M' \\ & M. \arrow[ur, dotted] & \end{tikzcd}$$

Théorème 4.9. — ***Les champs algébriques possèdent un espace de modules grossier.***

Démonstration : Voir [Keel–Mori, 1.3.1]. □

Définition 4.10. — Un *sous-champ* d'un champ $\mathfrak{F} \longrightarrow \mathfrak{C}$ est une sous-catégorie fibrée $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{F}$

(*i*) strictement pleine

(*ii*) stable par image réciproque : si $\varphi : U \longrightarrow V$ est un morphisme dans $\mathfrak{C}$, alors $\varphi^* \operatorname{Ob} \mathfrak{G}_V \subset \operatorname{Ob} \mathfrak{G}_U$;

(*iii*) stable par recollement : pour tout famille couvrante $(\varphi_i : V_i \longrightarrow U)_{i \in I}$ dans $\mathfrak{C}$, un objet x de $\mathfrak{F}$ au dessus de U est dans $\mathfrak{G}$ si et seulement si pour tout $i \in I$, on a $\varphi_i^* x \in \operatorname{Ob} \mathfrak{G}_{V_i}$.

Définition 4.11. — (*i*) Un morphisme de champs $H : \mathfrak{F} \longrightarrow \mathfrak{G}$ est un *monomorphisme* si les $H_U : \mathfrak{F}_U \longrightarrow \mathfrak{G}_U$ sont pleinement fidèles pour tout $U \in \operatorname{Ob} \mathfrak{C}$.

(*ii*) Un morphisme de champs $H : \mathfrak{F} \longrightarrow \mathfrak{G}$ sur $\mathfrak{C}$ est un *épimorphisme* s'il est « localement essentiellement surjectif » : pour tout objet U de $\mathfrak{C}$, pour tout objet x de $\mathfrak{G}$ au dessus de U, il existe un morphisme couvrant $\varphi : U' \longrightarrow U$ et un objet y de $\mathfrak{F}$ au dessus de U′ tel que $\varphi^* x \simeq H(y)$.

Proposition 4.12. — *L'image d'un morphisme* $\mathrm{H} : \mathfrak{F} \longrightarrow \mathfrak{G}$ *de champs sur* $\mathfrak{C}$ *est le sous-champ* $\operatorname{Im} \mathrm{H}$ *de* $\mathfrak{G}$ *(c'est bien un sous-champ) de* $\mathfrak{G}$ *dont la fibre au dessus d'un objet* U *de* $\mathfrak{C}$ *est l'ensemble des* $x \in \operatorname{Ob} \mathfrak{G}_{\mathrm{U}}$ *tels qu'il existe un morphisme couvrant* $\varphi : \mathrm{U}' \longrightarrow \mathrm{U}$ *et un objet* z' *de* $\mathfrak{F}$ *au dessus de* U' *vérifiant* $\varphi^* x \simeq \mathrm{H}(z')$.

Le morphisme H *se factorise alors en*

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{F} \arrow[rr, "\mathrm{H}"] \arrow[dr, "\mathrm{H}_1"'] & & \mathfrak{G} \\
& \operatorname{Im} \mathrm{H} \arrow[ur, "\mathrm{H}_2"'] &
\end{tikzcd}$$

où H_1 *est un épimorphisme et* H_2 *un monomorphisme. Cette décomposition vérifie la propriété* 2*-universelle suivante : si* $\mathfrak{F} \longrightarrow \mathfrak{H} \longrightarrow \mathfrak{G}$ *est une autre décomposition de* H *en un épimorphisme suivi d'un monomorphisme, alors il existe un* 1*-isomorphisme* $\mathfrak{H} \longrightarrow \operatorname{Im} \mathrm{H}$ *et un diagramme* 2*-commutatif*

$$\begin{tikzcd}
& \operatorname{Im} \mathrm{H} \arrow[dr] & \\
\mathfrak{F} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \mathfrak{G} \\
& \mathfrak{H} \arrow[uu] \arrow[ur] \arrow[ul, phantom, "\Uparrow"] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow"] &
\end{tikzcd}$$

Démonstration : Voir [Laumon–Moret-Bailly, 2.7]. □

Définition 4.13. — Le (petit) *site étale* d'un champ algébrique X est la catégorie dont les objets sont les morphismes étales depuis un schéma vers X, dont les morphismes sont les $(f, \alpha) : \mathrm{U} \longrightarrow \mathrm{V}$, comme dans le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{U} \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] & \arrow[d, phantom, "\alpha"] & \mathrm{V} \arrow[dl] \\
& \mathrm{X} &
\end{tikzcd}$$

et dont les familles couvrantes sont les familles épimorphiques. Un *faisceau* sur X est un faisceau sur ce site. On note $\mathfrak{Sh}\,\mathrm{X}$ le topos des faisceaux étales sur le champ X.

Si $\mathrm{R} \rightrightarrows \mathrm{U}$ est une présentation du champ X, le topos $\mathfrak{Sh}\,\mathrm{X}$ est équivalent à la catégorie $\mathfrak{Sh}(\mathrm{R} \rightrightarrows \mathrm{U})$ des (petits) faisceaux étales équivariants sur le groupoïde $\mathrm{R} \rightrightarrows \mathrm{U}$ (voir [Vistoli, p. 669]).

Si x est un point géométrique d'un objet $\mathrm{U} \longrightarrow \mathrm{X}$ du site étale du champ X et $\mathscr{F}$ un faisceau sur X, la *fibre* de $\mathscr{F}$ en x est

$$\mathscr{F}_x = \varinjlim \mathscr{F}(\mathrm{V}),$$

où la limite inductive est indexée par l'ensemble ordonné filtrant des carrés commutatifs

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Spec} k' \arrow[r, "y"] \arrow[d] & \mathrm{V} \arrow[d, "\pi"] \\ \operatorname{Spec} k \arrow[r, "x"'] & \mathrm{U} \end{tikzcd}$$

où π est étale et V irréductible avec un seul point au dessus de x.

Définition 4.14. — Un *point* sur un champ algébrique X sur un corps k est une classe d'équivalence de morphismes $x : \operatorname{Spec} \mathrm{K} \longrightarrow \mathrm{X}$ pour la relation d'équivalence définie par $(x, \mathrm{K}) \sim (x', \mathrm{K}')$ si et seulement s'il existe une extension

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{K}'' \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\ \mathrm{K} \arrow[dr, dash] & & \mathrm{K}' \arrow[dl, dash] \\ & k & \end{tikzcd}$$

et un isomorphisme $x_{\mathrm{K}''} \simeq x'_{\mathrm{K}''}$.

Remarque 4.15. — On peut définir un *point fermé* sur un champ algébrique X défini sur un corps algébriquement clos k comme un point possédant un représentant de la forme $x : \operatorname{Spec} k \longrightarrow \mathrm{X}$. D'après [Laumon–Moret-Bailly, 5.7], si le champ algébrique X est localement noethérien (ce que nous supposerons toujours), alors ce point se factorise par

$$\operatorname{Spec} k \longrightarrow \operatorname{Spec} k/\mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{X}$$

pour un certain groupe fini G, de sorte que $\operatorname{Spec} k/\mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{X}$ soit un sous-champ. Le groupe G est le groupe des automorphismes de x, que l'on peut aussi définir à l'aide du 2-produit fibré suivant.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{G} \times \operatorname{Spec} k \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Spec} k \arrow[d] \\ \operatorname{Spec} k \arrow[r] & \mathrm{X}. \end{tikzcd}$$

En effet,

$$\begin{aligned} \operatorname{Spec} k \underset{\mathrm{X}}{\times} \operatorname{Spec} k &= \operatorname{Spec} k \underset{\operatorname{Spec} k/\mathrm{G}}{\times} \operatorname{Spec} k \\ &= \mathrm{G} \times \operatorname{Spec} k. \end{aligned}$$

Cela revient à remarquer que $\mathrm{G} \times \operatorname{Spec} k \rightrightarrows \operatorname{Spec} k$ est une présentation du champ $\operatorname{Spec} k/\mathrm{G}$.

Annexe B

Rappels divers

Si $\mathfrak{C}$ est une catégorie, nous noterons $\mathrm{Ob}\,\mathfrak{C}$ l'« ensemble » de ses objets et $\mathrm{Fl}\,\mathfrak{C}$ l'« ensemble » de ses flèches.

1 2-catégories

La notion de 2-catégorie formalise la structure de la « catégorie des catégories », avec ses objets (catégories), ses morphismes (foncteurs) et ses 2-morphismes (transformations naturelles).

Définition 1.1. — Une 2-catégorie (stricte) $\boldsymbol{\mathfrak{C}}$ est la donnée de

(*i*) un « ensemble » $\mathrm{Ob}\,\boldsymbol{\mathfrak{C}}$ dont on appellera les éléments les objets de $\boldsymbol{\mathfrak{C}}$;

(*ii*) pour tous objets X et Y, un ensemble $\mathrm{Hom}(\mathrm{X},\mathrm{Y})$ dont on appellera les éléments les morphismes de X vers Y ;

(*iii*) pour tous objets X, Y, pour tous morphismes $f, g \in \mathrm{Hom}(\mathrm{X},\mathrm{Y})$, un ensemble $\mathrm{Hom}(f,g)$ dont on appelera les éléments les 2-morphismes de f vers g, représentés graphiquement par une double flèche,

$$\begin{tikzcd} \mathrm{X} \arrow[r, bend left, "f"{name=U}] \arrow[r, bend right, "g"'{name=D}] & \mathrm{Y}\,; \arrow[from=U, to=D, Rightarrow, "\alpha"] \end{tikzcd}$$

(*iv*) pour tous objets X, Y et Z, une application permettant de composer les morphismes,

$$\begin{cases} \mathrm{Hom}(\mathrm{X},\mathrm{Y}) \times \mathrm{Hom}(\mathrm{Y},\mathrm{Z}) & \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathrm{X},\mathrm{Z}) \\ (f,g) & \longmapsto gf, \end{cases}$$

(v) pour tous objets X, Y et tous morphismes $f, g, h \in \mathrm{Hom}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$, une application

$$\left\{\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(f,g)\times\mathrm{Hom}(g,h) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(f,h) \\ (\alpha,\beta) & \longmapsto & \beta\alpha \end{array}\right.$$

permettant de composer verticalement les 2-morphismes, ce que l'on représente graphiquement ainsi,

$$\begin{tikzcd} \mathrm{X} \arrow[r, bend left=60, "f"] \arrow[r, "g"'] \arrow[r, bend right=60, "h"'] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\Downarrow\alpha"] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\Downarrow\beta"] & \mathrm{Y} \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} \mathrm{X} \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "h"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\beta\alpha"] & \mathrm{Y} \end{tikzcd}$$

(vi) pour tous objets X, Y, Z, pour tous morphismes $f, g \in \mathrm{Hom}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ et $h, k \in \mathrm{Hom}(\mathrm{Y}, \mathrm{Z})$, une application

$$\left\{\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(f,g)\times\mathrm{Hom}(h,k) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(hf,kg) \\ (\alpha,\beta) & \longmapsto & \beta\alpha \end{array}\right.$$

permettant de composer horizontalement les 2-morphismes, ce que l'on représente graphiquement ainsi,

$$\begin{tikzcd} \mathrm{X} \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & \mathrm{Y} \arrow[r, bend left, "h"] \arrow[r, bend right, "k"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\beta"] & \mathrm{Z} \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} \mathrm{X} \arrow[r, bend left, "hf"] \arrow[r, bend right, "kg"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\beta\alpha"] & \mathrm{Z} \end{tikzcd}$$

de manière que

(i) les compositions soient associatives ;

(ii) pour tout objet X, la composition des morphismes possède une identité Id_{X} ;

(iii) pour tout morphisme f, la composition verticale des 2-morphismes possède une identité 1_f ;

(iv) les 2-morphismes $1_{\mathrm{Id}_{\mathrm{X}}}$ sont des identités pour la composition horizontale des 2-morphismes ;

(v) dans la situation suivante

$$\begin{tikzcd} \mathrm{X} \arrow[r, bend left=60] \arrow[r] \arrow[r, bend right=60] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\Downarrow\alpha"] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\Downarrow\beta"] & \mathrm{Y} \arrow[r, bend left=60] \arrow[r] \arrow[r, bend right=60] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\Downarrow\gamma"] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\Downarrow\delta"] & \mathrm{Z} \end{tikzcd}$$

on ait

$$(\delta\gamma)(\beta\alpha) = (\delta\beta)(\gamma\alpha)\,;$$

(vi) si f et g sont des morphismes composables, on a $1_{gf} = 1_g 1_f$, *i.e.*,

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "f"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow 1_f"] & Y \arrow[r, bend left, "g"] \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow 1_g"] & Z \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left, "gf"] \arrow[r, bend right, "gf"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow 1_{gf}"] & Z. \end{tikzcd}$$

Remarque 1.2. — Si X et Y sont des objets d'une 2-catégorie, alors les morphismes de X vers Y, leurs 2-morphismes et la composition verticale forment une catégorie, que l'on notera $\mathrm{Hom}(X, Y)$, ou $\mathfrak{hom}(X, Y)$ si on désire insister sur le fait qu'il ne s'agit pas d'un ensemble mais d'une catégorie.

Définition 1.3. — Un 2-*foncteur* $\mathcal{F} : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$ entre 2-catégories est la donnée

(i) pour tout objet X de $\mathfrak{A}$, d'un objet $\mathcal{F}X$ de $\mathfrak{B}$;

(ii) pour tous objets X et Y de $\mathfrak{A}$, une application

$$\mathrm{Hom}(X, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{F}X, \mathcal{F}Y)\,;$$

(iii) pour tous objets X, Y de $\mathfrak{A}$ et tous morphismes $f, g \in \mathrm{Hom}(X, Y)$, une application $\mathrm{Hom}(f, g) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{F}f, \mathcal{F}g)$.

Ces données doivent préserver les trois compositions et leurs identités.

Définition 1.4. — Dans une 2-catégorie, un 1-morphisme $f : X \longrightarrow Y$ est une *équivalence* s'il existe un 1-morphisme $g : Y \longrightarrow X$ tel que les composés fg et gf soient 2-isomorphes à Id_Y et Id_X.

Définition 1.5. — Un 2-foncteur $\mathcal{F} : \mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{D}$ est *essentiellement surjectif* si et seulement si tout objet de $\mathfrak{D}$ est équivalent à un objet provenant de $\mathfrak{C}$. Il est *pleinement fidèle* si pour tous objets X et Y de $\mathfrak{C}$, le foncteur

$$\mathfrak{hom}_{\mathfrak{C}}(X, Y) \longrightarrow \mathfrak{hom}_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}X, \mathcal{F}Y)$$

est une équivalence de catégories.

Un 2-foncteur $\mathcal{F} : \mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{D}$ est une *équivalence de 2-catégories* s'il est pleinement fidèle et essentiellement surjectif. Cela signifie que

(i) Les 2-catégories $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{D}$ ont les mêmes objets, à équivalence près ;

(ii) Étant donnés deux objets X et Y de $\mathfrak{C}$, le foncteur $\mathcal{F}$ induit une bijection entre l'ensemble des morphismes $X \longrightarrow Y$ modulo isomorphisme et l'ensemble des morphismes $\mathcal{F}X \longrightarrow \mathcal{F}Y$ modulo isomorphisme ;

(*iii*) Étant donnés deux objets X et Y de $\mathfrak{C}$ et deux 1-morphismes $f, g : \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{Y}$, le foncteur $\mathcal{F}$ induit une bijection entre $\mathrm{Hom}(f, g)$ et $\mathrm{Hom}(\mathcal{F}f, \mathcal{F}g)$.

Définition 1.6. — La *catégorie associée* à la 2-catégorie $\mathfrak{C}$ a pour objets les mêmes objets que $\mathfrak{C}$ et pour morphismes les classes d'isomorphie de 1-morphismes de $\mathfrak{C}$.

Remarque 1.7. — Les propriétés universelles définissant certains objets dans une catégorie (produit fibré, coproduit, limite inductive, limite projective, etc.) se transforment dans une 2-ccatégorie en propriétés 2-universelles (définissant un 2-produit-fibré, un 2-coproduit, une 2-limite inductive, une 2-limite projective) : la définition est la même, mais il faut rajouter des 2-isomorphismes partout et ce qui était unique à unique isomorphisme devient simplement unique à isomorphisme près et c'est cet isomorphisme qui est unique à 2-isomorphisme près.

Rappel 1.8. — Pour définir la notion de 2-limite projective, nous allons calquer celle de limite projective : rappelons-la.

1. On commence par construire, pour tout système projectif $\mathrm{X} : \mathrm{I} \longrightarrow \mathfrak{Ens}$, un ensemble

$$\varprojlim_i^{\mathfrak{Ens}} \mathrm{X}_i \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{ (c_i)_{i \in \mathrm{I}} \ : \ c_i \in \mathrm{X}_i, \ \forall (f : i \longrightarrow j) \in \mathrm{Fl}\,\mathrm{I} \ \ f(c_i) = c_j \}.$$

C'est en fait l'*ensemble* des cônes (relatifs au système projectif X) sur l'objet final $*$ de $\mathfrak{Ens}$.

2. Pour tout système projectif $\mathrm{X} : \mathrm{I} \longrightarrow \mathfrak{C}$ dans une catégorie $\mathfrak{C}$, on définit alors une limite projective comme un objet représentant le foncteur

$$\begin{cases} \mathfrak{C}^{\mathrm{op}} & \longrightarrow \ \mathfrak{Ens} \\ \mathrm{Y} & \longmapsto \ \varprojlim^{\mathfrak{Ens}} \mathrm{Hom}(\mathrm{Y}, \mathrm{X}_i). \end{cases}$$

Remarquons que ce foncteur peut aussi s'écrire à l'aide de cônes :

$$\begin{cases} \mathfrak{C}^{\mathrm{op}} & \longrightarrow \ \mathfrak{Ens} \\ \mathrm{Y} & \longmapsto \ \{ \text{cônes sur Y} \}. \end{cases}$$

3. On vérifie ensuite que les deux notions de limite projective dans $\mathfrak{Ens}$ coïncident, *i.e.*,

$$\begin{aligned} \varprojlim^{\mathfrak{Ens}} \mathrm{Hom}(\mathrm{Y}, \mathrm{X}_i) &= \{ (c_i)_{i \in \mathrm{I}} \ : \ c_i \in \mathrm{Hom}(\mathrm{Y}, \mathrm{X}_i) \ \ \forall (f : i \longrightarrow j) \in \mathrm{Fl}\,\mathrm{I} \ \ f c_i = c_j \} \\ &\simeq \{ (c_{i,y})_{\substack{i \in \mathrm{I} \\ y \in \mathrm{Y}}} \ : \ c_{i,y} \in \mathrm{X}_i \ \ \forall (f : i \longrightarrow j) \in \mathrm{Fl}\,\mathrm{I} \ \ f c_{i,y} = c_{j,y} \} \\ &\simeq \{ (c_y)_{y \in \mathrm{Y}} \ : \ c_y \in \varprojlim^{\mathfrak{Ens}} \mathrm{X}_i \} \\ &\simeq \mathrm{Hom}(\mathrm{Y}, \varprojlim^{\mathfrak{Ens}} \mathrm{X}_i) \end{aligned}$$

et cet isomorphisme est bien fonctoriel en Y.

4. On peut enfin montrer que la limite projective L de X vérifie la propriété universelle

(i) L est un cône ;

(ii) pour tout cône L′, il existe un unique morphisme de cônes $\mathrm{L}' \longrightarrow \mathrm{L}$.

En effet, on a une bijection

$$\mathrm{Hom}(\mathrm{L},\mathrm{L}) \simeq \{\,\text{cônes sur L}\,\},$$

donc, au morphisme Id_L correspond une structure de cône $(\mathrm{L} \longrightarrow \mathrm{X}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ sur L.

La fonctorialité de $\mathrm{Hom}(\cdot,\mathrm{L})$ nous permet d'expliciter la bijection

$$\left\{\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(\mathrm{L}',\mathrm{L}) & \longrightarrow & \{\,\text{cônes sur L}'\,\} \\ (\mathrm{L}' \longrightarrow \mathrm{L}) & \longmapsto & (\mathrm{L}' \longrightarrow \mathrm{L} \longrightarrow \mathrm{X}_i)_{i\in\mathrm{I}}. \end{array}\right.$$

En particulier, tout cône sur L′ est de la forme $(\mathrm{L}' \longrightarrow \mathrm{L} \longrightarrow \mathrm{X}_i)_{i\in\mathrm{I}}$, pour un unique morphisme $\mathrm{L}' \longrightarrow \mathrm{L}$, qui est bien un morphisme de cônes.

5. Réciproquement, tout cône $\mathrm{L} \longrightarrow \mathrm{X}_i$ vérifiant la propriété universelle est une limite projective de X, car on a alors des application fonctorielles

$$\left\{\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(\mathrm{Y},\mathrm{L}) & \longrightarrow & \{\,\text{cônes sur Y}\,\} \\ (\mathrm{Y} \longrightarrow \mathrm{L}) & \longmapsto & (\mathrm{Y} \longrightarrow \mathrm{L} \longrightarrow \mathrm{X}_i)_i \end{array}\right.$$

d'après (i) et il s'agit de bijections d'après (ii).

Définition 1.9. — On dit qu'un 2-foncteur $\mathcal{F} : \mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{Cat}$ est *représentable* s'il existe

(i) un objet L de $\mathfrak{C}$;

(ii) pour tout $\mathrm{X} \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{C}$, une équivalence de catégorie

$$\theta_\mathrm{X} : \mathcal{F}\mathrm{X} \longrightarrow \mathfrak{hom}(\mathrm{L},\mathrm{X})\,;$$

(iii) pour tout 1-morphisme $f : \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{Y}$ de $\mathfrak{C}$, un 2-isomorphisme

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}\mathrm{X} \arrow[r, "\theta_\mathrm{X}"] \arrow[d, "\mathcal{F}f"'] & \mathfrak{hom}(\mathrm{L},\mathrm{X}) \arrow[d, "\mathfrak{hom}(\mathrm{L},f)"] \\ \mathcal{F}\mathrm{Y} \arrow[r, "\theta_\mathrm{Y}"'] \arrow[ur, Rightarrow, "\chi_f"] & \mathfrak{hom}(\mathrm{L},\mathrm{Y}) \end{tikzcd}$$

(*iv*) tel que pour tout 2-isomorphisme $\begin{tikzcd} \mathrm{X} \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & \mathrm{Y} \end{tikzcd}$ de $\mathfrak{C}$, le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}\mathrm{X} \arrow[r, "\theta_{\mathrm{X}}"] \arrow[d, bend right, "\mathcal{F}f"'] \arrow[d, bend left, "\mathcal{F}g"] & \mathfrak{hom}(\mathrm{L},\mathrm{X}) \arrow[d, bend right, "\mathfrak{hom}(\mathrm{L},f)"'] \arrow[d, bend left, "\mathfrak{hom}(\mathrm{L},g)"] \\ \mathcal{F}\mathrm{Y} \arrow[r, "\theta_{\mathrm{Y}}"'] & \mathfrak{hom}(\mathrm{L},\mathrm{Y}) \end{tikzcd}$$

est 2-commutatif, *i.e.*,

$$\begin{tikzcd} \theta_{\mathrm{Y}}\mathcal{F}f \arrow[r, "\theta_{\mathrm{Y}}\mathcal{F}\alpha"] \arrow[d, "\chi_f"'] & g\theta_{\mathrm{Y}}\mathcal{F} \arrow[d, "\chi_g"] \\ \mathfrak{hom}(\mathrm{L},f)\theta_{\mathrm{X}} \arrow[r, "\mathfrak{hom}(\mathrm{L},\alpha)\theta_{\mathrm{X}}"'] & \mathfrak{hom}(\mathrm{L},g)\theta_{\mathrm{X}}. \end{tikzcd}$$

Remarque 1.10. — On définierait de même les notions de 2-foncteur contravariant représentable (il y a plusieures manières d'être contravariant pour un 2-foncteur : il peut renverser le sens des 1-morphismes, ou celui des 2-morphismes, ou les deux).

Définition 1.11. — Un 2-*système projectif* dans une 2-catégorie $\mathfrak{C}$ est un pseudo-foncteur $\mathrm{X} : \mathrm{I} \longrightarrow \mathfrak{C}$ où I est une petite catégorie, *i.e.*, la donnée

(*i*) pour tout $i \in \mathrm{I}$, d'un objet X_i ;

(*ii*) pour tout morphisme $i \longrightarrow j$ de I, d'un 1-morphisme $\mathrm{X}_i \longrightarrow \mathrm{X}_j$;

(*iii*) pour tout triangle commutatif

$$\begin{tikzcd} i \arrow[rr, "g\circ f"] \arrow[dr, "f"'] & & k \\ & j \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

dans I, d'un 2-isomorphisme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{X}_i \arrow[rr, "\mathrm{X}_{g\circ f}"] \arrow[dr, "\mathrm{X}_f"'] & \arrow[d, phantom, "\Uparrow c_{f,g}"] & \mathrm{X}_k \\ & \mathrm{X}_j \arrow[ur, "\mathrm{X}_g"'] & \end{tikzcd}$$

tel que

(*iv*) pour tout $i \in \mathrm{I}$, on a $\mathrm{X}_{\mathrm{Id}_i} = \mathrm{Id}_{\mathrm{X}_i}$ et pour tout morphisme f de I on a $c_{\mathrm{Id},f} = \mathrm{Id}_{\mathrm{X}_f}$ et $c_{f,\mathrm{Id}} = \mathrm{Id}_{\mathrm{X}_f}$;

(*v*) pour tout triplet de morphismes composables dans I,

$$i \xrightarrow{f} j \xrightarrow{g} k \xrightarrow{h} l,$$

on a $c_{g\circ f,h}(h \circ c_{f,g}) = c_{f,h\circ g}(c_{g,h} \circ f)$, *i.e.*,

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{X}_j \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\Downarrow"] & \mathrm{X}_k \arrow[dr] \arrow[d, phantom, "\Downarrow"] & \\
\mathrm{X}_i \arrow[ur] \arrow[urr] \arrow[rrr] & {} & {} & \mathrm{X}_l
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
 & \mathrm{X}_j \arrow[r] \arrow[drr] \arrow[d, phantom, "\Downarrow"] & \mathrm{X}_k \arrow[dr] \arrow[d, phantom, "\Downarrow"] & \\
\mathrm{X}_i \arrow[ur] \arrow[rrr] & {} & {} & \mathrm{X}_l.
\end{tikzcd}$$

Définition 1.12. — Un 2-*cône* L sur un 2-système projectif $\mathrm{X} : \mathrm{I} \longrightarrow \mathfrak{C}$, c'est :

(*i*) un objet L de $\mathfrak{C}$;

(*ii*) pour tout $i \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{I}$, un morphisme $x_i : \mathrm{L} \longrightarrow \mathrm{X}_i$;

(*iii*) pour tout flèche $(f : i \longrightarrow j) \in \mathrm{Fl}\,\mathrm{I}$, un 2-isomorphisme

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{L} \arrow[r, "x_i"] \arrow[dr, "x_j"'] & \mathrm{X}_i \arrow[d, "\mathrm{X}_f"] \arrow[dl, phantom, "\Swarrow w_f"] \\
 & \mathrm{X}_j
\end{tikzcd}$$

(*iv*) tels que pour tout triangle

$$\begin{tikzcd}
 & j \arrow[dr, "g"] & \\
i \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "g\circ f"'] & & k
\end{tikzcd}$$

dans I, le diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{L} \arrow[d, "x_j"] \arrow[dl, bend right, "x_i"'] \arrow[dr, bend left, "x_k"] & \\
 & \mathrm{X}_j \arrow[dr, "\mathrm{X}_g"] & \\
\mathrm{X}_i \arrow[ur, "\mathrm{X}_f"] \arrow[rr, "\mathrm{X}_{g\circ f}"'] & & \mathrm{X}_k
\end{tikzcd}$$

soit 2-commutatif, *i.e.*,

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{X}_g\mathrm{X}_f x_i \arrow[r, "\mathrm{X}_g w_f"] \arrow[d, "c_{f,g}x_i"'] & \mathrm{X}_g x_j \arrow[d, "w_g"] \\
\mathrm{X}_{g\circ f}x_i \arrow[r, "w_{g\circ f}"'] & x_k.
\end{tikzcd}$$

Définition 1.13. — Soient $\mathrm{L} = (\mathrm{L}, (x_i)_i, (w_f)_f)$ et $\mathrm{L}' = (\mathrm{L}', (x'_i)_i, (w'_f)_f)$ deux 2-cônes. Un 1-morphisme de 2-cônes $\mathrm{L} \longrightarrow \mathrm{L}'$, c'est

(i) un 1-morphisme $\psi : \mathrm{L} \longrightarrow \mathrm{L}'$ de $\mathfrak{C}$;

(ii) pour tout $i \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{I}$, un 2-isomorphisme

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{L} \arrow[rr, "\psi"] \arrow[dr, "x_i"'] & \arrow[dl, phantom, "\overset{\varphi_i}{\Leftarrow}"] & \mathrm{L}' \arrow[dl, "x'_i"] \\
& \mathrm{X}_i &
\end{tikzcd}$$

(iii) tel que pour tout morphisme $(f : i \longrightarrow j) \in \mathrm{Fl}\,\mathrm{I}$, le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{L} \arrow[r, "x_i"] \arrow[d, "\psi"'] \arrow[dr] & \mathrm{X}_i \arrow[d, "\mathrm{X}_f"] \\
\mathrm{L}' \arrow[r, "x'_j"'] \arrow[ur] & \mathrm{X}_j
\end{tikzcd}$$

soit 2-commutatif, *i.e.*,

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{X}_f x'_i\psi \arrow[r, "w'_f\psi"] \arrow[d, "\mathrm{X}_f\varphi_i"'] & x'_j\psi \arrow[d, "\varphi_j"] \\
\mathrm{X}_f x_i \arrow[r, "w_f"'] & x_j.
\end{tikzcd}$$

Définition 1.14. — Soient $\mathrm{L} = (\mathrm{L}, (x_i)_i, (w_f)_f)$ et $\mathrm{L}' = (\mathrm{L}', (x'_i)_i, (w'_f)_f)$ deux 2-cônes et $(\psi, (\varphi_i)_i)$ et $(\psi', (\varphi'_i)_i)$ deux 1-morphismes de 2-cônes $\mathrm{L} \longrightarrow \mathrm{L}'$. Un 2-*morphisme* de 2-cônes $\alpha : \psi \longrightarrow \psi'$, c'est

(i) un 2-morphisme dans $\mathfrak{C}$,

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{L} \arrow[r, bend left, "\psi"] \arrow[r, bend right, "\psi'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & \mathrm{L}'
\end{tikzcd}$$

(ii) tel que pour tout objet $i \in \operatorname{Ob} \mathrm{I}$, le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{L} \arrow[rr, bend left] \arrow[rr, bend right] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow\alpha"] \arrow[dr, "x_i"'] & & \mathrm{L}' \arrow[dl, "x'_i"] \\ & \mathrm{X}_i & \end{tikzcd}$$

soit 2-commutatif, *i.e.*,

$$\begin{tikzcd} x'_i\psi \arrow[rr, "x'_i\alpha"] \arrow[dr, "\varphi_i"'] & & x'_i\psi' \arrow[dl, "\varphi'_i"] \\ & x_i. & \end{tikzcd}$$

Exemple 1.15. — Soit $\mathrm{X} : \mathrm{I} \longrightarrow \mathfrak{Cat}$ un 2-système projectif de catégories. On définit sa 2-limite projective L comme étant la catégorie suivante.

Ses objets sont les $((x_i)_{i \in \operatorname{Ob} \mathrm{I}}, (w_f)_{f \in \operatorname{Fl} \mathrm{I}})$ où pour tout $i \in \operatorname{Ob} \mathrm{I}$, $x_i \in \operatorname{Ob} \mathrm{X}_i$, pour tout $f \in \operatorname{Fl} \mathrm{I}$, $w_f \in \operatorname{Hom}(\mathrm{X}_f x_i, x_j)$, tels que pour tout triangle

$$\begin{tikzcd} & j \arrow[dr, "g"] & \\ i \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "g \circ f"'] & & k \end{tikzcd}$$

dans I on ait

$$\begin{tikzcd} \mathrm{X}_{g\circ f} x_i \arrow[r, "w_{g\circ f}"] & x_k \\ \mathrm{X}_g \mathrm{X}_f x_i \arrow[u, "c_{f,g} x_i"] \arrow[r, "\mathrm{X}_g w_f"'] & \mathrm{X}_g x_j. \arrow[u, "w_g"'] \end{tikzcd}$$

Ses morphismes

$$((x_i)_{i \in \operatorname{Ob} \mathrm{I}}, (w_f)_{f \in \operatorname{Fl} \mathrm{I}}) \longrightarrow ((x'_i)_{i \in \operatorname{Ob} \mathrm{I}}, (w'_f)_{f \in \operatorname{Fl} \mathrm{I}})$$

sont les $(\varphi_i)_{i \in \operatorname{Ob} \mathrm{I}}$ où, pour tout $i \in \operatorname{Ob} \mathrm{I}$, $\varphi_i \in \operatorname{Hom}(x_i, x'_i)$ tel que pour tout $(f : i \longrightarrow j) \in \operatorname{Fl} \mathrm{I}$,

$$\begin{tikzcd} \mathrm{X}_f x_i \arrow[r, "\mathrm{X}_f \varphi_i"] \arrow[d, "w_f"'] & \mathrm{X}_f x'_i \arrow[d, "w'_f"] \\ x_j \arrow[r, "\varphi_j"'] & x'_j. \end{tikzcd}$$

C'est en fait la catégorie des 2-cônes sur l'objet 2-final de $\mathfrak{Cat}$ (la catégorie à un seul objet et un seul morphisme). On remarquera que, de même que l'on définit les limites projectives dans $\mathfrak{Ens}$ à l'aide de cônes, sans tenir compte des morphismes de cônes, de même, ici, on définit la 2-limite projective dans $\mathfrak{Cat}$ sans faire intervenir les 2-morphismes de 2-cônes.

Définition 1.16. — Une 2-*limite projective* d'un 2-système projectif $\mathrm{X} : \mathrm{I} \longrightarrow \mathfrak{C}$ est un objet de $\mathfrak{C}$ représentant le 2-foncteur suivant,

$$\begin{cases} \mathfrak{C} & \longrightarrow & \mathfrak{Cat} \\ \mathrm{L} & \longmapsto & \mathrm{D_L}. \end{cases}$$

(*i*) La catégorie $\mathrm{D_L}$ a pour objets les 2-cônes sur L et pour morphismes les 1-morphismes de 2-cônes *de la forme* $(\mathrm{Id}, (\varphi_i)_i)$, *i.e.*, pour objets les $((x_i)_{i \in \mathrm{Ob}\, \mathrm{I}}, (w_f)_{f \in \mathrm{Fl}\, \mathrm{I}})$ où, pour tout $i \in \mathrm{Ob}\, \mathrm{I}$, $x_i : \mathrm{L} \longrightarrow \mathrm{X}_i$ est un 1-morphisme de $\mathfrak{C}$ et pour tout $(f : i \longrightarrow j) \in \mathrm{Fl}\, \mathrm{I}$, $w_f : \mathrm{X}_f x_i \longrightarrow x_j$ est un 2-morphisme de $\mathfrak{C}$ tels que pour tout triangle

$$\begin{tikzcd} & j \arrow[dr, "g"] & \\ i \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "g \circ f"'] & & k \end{tikzcd}$$

de I, le tétraèdre

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{L} \arrow[dl, bend right, "x_i"'] \arrow[d, "x'_j"] \arrow[dr, bend left, "x_k"] & \\ & \mathrm{X}_j \arrow[dr, "\mathrm{X}_g"] & \\ \mathrm{X}_i \arrow[ur, "\mathrm{X}_f"] \arrow[rr, "\mathrm{X}_{g \circ f}"'] & & \mathrm{X}_k \end{tikzcd}$$

soit 2-commutatif, *i.e.*,

$$\begin{tikzcd} \mathrm{X}_g \mathrm{X}_f x_i \arrow[r, "\mathrm{X}_g w_f"] \arrow[d, "c_{f,g} x_i"'] & \mathrm{X}_g x_j \arrow[d, "w_g"] \\ \mathrm{X}_{g \circ f} x_i \arrow[r, "w_{g \circ f}"'] & x_k ; \end{tikzcd}$$

les morphismes $(x_i, w_f) \longrightarrow (x'_i, w'_f)$ de $\mathrm{D_L}$ sont les familles $(\varphi_i)_{i \in \mathrm{I}}$ de 2-isomorphismes $\varphi_i : x_i \longrightarrow x'_i$ de $\mathfrak{C}$ telles que, pour tout $(f : i \longrightarrow j) \in \mathrm{Fl}\, \mathrm{I}$, le diagramme

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{X}_i \arrow[dd, "\mathrm{X}_f"] \\ \mathrm{L} \arrow[ur, bend left] \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[dr, bend right] & \\ & \mathrm{X}_j \end{tikzcd}$$

soit 2-commutatif, *i.e.*,

$$\begin{tikzcd} \mathrm{X}_f x_i \arrow[r, "\mathrm{X}_f\varphi_i"] \arrow[d, "w_f"'] & \mathrm{X}_f x'_i \arrow[d, "w'_f"] \\ x_j \arrow[r, "\varphi_j"'] & x'_j; \end{tikzcd}$$

(ii) Un 1-morphisme $\mathrm{F} : \mathrm{L} \longrightarrow \mathrm{L}'$ définit un foncteur $\mathrm{D_F} : \mathrm{D_{L'}} \longrightarrow \mathrm{D_L}$ de la manière suivante

$$\begin{cases} \mathrm{D_{L'}} & \longrightarrow & \mathrm{D_L} \\ (x'_i, w'_f) & \longmapsto & ((x'_i \circ \mathrm{F})_i, (w'_f \circ \mathrm{F})_f) \\ (\varphi_i)_i & \longmapsto & (\varphi_i \circ \mathrm{F})_i. \end{cases}$$

(iii) Un 2-morphisme $\begin{tikzcd} \mathrm{L} \arrow[r, bend left, "\mathrm{F}"{name=U}] \arrow[r, bend right, "\mathrm{G}"'{name=D}] & \mathrm{L}' \arrow[Rightarrow, from=U, to=D, "\alpha"] \end{tikzcd}$ définit une transformation naturelle

$$\begin{tikzcd} \mathrm{D_{L'}} \arrow[r, bend left, "\mathrm{D_F}"{name=U}] \arrow[r, bend right, "\mathrm{D_G}"'{name=D}] & \mathrm{D_L} \arrow[Rightarrow, from=U, to=D, "\mathrm{D}_\alpha"] \end{tikzcd}$$

de la manière suivante,

$$\mathrm{D}_\alpha(x'_i, w'_f) = (x_i \circ \alpha)_i.$$

Lemme 1.17. — *Les deux notions de 2-limite projective dans $\mathfrak{Cat}$ coïncident.*

Démonstration : La démonstration est exactement la même que pour la limite projective dans $\mathfrak{Ens}$: on avait remarqué qu'une fonction $\mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{B}$ était juste une famille d'éléments de B indexée par A ; nous allons ici utiliser le fait qu'un foncteur $\mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$ n'est rien d'autre qu'une famille d'objets de $\mathfrak{B}$ indexée par les objets de $\mathfrak{A}$ ainsi qu'une famille de morphismes de $\mathfrak{B}$ indexée par les morphismes de $\mathfrak{A}$, le tout vérifiant certaines propriétés — on décrira de même les foncteurs.

1. La catégorie $\underleftarrow{\mathrm{2\text{-}lim}}\,\mathfrak{Hom}(\mathrm{Y},\mathrm{X}_i)$ a pour objets les

$$\Big((x_i)_{i\in \mathrm{Ob\,I}}\,,\ (w_f)_{(f:i\to j)\in \mathrm{Fl\,I}} \Big)$$

où

$$\mathrm{Y} \xrightarrow{x_i} \mathrm{X}_i \qquad \begin{tikzcd} & \mathrm{X}_i \arrow[d, "\mathrm{X}_f"] \\ \mathrm{Y} \arrow[ur, "x_i"] \arrow[dr, "x_j"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow w_f"] & \mathrm{X}_j \end{tikzcd}$$

telles que

$$\forall \begin{tikzcd} & j \arrow[dr, "g"] & \\ i \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "g\circ f"'] & & k \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathrm{X}_g\mathrm{X}_f x_i \arrow[r, "\mathrm{X}_g w_f"] \arrow[d, "c_{g,f}x_i"'] & \mathrm{X}_g x_i \arrow[d, "w_g"] \\ \mathrm{X}_{g\circ f}x_i \arrow[r, "w_{g\circ f}"'] & x_k \end{tikzcd}$$

et pour morphismes $((x_i)_i, (w_f)_f) \longrightarrow ((x'_i)_i, (w'_f)_f)$ les familles

$$(\varphi_i)_{i\in \mathrm{I}}$$

où

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Y} \arrow[r, bend left, "x_i"] \arrow[r, bend right, "x'i"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\varphi_i"] & \mathrm{X}_i \end{tikzcd}$$

telles que

$$\forall(\ i \xrightarrow{f} j\ ) \in \mathrm{Fl\,I} \qquad \begin{tikzcd} \mathrm{X}_f x_i \arrow[r, "\mathrm{X}_f\varphi_i"] \arrow[d, "w_f"'] & \mathrm{X}_f x'_i \arrow[d, "w'_f"] \\ x_j \arrow[r, "\varphi_j"'] & x'_j . \end{tikzcd}$$

2. Cette catégorie est équivalente à la catégorie dont les objets sont les

$$\Big((x_{i,y})_{\substack{i\in \mathrm{Ob\,I}\\ y\in \mathrm{Ob\,Y}}}\,,\ (x_{i,\psi})_{\substack{i\in \mathrm{Ob\,I}\\ (\psi:y\to z)\in \mathrm{Fl\,Y}}}\,,\ (w_{f,y})_{\substack{(f:i\to j)\in \mathrm{Fl\,I}\\ y\in \mathrm{Ob\,Y}}} \Big)$$

où

$$x_{i,y} \in \mathrm{Ob\,X}_i \qquad x_{i,\psi} \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{X}_i}(x_{i,y}, x_{i,z}) \qquad w_{f,y} \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{X}_i}(\mathrm{X}_f x_{i,y}, x_{j,y})$$

telles que

$$\forall y \qquad x_{i,\mathrm{Id}_y} = \mathrm{Id}_{x_{i,y}}$$

$$\forall \begin{tikzcd} & z \arrow[dr, "\psi"] & \\ y \arrow[ur, "\chi"] \arrow[rr, "\psi\circ\chi"'] & & t \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & x_{i,z} \arrow[dr, "x_{i,\psi}"] & \\ x_{i,y} \arrow[ur, "x_{i,\chi}"] \arrow[rr, "x_{i,\psi\circ\chi}"'] & & x_{i,t} \end{tikzcd}$$

$$\forall(\ y \xrightarrow{\psi} z\ ) \in \mathrm{Fl}\,\mathrm{Y} \qquad \begin{tikzcd} \mathrm{X}_f x_{i,y} \arrow[r, "w_{f,y}"] \arrow[d, "\mathrm{X}_f x_{i,\psi}"'] & x_{j,y} \arrow[d, "x_{j,\psi}"] \\ \mathrm{X}_f x_{i,z} \arrow[r, "w_{f,z}"'] & x_{j,z} \end{tikzcd}$$

$$\forall \begin{tikzcd} & j \arrow[dr, "g"] & \\ i \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "g\circ f"'] & & k \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathrm{X}_{g\circ f} x_{i,y} \arrow[r, "w_{g\circ f,y}"] & x_{k,y} \\ \mathrm{X}_g\mathrm{X}_f x_{i,y} \arrow[u, "c_{f,g} x_{i,y}"] \arrow[r, "\mathrm{X}_g w_{f,y}"'] & \mathrm{X}_g x_{j,y} \arrow[u, "w_{g,y}"'] \end{tikzcd}$$

et dont les morphismes

$$(x_{i,y}, x_{i,\psi}, w_{f,y}) \longrightarrow (x'_{i,y}, x'_{i,\psi}, w'_{f,y})$$

sont les familles

$$(\varphi_{i,y})_{\substack{i\in\mathrm{Ob}\,\mathrm{I}\\ y\in\mathrm{Ob}\,\mathrm{Y}}}$$

où

$$\varphi_{i,y} \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{X}_i}(x_{i,y}, x'_{i,y})$$

telles que

$$\forall(\ y \xrightarrow{\psi} z\ ) \in \mathrm{Fl}\,\mathrm{Y} \qquad \begin{tikzcd} x_{i,y} \arrow[r, "\varphi_{i,y}"] \arrow[d, "x_{i,\psi}"'] & x'_{i,y} \arrow[d, "x'_{i,\psi}"] \\ x_{i,z} \arrow[r, "\varphi_{i,z}"'] & x'_{i,z} \end{tikzcd}$$

$$\forall(\ i \xrightarrow{f} j\ ) \in \mathrm{Fl}\,\mathrm{I} \qquad \begin{tikzcd} \mathrm{X}_f x_{i,y} \arrow[r, "\mathrm{X}_f\varphi_{i,y}"] \arrow[d, "w_{f,y}"'] & \mathrm{X}_f x'_{i,y} \arrow[d, "w'_{f,y}"] \\ x_{j,y} \arrow[r, "\varphi_{j,y}"'] & x'_{j,y} \end{tikzcd}$$

3. En regrouppant tout cela différemment, et d'après la définition de la catégorie $\underleftarrow{\text{2-lim}}\,\mathrm{X}_i$, on reconnait la catégorie dont les objets sont les

$$\Big(\ (x_y)_{y\in\mathrm{Ob}\,\mathrm{Y}}\ ,\ (x_\psi)_{(\psi:y\to z)\in\mathrm{Fl}\,\mathrm{Y}}\ \Big)$$

où

$$x_y \in \operatorname{Ob} \underleftarrow{\text{2-lim}}\, \mathrm{X}_i \qquad x_\psi \in \operatorname{Hom}(x_y, x_z)$$

telles que

$$\forall y \in \operatorname{Ob} \mathrm{Y} \qquad x_{\mathrm{Id}_y} = \mathrm{Id}_{x_y}$$

$$\forall \begin{tikzcd} & z \arrow[dr, "\psi"] & \\ y \arrow[ur, "\chi"] \arrow[rr, "\psi\circ\chi"'] & & t \end{tikzcd} \qquad x_{\psi\circ\chi} = x_\psi \circ x_\chi$$

et dont les morphismes

$$(x_y, x_\psi) \longrightarrow (x'_y, x'_\psi)$$

sont les familles

$$(\varphi_y)_{y \in \operatorname{Ob} \mathrm{Y}}$$

où

$$\varphi_y \in \operatorname{Hom}_{\underleftarrow{\text{2-lim}}\, \mathrm{X}_i}(x_y, x'_y)$$

telles que

$$\forall (\ y \xrightarrow{\psi} z\ ) \in \operatorname{Fl} \mathrm{Y} \qquad \begin{tikzcd} x_y \arrow[r, "\varphi_y"] \arrow[d, "x_\psi"'] & x'_y \arrow[d, "x'_\psi"] \\ x_z \arrow[r, "\varphi_z"'] & x'_z \end{tikzcd}$$

4. Il s'agit de la catégorie des foncteurs $x : \mathrm{Y} \longrightarrow \underleftarrow{\text{2-lim}}\, \mathrm{X}_i$ et de leurs transformations naturelles. □

2 Topos

Définition 2.1. — Un *topos* est une catégorie équivalente à la catégorie des faisceaux sur un petit site.

Remarque 2.2. — Le site ne fait pas partie de la définition : un même topos peut provenir de plusieurs sites différents.

On peut d'ailleurs définir la notion de topos sans faire appel à un site : c'est le théorème de Giraud. Pour l'énoncer, nous avons besoin de quelques définitions. Dans la suite, nous nous plaçons dans une catégorie $\mathfrak{C}$.

Définition 2.3. — On dit qu'une somme directe $\coprod_{i\in \mathrm{I}} \mathrm{E}_i$ est *disjointe* si les inclusions

$$\mathrm{E}_j \hookrightarrow \coprod_{i \in \mathrm{I}} \mathrm{E}_i$$

sont des monomorphismes et si pour tout $i \neq j$, on a un carré cartésien

$$\begin{tikzcd} \varnothing \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & \mathrm{E}_k \arrow[d] \\ \mathrm{E}_j \arrow[r] & \coprod_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{E}_i. \end{tikzcd}$$

Définition 2.4. — On dit qu'un diagramme $\mathrm{R} \rightrightarrows \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{F}$ est *exact* si F est le conoyau de la double flèche et s'il identifie R au produit $\mathrm{E} \times_{\mathrm{F}} \mathrm{E}$. Cela revient à demander que l'on ait un diagramme cartésien et cocartésien

$$\begin{tikzcd} \mathrm{R} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & \mathrm{E} \arrow[d] \\ \mathrm{E} \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\ulcorner", very near end] & \mathrm{F} \end{tikzcd}$$

On dit qu'un tel diagramme est *universellement exact* s'il le demeure même après changement de base.

Définition 2.5. — Une *relation d'équivalence* sur un objet E est un monomorphisme $\mathrm{R} \hookrightarrow \mathrm{E} \times \mathrm{E}$ tel que pour tout objet T, l'image de $\mathrm{Hom}(\mathrm{T}, \mathrm{R})$ dans $\mathrm{Hom}(\mathrm{T}, \mathrm{E} \times \mathrm{E}) \simeq \mathrm{Hom}(\mathrm{T}, \mathrm{E}) \times \mathrm{Hom}(\mathrm{T}, \mathrm{E})$ soit le graphe d'une relation d'équivalence. Un *quotient* de E par cette relation d'équivalence est un diagramme exact

$$\mathrm{R} \rightrightarrows \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{E}/\mathrm{R}.$$

Définition 2.6. — On dit qu'une classe d'objets $\mathfrak{K} \subset \mathrm{Ob}\,\mathfrak{C}$ *engendre* la catégorie $\mathfrak{C}$ si pour tout couple de morphismes distincts $\mathrm{X} \rightrightarrows \mathrm{Y}$ il existe un objet Z de $\mathfrak{K}$ et un morphisme $\mathrm{Z} \longrightarrow \mathrm{X}$ tel que les composés $\mathrm{Z} \longrightarrow \mathrm{X} \rightrightarrows \mathrm{Y}$ soient distincts. Dire qu'un topos est engendré par une classe d'objets revient à dire qu'il est équivalent au topos des faisceaux sur la sous-catégorie pleine correspondante munie de la topologie induite par la topologie canonique.

Théorème 2.7. — ***Les topos sont les catégories vérifiant les propriétés suivantes.***

(*i*) ***Les limites projectives finies sont représentables ;***

(*ii*) ***les petits coproduits sont disjoints et commuttent aux produits fibrés ;***

(*iii*) ***Pour tout épimorphisme*** $\mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{F}$***, on a un diagramme universellement exact*** $\mathrm{E} \times_{\mathrm{F}} \mathrm{E} \rightrightarrows \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{F}$;

(*iv*) ***toute relation d'équivalence possède un quotient ;***

(*v*) ***il existe une petite famille génératrice.***

Définition 2.8. — Un *morphisme de topos* $f : \mathscr{T} \longrightarrow \mathscr{T}'$ est un couple de foncteurs adjoints $f^* \dashv f_*$

$$\begin{tikzcd} \mathscr{T} \arrow[r, bend left, "f^*"] & \mathscr{T}' \arrow[l, bend left, "f_*"] \end{tikzcd}$$

tel que le foncteur « image réciproque » f^* soit exact à gauche, *i.e.*, commute aux limites projectives finies. Un 2-*morphisme de topos* est une transformation naturelle entre les foncteurs « image directe ». Mais comme, pour deux morphismes de topos $f, g : \mathscr{T} \longrightarrow \mathscr{T}'$, on a une bijection cannique $\mathrm{Hom}(f_*, g_*) \simeq \mathrm{Hom}(g^*, f^*)$, il revient au même de dire qu'un 2-morphisme de topos est une transformation naturelle entre les foncteurs « image réciproque », mais dans l'autre direction. Les topos forment une 2-catégorie. Si l'on remplace la définition d'un morphisme de topos comme la donnée du foncteur « image réciproque » seul, *i.e.*, d'un foncteur commutant aux petites limites inductives et aux limites projectives finies, on obtient une 2-catégorie équivalente.

Définition 2.9. — Un *point* d'un topos $\mathscr{T}$ est un morphisme depuis le topos des faisceaux sur un point, *i.e.*, depuis la catégorie des ensembles, $\mathfrak{Ens} \longrightarrow \mathscr{T}$. Un *foncteur fibre* est le foncteur « image réciproque » d'un point, *i.e.*, un foncteur $\mathscr{T} \longrightarrow \mathfrak{Ens}$ qui commute aux petites limites inductives et aux limites projectives finies.

Remarque 2.10. — Voici quelques propriétés valables dans les topos.

(*i*) Tout faisceau sur un topos (muni de la topologie canonique) est représentable.

(*ii*) Dans un topos, les morphismes à la fois monomorphismes et épimorphismes sont des isomorphismes.

(*iii*) Dans un topos, les épimorphismes sont universels

(*iv*) Dans un topos, les limites inductives filtrantes commuttent aux limites projectives finies.

3 Ind-objets et pro-objets

On cherche à agrandir une catégorie $\mathfrak{C}$, *i.e.*, à construire un foncteur pleinement fidèle $\mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{C}'$ vers une catégorie ayant des propriétés plus agréables.

La première manière d'aggrandir une catégorie consiste à la plonger dans sa catégorie de préfaisceaux, $\widehat{\mathfrak{C}} = \mathrm{Hom}(\mathfrak{C}^{\mathrm{op}}, \mathfrak{Ens})$ (ou celle opposée à celle des copréfaisceaux $\check{\mathfrak{C}} = \mathrm{Hom}(\mathfrak{C}, \mathfrak{Ens})^{\mathrm{op}}$) qui hérite de la plupart des propriétés de la catégorie des ensembles. Néanmoins, elle est suceptible d'être trop grosse, car d'une part elle contient des objets « trop éloignés » de ceux de $\mathfrak{C}$ et d'autre part les « ensembles » $\mathrm{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ ne sont plus nécessairement petits.

Si notre catégorie $\mathfrak{C}$ est munie d'une topologie (moins fine que la topologie canonique), on peut considérer sa catégorie de faisceaux $\widetilde{\mathfrak{C}}$, dont nous avons déjà parlé plus haut.

Une autre manière d'aggrandir une catégorie consiste à chercher un foncteur 2-universel vers une catégorie ayant les propriétés voulues.

Définition 3.1. — Notons $\mathrm{Ind}\,\mathfrak{C}$ la sous-catégorie pleine de la catégorie des préfaisceaux sur $\mathfrak{C}$ constituée des préfaisceaux qui sont une petite limite inductive filtrante de préfaisceaux représentables. Elle est équivalente à la catégorie dont les objets sont les petits systèmes inductifs filtrants, notés $(\mathrm{X}_i)_{i\in \mathrm{I}}$ ou "$\varinjlim$" X_i, et dont les morphismes sont donnés par

$$\mathrm{Hom}(\text{“}\varinjlim_i\text{”}\,\mathrm{X}_i, \text{“}\varinjlim_j\text{”}\,\mathrm{Y}_j) = \varprojlim_i \varinjlim_j \mathrm{Hom}(\mathrm{X}_i, \mathrm{Y}_j).$$

Proposition 3.2. — *Le foncteur $\mathfrak{C} \longrightarrow \mathrm{Ind}\,\mathfrak{C}$ est 2-universel parmi les foncteurs vers des catégories dans lesquelles les petites limites inductives filtrantes sont représentables,* i.e., *pour toute catégorie $\mathfrak{D}$ avec des petites limites inductives filtrantes, la restriction du foncteur $\mathfrak{hom}(\mathrm{Ind}\,\mathfrak{C}, \mathfrak{D}) \longrightarrow \mathfrak{hom}(\mathfrak{C}, \mathfrak{D})$ à la sous-catégorie de $\mathfrak{hom}(\mathrm{Ind}\,\mathfrak{C}, \mathfrak{D})$ des foncteurs qui commuttent aux petites limites inductives filtrantes est une équivalence de catégories.*

Démonstration : Voir [SGA 4, I.8.7.3]. □

On peut faire la même chose pour les limites projectives.

Définition 3.3. — Notons $\mathrm{Pro}\,\mathfrak{C}$ la sous-catégorie pleine de la catégorie opposée de celle des copréfaisceaux de $\mathfrak{C}$ constituée des copréfaisceaux qui sont une petite limite projective filtrante de copréfaisceaux représentables. Elle est équivalente à la catégorie dont les objets sont les petits systèmes projectifs filtrants, notés $(\mathrm{X}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ ou "$\varprojlim$" X_i, et dont les morphismes sont donnés par

$$\mathrm{Hom}(\text{``}\varprojlim_i\text{''}\,\mathrm{X}_i, \text{``}\varprojlim_j\text{''}\,\mathrm{Y}_j) = \varprojlim_j \varinjlim_i \mathrm{Hom}(\mathrm{X}_i, \mathrm{Y}_j).$$

Proposition 3.4. — *Le foncteur* $\mathfrak{C} \longrightarrow \mathrm{Pro}\,\mathfrak{C}$ *est* 2*-universel parmi les foncteurs vers des catégories dans lesquelles les petites limites projectives filtrantes sont représentables,* i.e.*, pour toute catégorie* $\mathfrak{D}$ *avec des petites limites projectives filtrantes, la restriction du foncteur* $\mathfrak{hom}(\mathrm{Pro}\,\mathfrak{C}, \mathfrak{D}) \longrightarrow \mathfrak{hom}(\mathfrak{C}, \mathfrak{D})$ *à la sous-catégorie de* $\mathfrak{hom}(\mathrm{Pro}\,\mathfrak{C}, \mathfrak{D})$ *des foncteurs qui commuttent aux petites limites projectives filtrantes est une équivalence de catégories.*

Remarque 3.5. — La notation "$\varprojlim$" est simplement une limite projective dans la catégorie des pro-objets, que l'on pourrait aussi noter $\varprojlim^{\mathrm{Pro}\,\mathfrak{C}}$ pour la distinguer de $\varprojlim^{\mathfrak{C}}$.

Lemme 3.6. — *Soit* $\mathfrak{C}$ *une catégorie avec des limites inductives et projectives finies. Si* J *est une catégorie* finie*, on a:*

$$\text{``}\varprojlim_{i\in\mathrm{I}}\text{''}\varinjlim_{j\in\mathrm{J}} \mathrm{X}_{i,j} = \varinjlim_{j\in\mathrm{J}} \text{``}\varprojlim_{i\in\mathrm{I}}\text{''}\mathrm{X}_{i,j} \qquad \textit{et} \qquad \text{``}\varprojlim_{i\in\mathrm{I}}\text{''}\varprojlim_{j\in\mathrm{J}} \mathrm{X}_{i,j} = \varprojlim_{j\in\mathrm{J}} \text{``}\varprojlim_{i\in\mathrm{I}}\text{''}\mathrm{X}_{i,j}.$$

En particulier, un système projectif filtrant de suites exactes de groupes

$$1 \longrightarrow \mathrm{A}_i \longrightarrow \mathrm{B}_i \longrightarrow \mathrm{C}_i \longrightarrow 1$$

induit une suite exacte de progroupes

$$1 \longrightarrow \text{``}\varprojlim\text{''}\mathrm{A}_i \longrightarrow \text{``}\varprojlim\text{''}\mathrm{B}_i \longrightarrow \text{``}\varprojlim\text{''}\mathrm{C}_i \longrightarrow 1.$$

Démonstration : Voir [SGA 4, I.8.9.2]. □

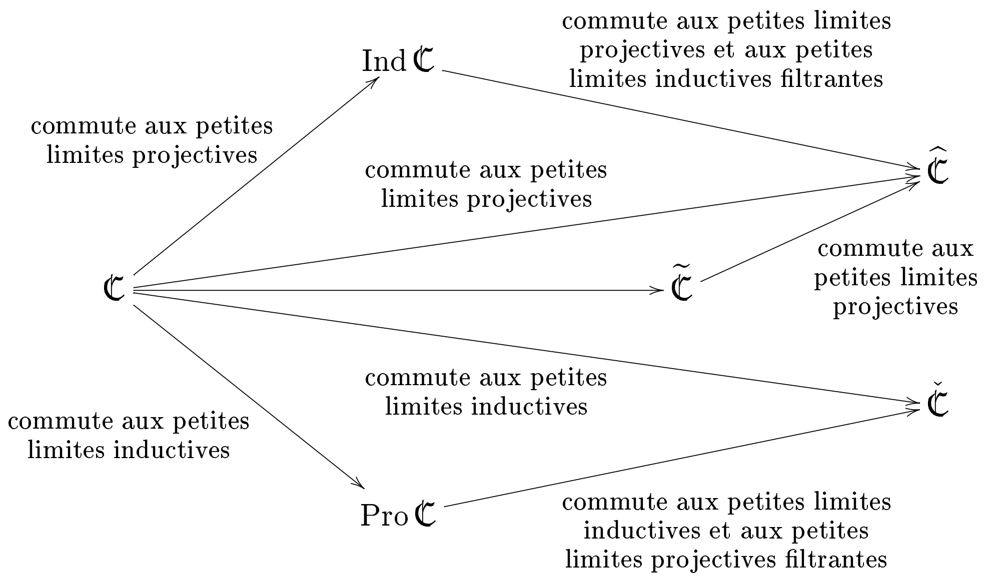


Figure 1 – Propriétés d'exactitude des foncteurs reliant toutes ces catégories

Références

D. Abramovich and A. Vistoli

1. *Complete moduli for families over semi-stable curves*, `math.ag/9811059`.

G. Andreson and Y. Ihara

1. *Pro-ℓ braided coverings of $\mathbb{P}^1$ and higher circular ℓ-units 1*, Ann. Math. **128** (1988), p. 271–293.
2. *Pro-ℓ braided coverings of $\mathbb{P}^1$ and higher circular ℓ-units 2*, Int. J. Math. **1** (1990), p. 119–148.

M. Artin

1. *Grothendieck topologies*, Harvard University, Lecture notes (1962).

A. Artin and B. Mazur

1. *Étale homotopy*, Springer Verlag, LNM **100** (1969).

B. Bakalov and A. Kirilov

1. *On the Lego–Teichmüller game*, `math/9809057`.

K. Behrend and Yu. Manin

1. *Stacks of stable maps and Gromov–Witten invariants*, Duke Math. J. **85** (1996), p. 1–60.

J. Birman

1. *Braids, links and the mapping class groups*, Princeton University Press **82** (1975).

M. Boggi

1. *Compactifications of configurations of points on $\mathbb{P}^1$ and quadratic transformations of projective space*, Indag. Math. **NS 10** (1999), p. 191–202.

M. Boggi and M. Pikaart

1. *Galois covers of moduli of curves*, Comp. Math. **120** (2000), p. 171–191.

F. Borceux

1. *Handbook of category theory*, Cambridge University Press, Encyclopedia of mathematics and its applications **50** (1994).

R. Brown

1. *From groups to groupoids : a brief survey*, Bull. London Math. Soc. **19** (1987), p. 113–134.
2. *Topology : a geometric account of general topology, homotopy types and the fundamental groupoid*, Chichester (1988).

X. Buff, J. Fehrenbach, P. Lochak, L. Schneps and P. Vogel

1. *Espaces de modules de courbes, groupes modulaires et théorie des champs*, SMF, Panoramas et synthèses **7** (1999).

X. Buff, J. Fehrenbach and P. Lochak

1. *Éléments de géométrie des espaces de modules de courbes*, in [Buff–Fehrenbach–Lochak–Schneps–Vogel], p. 3–69.

C.F. Bödigheimer and R.M. Hain

1. *Mapping class groups and moduli spaces of Riemann surfaces*, American Mathematical Society, Contemp. Math **150** (1994).

P. Cartier, L. Illusie, N.M. Katz, G. Laumon, Y. Manin and K.A. Ribet

1. *The Grothendieck festschrift*, Birkhäuser, Progress in Math. **86–88** (1990).

D.A. Cox

1. *Algebraic tubular neighborhoods 1*, Math. Scand **42** (1978), p. 211–228.
2. *Algebraic tubular neighborhoods 2*, Math. Scand **42** (1978), p. 229–242.
3. *Homotopy theory of simplicial schemes*, Compos. Math. **39** (1979), p. 263–296.
4. *Spherical fibrations in algebraic geometry*, Illinois J. Math. **24** (1980), p. 18–47.

P. Deligne

1. *Le groupe fondamental de la droite projective moins trois points*, in *Galois groups over* $\mathbb{Q}$, Springer Verlag, Y. Ihara and K. Ribet and J.-P. Serre (editor), Mathematical Sciences Research Institute Publications 16 (1987), p. 79–298.

P. Deligne and D. Mumford

1. *The irreducibility of the space of curves of a given genus*, Publ. Math. IHES **36** (1969), p. 75–109.

R. Dijkgraaf, C. Faber and G. van der Geers

1. *The moduli space of curves*, Birkhäuser, Progress in Math. **129** (1995).

V.G. Drinfeld

1. *On quasitriangular quasi-Hopf algebras an a group closely connected with* $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q})$, Leningrad Math. J. **2** (1991), p. 829–861.

D. Edidin, B. Hassett, A. Kresch and A. Vistoli

1. *Brauer groups and quotient stacks*, `math.ag/9905049`.

D. Edidin

1. *Notes on the construction of the moduli space of curves*, `math.ag/9805101`.
2. *On quotient stacks*, `math.ag/9905049`.

D. Eisenbud

1. *Commutative algebra with a view toward algebraic geometry*, Springer Verlag, GTM **150** (1995).

M. Emsalem and P. Lochak

1. *The action of the absolute Galois group on the moduli space of spheres with four marked points*, in [Schneps 1], LMSLNS **200**, p. 307–321.

E. Friedlander

1. *Étale homotopy of simplicial schemes*, Princeton University Press, Annals of Math. Studies **104** (1982).

L. Funar and R. Gelca

1. *On the groupoid of transformations of rigid structures on surfaces*, `math.gt/9907022`.

S. Gervais

1. *Presentation and central extensions of mapping class groups*, Trans. AMS **358** (1996), p. 3097–3132.
2. *A finite presentation of the mapping class group of an oriented surface* (1998), `math.gt/9811162`.

J. Giraud

1. *Théorie de la descente*, Mémoires de la société mathématique de France **2** (1964).
2. *Cohomologie non abélienne*, Springer Verlag, GMW **179** (1971).

P.G. Goerss and J.F. Jardine

1. *Simplicial homotopy theory*, Birkhäuser (1999).

A. Grothendieck

1. *Esquisse d'un programme* (1984).

A. Grothendieck and J.-P. Murre

1. *The tame fundamental group of a formal neighborhood of a divisor with normal crossings on a scheme*, Springer Verlag, LNM **208** (1971).

T.L. Gómez

1. *Algebraic stacks*, `math.ag/9911199`.

A. Haefliger

1. *Groupes d'holonomie et classifiants*, Astérisque **116** (1984), p. 70–107.

R. Hain

1. *Moduli of Riemann surfaces, transcentantal aspects*, `math.ag/0003144`.

E. Halberstadt and A. Tissier

1. *Présentation de* SL(2), Revue de Mathématiques spéciales **106** (1995), p. 282.

J.L. Harer

1. *Cohomology of the moduli space of curves*, in *Theory of moduli*, Springer Verlag, Sernesi (editor), LNM **1337** (1988), p. 137–221.

R. Hartshorne

1. *Algebraic geometry*, Springer Verlag, LNM **52** (1977).

A. Hatcher

1. *Pants decompositions of surfaces*, `math.gt/9906084`.

A. Hatcher and W. Thurston

1. *A presentation for the mapping class group of a closed orientable surface*, Topology **19** (1980), p. 221–237.

P.J. Higgins

1. *Groupoids*, Van Nostrand (1971).

S. Hirose

1. *Action of the mapping class group on a complex of curves and a presentation for the mapping class group of a surface*, `math.gt/0008185`.

S. Humphries

1. *Generators for the mapping class group*, in *Topology of low dimensional manifolds*, Springer Verlag, R. Fenn (editor), LNM **722** (1979), p. 44–47.

Yasutaka Ihara and Hiroaki Nakamura

1. *On deformation of maximally degenerate stable marked curves and oda's problem*, J. Reine Angew. Math. **487** (1997), p. 125–151.

Y. Ihara

1. *Braids, Galois groups and some arithmetic functions*, in *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Kyōto*, Springer Verlag **1** (1990), p. 99-120.
2. *On the embedding of* $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q})$ *into* $\widehat{\mathrm{GT}}$, in [Schneps 1], p. 289–305.

Y. Imayoshi and M. Taniguchi

1. *An introduction to Teichmüller spaces*, Springer Verlag (1992).

N.V. Ivanov

1. *Complexes of curves and the Teichmüller modular group*, Russian math. surveys **42** (1987), p. 55–107.

K.S. Kedlaya

1. *The algebraic closure of the power series field in positive characteristic*, `math.ag/9810142`.

S. Keel and S. Mori

1. *Quotients by groupoids*, Ann. Math **145** (1997), p. 193–213.

G.M. Kelly and R. Street

1. *Review of the elements of* 2*-categories*, in *Category seminar*, Springer Verlag, LNM **420** (1974), p. 75–103.

F.F. Knudsen

1. *The projectivity of the moduli space of stable curves II : the stacks* $\mathrm{M}_{g,n}$, Math. Scand. **52** (1983), p. 161–199.

D. Knutson

1. *Algebraic spaces*, Springer Verlag, LNM **203** (1971).

M. Konstevich

1. *Intersection theory on the moduli space of curves and the matrix Airy function*, Comm. Math. Phys. **147** (1992), p. 1–23.

G. Laumon and L. Moret-Bailly

1. *Champs algébriques*, prépublication **92-42**, université d'Orsay (1992).

O. Leroy

1. *Groupoïde fondamental et théorème de Van Kampen dans les topos*, Cahiers mathématiques de l'université de Montpelier (1979).

P. Lochak and L. Schneps

1. *The Grotendieck–Teichmüller group and automorphisms of braid groups*, in [Schneps 1], p. 323–358.

P. Lochak

1. *The fundamental group at infinity of the moduli space of curves*, in [Schneps–Lochak], p. 139–158.

E. Looijenga

1. *Cellular decompositions of compactified moduli spaces of pointed curves*, in [Dijkgraaf–Faber–van der Geers].

F. Luo

1. *A presentation of the mapping class group*, Math. Res. Let. **4** (1997), p. 735–739, `math.gt/9801025`.
2. *Grothendieck's reconstruction principle and 2-dimensionnal topology and geometry*, Comm. Contemp. Math. **1** (1999), p. 125–153, `math.gt/9904019`.

V. Lyubashenko

1. *Modular transformations for tensor categories*, Journal of Pure and Applied Algebra **98** (1995), p. 279–327.
2. *Tangles and Hopf algebras in braided categories*, Journal of Pure and Applied Algebra **98** (1995), p. 245–279.
3. *Ribbon abelian categories as modular categories*, Journal of knot theory and its ramifications **5** (1996), p. 311–403.

S. MacLane and I. Moerdijk

1. *Sheaves in geometry and logic : a first introduction to topos theory*, Springer Verlag, Universitext (1992).

J.P. May

1. *Simplicial objects in algebraic topology*, University of Chicago Press, Chicago Lectures in Math (1982).

J.S. Milne

1. *Étale cohomology*, Princeton University Press, Princeton Mathematical Series **33** (1980).
2. *Lectures on étale cohomology*, `http://www.math.lsa.umich.edu/~jmilne/CourseNotes/math732.html` (1998).

I. Moerdijk

1. *Prodiscrete groups and Galois toposes*, Proc. Kon. Ned. Ac. Wet. series A **92** (1989), p. 219–235.
2. *Classifying spaces and classifying toposes*, Springer Verlag, LNM **1616** (1995).

I. Moerdijk and D.A. Pronk

1. *Orbifolds, sheaves and groupoids*, K-theory **12** (1997), p. 3–21.

G. Moore and N. Seiberg

1. *Classical and quantum field theory*, Comm. Math. Phys. **123** (1989), p. 177–255.

M. Mulase and M. Penkawa

1. *Ribbon graphs, quadratic differentials on Riemann surfaces and algebraic curves defined over* $\bar{\mathbb{Q}}$, `math-ph/9811024`.

D. Mumford

1. *Curves and their jacobians*, University of Michigan Press (1975).
2. *Towards an enumerative geometry of the moduli space of curves*, in *Arithmetic and geometry, papers dedicated to I.R. Shafarevich, volume 2 : geometry*, Birkhäuser, M. Artin, J. Tate (editor), PM **36** (1983), p. 271–328.
3. *Picard groups of moduli problems*, in *Arithmetical algebraic geometry, proceedings of the conference at Purdue university, 1963*, Harper and Row Publishers, O.F.G. Schilling (editor) (1965), p. 33–81.

J. Murre

1. *Lectures on an introduction to Grothendieck's theory of the fundamental group*, Tata institute (1967).

T. Oda

1. *Étale homotopy type of the moduli space of algebraic curves*, in [Schneps–Lochak], p. 85–95.

P. Ribenboim

1. *The theory of classical valuations*, Springer Verlag, Springer monographs in mathematics (1999).

SGA (Séminaire de géométrie algébrique)

1. A. Grothendieck, *Revêtements étales et groupe fondamental*, Springer Verlag, LNM **224** (1971).
3. M. Demazure and A. Grothendieck, *Schémas en groupes, tome 2, X.6*, Springer Verlag, LNM **152** (1970).
4. A. Grothendieck and J.-L. Verdier, *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas*, Springer Verlag, LNM **269**–**271** (1972).

$4^1\!/_2$. P. Deligne, *SGA* $4^1\!/_2$, Springer Verlag, LNM **569** (1977).

M. Schlessinger

1. *Functors of Artin rings*, Trans. AMS **130** (1968), p. 208–222.

L. Schneps

1. *The Grothendieck theory of dessins d'enfants*, Cambridge University Press, LMSLNS **200** (1994).
2. *Groupoïdes fondamentaux des espaces de modules en genre* 0 *et catégories tensorielles tressées*, in [Buff–Fehrenbach–Lochak–Schneps–Vogel], p. 71–116.

L. Schneps and P. Lochak

1. *Geometric Galois actions*, Cambridge University Press, LMSLNS **242** (1997).

J.H. Silvermann

1. *The arithmetic of elliptic curves*, Springer Verlag, GTM **106** (1986).

W.P. Thurston

1. *The geometry and topology of* 3*-manifolds*, Princeton (1978), `http://msri.org/publications/books/gt3m/`.

B. Toen

1. *Riemann–Roch theorems for Deligne-Mumford stacks*, K-Theory **18** (1999), p. 33–76, `math.ag/9803076`.

K. Ueno

1. *Introduction to conformal field theory with gauge symetries*, in *Geometry and physics, proceedings of the conference at Aarhus University*, Marcel Dekker publ., J.E. Andersen and J. Dupont and H. Pedersen and A. Swann (editor), lecture notes in pure and applied mathematics **184** (1997), p. 603–745.

A. Vistoli

1. *Intersection theory on algebraic stacks and on their moduli spaces*, Invent. math. **97** (1989), p. 613–670.

B. Wajnryb

1. *A simple presentation of the mapping class group of an orientable surface*, Israel J. Math. **45** (1983), p. 157–174.

A. Weinstein

1. *Groupoids : unifying internal and external symetry – a tour through some examples*, Notices of the AMS **43** (1996).

W.T. van Est

1. *Rapport sur les* S*-atlas*, Astérisque **116** (1984), p. 260–292.

Index de notations

Index terminologique

Table des matières