Homotopie et catégories

Georges Maltsiniotis

Albert Burroni a participé au groupe de travail "Algèbre et topologie homotopiques" depuis sa création, en intervenant régulièrement de façon pertinente. Ceci n'est pas un hasard. En effet, la théorie de l'homotopie peut être fondée en termes de la théorie des catégories. Le rapport entre la théorie de l' homotopie et les ∞-groupoïdes non stricts, conjecturé par Grothendieck, est bien connu, quoique pas entièrement élucidé. Ce n'est pas cet aspect qui va nous intéresser ici. Ce sera un autre point de vue, également initié par Grothendieck, mais aussi par Quillen, basé uniquement sur les catégories ordinaires, les 1-catégories.

On note $\mathbf{\Delta}_m$ l'ensemble

$$\mathbf{\Delta}_m = \{0, 1, \dots, m\} \quad , \qquad m \geq 0 \quad ,$$

ordonné par l'ordre naturel, ainsi que la catégorie correspondante. On désigne par $\mathbf{\Delta}$ la sous-catégorie pleine de la catégorie $\mathcal{C}at$ des petites catégories, dont les objets sont les $\mathbf{\Delta}_m$, $m \geq 0$, et par $\widehat{\mathbf{\Delta}}$ la catégorie des *ensembles simpliciaux*, préfaisceaux sur $\mathbf{\Delta}$:

$$\widehat{\mathbf{\Delta}} = \underline{\mathsf{Hom}}(\mathbf{\Delta}^{\circ}, \mathcal{E}ns) \quad .$$

On rappelle qu'on a un foncteur pleinement fidèle, le foncteur *nerf*

$$N : \mathcal{C}at \longrightarrow \widehat{\mathbf{\Delta}} \quad , \qquad C \longmapsto \big(\mathbf{\Delta}_m \mapsto \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}at}(\mathbf{\Delta}_m, C)\big) \quad .$$

D'autre part, on a un foncteur *simplexe standard*, à valeurs dans la catégorie des espaces topologiques

$$\mathbf{\Delta} \longrightarrow \mathcal{T}op \quad , \qquad \mathbf{\Delta}_m \longmapsto \Delta_m = \{(x_0, \dots, x_m) \in \mathbb{R}_+^{n+1} \mid \textstyle\sum x_i = 1\} \quad ,$$

d'où un unique foncteur (à isomorphisme unique près) le prolongeant

$$\begin{tikzcd}
\widehat{\mathbf{\Delta}} \arrow[r, "|\cdot|"] & \mathcal{T}op \\
\mathbf{\Delta} \arrow[u, hook, "\text{Yoneda}"] \arrow[ur, "\text{simplexe standard}"']
\end{tikzcd}$$

et commutant aux limites inductives. On note

$$\mathbf{B} : \mathcal{C}at \longrightarrow \mathcal{T}op \quad ,$$

et on appelle foncteur *espace classifiant*, le foncteur composé

$$\mathcal{C}at \xrightarrow{N} \widehat{\mathbf{\Delta}} \xrightarrow{|\cdot|} \mathcal{T}op \quad , \qquad \mathbf{B}(A) = |N(A)| \quad , \qquad A \in \mathsf{Ob}\ \mathcal{C}at \quad .$$

On dit qu'un foncteur $u : A \to B$ dans $\mathcal{C}at$ est une *équivalence faible* si $\mathbf{B}(u)$ est une équivalence d'homotopie, et on note $\mathcal{W}_\infty$ la classe des équivalences faibles. On montre que le foncteur espace classifiant induit une équivalence de catégories de la catégorie localisée $\mathcal{C}at[\mathcal{W}_\infty^{-1}]$ (obtenue de $\mathcal{C}at$ en inversant formellement les équivalences faibles) avec la catégorie homotopique des CW-complexes. Ainsi, il suffit de donner une caractérisation purement catégorique de $\mathcal{W}_\infty$, pour obtenir une définition catégorique de la catégorie homotopique des CW-complexes.

Quillen démontre deux théorèmes importants relatifs à la classe des flèches $\mathcal{W}_\infty$, qu'il appelle théorème A et théorème B [**Qu**].

Théorème A (de Quillen). *Soit $u : A \to B$ un foncteur entre petites catégories. Si pour tout objet b de B, le foncteur induit $u/b : A/b \to B/b$ est une équivalence faible, il en est de même de u.*

Ici A/b désigne la comma catégorie dont les objets sont les couples $(a, p : u(a) \to b)$, $a \in \mathsf{Ob}\, A$, $p \in \mathsf{Fl}\, B$.

Ce théorème admet une version relative démontrée par D.-C. Cisinski [**Ci2**], en généralisant la preuve de Quillen.

Théorème A (relatif). *Soit*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "u"] \arrow[dr] & & B \arrow[dl] \\ & C & \end{tikzcd}$$

un triangle commutatif de $\mathcal{C}at$. Si pour tout objet c de C, le foncteur induit $u/c : A/c \to B/c$ est une équivalence faible, alors il en est de même de u.

Le théorème A de Quillen correspond au cas particulier du triangle commutatif

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "u"'] & & B \arrow[dl, "1_B"] \\ & B & \end{tikzcd} .$$

Grothendieck définit la notion de *localisateur fondamental* comme étant une classe $\mathcal{W}$ de flèches de $\mathcal{C}at$ satisfaisant aux conditions suivantes [**PS**].

L1) La classe $\mathcal{W}$ est faiblement saturée :

a) les identités sont dans $\mathcal{W}$;

b) si dans un triangle commutatif deux des trois flèches sont dans $\mathcal{W}$, il en est de même de la troisième ;

c) si $i : X' \to X$ et $r : X \to X'$ sont deux morphismes de $\mathcal{C}at$ tels que $ri = 1_{X'}$, et si ir est dans $\mathcal{W}$, alors r est aussi dans $\mathcal{W}$.

L2) Si A est une petite catégorie admettant un objet final, alors l'unique foncteur $A \to e$ de A vers la catégorie ponctuelle e est dans $\mathcal{W}$.

L3) La classe $\mathcal{W}$ satisfait au théorème A relatif : si

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "u"] \arrow[dr] & & B \arrow[dl] \\ & C & \end{tikzcd}$$

est un triangle commutatif, et si pour tout objet c de C le foncteur induit par u, $u/c : A/c \to B/c$ est dans $\mathcal{W}$, alors u est aussi dans $\mathcal{W}$.

Exemple. La classe $\mathcal{W} = \mathcal{W}_\infty$ est un localisateur fondamental (la condition L1 est évidente, la condition L2 résulte de l'observation qu'un morphisme de foncteurs entre petites catégories

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "u"] \arrow[r, bend right, "v"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & B \end{tikzcd}$$

définit une homotopie de $\mathbf{B}(u)$ vers $\mathbf{B}(v)$, et la condition L3 est le théorème A relatif).

Grothendieck a conjecturé l'assertion suivante [**PS**], démontrée par D.-C. Cisinski [**Ci2**].

Théorème. *La classe $\mathcal{W}_\infty$ est le plus petit localisateur fondamental.*

Ce théorème fournit une caractérisation purement catégorique de $\mathcal{W}_\infty$ d'une merveilleuse simplicité.

Une autre conjecture de Grothendieck [**PS**] démontrée par D.-C. Cisinski [**Ci1**] est l'énoncé suivant.

Théorème. *Tout localisateur fondamental est fortement saturé.*

Cela signifie que si $\mathcal{W}$ est un localisateur fondamental et si on désigne par $\gamma : \mathcal{C}at \to \mathcal{C}at[\mathcal{W}^{-1}]$ le foncteur canonique de localisation, alors u appartient à $\mathcal{W}$ si et seulement si $\gamma(u)$ est un isomorphisme.

Une autre caractérisation de $\mathcal{W}_\infty$ peut être obtenue moyennant le théorème B de Quillen.

Pour expliquer cela, on a besoin de la notion de carré homotopiquement cartésien. Formulons d'abord une caractérisation des carrés cartésiens dans une catégorie $\mathcal{C}$. Pour toute petite catégorie I, on note $\mathcal{C}^I$ la catégorie $\underline{\mathsf{Hom}}(I, \mathcal{C})$ des foncteurs de I vers $\mathcal{C}$. On pose

$$\square = \mathbf{\Delta}_1 \times \mathbf{\Delta}_1 = \begin{tikzcd} (0,0) \arrow[r] \arrow[d] & (0,1) \arrow[d] \\ (1,0) \arrow[r] & (1,1) \end{tikzcd} \quad ,$$

et on note $\lrcorner$ la sous-catégorie pleine de $\square$

$$\lrcorner = \begin{tikzcd} & (0,1) \arrow[d] \\ (1,0) \arrow[r] & (1,1) \end{tikzcd} \quad .$$

Un carré commutatif de $\mathcal{C}$ n'est rien d'autre qu'un objet X de $\mathcal{C}^{\square}$, et on vérifie facilement qu'il est cartésien si et seulement si pour tout objet T de $\mathcal{C}^{\square}$, l'application de restriction

$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}^{\square}}(T,X) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}^{\lrcorner}}(T|\lrcorner, X|\lrcorner)$$

est bijective. Soit $\mathcal{W}$ une partie de $\mathsf{Fl}\,\mathcal{C}$. On pose

$$\mathcal{W}^I = \{f \in \mathsf{Fl}\,\mathcal{C} \mid \forall i \in \mathsf{Ob}\ I\ f_i \in \mathcal{W}\}$$

et

$$\mathbb{D}(I) = \mathcal{C}^I[(\mathcal{W}^I)^{-1}] \quad .$$

Il est immédiat que le foncteur de restriction

$$\mathcal{C}^{\square} \longrightarrow \mathcal{C}^{\lrcorner} \quad , \qquad X \longmapsto X|\lrcorner$$

induit un foncteur

$$\mathbb{D}(\square) \longrightarrow \mathbb{D}(\lrcorner) \quad , \quad \text{noté aussi} \quad X \longmapsto X|\lrcorner \quad .$$

On dit qu'un carré commutatif X de $\mathcal{C}$ est *$\mathcal{W}$-homotopiquement cartésien* si pour tout carré commutatif T de $\mathcal{C}$, l'application

$$\mathsf{Hom}_{\mathbb{D}(\square)}(T,X) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathbb{D}(\lrcorner)}(T|\lrcorner, X|\lrcorner)$$

est bijective. Si $\mathcal{W}$ est la classe des identités (ou des isomorphismes) de $\mathcal{C}$, on retrouve la notion de carré cartésien.

Soit $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental. On dit qu'un foncteur $u : A \longrightarrow B$ est *$\mathcal{W}$-localement constant*, si pour toute flèche $f : b \to b'$ de B, le foncteur

$$A/b \longrightarrow A/b' \quad , \qquad (a, p : u(a) \to b) \longmapsto (a, fp : u(a) \to b')$$

est dans $\mathcal{W}$.

Théorème B (de Quillen). *Soit $u : A \to B$ un foncteur $\mathcal{W}_\infty$-localement constant entre petites catégories. Alors pour tout objet b de B, le carré commutatif*

$$\begin{tikzcd} A/b \arrow[r] \arrow[d, "u/b"'] & A \arrow[d, "u"] \\ B/b \arrow[r] & B \end{tikzcd}$$

est $\mathcal{W}_\infty$-homotopiquement cartésien.

Corollaire. *Soit $u : A \to B$ un foncteur $\mathcal{W}_\infty$-localement constant dans $\mathcal{C}at$. Si u est dans $\mathcal{W}_\infty$, alors pour tout objet b de B, le foncteur $u/b : A/b \to B/b$ est dans $\mathcal{W}_\infty$* (on dit que u est *$\mathcal{W}_\infty$-asphérique*).

Ce corollaire est une réciproque partielle du théorème A. Il résulte du théorème B et du fait que si

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r] \arrow[d, "u'"'] & A \arrow[d, "u"] \\ B' \arrow[r] & B \end{tikzcd}$$

est un carré $\mathcal{W}_\infty$-homotopiquement cartésien, alors si u est dans $\mathcal{W}_\infty$, il en est de même de u'.

On dit qu'un localisateur fondamental $\mathcal{W}$ est *géométrique* si tout foncteur $u : A \to B$ appartenant à $\mathcal{W}$ induit une bijection $\pi_0 A \to \pi_0 B$. D.-C. Cisinski montre que cette condition n'est pas réellement restrictive : il n'y a que deux localisateurs fondamentaux non géométriques :

$$\mathcal{W}_{tr} = \mathsf{Fl}\ \mathcal{C}at \quad \text{et} \quad \mathcal{W}_{gr} = \{A \to B \in \mathsf{Fl}\ \mathcal{C}at \mid A = B = \varnothing \text{ ou } A \neq \varnothing\}$$

le *localisateur trivial*, et le *localisateur grossier* [**Ci1**]. Il obtient le théorème suivant [**Ci2**].

Théorème. *Soit $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental géométrique. Si tout foncteur $\mathcal{W}$-localement constant $u : A \to B$ appartenant à $\mathcal{W}$ est $\mathcal{W}$-asphérique* (pour tout objet b de B, $u/b : A/b \to B/b$ est dans $\mathcal{W}$), *alors $\mathcal{W} = \mathcal{W}_\infty$.*

Corollaire. *Soit $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental géométrique. Si pour tout foncteur $\mathcal{W}$-localement constant $u : A \to B$, et tout objet b de B, le carré*

$$\begin{tikzcd} A/b \arrow[r] \arrow[d, "u/b"'] & A \arrow[d, "u"] \\ B/b \arrow[r] & B \end{tikzcd}$$

est $\mathcal{W}$-homotopiquement cartésien, alors $\mathcal{W} = \mathcal{W}_\infty$. Autrement dit, $\mathcal{W}_\infty$ est l'unique localisateur fondamental géométrique satisfaisant au théorème B de Quillen.

On obtient ainsi deux nouvelles descriptions purement catégoriques de $\mathcal{W}_\infty$. Dans un manuscrit en cours d'édition [**Der**], Grothendieck donne encore d'autres caractérisations de $\mathcal{W}_\infty$.

Pour démontrer que le théorème ci-dessus implique le corollaire, il suffit de prouver que si

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r] \arrow[d, "u'"'] & A \arrow[d, "u"] \\ B' \arrow[r, "v"'] & B \end{tikzcd}$$

est un carré $\mathcal{W}$-homotopiquement cartésien, alors si u est dans $\mathcal{W}$, il en est de même de u'. Par un argument purement formel, on remarque que pour cela il suffit de montrer que le carré

$$\begin{tikzcd} B' \arrow[r, "v"] \arrow[d, "1_{B'}"'] & B \arrow[d, "1_B"] \\ B' \arrow[r, "v"'] & B \end{tikzcd}$$

est $\mathcal{W}$-homotopiquement cartésien. Si le localisateur fondamental $\mathcal{W}$ est *accessible* (s'il est le plus petit localisateur fondamental contenant un *ensemble* de flèches de $\mathcal{C}at$), D.-C. Cisinski démontre (généralisant un théorème de Thomason [**Th**]) que $\mathcal{C}at$ admet une structure de catégorie de modèles fermée de Quillen, dont les équivalences faibles sont les flèches appartenant à $\mathcal{W}$ [**Ci1**], et dans ce cas l'assertion est bien connue et triviale. Le cas général s'en déduit facilement, en remarquant que tout localisateur fondamental est réunion filtrante des localisateurs fondamentaux accessibles qu'il contient.

Références

[Ci1] D.-C. Cisinski, *Les préfaisceaux comme modèles des types d'homotopie*, thèse (2002), à paraître dans Astérisque.

[Ci2] D.-C. Cisinski, *Le localisateur fondamental minimal*, à paraître dans les Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques.

[PS] A. Grothendieck, "Pursuing Stacks", manuscrit (1983).

[Der] A. Grothendieck, "Les dérivateurs", manuscrit (∼1990), édité par M. Künzer, J. Malgoire, G. Maltsiniotis, http ://www.math.jussieu.fr/~maltsin/groth/Derivateurs.html.

[Qu] D. Quillen, *Higher algebraic K-theory: I*, dans "Higher K-Theories" H. Bass Editor, LNM 341, Springer-Verlag (1973).

[Th] R. W. Thomason, *$\mathcal{C}at$ as a closed model category*, Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, Vol. XXX-3, pp. 305-324, (1980).