La (∞, n)-catégorie des n-cobordismes

Le but de cet exposé est de donner une définition en termes d'espaces de Segal supérieures de la (∞, n)-catégorie des n-cobordismes décrite informellement dans mon exposé introductif. Je vais commencer par rappeler et préciser cette définition informelle.

Dans tout mon exposé, variété signifiera variété différentiable. Pour simplifier on se bornera au cas non orienté, le cas orienté, ou muni d'une structure plus fine se traitant de façon analogue.

Informellement, $\mathrm{Bord}_{m,n}$ est l'(∞, n)-catégorie dont les objets sont les variétés compactes sans bord ~~de~~ dimension m, les i-flèches pour $1 \leq i \leq n$ les cobordismes de dimension $m+i$, les $(n+1)$-flèches les difféomorphismes de cobordismes de dimension $m+n$, les $(n+2)$-flèches les isotopies entre difféomorphismes de tels cobordismes, les $(n+3)$-flèches des isotopies entre isotopies, etc

On peut décrire de façon parfaitement précise le ∞-graphe sous-jacent à $\mathrm{Bord}_{m,n}$ qu'on aimerait voir muni d'une structure de (∞, n)-catégorie.

Les 0-cellules ou 0-flèches de ce ∞-graphe sont donc les variétés compactes sans bord de dimension m.

Étant données deux variétés compactes sans bord M et N de dimension m, une 1-flèche de M vers N est un cobordisme de dimension $m+1$ de M vers N, autrement dit un couple $(X, \varphi : M \amalg N \xrightarrow{\sim} \partial X)$, où X désigne une variété compacte de dimension $m+1$ de bord ∂X et φ un difféomorphisme.

Étant donnés deux tels cobordismes (X,φ), (Y,ψ) de M vers N, une 2-flèche de source (X,φ) et but (Y,ψ) est un cobordisme de dimension $m+2$ de (X,φ) vers (Y,ψ), autrement dit un couple (Z,θ)

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, bend left=50, "{(X,\varphi)}"{name=U}] \arrow[r, bend right=50, "{(Y,\psi)}"'{name=D}] & N \arrow[Rightarrow, from=U, to=D, "{(Z,\theta)}"] \end{tikzcd}$$

où Z est une variété compacte à bord et coins de dimension $m+2$, et

$$\theta : X \amalg_{M \amalg N} [0,1] \times (M \amalg N) \amalg_{M \amalg N} Y \xrightarrow{\sim} \partial Z$$

un difféomorphisme

Plus généralement, une i flèche $2\leq i\leq n$ est un cobordisme de dimension $m+i$ entre deux cobordismes (X,φ), (Y,ψ) de dimension $m+i-1$, de même source et même but. Un tel i-cobordisme est un couple (Z,Θ), où Z est une variété compacte à bord et coins et Θ un difféomorphisme $\theta : T \to \partial Z$, de but le bord de Z et de source une somme amalgamée T qui ne dépend que de la source et du but du cobordisme (Z,Θ). Ainsi, comme les cobordismes (X,φ) et (Y,ψ) ont même but et même source, les difféomorphismes φ et ψ ont une même source S

$$\varphi : S \xrightarrow{\sim} \partial X \quad , \quad \psi : S \xrightarrow{\sim} \partial Y$$

et alors T est la somme amalgamée

$$T = X \amalg_S ([0,1]\times S) \amalg_S Y$$

Une $(n+1)$-flèche entre deux $m+n$-cobordismes (X,φ), (Y,ψ) de même source et même but, de sorte que φ et ψ aient même source S

$$\varphi : S \xrightarrow{\sim} \partial X \qquad \psi : S \xrightarrow{\sim} \partial Y,$$

est un difféomorphisme $\chi : X \xrightarrow{\sim} Y$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & S \arrow[dl, "\varphi"', "\sim"] \arrow[dr, "\psi", "\sim"'] & \\
\partial X \arrow[d, hook] & & \partial Y \arrow[d, hook] \\
X \arrow[rr, "\chi"] & & Y
\end{tikzcd}$$

soit commutatif.

L'ensemble $\mathrm{Diff}((X,\varphi),(Y,\psi))$ de ces difféomorphismes est muni d'une topologie. Une $(n+2)$-flèche entre deux tels difféomorphismes χ et χ' est une isotopie de χ vers χ', autrement dit, un chemin de χ vers χ' dans $\mathrm{Diff}((X,\varphi),(Y,\psi))$. Plus généralement une $(n+i+1)$-flèche, de source et but itérés (X,φ) et (Y,ψ) respectivement, est une application continue du disque D_i de dimension i vers l'espace $\mathrm{Diff}((X,\varphi),(Y,\psi))$. Autrement dit, le ∞-groupoïde $\underline{\mathrm{Hom}}((X,\varphi),(Y,\psi))$ est le ∞-groupoïde fondamental de l'espace $\mathrm{Diff}((X,\varphi),(Y,\psi))$.(*)

Il y a deux cas particuliers qui vont nous intéresser plus particulièrement. Il s'agit du cas de $\mathrm{Bord}_n := \mathrm{Bord}_{0,n}$ dont parle l'hypothèse du cobordisme, et le cas $\mathrm{Cob}_m = \mathrm{Bord}_{m-1,1}$, $(\infty,1)$-catégorie de m-cobordismes (entre variétés compactes sans bord de dimension $m-1$) dont le type d'homotopie a été déterminé dans l'article des quatre auteurs exposé par Geoffrey.

(*) Pour être tout à fait correct, afin de pouvoir composer les cobordismes, il faut à leur structure de colliers et demander aux cobordismes entre cobordismes et aux difféomorphismes de respecter ces colliers. On verra comment on contourne ce problème dans le cadre des espaces de Segal

Commençons néanmoins par l'étude du cas le plus simple, concernant le ∞-groupoïde $\mathrm{Bord}_{m-1,0}$ dont les objets sont les variétés compactes sans bord de dimension $m-1$, le ∞-groupoïde $\underline{\mathrm{Hom}}(M,N)$ entre deux telles variétés M et N étant le ∞-groupoïde fondamental de l'espace $\mathrm{Diff}(M,N)$. Comme dans le cas des groupoïdes ordinaires, on peut remplacer $\mathrm{Bord}_{m-1,0}$ par un groupoïde équivalent dont chaque composante connexe a un seul objet, en choisissant une variété particulière dans chaque classe de difféomorphisme de variétés compactes sans bord de dimension $m-1$. Ce ∞-groupoïde est le ∞-groupoïde fondamental d'un espace B_{m-1} que nous allons décrire.

Soient M une variété compacte sans bord de dimension $m-1$, V un espace vectoriel (réel) de dimension finie et $\mathrm{Emb}(M,V)$ l'ensemble des plongements différentiables de M dans V, muni de la topologie de Whitney (de la convergence uniforme sur les compacts de toutes les dérivées). Le quotient

$$B^V_M := \mathrm{Emb}(M,V)\,/\,\mathrm{Diff}(M)$$

s'identifie à l'ensemble des sous-variétés de V difféomorphes à M, et la somme disjointe

$$B^V_{m-1} := \coprod_M \mathrm{Emb}(M,V)\,/\,\mathrm{Diff}(M),$$

indexée par l'ensemble des classes de difféomorphisme de variétés compactes sans bord de dimension $n-1$, à l'ensemble de telles sous-variétés de V. On munit cet ensemble de la topologie somme des topologies quotient. On pose

$$B_{n-1} = \varinjlim_{V \subset \mathbb{R}^\infty} B^V_{n-1}$$

la limite inductive étant indexée par les sous-espaces vectoriels de dimension finie, ordonnés par inclusion, de $\mathbb{R}^\infty = \varinjlim_{n \geq 0} \mathbb{R}^n$.

On a

$$B_{n-1} = \coprod_M \left(\varinjlim_{V \subset \mathbb{R}^\infty} \mathrm{Emb}(M,V) \right) / \mathrm{Diff}(M) .$$

Il résulte du théorème de plongement de Whitney que l'espace

$$\varinjlim_{V \subset \mathbb{R}^\infty} \mathrm{Emb}(M,V)$$

est contractile et

$$\varinjlim_{V \subset \mathbb{R}^\infty} \mathrm{Emb}(M,V) \longrightarrow \left(\varinjlim_{V \subset \mathbb{R}^\infty} \mathrm{Emb}(M,V) \right) / \mathrm{Diff}(M)$$

est un $\mathrm{Diff}(M)$-fibré principal, de sorte que

$$\left(\varinjlim_{V \subset \mathbb{R}^\infty} \mathrm{Emb}(M,V) \right) / \mathrm{Diff}(M)$$

est un espace classifiant de $\mathrm{Diff}(M)$. Il résulte de la longue suite exacte des groupes d'homotopie que pour tout $n \geq 1$

$$\pi_n \left(\left(\varinjlim_{V \subset \mathbb{R}^\infty} \mathrm{Emb}(M,V) \right) / \mathrm{Diff}(M) \right) \simeq \pi_{n-1} \mathrm{Diff}(M)$$

Ainsi il est plausible que $\mathrm{Bord}_{n-1,0}$ soit équivalent à l'∞-groupoïde fondamental de B_{n-1}.

L'étape suivante consiste en l'implémentation de la $(\infty,1)$-catégorie $\mathcal{B}ord_{n-1,1}$ comme espace de Segal. On rappelle que l'intuition des espaces complets de Segal est la suivante. Si $\mathcal{C}$ est une $(\infty,1)$-catégorie, on peut lui associer un ∞-groupoïde simplicial $S\mathcal{C}$ tel que $(S\mathcal{C})_p$ soit le sous-∞-groupoïde maximal de la $(\infty,1)$-catégorie des suites de p 1-flèches composables de $\mathcal{C}$. Dans l'implémentation des ∞-groupoïdes comme espaces (espace voulant dire au choix espace topologique ou complexe de Kan), $S\mathcal{C}$ est donc un espace simplicial. Par exemple, si $\mathcal{C}$ est une catégorie ordinaire (considérée comme $(\infty,1)$-catégorie) et si on voit $S\mathcal{C}$ comme ensemble bisimplicial, les (p,q)-simplexes de $S\mathcal{C}$ sont les diagrammes commutatifs

$$
\begin{tikzcd}
c_{00} \arrow[r] \arrow[d] & c_{01} \arrow[r] \arrow[d] & c_{02} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & c_{0q} \arrow[d] \\
c_{10} \arrow[r] \arrow[d] & c_{11} \arrow[r] \arrow[d] & c_{12} \arrow[r] \arrow[d] & \arrow[r] & c_{1q} \arrow[d] \\
\vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & & \vdots \arrow[d] \\
c_{p0} \arrow[r] & c_{p1} \arrow[r] & c_{p2} \arrow[r] & \arrow[r] & c_{pq}
\end{tikzcd}
$$

les flèches horizontales étant des isomorphismes, et $S\mathcal{C}$ est un espace de Segal complet

Plus généralement, si $\mathcal{C}$ est implémentée par une quasi-catégorie X, $S\mathcal{C}$ correspond à l'ensemble bisimplicial $S(X)$ défini comme suit. Les (p,q)-simplexes de $S(X)$ sont les morphismes d'ensembles simpliciaux

$$\Delta_p \times \Delta_q \longrightarrow X$$

tels que pour tout i, $0 \leq i \leq p$, et tout j, $1 \leq j \leq q$, le composé

$$\begin{tikzcd} \Delta_1 \simeq \Delta_0 \times \Delta_1 \arrow[r, "\{i\}\times\{j-1,j\}"] \arrow[rrr, bend right] & \Delta_p \times \Delta_q \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

corresponde à une flèche quasi-inversible de X. Le fait que $S(X)$ soit un espace de Segal complet est un résultat profond jouant un rôle crucial dans la théorie des quasi-catégories, caché, dans les notations du cours de Denis-Charles, dans l'étude de $h(A, X)$ et $h(B, X)$, où pour tous ensembles simpliciaux A et B et entiers naturels p et q

$$h(A,X)_q = \mathrm{Hom}_{\hat{\Delta}}(A, S(X)_{\bullet,q})$$

et

$$h(B,X)_p = \mathrm{Hom}_{\hat{\Delta}}(B, S(X)_{p,\bullet}) .$$

Pour définir un espace de Segal implémentant $\mathrm{Bord}_{m-1,1}$, Lurie procède par étapes.

Soient X une variété compacte de dimension m, $\partial X = X_0 \cup X_1$ une partition de son bord en deux variétés compactes sans bord de dimension $m-1$, éventuellement vides (de sorte que l'on puisse voir X comme un cobordisme de X_0 vers X_1), V un espace vectoriel (réel) de dimension finie, et $\mathrm{Emb}((X;X_0,X_1), V\times[0,1])$ l'ensemble des plongements $j : X \hookrightarrow V\times[0,1]$ tels que $j^{-1}(V\times\{0\}) = X_0$ et $j^{-1}(X\times\{1\}) = X_1$, muni de la topologie de Whitney. Si $\mathrm{Diff}(X;X_0,X_1)$ désigne le groupe de difféomorphismes de X laissant stables (mais pas nécessairement fixes) X_0 et X_1, les points de l'espace quotient

$$C^V_{X;X_0,X_1} = \mathrm{Emb}((X;X_0,X_1), V\times[0,1]) \,/\, \mathrm{Diff}(X;X_0,X_1)$$

sont en bijection avec les sous-variétés de $V\times[0,1]$ difféomorphes à X de façon compatible à la partition de son bord, et les points de l'espace somme

$$C^V_m = \coprod_{(X;X_0,X_1)} C^V_{X;X_0,X_1}$$

(la somme étant indexée par l'ensemble des classes de difféomorphisme de tels triplets) en bijection avec les sous-variétés compactes de dimension m de $V\times[0,1]$ dont le bord est la réunion de leur intersection avec $V\times\{0\}$ et $V\times\{1\}$. Ainsi l'ensemble de ces sous-variétés se trouve muni d'une topologie.

On note, pour k entier naturel, $\mathrm{SemiCob}(n)_k^V$ l'ensemble des couples $(X, (a_0, a_1, \dots, a_k))$ tels que $a_0 < a_1 < \dots < a_k \in \mathbb{R}$ et X est

- si $k = 0$ une sous-variété compacte sans bord de dimension $m-1$ de V
- si $k > 0$ une sous-variété compacte de dimension m de $V \times [a_0, a_k]$ telle que $\partial X = X \cap V \times \{a_0\} \cup X \cap V \times \{a_k\}$ et intersectant transversalement $V \times \{a_i\}$ pour tout i, $0 \leq i \leq k$.

En identifiant, par une transformation affine, $V \times [a_0, a_k]$ à $V \times [0,1]$, l'ensemble $\mathrm{SemiCob}(m)_k^V$ s'identifie, pour $k > 0$, à un ouvert de $C_m^V \times \mathbb{R}^{k+1}$ et se trouve donc muni d'une topologie. Pour $k = 0$, il s'identifie à $B_{m-1}^V \times \mathbb{R}$.

On définit ainsi un espace semi-simplicial. On rappelle qu'un objet semi-simplicial d'une catégorie est un préfaisceau à valeurs dans cette catégorie, sur la sous-catégorie de Δ ayant les mêmes objets et comme morphismes les applications <u>strictement</u> croissantes. Si $\varphi : [k] \to [l]$ est une telle application

$$\varphi^* : \mathrm{SemiCob}(n)^V_\ell \longrightarrow \mathrm{SemiCob}(n)^V_k$$

est défini par

$$\varphi^*(X ; (a_0, \dots, a_\ell)) = (X \cap V \times [a_{\varphi(0)}, a_{\varphi(k)}] ; (a_{\varphi(0)}, \dots, a_{\varphi(k)}))$$

On définit l'espace semi-simplicial $\mathrm{SemiCob}(n)_\bullet$ en passant à la limite inductive :

$$\mathrm{SemiCob}(n)_\bullet = \varinjlim_{V \subset \mathbb{R}^\infty} \mathrm{SemiCob}(n)^V_\bullet$$

<u>Proposition</u> L'espace semi-simplicial $\mathrm{SemiCob}(n)_\bullet$ satisfait à la condition de Segal

La condition de Segal ne fait intervenir que des applications strictement croissantes, elle garde donc un sens pour les espaces semi-simpliciaux :

$$\mathrm{SemiCob}(n)_k \longrightarrow \overbrace{\mathrm{SemiCob}(n)_1 \underset{\mathrm{SemiCob}(n)_0}{\overset{h}{\times}} \cdots \underset{\mathrm{SemiCob}(n)_0}{\overset{h}{\times}} \mathrm{SemiCob}(n)_1}^{k\text{-fois}}, \quad k \geq 2$$

est une équivalence faible.

La proposition résulte essentiellement du fait que les choix de colliers nécessaires pour composer deux cobordismes forment un espace contractile.

On aimerait néanmoins avoir un espace simplicial, et pas seulement un espace semi-simplicial. L'idée qui ne marche <u>pas</u> est celle qui consiste à remplacer simplement dans la définition de $\mathrm{SemiCob}(m)^V_k$ les inégalités strictes $a_0 < a_1 < \cdots < a_k$ par des inégalités larges. En effet, dans la définition de la topologie de $\mathrm{SemiCob}(m)^V_k$, on utilise la transformation affine qui identifie $V \times [a_0, a_k]$ à $V \times [0,1]$; cela coince si $a_0 = a_k$. On s'en sort par une construction plus compliquée.

On note, pour k entier naturel, $\mathrm{PreCob}(m)^V_k$ l'ensemble des couples $(X, (a_0, a_1, \dots, a_k))$ tels que $a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_k \in \mathbb{R}$ et X est une sous-variété fermée (non nécessairement compacte) sans bord de dimension m de $V \times \mathbb{R}$ telle que la projection $X \longrightarrow \mathbb{R}$ soit propre et que $a_0, a_1, \dots, a_k$ ne soient pas valeurs critiques de cette application ($\Leftrightarrow$ pour tout i, $0 \leq i \leq k$, X intersecte transversalement $V \times \{a_i\}$).

Il est plus subtil de définir une topologie sur cet espace. On définit une topologie sur l'ensemble $\mathrm{Sub}(V \times \mathbb{R})$ de toutes les sousvariétés fermées sans bord de dimension m de $V \times \mathbb{R}$ comme suit. Si X est une telle sous-variété, une base de voisinages de X est formée par la famille $\mathcal{V}_{K,W}$, K compact de $V \times \mathbb{R}$, W ouvert de $\mathrm{Emb}(X, V \times \mathbb{R})$ pour la topologie de Whitney, définie par

$$\mathcal{V}_{K,W} = \{ Y \in \mathrm{Sub}(V \times \mathbb{R}) \mid Y \cap K = f(X) \cap K \text{ pour un } f \in W \}$$

On munit alors $\mathrm{PreCob}(m)^V_k$ de la topologie induite de celle de $\mathrm{Sub}(V\times\mathbb{R})\times\mathbb{R}^{k+1}$. Cette topologie a la propriété que si $(X,(a_0,\dots,a_k))$ et $(X',(a_0,\dots,a_k))$ sont deux points de $\mathrm{PreCob}(m)^V_k$ tels que

$$X\cap V\times[a_0,a_k] = X'\cap V\times[a_0,a_k],$$

alors on peut trouver un chemin les reliant dans $\mathrm{PreCob}(m)^V_k$ "en envoyant leurs différences à l'infini"

Les espaces $\mathrm{PreCob}(m)^V_k$ forment un espace simplicial. Si $\varphi:[k]\longrightarrow[\ell]$ est une application croissante

$$\varphi^*: \mathrm{PreCob}(m)^V_\ell \longrightarrow \mathrm{PreCob}(m)^V_k$$

est défini par

$$\varphi^*(X;(a_0,\dots,a_\ell)) = (X;(a_{\varphi(0)},\dots,a_{\varphi(k)}))$$

On définit l'espace ~~simplicial~~ simplicial $\mathrm{PreCob}(m)^V_\bullet$ en passant à la limite inductive

$$\mathrm{PreCob}(m)_\bullet = \varinjlim_{V\subset\mathbb{R}^\infty} \mathrm{PreCob}(m)^V_\bullet .$$

Pour tout k, $k\geq 0$, on note $\mathrm{PreCob}^0(m)_k$ l'ouvert de $\mathrm{PreCob}(m)_k$ formé des couple $(X;(a_0,\dots,a_k))$ dans $\mathrm{PreCob}(m)_k$ tels que $a_0<a_1<\dots<a_k$.

On a un diagramme d'espaces semi-simpliciaux

$$\begin{tikzcd} \mathrm{PreCob}^0(m)_\bullet \arrow[r, hook] \arrow[d] & \mathrm{PreCob}(m)_\bullet \\ \mathrm{SemiCob}(m)_\bullet & \end{tikzcd},$$

la flèche horizontale étant l'inclusion et la flèche verticale étant définie par

$$(X, (a_0, \dots, a_k)) \mapsto (X \cap V \times [a_0, a_k], (a_0, \dots, a_k))$$

<u>Proposition</u> Les deux flèches sont des équivalences faibles argument par argument. En particulier, l'espace simplicial $\mathrm{PreCob}(m)_\bullet$ satisfait à la condition de Segal.

<u>Remarque</u> L'espace $\mathrm{PreCob}(m)_\bullet$ n'est pas fibrant pour la structure de Reedy. Il ne satisfait pas non plus la condition des espaces de Segal complets, quand m est grand. En effet l'espace

$$\mathrm{PreCob}(m)_0 \simeq \mathrm{SemiCob}(m)_0 \simeq B_{m-1} \times \mathbb{R}$$

représente l'∞-groupoïde des variétés compactes sans bord de dimension $m-1$, difféomorphismes de tels espaces, isotopies entre tels difféomorphismes etc. Les chemins de $\mathrm{PreCob}(m)_\bullet$ correspondent donc aux difféomorphismes entre variété compactes sans bord de dimension $m-1$. En revanche, les 1-morphismes de $\mathrm{PreCob}(m)_\bullet$ inversibles dans la catégorie homotopique $h\,\mathrm{PreCob}(m)$ sont donnés par des cobordismes inversibles entre telles variétés. Or un tel cobordisme $X : M \to N$ vient d'un difféomorphisme de M vers N si et seulement si X est difféomorphe à $M \times [0,1]$. Si $m \geq 6$ le théorème du s-cobordisme affirme que cela est équivalent à la nullité de la torsion de Whitehead de X. Comme il existe des cobordismes inversibles avec une torsion de Whitehead non nulle, l'espace $\mathrm{PreCob}(m)_\bullet$ n'est pas complet pour $m \geq 6$.

En fait, en partant de la $(\infty,1)$-catégorie $\mathrm{Bord}_{m-1,1}$, au lieu de considérer l'espace de Segal complet canoniquement associé, dont le k-ième espace est un espace topologique dont le ∞-groupoïde fondamental est équivalent au sous-groupoïde maximal de la $(\infty,1)$-catégorie des suites de k-flèches composables, on a considéré un sous-∞-groupoïde plus petit en se restreignant aux cobordismes venant d'un difféomorphisme au lieu de tenir compte de <u>tous</u> les cobordismes inversibles.

Qu'est-ce qui nous assure alors que $\mathrm{PreCob}(n)_\bullet$ implémente bien notre $(\infty,1)$-catégorie $\mathrm{Bord}_{m-1,1}$? On est rassurés par les propositions suivantes

<u>Proposition</u> Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. Pour tout ensemble W de flèches de $\mathcal{C}$, stable par composition et contenant les unités, on note $S_W\mathcal{C}$ l'ensemble bisimplicial dont les (p,q)-simplexes sont les diagrammes commutatifs

$$\begin{tikzcd}
c_{00} \arrow[r] \arrow[d] & c_{01} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & c_{0q} \arrow[d] \\
c_{10} \arrow[r] \arrow[d] & c_{11} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & c_{1q} \arrow[d] \\
\vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & & \vdots \arrow[d] \\
c_{p0} \arrow[r] & c_{p1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & c_{pq}
\end{tikzcd}$$

les flèches horizontales étant dans W. Si toute flèche appartenant à W est inversible, alors l'inclusion $S_W\mathcal{C} \hookrightarrow S\mathcal{C} := S_{\mathrm{Iso}(\mathcal{C})}\mathcal{C}$ est une équivalence faible pour la structure des espaces complets de Segal. De plus, $S_W\mathcal{C}$ (resp. $S\mathcal{C}$) est un espace de Segal (resp. un espace de Segal complet).

<u>Proposition</u> Soit X une quasi-catégorie. Pour tout sous-ensemble simplicial K de X, on note $S_K X$ l'ensemble bisimplicial défini par

$$(S_K X)_{p,q} := \{ \varphi \in \mathrm{Hom}_{\hat{\Delta}}(\Delta_p \times \Delta_q, X) \mid \forall i \;\; 0 \leq i \leq p \;\; \varphi| \{i\} \times \Delta_q \in K_q \}$$

Si K est un sous-ensemble simplicial de X tel que $K_0 = X_0$ et K_1 soit formé de 1-simplexes quasi-inversibles de X, alors le morphisme d'inclusion

$$S_K X \hookrightarrow SX := S_{k(X)} X$$

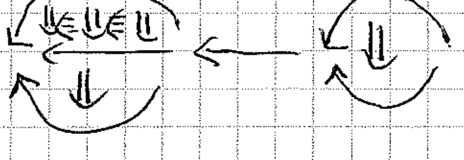
(où $k(X)$ désigne le sous-ensemble simplicial de X dont les p-simplexes sont les p-simplexes x de X tels que pour tout i, $1 \leq i \leq p$, le 1-simplexe $x| \{i-1, i\}$ soit quasi-inversible) est une équivalence faible pour la structure des espaces de Segal complets. De plus, $S_K X$ (resp. SX) est un espace de Segal (resp. un espace de Segal complet).

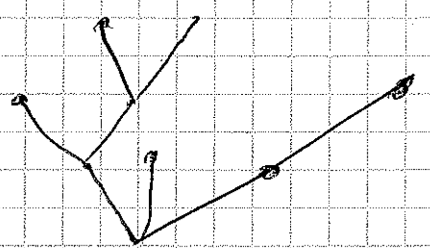
L'intuition du Θ_n-espace de Rezk associé à une (∞,n)-catégorie $\mathcal{C}$ est d'associer à tout objet S de Θ_n l'espace qui représente le sous-∞-groupoïde maximal de la (∞,n)-catégorie $\underline{\mathrm{Hom}}(S,\mathcal{C})$ des diagrammes dans $\mathcal{C}$ de type S.
On rappelle que les objets de Θ_n sont indexés par les tableaux de dimension

$$\begin{pmatrix} p_1 & & p_2 & \cdots & p_q \\ & p'_1 & & p'_{q-1} & \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} p_i \leq n \\ 1 \leq i \leq q \end{array} \qquad \begin{array}{c} p'_i < \min\{p_i, p_{i+1}\} \\ 1 \leq i < q \end{array}$$

et qu'à chaque tel tableau on associe un arbre et un schéma de composition. Par exemple

$$\begin{pmatrix} 2 & & 3 & & 3 & & 1 & & 2 \\ & 1 & & 2 & & 0 & & 0 & \end{pmatrix} \longleftrightarrow$$



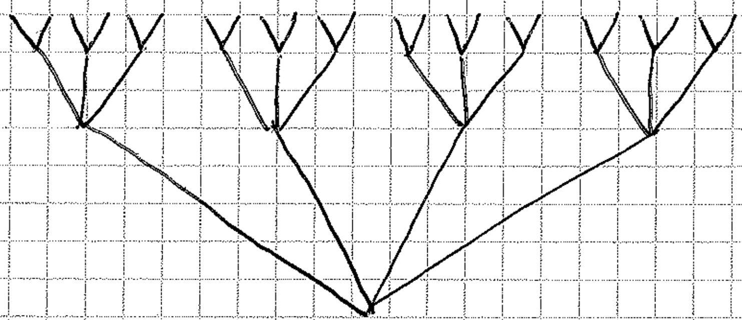


Les espaces de Segal complets n-uples correspondent au cas où on se limite à des schémas de composition très réguliers indexés par n entiers $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$

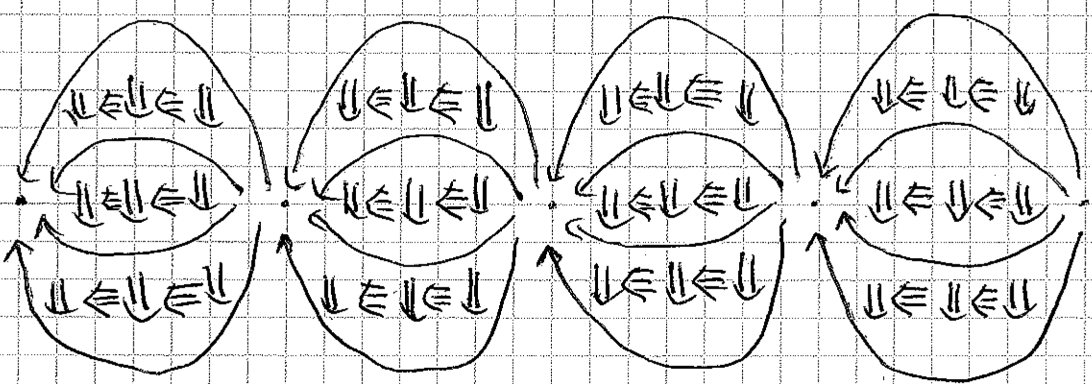
Par exemple pour $n = 3$, $(4, 3, 2)$ correspond au tableau

$$\begin{pmatrix} 3\ 3\ 3\ 3\ 3\ 3\ 3\ 3\ 3\ 3\ 3\ 3\ 3\ 3\ 3\ 3\ 3\ 3\ 3\ 3\ 3\ 3\ 3\ 3 \\ 2\ 1\ 2\ 1\ 2\ 0\ 2\ 1\ 2\ 1\ 2\ 0\ 2\ 1\ 2\ 1\ 2\ 0\ 2\ 1\ 2\ 1\ 2 \end{pmatrix}$$

à l'arbre



et au schéma de composition



En fait, on a un foncteur $\Delta^n \xrightarrow{u_n} \Theta_n$ et la définition d'un espace de Segal complet n-uple correspond exactement aux propriétés d'un ensemble n-simplicial de la forme $u_n^* X$, où X est un Θ_n-espace complet de Rezk. Le foncteur u_n est défini par récurrence sur n en utilisant la définition de Θ_n par produit en couronnes: Si $n=1$, $\Theta_1 = \Delta$ et $u_1 = 1_\Delta$.

Si $n > 1$

$$u_n([k_1],[k_2],\dots,[k_n])$$
$$= \Big([k_1]\,;\, \underbrace{u_{n-1}([k_2],\dots,[k_n]),\dots, u_{n-1}([k_2],\dots,[k_n])}_{k_1\text{-fois}}\Big)$$

l'image des flèches étant définie de façon analogue. On vérifie aussitôt que si pour un i, $0 \leq i \leq n$, $k_i = 0$, alors $u_n([k_1],\dots,[k_n])$ est indépendant des k_j, $i < j \leq n$ et les flèches

$$u_n\big(([k_1],\dots,[k_n]) \longrightarrow ([k_1],\dots,[k_{i-1}],[0],\dots,[0])\big)$$

sont des identités

<u>Définition</u> Un espace de Segal complet n-uple est un espace n-simplicial X satisfaisant aux conditions suivantes :

a) pour tout i, $1 \leq i \leq n$, et tous $k_1, \ldots, k_{i-1}, k_{i+1}, \ldots k_n \geq 0$
$X_{k_1, \ldots, k_{i-1}, \bullet, k_{i+1}, \ldots, k_n}$ est un espace de Segal

b) pour tout i, $1 \leq i \leq n$, et tous $k_1, \ldots, k_{i-1} \geq 0$
$X_{k_1, \ldots, k_{i-1}, 0, \bullet, \bullet, \ldots, \bullet}$ est essentiellement constant

c) pour tout i, $1 \leq i \leq n$, et tous $k_1, \ldots, k_{i-1} \geq 0$
$X_{k_1, \ldots, k_{i-1}, \bullet, 0, \ldots, 0}$ est un espace de Segal compet

<u>Théorème</u> Il existe une structure de catégorie de modèles sur la catégorie des espaces n-simpliciaux dont les objets fibrants sont les espace de Segal complets n-uples qui sont Reedy fibrants

Ce théorème est sensé figurer dans la thèse de Barwick, mais sa preuve me semble immédiate

<u>Conjecture</u> Cette catégorie de modèles est Quillen équivalente à celle des Θ_n-espaces de Rezk complets.

L'espace de Segal n-uple (ni Reedy fibrant ni complet) représentant la (∞, n)-catégorie $\mathrm{Bord}_{m,n}$ est défini comme suit.

Soient V un espace vectoriel (réel) de dimension finie, et $k_1, \dots, k_n$ des entiers naturels. On note $(\mathrm{P\,Bord}^V_{m,n})_{k_1,\dots,k_n}$ l'ensemble des $(n+1)$-uplets

$$\left(X, (a^1_0, \dots, a^1_{k_1}), \dots, (a^n_0, \dots, a^n_{k_n})\right)$$

où a^i_j, $1 \leq i \leq n$, $0 \leq j \leq k_i$, sont des nombres réels satisfaisant aux inégalités

$$a^i_0 \leq a^i_1 \leq \dots \leq a^i_{k_i}, \quad 1 \leq i \leq n,$$

et X une sous-variété fermée (non nécessairement compacte) sans bord de dimension $m+n$ de $V \times \mathbb{R}^n$ satisfaisant aux conditions suivantes :

i) $X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est propre ;

ii) pour toute partie $S \subset \{1, \dots, n\}$ et toute famille d'entiers $(j_i)_{i \in S}$, $0 \leq j_i \leq k_i$, la projection $X \longrightarrow \mathbb{R}^S$ n'admet pas $(a^i_{j_i})_{i \in S}$ comme valeur critique

iii) pour tout entier i, $1 \leq i \leq n$, la projection $X \longrightarrow \mathbb{R}^{\{i+1, \dots, n\}}$ est une submersion en tout point x de X dont l'image dans $\mathbb{R}^{\{i\}}$ appartient à $\{a^i_0, \dots, a^i_{k_i}\}$.

Cet ensemble est muni de la topologie induite de celle de $\mathrm{Sub}(V \times \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^{n + k_1 + \dots + k_n}$

On remarque aussitôt qu'on définit ainsi un espace n-simplicial $P\,\mathrm{Bord}^V_{m,n}$. On pose

$$P\,\mathrm{Bord}_{m,n} = \varinjlim_{V\subset\mathbb{R}^\infty} P\,\mathrm{Bord}^V_{m,n}.$$

<u>Proposition</u> $P\,\mathrm{Bord}_{m,n}$ est un espace de Segal n-uple (i.e. satisfait les conditions (a) et (b) de la définition d'un espace de Segal complet n-uple). Il n'est pas en général complet ni Reedy fibrant.

C'est l'espace de Segal n-uple $P\,\mathrm{Bord}_{m,n}$ qui est censé implémenter la (∞, n)-catégorie $\mathrm{Bord}_{m,n}$. On remarque que

$$\mathrm{PreCob}(m) = P\,\mathrm{Bord}_{m-1,1}$$

Enfin, on pose

$$P\,\mathrm{Bord}_n = P\,\mathrm{Bord}_{0,n}.$$

Il s'agit de l'objet principal du texte de Lurie. Malheureusement la structure monoïdal symétrique de $\mathrm{Bord}_{m,n}$ n'est pas implémentée dans $P\,\mathrm{Bord}_{m,n}$.