# IMAGES DIRECTES COHOMOLOGIQUES DANS LES CATÉGORIES DE MODÈLES

DENIS-CHARLES CISINSKI

RÉSUMÉ. Ces notes sont consacrées à la construction des limites homotopiques, et plus généralement, des images directes cohomologiques dans une catégorie de modèles arbitraire admettant des petites limites projectives. En outre, la théorie des dérivateurs de Grothendieck est introduite, à la fois en tant que motivation pour l'étude de telles structures, et en tant qu'outil de démonstration.

## TABLE DES MATIÈRES



## INTRODUCTION

Ce papier est le premier d'une série de trois. Son propos est d'introduire la notion de dérivateur de Grothendieck [10, 11] (notion très proche de celle de théorie homotopique, due à Heller [12]) et d'en donner les principaux (mais pas les seuls) exemples : en effet nous montrons ici que toute catégorie de modèles au sens de Quillen donne lieu à un tel objet. En particulier, nous montrons que toute catégorie de modèles admettant des petites limites projectives admet des limites homotopiques (et même, plus généralement, des extensions de Kan homotopiques à droite). Le second papier [3] est consacré à des descritions algébrico-combinatoires de la théorie de l'homotopie des petites catégories (dont la catégorie homotopique est équivalente à celle des $CW$-complexes à homotopie près). Outre leur simplicité, l'intérêt de ces description est qu'elle sont très liées à la structure de dérivateur, ce qui est exploité dans le troisième papier [4]. Dans ce dernier, on montre que le dérivateur $\mathsf{HOT}$ associé à la théorie de l'homotopie des ensembles simpliciaux (ou encore des petites catégories, *etc*) est caractérisé par une propriété universelle. Cette dernière induit canoniquement une action de $\mathsf{HOT}$

*Date*: Septembre 2001. Révisé le 27 septembre 2002.

sur tout dérivateur, et tout morphisme cocontinu de drivateurs est compatible une telle action. En regard des résultats du présent papier, [4] résoud quelques problèmes de cohérence homotopique posés par Hovey (on obtient une réponse positive à [16, problème 8.13], ainsi qu'une preuve de [16, conjecture 5.6.6], avec leurs variantes pointées).

La notion de dérivateur donne un cadre axiomatique, sans référence à aucune notion de catégorie de modèles, pour donner un sens à la celle d'image directe cohomologique, et pour en comprendre le comportement local. Autrement dit, ce formalisme est inspiré de la théorie de la cohomologie des (pré)faisceaux, ce qui guide l'intuition de sa manipulation certes un peu lourde au premier abord. Cela peut aussi être vu comme une tentative de description des structures apparaissant sur les catégories homotopiques, généralisant en un certain sens la notion de catégorie triangulée. Ce cadre est assez riche pour décrire toutes les constructions homotopiques abstraites usuelles dans le cas ponctué (foncteurs de suspension et d'espace de lacets, longues suites exactes, *etc.*). Il donne un sens à la notion de foncteurs cohomologiquement propres ou lisses entre petites catégories, lesquels induisent des isomorphismes de changement de base analogues à ceux de la géométrie algébrique (voir [10, 70], [11], et aussi [20]). Cela offre des interprétations et des démonstrations géométriques des théorèmes de cofinalité homotopique, comme par exemple les théorèmes A et B de Quillen [23], et des résultats de Thomason [24]. Les axiomes que nous donnons ici ne sont pas les seuls possibles. Ils forment seulement le noyau minimal autour duquel on peut entrer en digression. Il suffit par exemple de quelques axiomes supplémentaires pour définir une notion naturelle de dérivateur triangulé (voir [12, 14, 13]). Nous ne développerons cependant que les aspects les plus utiles à notre propos, laissant une rédaction plus approfondie à un travail ultérieur.

Pour la construction des images directes cohomologiques dans les catégories de modèles, la principale difficulté réside dans le fait qu'en général, la notion de catégorie de modèles n'est pas stable par passage aux catégories de foncteurs. Cependant, si la catégorie d'indice est une catégorie de Reedy, cette propriété est bien vérifiée. Suivant Anderson [1], la stratégie consiste donc à plonger de manière adéquate toute catégorie de préfaisceaux à valeurs dans une catégorie de modèles dans une catégorie de préfaisceaux indexés par une catégorie de Reedy simple à manipuler (proposition 6.9). Ce point de vue est celui adopté par Psarogiannakopoulos [21], mais ce dernier ne semble pas avoir vu que la preuve de 6.9 pose un problème de cofinalité homotopique non-trivial, que nous n'avons pu résoudre qu'en utilisant l'existence d'un $\mathsf{Hom}$ externe à la Dwyer-Kan [6] (proposition 5.5). Une version plus simpliciale de ce type de construction est par ailleurs développée par Dwyer-Hirschhorn-Kan [7, 8]. Le travail de Chachólski-Scherer [2], bien que ne portant que sur les (co-)limites homotopiques, est aussi à signaler. Ces mthodes permettent en outre de dgager une nouvelle classe de catgories de modles fermes stable par passage aux catgories de foncteurs (6.17).

Ces notes sont le fruit de trois exposés que j'ai donnés dans le courant du mois de mars 2001 à l'Institut de Mathématiques de Jussieu, dans le cadre du groupe de travail *Algèbre et topologie homotopiques*, dont je remercie les organisateurs, Alain Bruguières, Bernhard Keller et Georges Maltsiniotis, pour leur accueil et leur soutien.

## 1. Dérivateurs

Ce paragraphe se veut être une introduction (rapide mais suffisante pour notre propos) à la théorie des dérivateurs de Grothendieck. Le lecteur pourra trouver une exposition plus complète dans [19].

1.1. On désigne par $\mathcal{C}at$ à la fois la 2-catégorie des petites catégories et sa 1-catégorie sous-jacente, *i.e.* la catégorie des petites catégories. On note $\varnothing$ la catégorie vide, et $e$ la catégorie ponctuelle (*i.e.* n'ayant qu'un objet et une seule flèche). Si $A$ est une petite catégorie, on note $A^\circ$ sa catégorie opposée. Si $u\ : A \longrightarrow B$ est un foncteur, et si $b$ est un objet de $B$, on définit la catégorie $A/b$ par

$$\begin{aligned} \mathsf{Ob}\, A/b &= \{\, (a,k) \,|\, a \in \mathsf{Ob}\, A,\ k \in \mathsf{Hom}_B(u(a),b) \,\}\,, \\ \mathsf{Hom}_{A/b}\big((a,k),(a',k')\big) & \\ &= \{\, f \in \mathsf{Hom}_A(a,a') \,|\, k' f = k \,\},\ \ (a,k),\ (a',k') \in \mathsf{Ob}\, A/b\,, \end{aligned}$$

la loi de composition étant induite par celle de $A$. Dualement, on définit $b\backslash A$ par $b\backslash A = (A^\circ/b)^\circ$. On a alors des foncteurs d'oubli canoniques $A \longrightarrow A/b$ et $b\backslash A \longrightarrow A$ définis par $(a,k) \longmapsto a$. On vérifie alors que les carrés suivants sont cartésiens.

$$\begin{tikzcd} A/b \arrow[r] \arrow[d, "u/b"'] & A \arrow[d, "u"] \\ B/b \arrow[r] & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} b\backslash A \arrow[r] \arrow[d, "b\backslash u"'] & A \arrow[d, "u"] \\ b\backslash B \arrow[r] & B \end{tikzcd}$$

Enfin, si $A$ est une petite catégorie, on note $p_A\ : A \longrightarrow e$ le foncteur canonique, et pour chaque objet $a$ de $A$, $a\ : e \longrightarrow A$ le foncteur qui pointe l'objet $a$.

1.2. Nous renvoyons le lecteur à [18, XII.3] pour les notions de 2-catégorie et de 2-foncteur entre 2-catégories. Si $\mathcal{C}$ est une 2-catégorie, on note $\mathcal{C}^\circ$ la 2-catégorie duale de $\mathcal{C}$, *i.e.* $\mathcal{C}^\circ$ a les mêmes objets que $\mathcal{C}$, et si $X$ et $Y$ sont deux objets de $\mathcal{C}$, la catégorie $\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{C}^\circ}(X,Y)$ des 1-flèches de $X$ vers $Y$ dans $\mathcal{C}^\circ$ est la catégorie $\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{C}}(Y,X)^\circ$, catégorie opposée des 1-flèches de $Y$ vers $X$ dans $\mathcal{C}$.

Une *catégorie de diagrammes* est une 2-sous-catégorie pleine $\mathcal{D}ia$ de la 2-catégorie des petites catégories $\mathcal{C}at$ satisfaisant les axiomes suivants.

**D0** Les catégories vide et ponctuelle, ainsi que la catégorie $\Delta_1$, associée à l'ensemble ordonné $\{0 < 1\}$, sont dans $\mathcal{D}ia$.

**D1** $\mathcal{D}ia$ est stable par sommes finies et par produits fibrés.

**D2** Pour tout foncteur $u\ : A \longrightarrow B$ dans $\mathcal{D}ia$, et pour tout objet $b$ de $B$, les catégories $A/b$ et $b\backslash A$ sont dans $\mathcal{D}ia$.

Une catégorie de diagrammes est *auto-duale* si elle vérifie en outre l'axiome suivant.

**D3** $\mathcal{D}ia$ est stable par passage à la catégorie opposée (*i.e.* si $A$ est un objet de $\mathcal{D}ia$, alors $A^\circ$ est un objet de $\mathcal{D}ia$).

Une *sous-catégorie de diagrammes de $\mathcal{D}ia$* est une 2-sous-catégorie de $\mathcal{D}ia$ qui est une catégorie de diagrammes. Les exemples essentiels de catégories de diagrammes sont la catégorie $\mathcal{C}at$ toute entière, la catégorie $\mathcal{C}atf$ des catégories finies, la catégorie $\mathcal{O}rd$ des ensemble ordonnés, et la catégorie $\mathcal{O}rdf$ des ensembles ordonnés finis. Nous verrons plus loin d'autres exemples plus techniques.

**Définition 1.3.** Soit $\mathcal{D}ia$ une catégorie de diagrammes. Un *prédérivateur de domaine $\mathcal{D}ia$*, ou encore un *$\mathcal{D}ia$-prédérivateur* est un 2-foncteur contravariant strict $\mathbb{D}$ défini de $\mathcal{D}ia$ dans la 2-catégorie $\mathcal{CAT}$ des catégories (non-nécessairement petites), *i.e.* un 2-foncteur (strict)

$$\mathbb{D} \ : \mathcal{D}ia^{\circ} \longrightarrow \mathcal{CAT} \ .$$

Il s'agit donc d'une fonction qui à chaque objet $A$ de $\mathcal{D}ia$ associe une catégorie $\mathbb{D}(A)$, à chaque foncteur $u \ : A \longrightarrow B$ dans $\mathcal{D}ia$, associe un foncteur, appelé *foncteur image inverse*,

$$u^* = \mathbb{D}(u) \ : \mathbb{D}(B) \longrightarrow \mathbb{D}(A)$$

et à chaque morphisme de foncteurs dans $\mathcal{D}ia$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "u"{name=U}] \arrow[r, bend right, "v"'{name=V}] & B \arrow[from=U, to=V, phantom, "\Downarrow\alpha"] \end{tikzcd} \quad ,$$

associe un morphisme de foncteurs $\alpha^* : v^* \longrightarrow u^*$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{D}(A) & \mathbb{D}(B) \arrow[l, bend right, "u^*"'{name=U}] \arrow[l, bend left, "v^*"{name=V}] \arrow[from=U, to=V, phantom, "\alpha^*\Uparrow"] \end{tikzcd} \quad ,$$

le tout vérifiant les conditions de cohérence suivantes (lesquelles sont par ailleurs évidentes à vérifier dans les exemples que nous considèrerons).

(a) Pour tous foncteurs composables de $\mathcal{D}ia$, $A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C$,

$$(vu)^* = u^* v^* \quad , \qquad 1_A^* = 1_{\mathbb{D}(A)} \quad .$$

(b) Pour toutes 2-flèches composables de $\mathcal{D}ia$, $\begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left=50, "u"] \arrow[r, "v" description] \arrow[r, bend right=50, "w"'] & B \end{tikzcd}$ (avec $\Downarrow\alpha$ et $\Downarrow\beta$), ,

$$(\beta\alpha)^* = \alpha^* \beta^* \quad , \qquad 1_u^* = 1_{u^*} \quad .$$

(c) Pour tout 2-diagramme de $\mathcal{D}ia$, $\begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "u"{name=U}] \arrow[r, bend right, "u'"'{name=U2}] & B \arrow[r, bend left, "v"{name=V}] \arrow[r, bend right, "v'"'{name=V2}] & C \arrow[from=U, to=U2, phantom, "\Downarrow\alpha"] \arrow[from=V, to=V2, phantom, "\Downarrow\beta"] \end{tikzcd}$ ,

$$(\beta\, \alpha)^* = \alpha^* \, \beta^* \quad .$$

Si $\mathcal{D}ia_0$ est une sous-catégorie de diagrammes de $\mathcal{D}ia$, on note $\mathbb{D}|_{\mathcal{D}ia_0}$ le $\mathcal{D}ia_0$-prédérivateur obtenu à partir de $\mathbb{D}$ par restriction. Lorsque cela ne sera pas ambigu, on parlera de prédérivateurs sans se référer à la catégorie de diagrammes.

*Notations* 1.4. Si $A$ est un objet de $\mathcal{D}ia$, $a$ un objet de $A$, et $F$ un objet de $\mathbb{D}(A)$, on notera $F_a = a^*F$ (1.1). Si $u\ :A \longrightarrow B$ est un foncteur de $\mathcal{D}ia$, et si $F$ est un objet de $\mathbb{D}(B)$, on écrira parfois par abus $F|_A$ au lieu de $u^*F$.

1.5. Si $\mathcal{D}ia$ est une 2-sous-catégorie de $\mathcal{C}at$, on note $\mathcal{D}ia'$ la 2-catégorie image de $\mathcal{D}ia$ dans $\mathcal{C}at$ par le foncteur $A \longmapsto A^\circ$. Si $\mathcal{D}ia$ est une catégorie de diagrammes, et $\mathbb{D}$ un $\mathcal{D}ia$-prédérivateur, le *prédérivateur opposé à* $\mathbb{D}$ est le $\mathcal{D}ia'$-prédérivateur $\mathbb{D}^\circ$, défini par

$$\mathbb{D}^\circ(A) = (\mathbb{D}(A^\circ))^\circ \quad , \qquad A \in \mathsf{Ob}\,\mathcal{D}ia' \ .$$

*Exemple* 1.6. Si $\mathcal{M}$ est une catégorie, le *$\mathcal{C}at$-prédérivateur représenté par* $\mathcal{M}$, encore noté $\mathcal{M}$, est le 2-foncteur

$$A \longmapsto \mathcal{M}(A) = \underline{\mathsf{Hom}}(A^\circ, \mathcal{M})$$

des préfaisceaux à valeurs dans $\mathcal{M}$. Si $u\ :A \longrightarrow B$ est un foncteur entre petites catégories, le foncteur image inverse

$$u^*\ :\mathcal{M}(B) \longrightarrow \mathcal{M}(A)$$

est défini par $X \longmapsto X \circ u$.

*Exemple* 1.7. Un *localisateur* est un couple $(\mathcal{M}, \mathcal{W})$ où $\mathcal{M}$ est une catégorie, et où $\mathcal{W}$ est une partie de l'ensemble $\mathsf{Fl}\,\mathcal{M}$ des flèches de $\mathcal{M}$. Pour chaque petite catégorie $A$, on note $\mathcal{W}_A$ la partie de $\mathsf{Fl}\,\mathcal{M}(A)$ formée des morphismes de préfaisceaux $X \longrightarrow Y$ tels que pour tout objet $a$ de $A$, la flèche $X_a \longrightarrow Y_a$ soit dans $\mathcal{W}$. On obtient ainsi un autre localisateur $(\mathcal{M}(A), \mathcal{W}_A)$, et on note

$$\mathbb{D}_{(\mathcal{M},\mathcal{W})}(A) = \mathcal{W}_A^{-1}\mathcal{M}(A) = \mathcal{W}_A^{-1}\,\underline{\mathsf{Hom}}(A^\circ, \mathcal{M})$$

la localisation de $\mathcal{M}(A)$ par $\mathcal{W}_A$. On notera parfois $\mathsf{Ho}\,\mathcal{M}$ la catégorie $\mathbb{D}_{(\mathcal{M},\mathcal{W})}(e)$. Pour chaque foncteur $u\ :A \longrightarrow B$ entre petites catégories, on a vu qu'on a un foncteur image inverse $u^*\ :\mathcal{M}(B) \longrightarrow \mathcal{M}(A)$, et on vérifie immédiatement l'inclusion $u^*\mathcal{W}_B \subset \mathcal{W}_A$. On en déduit par la propriété universelle de la localisation un foncteur canonique, encore noté $u^*$

$$u^*\ :\mathbb{D}_{(\mathcal{M},\mathcal{W})}(B) \longrightarrow \mathbb{D}_{(\mathcal{M},\mathcal{W})}(A) \ .$$

On vérifie que cela définit un $\mathcal{C}at$-prédérivateur $\mathbb{D}_{(\mathcal{M},\mathcal{W})}$, appelé le prédérivateur associé à $(\mathcal{M}, \mathcal{W})$. On dira qu'un localisateur $(\mathcal{M}, \mathcal{W})$ est *fortement saturé* si une flèche $f$ de $\mathcal{M}$ est un élément de $\mathcal{W}$ à condition et à condition seulement que son image dans $\mathsf{Ho}\,\mathcal{M}$ par le foncteur canonique soit un isomorphisme.

*Dans ce qui suit, on fixe une catégorie de diagrammes $\mathcal{D}ia$.*

**Définition 1.8.** Soit $\mathbb{D}$ un prédérivateur. Un foncteur $u\ :A \longrightarrow B$ dans $\mathcal{D}ia$ *admet une image directe cohomologique* (resp. *homologique*) *dans* $\mathbb{D}$ si le foncteur

$$u^*\ :\mathbb{D}(B) \longrightarrow \mathbb{D}(A)$$

admet un adjoint à droite (resp. à gauche), alors noté

$$u_*\ :\mathbb{D}(A) \longrightarrow \mathbb{D}(B) \qquad (\text{resp. } u_!\ :\mathbb{D}(A) \longrightarrow \mathbb{D}(B)\ ),$$

et appelé le *foncteur image directe cohomologique* (resp. *homologique*) associé à $u$.

1.9. Lorsque $B$ est la catégorie ponctuelle, on note pour chaque objet $F$ de $\mathbb{D}(A)$, $\operatorname{holim}_{A^\circ} F$, ou encore $\mathsf{H}^*(A, F)$, l'image directe cohomologique de $F$ par $u$ dans $\mathbb{D}(e)$, appelée dans ce cas la *limite homotopique de* $F$, où encore la *cohomologie de* $A$ *à coefficients dans* $F$. Dualement, dans le cas des images directes homologiques, on obtient des notions de colimite homotopique et d'homologie à coefficients dans un objet de $\mathbb{D}$.

1.10. Soit $\mathbb{D}$ un prédérivateur. On considère à présent un 2-diagramme du type suivant dans $\mathcal{D}ia$.

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "v"] \arrow[d, "u'"'] \arrow[dr, phantom, "\swarrow \alpha"] & A \arrow[d, "u"] \\ B' \arrow[r, "w"'] & B \end{tikzcd}$$

On en déduit par 2-fonctorialité le 2-diagramme de catégories ci-dessous.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{D}(A') & \mathbb{D}(A) \arrow[l, "v^*"'] \\ \mathbb{D}(B') \arrow[u, "u'^*"] \arrow[ur, phantom, "\alpha^* \nearrow"] & \mathbb{D}(B) \arrow[l, "w^*"] \arrow[u, "u^*"'] \end{tikzcd}$$

Supposons que les foncteurs $u$ et $u'$ admettent tous deux des images directes cohomologiques dans $\mathbb{D}$. Alors on obtient le *morphisme de changement de base induit par* $\alpha$, $\beta\ : w^*\, u_* \longrightarrow u'_*\, v^*$,

$$\begin{tikzcd} \mathbb{D}(A') \arrow[d, "u'_*"'] & \mathbb{D}(A) \arrow[l, "v^*"'] \arrow[d, "u_*"] \arrow[dl, phantom, "\beta \nwarrow"] \\ \mathbb{D}(B') & \mathbb{D}(B) \arrow[l, "w^*"] \end{tikzcd}$$

comme suit. Le morphisme d'adjonction $u^*\, u_* \longrightarrow 1_{\mathbb{D}(A)}$ induit un morphisme $v^*\, u^*\, u_* \longrightarrow v^*$, et donc en composant avec $\alpha^*\, u_*$, un morphisme $u'^*\, w^*\, u_* \longrightarrow v^*$. Comme $u'_*$ est par définition un adjoint à droite de $u'^*$, cela définit bien un morphisme de $w^*\, u_*$ vers $u'_*\, v^*$.

Cette construction sera utile en particulier dans le cas où $\alpha$ est une identité (*i.e.* pour les carrés commutatifs de $\mathcal{D}ia$), mais aussi dans la situation suivante. Soient $u\ : A \longrightarrow B$ un foncteur dans $\mathcal{D}ia$, et $b$ un objet de $B$. On a vu au paragraphe 1.1 qu'on a un foncteur d'oubli $j\ : A/b \longrightarrow A$, défini par $j(a, k) = a$, où $a$ est un objet de $A$, et $k$ une flèche de $u(a)$ vers $b$ dans $B$. On obtient donc les égalités $u\, j(a, k) = u(a)$ et $b\, p_A(a, k) = b$, ce qui fait de $k$ un morphisme de $u\, j(a, k)$ vers $b\, p_A(a, k)$. On vérifie que cela détermine un morphisme de foncteurs $\alpha$, *i.e.* un 2-diagramme

$$\begin{tikzcd} A/b \arrow[r, "j"] \arrow[d, "p_A"'] \arrow[dr, phantom, "\swarrow \alpha"] & A \arrow[d, "u"] \\ e \arrow[r, "b"'] & B \end{tikzcd} ,$$

appelé le 2-*diagramme standard associé à* $(u, b)$, et par conséquent, en vertu de ce qui précède, un morphisme de changement de base associé à $(u, b)$,

$$b^* u_* \longrightarrow p_{A*} j^* \ .$$

**Définition 1.11.** Un *dérivateur faible à gauche* (sous-entendu de domaine $\mathcal{D}ia$) est un prédérivateur $\mathbb{D}$ satisfaisant les axiomes suivants.

**Der 1:** (a) Si $I$ et $J$ sont deux objets de $\mathcal{D}ia$, alors le foncteur

$$\mathbb{D}(I \amalg J) \xrightarrow{(i^*, j^*)} \mathbb{D}(I) \times \mathbb{D}(J) \quad ,$$

induit par les inclusions canoniques $i : I \longrightarrow I \amalg J$ et $j : J \longrightarrow I \amalg J$, est une équivalence de catégories.

(b) $\mathbb{D}(\varnothing)$ est équivalente à la catégorie ponctuelle.

**Der 2:** Pour toute petite catégorie $A$ dans $\mathcal{D}ia$, la famille de foncteurs $a^* : \mathbb{D}(A) \longrightarrow \mathbb{D}(e)$, $a \in \mathsf{Ob}\, A$, est conservative (*i.e.* si $\varphi$ est un morphisme de $\mathbb{D}(A)$ tel que pour tout objet $a$ de $A$, $a^*\varphi = \varphi_a$ soit un isomorphisme, alors $\varphi$ est un isomorphisme).

**Der 3g:** Tout foncteur de $\mathcal{D}ia$ admet une image directe cohomologique dans $\mathbb{D}$.

**Der 4g:** Pour tout foncteur $u \ : A \longrightarrow B$ de $\mathcal{D}ia$ et tout objet $b$ de $B$, le morphisme de changement de base $b^* u_* \longrightarrow p_* j^*$, induit par le 2-diagramme standard associé à $(u, b)$,

$$\begin{tikzcd} A/b \arrow[r, "j"] \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, phantom, "\not\Downarrow \alpha"] & A \arrow[d, "u"] \\ e \arrow[r, "b"'] & B \end{tikzcd} \quad ,$$

est un isomorphisme. Autrement-dit, pour tout objet $F$ de $\mathbb{D}(A)$, on a un isomorphisme canonique $(u_*F)_b \simeq \mathsf{H}^*(A/b, F|_{A/b}) = \mathrm{holim}_{(A/b)^\circ} F|_{A/b}$.

*Exemple* 1.12. Soit $\mathcal{M}$ une catégorie admettant des petite limites projectives (resp. des limites projectives finies). Alors le prédérivateur $\mathcal{M}$ (resp. $\mathcal{M}|_{\mathcal{C}atf}$) est un dérivateur faible à gauche. En effet, les axiomes Der 1 et Der 2 sont trivialement vérifiés, et l'axiome Der 3g n'est que l'affirmation de l'existence des extensions de Kan dans $\mathcal{M}$. Enfin, l'axiome Der 4g dit que si $u \ : A \longrightarrow B$ est un foncteurs entre petites catégories (resp. entre catégories finies), alors pour tout objet $b$ de $B$, et tout foncteur $F$ de $A^\circ$ vers $\mathcal{M}$, on a un isomorphisme canonique $\varprojlim_{A/b^\circ} F|_{A/b} \simeq (u_*F)_b$, ce qui est une des constructions possibles de l'extension de Kan de $u$ (voir [18, X.3, théorème 1]).

*On fixe à présent un $\mathcal{D}ia$-dérivateur faible à gauche $\mathbb{D}$.*

**Sorites 1.13.** *(a) La catégorie $\mathbb{D}(e)$ admet des produits finis.*

*(b) Pour toute paire de morphismes composables $u \ : A \longrightarrow B$ et $v \ : B \longrightarrow C$ de $\mathcal{D}ia$, on a un isomorphisme canonique $(v\,u)_* \simeq v_*\, u_*$.*

*Démonstration.* Les axiomes Der 1, (a) et Der 3g impliquent que le foncteur diagonal $\mathbb{D}(e) \longrightarrow \mathbb{D}(e) \times \mathbb{D}(e)$ admet un adjoint à droite, ce qui prouve l'existence de produits binaires dans $\mathbb{D}(e)$. Les axiomes Der 1, (b) et Der 3g impliquent que $\mathbb{D}(e)$ admet un objet final, ce qui achève la démonstration de (a). L'assertion (b) résulte immédiatement du fait que $(v\,u)_*$ et $v_*\,u_*$ sont des adjoints à droite de $u^*\,v^* = (v\,u)^*$. □

1.14. Considérons le triangle commutatif ci-dessous dans $\mathcal{D}ia$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "v"'] & & B \arrow[dl, "w"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

On peut le voir comme un carré commutatif

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "v"] \arrow[d, "u"'] & C \arrow[d, equal] \\ B \arrow[r, "w"'] & C \end{tikzcd} \qquad ,$$

et donc on obtient un morphisme canonique (1.10)

$$w^* \longrightarrow u_*\,v^*\ .$$

Dans le cas où $C = e$, on a donc en particulier

$$p_B^* \longrightarrow u_*\,p_A^*\ ,$$

puis en composant avec le foncteur $p_{B*}$, on obtient un morphisme de foncteurs

$$p_{B*}\,p_B^* \longrightarrow p_{A*}\,p_A^*\ .$$

**Définition 1.15.** Un morphisme $u\ : A \longrightarrow B$ de $\mathcal{D}ia$ est une $\mathbb{D}$-*équivalence* si la flèche $p_{B*}\,p_B^* \longrightarrow p_{A*}\,p_A^*$ est un isomorphisme dans $\mathbb{D}(e)$. Un objet $A$ de $\mathcal{D}ia$ est $\mathbb{D}$-asphérique si $p_A\ : A \longrightarrow e$ est une $\mathbb{D}$-équivalence. Un morphisme $u\ : A \longrightarrow B$ de $\mathcal{D}ia$ est $\mathbb{D}$-*asphérique* (resp. $\mathbb{D}$-*coasphérique*) si pour tout objet $b$ de $B$, $A/b$ (resp. $b\backslash A$) est $\mathbb{D}$-asphérique.

*Remarque* 1.16. Les identités sont des $\mathbb{D}$-équivalence. Si dans un triangle commutatif de $\mathcal{D}ia$, deux des trois flèches sont des $\mathbb{D}$-équivalences, alors il en est de même de la troisième. Si $u\ : A \longrightarrow B$ et $v\ : B \longrightarrow A$ sont deux foncteurs dans $\mathcal{D}ia$, et si $v\,u$ et $u\,v$ sont des $\mathbb{D}$-équivalences, alors $u$ et $v$ sont des $\mathbb{D}$-équivalences. D'autre part, on vérifie immédiatement qu'un objet $A$ de $\mathcal{D}ia$ est $\mathbb{D}$-asphérique si et seulement si le foncteur $p_A^*\ : \mathbb{D}(e) \longrightarrow \mathbb{D}(A)$ est pleinement fidèle (ce qui signifie simplement que pour tout objet $X$ de $\mathbb{D}(e)$, la fiche canonique $X \longrightarrow p_{A*}\,p_A^* X$ est un isomorphisme).

**Lemme 1.17.** *Soit $u\ : A \longrightarrow B$ un foncteur dans $\mathcal{D}ia$ admettant un adjoint à droite $v\ : B \longrightarrow A$. On désigne par $\varepsilon\ : u\,v \longrightarrow 1_B$ et $\eta\ : 1_A \longrightarrow v\,u$ les morphismes d'adjonction. Alors $v^*$ est un adjoint à droite de $u^*$, et les morphismes $\eta^*\ : u^*\,v^* \longrightarrow 1_{\mathbb{D}(A)}$ et $\varepsilon^*\ : 1_{\mathbb{D}(B)} \longrightarrow v^*\,u^*$ sont les morphismes d'adjonction correspondants. En particulier, si $v$ est pleinement fidèle, alors $u^*$ est pleinement fidèle.*

*Démonstration.* C'est une conséquence formelle de la 2-fonctorialité. □

**Proposition 1.18.** *Soit $A$ un objet de $\mathcal{D}ia$. Si $A$ admet un objet final, alors pour tout objet $C$ de $\mathcal{D}ia$, le foncteur*

$$(p_A \times 1_C)^* \ : \mathbb{D}(C) \longrightarrow \mathbb{D}(A \times C)$$

*est pleinement fidèle. En particulier, $p_A \times 1_C$ est une $\mathbb{D}$-équivalence, et $A$ est $\mathbb{D}$-asphérique.*

*Démonstration.* Si $A$ admet un objet final, le foncteur $p_A \times 1_C$ admet un adjoint à droite pleinement fidèle, à savoir le foncteur $\omega \times 1_C$, où $\omega$ est un objet final de $A$. La proposition résulte donc du lemme précédent. □

1.19. Deux foncteurs $u, v \ : A \longrightarrow B$ sont *homotopes* s'ils sont dans la même composante connexe de $\underline{\mathsf{Hom}}(A, B)$. Cela revient à demander qu'il existe une suite $w_i$, $0 \leq i \leq n$ de foncteurs de $A$ vers $B$, et des morphismes de foncteurs $w_i \longrightarrow w_{i\pm1}$, tels que $w_0 = u$ et $w_n = v$. Une flèche $u \ : A \longrightarrow B$ de $\mathcal{D}ia$ est une *équivalence d'homotopie* s'il existe une flèche $v \ : B \longrightarrow A$ telle que $u\,v$ et $1_B$ soient homotopes, et $v\,u$ et $1_A$ soient homotopes. Un objet $A$ de $\mathcal{D}ia$ est *contractile* si $p_A$ est une équivalence d'homotopie. La proposition précédente implique que pour tout objet $A$ de $\mathcal{D}ia$, la projection $A \times \Delta_1 \longrightarrow A$ est un $\mathbb{D}$-équivalence. On en déduit le corollaire suivant.

**Corollaire 1.20.** *Si $u$ et $v$ sont deux flèches homotopes de $\mathcal{D}ia$, alors $u$ est une $\mathbb{D}$-équivalence si et seulement si $v$ en est une. En particulier, toute équivalence d'homotopie est une $\mathbb{D}$-équivalence, et tout objet contractile de $\mathcal{D}ia$ est $\mathbb{D}$-asphérique.*

**Proposition 1.21.** *Soit $u \ : A \longrightarrow B$ un foncteur dans $\mathcal{D}ia$. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

*(a) Le morphisme $u$ est $\mathbb{D}$-asphérique.*

*(b) Le morphisme $p_B^* \longrightarrow u_*\,p_A^*$ est un isomorphisme dans $\mathbb{D}(B)$.*

*En particulier, tout morphisme $\mathbb{D}$-asphérique est une $\mathbb{D}$-équivalence.*

*Démonstration.* En vertu de l'axiome Der 2, l'assertion (b) est équivalente à la suivante.

*(b') Pour tout objet $b$ de $B$, le morphisme $1_{\mathbb{D}(e)} = b^*\,p_B^* \longrightarrow b^*\,u_*\,p_A^*$ est un isomorphisme dans $\mathbb{D}(e)$.*

Or il résulte de l'axiome Der 4g que $b^*\,u_*\,p_A^* \simeq p_{A/b_*}\,p_{A/b}^*$, le morphisme invoqué dans (b') s'identifiant alors à l'un des morphismes d'adjonction du couple de foncteurs adjoints $(p_{A/b}^*, p_{A/b_*})$. Cela prouve l'équivalence entre (a) et (b'). □

**Corollaire 1.22.** *Soit $u \ : A \longrightarrow B$ un morphisme $\mathbb{D}$-asphérique dans $\mathcal{D}ia$ tel que les foncteurs $p_A$ et $p_B$ admettent des images directes homologiques. Alors on a un isomorphisme canonique dans $\mathbb{D}(e)$*

$$p_{A!}\,u^* \xrightarrow{\sim} p_{B!} \ .$$

*Démonstration.* Le morphisme $p_B^* \longrightarrow u_*\,p_A^*$ induit par transposition un morphisme canonique $p_{A!}\,u^* \longrightarrow p_{B!}$, et il résulte du lemme de Yoneda que ce dernier est un isomorphisme si et seulement si le premier en est un. □

**Définition 1.23.** Soit $\mathcal{D}ia$ une catégorie de diagrammes. Un $\mathcal{D}ia$-prédérivateur $\mathbb{D}$ est un *dérivateur faible à droite* si $\mathbb{D}^\circ$ est un dérivateur faible à gauche de domaine $\mathcal{D}ia'$, ou encore, de manière équivalente, s'il satisfait les axiomes Der 1 et Der 2, ainsi que ceux qui suivent.

**Der 3d:** Tout foncteur de $\mathcal{D}ia$ admet une image directe homologique dans $\mathbb{D}$.

**Der 4d:** Pour tout foncteur $u\ : A \longrightarrow B$ de $\mathcal{D}ia$ et tout objet $b$ de $B$, le morphisme de changement de base $p_!\, j^* \longrightarrow b^*\, u_!$, induit par le 2-diagramme,

$$\begin{tikzcd} b\backslash A \arrow[r, "j"] \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, phantom, "\alpha \Nearrow"] & A \arrow[d, "u"] \\ e \arrow[r, "b"'] & B \end{tikzcd} \quad ,$$

est un isomorphisme.

Un *dérivateur* est un dérivateur faible à gauche et à droite.

*Remarque* 1.24. Si $\mathbb{D}$ est un dérivateur, un morphisme $u\ : A \longrightarrow B$ de $\mathcal{D}ia$ est une $\mathbb{D}$-équivalence si et seulement si le morphisme $u^\circ\ : A^\circ \longrightarrow B^\circ$ de $\mathcal{D}ia'$ est une $\mathbb{D}^\circ$-équivalence. D'autre part, toutes les notions relatives aux dérivateurs faibles à gauche se dualisent aux dérivateurs faibles à droite. En particulier, on obtient l'énoncé suivant, correspondant au corollaire 1.22.

**Corollaire 1.25.** *Soit $\mathbb{D}$ un dérivateur faible à droite de domaine $\mathcal{D}ia$. On considère un morphisme $u\ : A \longrightarrow B$ dans $\mathcal{D}ia$ tel que les foncteurs $p_A$ et $p_B$ admettent des images directes cohomologiques dans $\mathbb{D}$. Si $u$ est $\mathbb{D}$-coasphérique, alors on a un isomorphisme canonique dans $\mathbb{D}(e)$*

$$p_{B*} \xrightarrow{\sim} p_{A*} u^* \ .$$

**Définition 1.26.** Soit $\mathcal{D}ia$ une catégorie de diagrammes.

Un *morphisme de domaine $\mathcal{D}ia$* (ou plus simplement un *$\mathcal{D}ia$-morphisme*)

$$F\ : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}'$$

est un morphisme de 2-foncteurs (non nécessairement strict) d'un $\mathcal{D}ia$-prédérivateur $\mathbb{D}$ vers un second $\mathbb{D}'$. Autrement-dit, $F$ consiste en la donnée pour chaque objet $A$ de $\mathcal{D}ia$, d'un foncteur

$$F\ : \mathbb{D}(A) \longrightarrow \mathbb{D}'(A)\ ,$$

et pour chaque foncteur $u\ : A \longrightarrow B$ dans $\mathcal{D}ia$, d'un isomorphisme de foncteurs

$$\gamma_{F,u}\ : u^*\, F \xrightarrow{\sim} F\, u^* \quad , \qquad \begin{tikzcd} \mathbb{D}(B) \arrow[r, "F"] \arrow[d, "u^*"'] \arrow[dr, phantom, "\swarrow \gamma_{F,u}"] & \mathbb{D}'(B) \arrow[d, "u^*"] \\ \mathbb{D}(A) \arrow[r, "F"'] & \mathbb{D}'(A) \end{tikzcd}$$

satisfaisant les conditions de cohérence suivantes.

(a) Pour tout objet $A$ de $\mathcal{D}ia$, $\gamma_{F,1_A} = 1_F$.

(b) Pour toute paire de morphismes composables $A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C$ de $\mathcal{D}ia$, le triangle suivant commute.

$$\begin{tikzcd} u^* \, v^* \, F \arrow[rr, "\gamma_{F,v\,u}"] \arrow[dr, "u^* \, \gamma_{F,v}"'] & & F \, u^* \, v^* \\ & u^* \, F \, v^* \arrow[ur, "\gamma_{F,u} \, v^*"'] & \end{tikzcd}$$

(c) Pour toute 2-flèche $\begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "u"] \arrow[r, bend right, "v"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & B \end{tikzcd}$ de $\mathcal{D}ia$, le carré suivant commute.

$$\begin{tikzcd} v^* \, F \arrow[r, "\gamma_{F,v}"] \arrow[d, "\alpha^* \, F"'] & F \, v^* \arrow[d, "F \, \alpha^*"] \\ u^* \, F \arrow[r, "\gamma_{F,u}"'] & F \, u^* \end{tikzcd}$$

Un $\mathcal{D}ia$-morphisme $F$ est *fidèle* (resp. *pleinement fidèle*, resp. une *$\mathcal{D}ia$-équivalence*) si pour tout objet $A$ de $\mathcal{D}ia$, le foncteur $F\ : \mathbb{D}(A) \longrightarrow \mathbb{D}'(A)$ est fidèle, (resp. pleinement fidèle, resp. une équivalence de catégories).

Un 2-$\mathcal{D}ia$-morphisme $\kappa$, d'un $\mathcal{D}ia$-morphisme $F\ : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}'$ vers un second $G\ : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}'$, est un 2-morphisme de 2-foncteurs

$$\begin{tikzcd} \mathbb{D} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\kappa"] & \mathbb{D}' \end{tikzcd} \quad ,$$

*i.e.* c'est la donnée pour chaque objet $A$ de $\mathcal{D}ia$ d'un morphisme de foncteurs

$$\begin{tikzcd} \mathbb{D}(A) \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\kappa"] & \mathbb{D}'(A) \end{tikzcd} \quad ,$$

telle que pour tout foncteur $u\ : A \longrightarrow B$ dans $\mathcal{D}ia$, le carré suivant commute.

$$\begin{tikzcd} u^* \, F \arrow[r, "\gamma_{F,u}"] \arrow[d, "u^* \, \kappa"'] & F \, u^* \arrow[d, "\kappa \, u^*"] \\ u^* \, G \arrow[r, "\gamma_{G,u}"'] & G \, u^* \end{tikzcd}$$

*Remarque* 1.27. On vérifie aussitôt que les prédérivateurs de domaine $\mathcal{D}ia$ forment ainsi une 2-catégorie (avec les lois de composition évidentes).

*Exemple* 1.28. Soit $(\mathcal{M}, \mathcal{W})$ un localisateur. Pour chaque petite catégorie $A$, on a un foncteur canonique $\gamma\ : \mathcal{M}(A) \longrightarrow \mathbb{D}_{(\mathcal{M},\mathcal{W})}(A)$, et on vérifie immédiatement que cela définit un $\mathcal{C}at$-morphisme canonique

$$\gamma\ : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{D}_{(\mathcal{M},\mathcal{W})} \ .$$

Un *morphisme de localisateurs* $F\ : (\mathcal{M}, \mathcal{W}) \longrightarrow (\mathcal{M}', \mathcal{W}')$ est un foncteur $F\ : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}'$ tel que $F\mathcal{W} \subset \mathcal{W}'$. On vérifie aussitôt qu'un tel morphisme induit canoniquement un $\mathcal{C}at$-morphisme

$$F\ :\mathbb{D}_{(\mathcal{M},\mathcal{W})}\longrightarrow\mathbb{D}_{(\mathcal{M}',\mathcal{W}')}\ .$$

1.29. Soit $F\ :\mathbb{D}\longrightarrow\mathbb{D}'$ un $\mathcal{D}ia$-morphisme. Un *quasi-inverse* de $F$ est un $\mathcal{D}ia$-morphisme $G\ :\mathbb{D}'\longrightarrow\mathbb{D}$ tel que $F\,G$ soit isomorphe à $1_{\mathbb{D}'}$ et $G\,F$ soit isomorphe à $1_{\mathbb{D}}$. En particulier, pour tout objet $A$ de $\mathcal{D}ia$, les foncteurs $F\ :\mathbb{D}(A)\longrightarrow\mathbb{D}'(A)$ et $G\ :\mathbb{D}'(A)\longrightarrow\mathbb{D}(A)$ sont alors des équivalences de catégories quasi-inverses l'une de l'autre. La proposition suivante est un énoncé standard, et sa démonstration, purement soritale, est laissée au lecteur.

**Proposition 1.30.** *Un $\mathcal{D}ia$-morphisme est une $\mathcal{D}ia$-équivalence si et seulement s'il admet un quasi-inverse.*

1.31. Soient $\mathcal{D}ia$ une catégorie de diagrammes, et $F\ :\mathbb{D}\longrightarrow\mathbb{D}'$ un $\mathcal{D}ia$-morphisme. Considérons un foncteur $u\ :A\longrightarrow B$ dans $\mathcal{D}ia$, et supposons qu'il admette des images directes cohomologiques dans $\mathbb{D}$ et dans $\mathbb{D}'$. Alors en procédant de manière analogue aux constructions du paragraphe 1.10, on définit un morphisme de foncteurs canonique $F\,u_*\longrightarrow u_*\,F$.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{D}(A) \arrow[r, "F"] \arrow[d, "u_*"'] & \mathbb{D}'(A) \arrow[d, "u_*"] \\
\mathbb{D}(B) \arrow[r, "F"'] \arrow[ur, phantom, "\nearrow"] & \mathbb{D}'(B)
\end{tikzcd}$$

On dira que $F$ est *continu*, ou encore *exact à gauche*, si pour tout foncteur de $\mathcal{D}ia$ admettant des images directes cohomologiques dans $\mathbb{D}$ et $\mathbb{D}'$, le morphisme ci-dessus est un isomorphisme. Dualement, on dira que $F$ est *cocontinu*, ou encore *exact à droite* si le $\mathcal{D}ia'$-morphisme induit par $F$, $F^\circ\ :\mathbb{D}^\circ\longrightarrow\mathbb{D}'^\circ$, est continu. Enfin, $F$ sera dit *bicontinu*, on encore *exact*, s'il est à la fois continu et cocontinu.

*Exemple* 1.32. Soit $\mathbb{D}$ un dérivateur de domaine $\mathcal{D}ia$. Pour chaque objet $A$ de $\mathcal{D}ia$, on définit un dérivateur $\mathbb{D}_A$ par $\mathbb{D}_A(B)=\mathbb{D}(A\times B)$. Pour chaque foncteur $u\ :A\longrightarrow B$ dans $\mathcal{D}ia$, on obtient ainsi un $\mathcal{D}ia$-morphisme exact $u^*\ :\mathbb{D}_B\longrightarrow\mathbb{D}_A$, défini par les foncteurs $(u\times 1_C)^*\ :\mathbb{D}(B\times C)\longrightarrow\mathbb{D}(A\times C)$.

## 2. La situation idéale

2.1. Si $\mathcal{M}$ est une catégorie et $\mathcal{F}$ une partie de $\mathsf{Fl}\,\mathcal{M}$, on note $r(\mathcal{F})$ (resp. $l(\mathcal{F})$) la classe des flèches de $\mathcal{M}$ qui vérifient la propriété de relèvement à droite (resp. à gauche) relativement à $\mathcal{F}$.

On rappelle qu'une *catégorie de modèles* est la donnée d'un quadruplet ($\mathcal{M}$, $\mathcal{W}$, $\mathsf{Fib}$, $\mathsf{Cof}$), où $\mathcal{M}$ est une catégorie, et $\mathcal{W}$, $\mathsf{Fib}$, $\mathsf{Cof}$ sont des parties de $\mathsf{Fl}\,\mathcal{M}$, telle que les axiomes suivants soient vérifiés.

**CM1:** La catégorie $\mathcal{M}$ admet des limites inductives et projectives finies.

**CM2:** $\mathcal{W}$ vérifie la propriété du 2 sur 3 (*i.e.* si dans un triangle commutatif de $\mathcal{M}$ deux flèches sont dans $\mathcal{W}$, alors il en est de même de la troisième).

**CM3:** $\mathcal{W}$, $\mathsf{Fib}$ et $\mathsf{Cof}$ sont stables par rétractes.

**CM4:** $\mathsf{Fib}\cap\mathcal{W}\subset r(\mathsf{Cof})$ et $\mathsf{Fib}\subset r(\mathsf{Cof}\cap\mathcal{W})$.

**CM5:** Toute flèche $f$ de $\mathcal{M}$ se factorise en $f = pi$ et $f = qj$, où $p, q \in \mathsf{Fib}$, $i, j \in \mathsf{Cof}$ et $p, j \in \mathcal{W}$.

On notera $\varnothing$ l'objet initial de $\mathcal{M}$ et $*$ son objet final. Les éléments de $\mathsf{Fib}$ seront appelés des *fibrations*, ceux de $\mathsf{Cof}$ des *cofibrations*, et un élément de $\mathsf{Fib}\cap\mathcal{W}$ (resp. de $\mathsf{Cof} \cap \mathcal{W}$) sera appelé une *fibration* (resp. *cofibration*) *triviale.* Un objet $X$ de $\mathcal{M}$ sera dit *fibrant* (resp. *cofibrant*) si $X \longrightarrow * \in \mathsf{Fib}$ (resp. $\varnothing \longrightarrow X \in \mathsf{Cof}$).

Un *localisateur de Quillen* est un localisateur $(\mathcal{M}, \mathcal{W})$ tel qu'il existe deux parties $\mathsf{Fib}, \mathsf{Cof} \subset \mathsf{Fl}\,\mathcal{M}$ faisant de $(\mathcal{M}, \mathcal{W}, \mathsf{Fib}, \mathsf{Cof})$ une catégorie de modèles.

*Remarque* 2.2. Une catégorie de modèles au sens ci-dessus est une catégorie de modèles fermée au sens de [22], car une conséquence de ces axiomes est que $\mathsf{Fib} \cap \mathcal{W} = r(\mathsf{Cof})$, $\mathsf{Fib} = r(\mathsf{Cof} \cap \mathcal{W})$, $\mathsf{Cof} \cap \mathcal{W} = l(\mathsf{Fib})$ et $\mathsf{Cof} = l(\mathsf{Fib} \cap \mathcal{W})$.

**Proposition 2.3.** *Tout localisateur de Quillen est fortement saturé (voir* 1.7*).*

*Démonstration.* Voir [22, I.5, proposition 1]. □

**Proposition 2.4.** *Soit* $(\mathcal{M}, \mathcal{W}, \mathsf{Fib}, \mathsf{Cof})$ *une catégorie de modèles. Si $A$ est un objet cofibrant et $X$ un objet fibrant de $\mathcal{M}$, alors l'ensemble* $\mathsf{Hom}_{\mathsf{Ho}\,\mathcal{M}}(A, X)$ *s'identifie canoniquement à l'ensemble* $\mathsf{Hom}_{\mathcal{M}}(A, X)$ *quotienté par la relation d'homotopie. En particulier, toute flèche $A \longrightarrow X$ dans* $\mathsf{Ho}\,\mathcal{M}$ *est induite par une flèche $A \longrightarrow X$ de $\mathcal{M}$.*

*Démonstration.* Voir [22, I.1, corollaire 1]. □

**Lemme 2.5.** *Soient $(\mathcal{M}, \mathcal{W})$ un localisateur de Quillen, et $A$ une petite catégorie telle que $(\mathcal{M}(A), \mathcal{W}_A)$ soit un localisateur de Quillen. Pour chaque $a \in \mathsf{Ob}\,A$, on note $a\ : e \longrightarrow A$ le foncteur de la catégorie ponctuelle vers $A$ qui pointe l'objet $a$. Alors la famille de foncteurs $a^*\ : \mathbb{D}_{(\mathcal{M},\mathcal{W})}(A) \longrightarrow \mathbb{D}_{(\mathcal{M},\mathcal{W})}(e)$, $a \in \mathsf{Ob}\,A$, est conservative.*

*Démonstration.* Soit $\phi\ : X \longrightarrow Y$ une flèche de $\mathbb{D}_{(\mathcal{M},\mathcal{W})}(A)$. En considérant une catégorie de modèles sur $\mathcal{M}(A)$, on peut remplacer $X$ et $Y$ par deux objets respectivement cofibrant et fibrant, ce qui permet de supposer que $\phi$ est une flèche de $\mathcal{M}(A)$ (par la proposition 2.4). Les assertions suivantes sont alors équivalentes (en vertu de la proposition 2.3).

(i) $\phi$ est un isomorphisme de $\mathbb{D}_{(\mathcal{M},\mathcal{W})}(A)$.
(ii) $\phi \in \mathcal{W}_A$.
(iii) $\forall a \in \mathsf{Ob}\,A$, $\phi_a \in \mathcal{W}$.
(iv) $\forall a \in \mathsf{Ob}\,A$, $\phi_a$ est un isomorphisme de $\mathbb{D}_{(\mathcal{M},\mathcal{W})}(e)$. □

**Définition 2.6.** Soient $(\mathcal{M}_i, \mathcal{W}_i, \mathsf{Fib}_i, \mathsf{Cof}_i)$, $i = 0, 1$, deux catégories de modèles. Un *foncteur de Quillen à droite* (resp. *un foncteur de Quillen à gauche*) est un foncteur $F\ : \mathcal{M}_0 \longrightarrow \mathcal{M}_1$ tel que $F(\mathsf{Fib}_0) \subset \mathsf{Fib}_1$, $F(\mathsf{Fib}_0 \cap \mathcal{W}_0) \subset \mathsf{Fib}_1 \cap \mathcal{W}_1$, et tel que $F*$ soit fibrant (resp. tel que $F(\mathsf{Cof}_0) \subset \mathsf{Cof}_1$, $F(\mathsf{Cof}_0 \cap \mathcal{W}_0) \subset \mathsf{Cof}_1 \cap \mathcal{W}_1$, et tel que $F\varnothing$ soit cofibrant). Une *adjonction de Quillen de $\mathcal{M}_0$ vers $\mathcal{M}_1$* est un couple $(G, D)$, où $D\ : \mathcal{M}_0 \longrightarrow \mathcal{M}_1$ est un foncteur admettant un adjoint à gauche $G$, tel que $D$ soit un foncteur de Quillen à droite (ou de manière équivalente, tel que $G$ soit un foncteur de Quillen à gauche).

**Proposition 2.7.** *(i) Soit* $F : \mathcal{M}_0 \longrightarrow \mathcal{M}_1$ *un foncteur de Quillen à gauche (resp. un foncteur de Quillen à droite). Alors* $F$ *admet un foncteur dérivé à gauche* $\mathsf{L}F : \mathsf{Ho}\,\mathcal{M}_0 \longrightarrow \mathsf{Ho}\,\mathcal{M}_1$ *(resp. un foncteur dérivé à droite* $\mathsf{R}F : \mathsf{Ho}\,\mathcal{M}_0 \longrightarrow \mathsf{Ho}\,\mathcal{M}_1$*).*

*(ii) Soient* $F_0 : \mathcal{M}_0 \longrightarrow \mathcal{M}_1$ *et* $F_1 : \mathcal{M}_1 \longrightarrow \mathcal{M}_2$ *deux foncteurs de Quillen à droite. Alors le morphisme canonique* $\mathsf{R}(F_1\,F_0) \longrightarrow \mathsf{R}F_1\,\mathsf{R}F_0$ *est un isomorphisme.*

*(iii) Si* $(G, D)$ *est une adjonction de Quillen d'une catégorie de modèles* $\mathcal{M}_0$ *vers une seconde* $\mathcal{M}_1$*, alors le foncteur* $\mathsf{L}G : \mathsf{Ho}\,\mathcal{M}_1 \longrightarrow \mathsf{Ho}\,\mathcal{M}_0$ *est l'adjoint à gauche du foncteur* $\mathsf{R}D : \mathsf{Ho}\,\mathcal{M}_0 \longrightarrow \mathsf{Ho}\,\mathcal{M}_1$*.*

*Démonstration.* (i) et (ii) résultent de [16, lemme 1.1.12] et de [22, I.4, proposition 1], et (iii) de [22, I.4, théorème 3]. □

**Lemme 2.8.** *Soit* $(\mathcal{M}_i, \mathcal{W}_i, \mathsf{Fib}_i, \mathsf{Cof}_i)$*,* $i \in I$*, une famille de catégories de modèles. On pose* $\mathcal{M} = \prod_i \mathcal{M}_i$*,* $\mathcal{W} = \prod_i \mathcal{W}_i$*,* $\mathsf{Fib} = \prod_i \mathsf{Fib}_i$*, et* $\mathsf{Cof} = \prod_i \mathsf{Cof}_i$*. Alors* $(\mathcal{M}, \mathcal{W}, \mathsf{Fib}, \mathsf{Cof})$ *est une catégorie de modèles. En outre, le foncteur canonique* $\mathsf{Ho}\,\mathcal{M} \longrightarrow \prod_i \mathsf{Ho}\,\mathcal{M}_i$ *est une équivalence de catégories.*

La démonstration est laissée au lecteur (la première assertion est essentiellement tautologique, mais la seconde utilise la proposition 2.4, du moins lorsque $I$ n'est pas fini).

**Théorème 2.9.** *Soit* $\mathcal{D}ia$ *une catégorie de diagrammes. On considère un localisateur* $(\mathcal{M}, \mathcal{W})$*, et on suppose que pour chaque objet* $A$ *de* $\mathcal{D}ia$*, on s'est donné une catégorie de modèles* $(\mathcal{M}(A), \mathcal{W}_A, \mathsf{Fib}_A, \mathsf{Cof}_A)$*, de telle manière que les conditions suivantes soient vérifiées.*

*(a) Pour tout objet* $A$ *de* $\mathcal{D}ia$*, la catégorie* $\mathcal{M}$ *admet des limites projectives de type* $A^\circ$*.*

*(b) Pour tout morphisme* $u : A \longrightarrow B$ *de* $\mathcal{D}ia$*, le foncteur image réciproque* $u^* : \mathcal{M}(B) \longrightarrow \mathcal{M}(A)$ *respecte les cofibrations.*

*(c) Pour tout morphisme* $u : A \longrightarrow B$ *de* $\mathcal{D}ia$*, et pour tout objet* $b$ *de* $B$*, si on note* $j : A/b \longrightarrow A$ *le foncteur d'oubli, le foncteur* $j^* : \mathcal{M}(A) \longrightarrow \mathcal{M}(A/b)$ *respecte les fibrations.*

*Alors la restriction* $\mathbb{D}_{(\mathcal{M},\mathcal{W})}|_{\mathcal{D}ia}$ *est un dérivateur faible à gauche de domaine* $\mathcal{D}ia$*.*

*Démonstration.* On a $\mathcal{M}(\varnothing) = e$, d'où l'égalité $\mathbb{D}_{(\mathcal{M},\mathcal{W})}(\varnothing) = e$, ce qui montre la partie (b) de Der 1. Si $A$ et $B$ sont deux objets de $\mathcal{D}ia$, on remarque que les inclusions canoniques $A \longrightarrow A \amalg B$ et $B \longrightarrow A \amalg B$ induisent un isomorphisme de catégories $\mathcal{M}(A \amalg B) \longrightarrow \mathcal{M}(A) \times \mathcal{M}(B)$, et donc la partie (a) de Der 1 résulte du lemme 2.8.

Le lemme 2.5 montre l'axiome Der 2.

L'axiome Der 3g est une conséquence directe de la proposition 2.7, (iii), une fois remarqué que si $u : A \longrightarrow B \in \mathsf{Fl}\,\mathcal{D}ia$, le foncteur $u^* : \mathcal{M}(B) \longrightarrow \mathcal{M}(A)$ admet un adjoint à droite $u_* : \mathcal{M}(A) \longrightarrow \mathcal{M}(B)$ grâce à la condition (a), et que le couple $(u^*, u_*)$ est une adjonction de Quillen par la condition (b). On notera

$$\mathsf{R}u_* : \mathbb{D}_{(\mathcal{M},\mathcal{W})}(A) \longrightarrow \mathbb{D}_{(\mathcal{M},\mathcal{W})}(B)$$

le foncteur dérivé à droite du foncteur $u_* : \mathcal{M}(A) \longrightarrow \mathcal{M}(B)$, qui est donc un adjoint à droite du foncteur $\mathsf{L}u^* \simeq u^* : \mathbb{D}_{(\mathcal{M},\mathcal{W})}(B) \longrightarrow \mathbb{D}_{(\mathcal{M},\mathcal{W})}(A)$.

Il reste donc à montrer l'axiome Der 4g. Soit $u\ : A \longrightarrow B$ une flèche de $\mathcal{D}ia$ et $b \in \mathsf{Ob}\, B$. On a alors le 2-diagramme standard associé au couple $(u, b)$ :

$$\begin{tikzcd} A/b \arrow[r, "j"] \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, phantom, "\not\swarrow\alpha"] & A \arrow[d, "u"] \\ e \arrow[r, "b"'] & B \end{tikzcd} .$$

Le morphisme de changement de base $b^*u_* \longrightarrow p_*j^*$ est un isomorphisme dans $\mathcal{M}$, et on remarque que $u_*$, $p_*$ et $j^*$ sont des foncteurs de Quillen à droite. Comme les foncteurs de Quillen à droite sont stables par composition, le cas où $u$ est une identité montre que le foncteur $b^*$ est aussi un foncteur de Quillen à droite. On obtient de la sorte le diagramme commutatif suivant (dont les isomorphismes verticaux sont justifiés par la proposition 2.7, (ii))

$$\begin{tikzcd} \mathsf{R}(b^*\, u_*) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\wr"'] & \mathsf{R}(p_*\, j^*) \arrow[d, "\wr"] \\ \mathsf{R}b^*\, \mathsf{R}u_* \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathsf{R}p_*\, \mathsf{R}j^* \arrow[d, equal] \\ b^*\, \mathsf{R}u_* \arrow[r] & \mathsf{R}p_*\, j^* \end{tikzcd} ,$$

et donc un isomorphisme $b^*\, \mathsf{R}u_* \simeq \mathsf{R}p_*\, j^*$. □

## 3. Engendrement par cofibrations

3.1. Soit $\mathcal{M}$ une catégorie, et $I \subset \mathsf{Fl}\, \mathcal{M}$. On dira que $I$ permet l'argument du petit objet si $I$ est un petit ensemble, et si pout tout élément $A \longrightarrow B$ de $I$, le foncteur $\mathsf{Hom}_{\mathcal{M}}(A,\ .\ )$ commute aux limites inductives indexées par les ensembles bien ordonnés filtrés par un cardinal assez grand (voir [16, définition 2.1.2] pour une définition plus précise). Par exemple, il suffit que les objets $A$ soient de présentation finie dans $\mathcal{M}$.

Si $\mathcal{M}$ est une catégorie admettant des petites limites inductives, et si $I$ est un ensemble de flèches de $\mathcal{M}$ permettant l'argument du petit objet, les propriétés suivantes sont vérifiées (voir [16, théorème 2.1.14]) :
- toute flèche $f$ de $\mathcal{M}$ se factorise en $f = pi$ où $i \in l(r(I))$ et où $p \in r(I)$ ;
- tout élément de $l(r(I))$ est un rétracte d'un composé transfini à droite d'images directes de sommes d'éléments de $I$, et $l(r(I))$ est la plus petite classe de flèches de $\mathcal{M}$ contenant $I$ et stable par ces opérations.

**Définition 3.2.** Une catégorie de modèles $(\mathcal{M}, \mathcal{W}, \mathsf{Fib}, \mathsf{Cof})$ est *engendrée par* $(I, J)$ si $\mathcal{M}$ admet des petites limites inductives, $I$ et $J$ sont deux ensembles de flèches de $\mathcal{M}$ permettant l'argument du petit objet, tels que $\mathsf{Cof} = l(r(I))$ et $\mathsf{Fib} = r(J)$ (ce qui implique que $\mathsf{Cof} \cap \mathcal{W} = l(r(J))$ et que $\mathsf{Fib} \cap \mathcal{W} = r(I)$).

Une catégorie de modèles est *engendrée par cofibrations* s'il existe un couple $(I,\ J)$ qui l'engendre.

**Proposition 3.3.** *Soit* $(\mathcal{M}, \mathcal{W}, \mathsf{Fib}, \mathsf{Cof})$ *une catégorie de modèles engendrée par un couple* $(I,\ J)$*. On se donne un foncteur* $G\ : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}'$ *admettant un adjoint à droite* $D\ : \mathcal{M}' \longrightarrow \mathcal{M}$*, et on suppose les conditions suivantes vérifiées.*

*(i) La catégorie* $\mathcal{M}'$ *admet des limites projectives finies et des petites limites inductives.*

*(ii) Les ensembles* $GI$ *et* $GJ$ *permettent l'argument du petit objet.*

*(iii)* $D(l(r(GJ))) \subset \mathcal{W}$.

*On pose* $\mathcal{W}' = D^{-1}\mathcal{W}$, $\mathsf{Fib}' = D^{-1}\mathsf{Fib}$*, et* $\mathsf{Cof}' = l(\mathsf{Fib}' \cap \mathcal{W}')$*. Alors le quadruplet* $(\mathcal{M}', \mathcal{W}', \mathsf{Fib}', \mathsf{Cof}')$ *est une catégorie de modèles engendrée par* $(GI,\ GJ)$*.*

*Démonstration.* Voir [5, théorème 3.3] □

3.4. Soit $\mathcal{M}$ une catégorie admettant des sommes, et soit $A$ une petite catégorie. Pour chaque $a \in \mathsf{Ob}\, A$, le foncteur $a\ : e \longrightarrow A$, $* \longmapsto a$, induit un foncteur $a^*\ : \mathcal{M}(A) \longrightarrow \mathcal{M}$, lequel admet un adjoint à gauche $a_!\ : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}(A)$, $X \longmapsto X \otimes a$, où pour $b \in \mathsf{Ob}\, A$, on a

$$(X \otimes a)_b = \coprod_{\mathsf{Hom}_A(b,a)} X\ .$$

Si $I \subset \mathsf{Fl}\, \mathcal{M}$, on note

$$I \otimes A = \{X \otimes a \longrightarrow Y \otimes a \mid\ X \longrightarrow Y \in I,\ a \in \mathsf{Ob}\, A\}\ .$$

Soit $(\mathcal{M}, \mathcal{W}, \mathsf{Fib}, \mathsf{Cof})$ une catégorie de modèles engendrée par un couple $(I,\ J)$. On pose $\mathsf{Fib}_A = \{f \in \mathsf{Fl}\, \mathcal{M}(A) | \ \forall a \in \mathsf{Ob}\, A,\ f_a \in \mathsf{Fib}\}$ et $\mathsf{Cof}_A = l(\mathsf{Fib}_A \cap \mathcal{W}_A)$.

**Proposition 3.5.** $(\mathcal{M}(A), \mathcal{W}_A, \mathsf{Fib}_A, \mathsf{Cof}_A)$ *est une catégorie de modèles engendrée par le couple* $(I \otimes A,\ J \otimes A)$*.*

*Démonstration.* Soient $X \in \mathsf{Ob}\, \mathcal{M}$, $Y \in \mathsf{Ob}\, \mathcal{M}(A)$ et $a \in \mathsf{Ob}\, A$. On a alors une bijection naturelle $\mathsf{Hom}_{\mathcal{M}}(X, Y_a) \simeq \mathsf{Hom}_{\mathcal{M}(A)}(X \otimes a, Y)$, d'où on déduit facilement que $I \otimes A$ et $J \otimes A$ permettent l'argument du petit objet.

Considérons le cas particulier où $A$ est une catégorie discrète, *i.e.* un ensemble. Alors $\mathcal{M}(A) = \prod_A \mathcal{M}$, $\mathcal{W}_A = \prod_A \mathcal{W}$, $\mathsf{Fib}_A = \prod_A \mathsf{Fib}$, et $\mathsf{Cof}_A = \prod_A \mathsf{Cof}$. Le lemme 2.8 nous donne déjà la structure de catégorie de modèles. Il ne reste donc plus qu'à montrer que $\mathsf{Fib}_A = r(J \otimes A)$ et que $\mathsf{Fib}_A \cap \mathcal{W}_A = r(I \otimes A)$, sachant que $\mathsf{Fib} = r(J)$ et $\mathsf{Fib} \cap \mathcal{W} = r(I)$, ce qui est immédiat en utilisant par exemple les adjonctions $(a_!, a^*)$ ci-dessus.

Le cas général va résulter du cas discret comme suit. On considère l'ensemble $\mathsf{Ob}\, A$ comme une catégorie discrète, et on a un foncteur d'inclusion canonique $i\ : \mathsf{Ob}\, A \longrightarrow A$, d'où un foncteur image réciproque $i^*\ : \mathcal{M}(A) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathsf{Ob}\, A)$, et son adjoint à gauche $i_!\ : \mathcal{M}(\mathsf{Ob}\, A) \longrightarrow \mathcal{M}(A)$. On remarque que $(i^*)^{-1}\mathcal{W}_{\mathsf{Ob}\, A} = \mathcal{W}_A$, $(i^*)^{-1}\mathsf{Fib}_{\mathsf{Ob}\, A} = \mathsf{Fib}_A$, $i_!(I \otimes \mathsf{Ob}\, A) = I \otimes A$, $i_!(J \otimes \mathsf{Ob}\, A) = J \otimes A$, et enfin que $i^*(l(r(J \otimes A))) \subset l(r(J \otimes \mathsf{Ob}\, A)) \subset \mathcal{W}_{\mathsf{Ob}\, A}$. La proposition 3.3 permet donc de conclure. □

**Lemme 3.6.** *Soit* $u\ : A \longrightarrow B$ *un foncteur entre petites catégories, et soit* $b$ *un objet de* $B$*. On note* $j\ : b\backslash A \longrightarrow A$ *le foncteur d'oubli. Alors le foncteur image réciproque* $j^*\ : \mathcal{M}(A) \longrightarrow \mathcal{M}(b\backslash A)$ *respecte les cofibrations au sens de la structure de catégorie de modèles ci-dessus.*

*Démonstration.* Soit $a$ un objet de $A$, et $(a',\beta')$ un objet de $b\backslash A$ (*i.e.* $a' \in A$ et $\beta' \in \mathsf{Hom}_B(b,u(a'))$). On a alors une identification naturelle

$$\mathsf{Hom}_A(a',a) = \coprod_{\beta\in\mathsf{Hom}_B(b,u(a))} \mathsf{Hom}_{b\backslash A}((a',\beta'),(a,\beta)) \ .$$

On en déduit que pour tout objet $X$ de $\mathcal{M}$, et pour tout objet $a$ de $A$, on a

$$j^*(X\otimes a) = \coprod_{\beta\in\mathsf{Hom}_B(b,u(a))} X\otimes(a,\beta) \ .$$

Par conséquent, tout élément de $I\otimes A$ est envoyé par $j^*$ sur une somme d'éléments de $I\otimes(b\backslash A)$, ce qui permet d'achever cette démonstration. □

**Théorème 3.7.** *Soit* $(\mathcal{M},\mathcal{W},\mathsf{Fib},\mathsf{Cof})$ *une catégorie de modèles engendrée par cofibrations. Le prédérivateur* $\mathbb{D}_{(\mathcal{M},\mathcal{W})}$ *associé au localisateur* $(\mathcal{M},\mathcal{W})$ *est un dérivateur faible à droite de domaine* $\mathcal{C}at$.

*Démonstration.* Cela résulte immédiatement de la version duale du théorème 2.9, de la proposition 3.5, et du lemme 3.6. □

3.8. On rappelle que la catégorie des simplexes est la catégorie $\mathbf{\Delta}$, dont les objets sont les ensembles $\Delta_n = \{0,\dots,n\}$, $n\geq 0$, munis de l'ordre naturel, et dont les flèches sont les applications croissantes. La catégorie des ensembles simpliciaux est la catégorie $\widehat{\mathbf{\Delta}}$ des préfaisceaux d'ensembles sur $\mathbf{\Delta}$.

Pour $n\geq 1$, et $0\leq i\leq n$, on note $\delta_n^i$ l'unique injection croissante de $\Delta_{n-1}$ vers $\Delta_n$ qui ne prend pas la valeur $i$. Pour $n\geq 0$, on définit un sous-préfaisceau $\partial\Delta_n$ de $\Delta_n$ par $\partial\,\Delta_0=\varnothing$, et pour $n\geq 1$, $\partial\,\Delta_n = \cup_{0\leq i\leq n}\mathsf{Im}\ \delta_n^i$. On note $i_n\ :\partial\Delta_n \longrightarrow \Delta_n$ l'inclusion canonique, et $I=\{i_n \mid n\geq 0\}$. Pour $n\geq 1$ et $0\leq k\leq n$, on a l'inclusion canonique suivante dans $\widehat{\mathbf{\Delta}}$ : $j_{n,k} : \cup_{i\neq k}\mathsf{Im}\ \delta_n^i = \Lambda_n^k \longrightarrow \Delta_n$. On définit alors $J=\{j_{n,k}\mid n\geq 1,\ 0\leq k\leq n\}$.

On note $\mathsf{Cof}$ la classe des monomorphismes de $\widehat{\mathbf{\Delta}}$, $\mathsf{Fib}=r(J)$, et on définit $\mathcal{W}_{\widehat{\mathbf{\Delta}}}$ comme la classe des flèches $f$ de $\widehat{\mathbf{\Delta}}$ qui admettent une factorisation de la forme $f=pi$, où $p\in r(I)$, et $i\in l(r(J))$.

Joyal et Tierney [17] donnent une preuve tout-à-fait élégante du résultat bien connu ci-dessous.

**Théorème 3.9** (Quillen [22])**.** $(\widehat{\mathbf{\Delta}},\mathcal{W}_{\widehat{\mathbf{\Delta}}},\mathsf{Fib},\mathsf{Cof})$ *est une catégorie de modèles engendrée par le couple* $(I,J)$.

3.10. On note $\mathsf{HOT}$ le prédérivateur associé au localisateur $(\widehat{\mathbf{\Delta}},\mathcal{W}_{\widehat{\mathbf{\Delta}}})$, et $\mathsf{Hot} = \mathsf{HOT}(e)$.

**Corollaire 3.11.** *Le prédérivateur* $\mathsf{HOT}$ *est un dérivateur faible à droite.*

*Démonstration.* Cela résulte des théorèmes 3.9 et 3.7. □

## 4. Restriction aux catégories directes

**Définition 4.1.** Une *catégorie de Reedy* est un triplet $(A,A_+,A_-)$, où $A$ est une petite catégorie, et $A_+$ et $A_-$ sont des sous-catégories de $A$, vérifiant les deux axiomes suivants.

**R1** Il existe une application $\delta\ : \mathsf{Ob}\, A \longrightarrow \mathbb{N}$ telle que pour toute flèche $\alpha\ : a \longrightarrow a'$ de $A_+$ (resp. de $A_-$) qui n'est pas une identité, $\delta a < \delta a'$ (resp. $\delta a > \delta a'$).

**R2** Chaque flèche $\alpha$ de $A$ admet une factorisation unique de la forme $\alpha = \alpha_+ \alpha_-$, où $\alpha_+$ est une flèche de $A_+$, et $\alpha_-$ une flèche de $A_-$.

Une catégorie $A$ est *directe* si $(A, A, \mathsf{Ob}\, A)$ est une catégorie de Reedy. Elle est *inverse* si $A^\circ$ est directe.

On note $\mathcal{D}ir$ (resp. $\mathcal{D}irf$) la 2-sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}at$ dont les objets sont les petites catégories directes (resp. les catégories directes finies).

*Remarque* 4.2. Si $(A, A_+, A_-)$ est une catégorie de Reedy, on a $\mathsf{Ob}\, A = \mathsf{Ob}\, A_+ = \mathsf{Ob}\, A_-$. Pour $a \in \mathsf{Ob}\, A$, on écrira $a_+$ (resp. $a_-$) l'objet de $A_+$ (resp. de $A_-$) correspondant. On vérifie facilement que les seuls isomorphismes de $A$ sont les identités.

*Exemple* 4.3. Soit $\mathbf{\Delta}$ la catégorie des simplexes. On note $\mathbf{\Delta}_+$ la sous-catégorie des monomorphismes de $\mathbf{\Delta}$, et $\mathbf{\Delta}_-$ la sous-catégorie des épimorphismes de $\mathbf{\Delta}$. Alors le triplet $(\mathbf{\Delta}, \mathbf{\Delta}_+, \mathbf{\Delta}_-)$ est une catégorie de Reedy.

*Exemple* 4.4. Tout ensemble ordonné fini est une catégorie directe.

**Sorites 4.5.** *(a) Si $(A, A_+, A_-)$ est une catégorie de Reedy, il en est de même du triplet $(A^\circ, (A_-)^\circ, (A_+)^\circ)$.*

*(b) Si $(A, A_+, A_-)$ et $(B, B_+, B_-)$ sont des catégories de Reedy, le triplet $(A \times B, A_+ \times B_+, A_- \times B_-)$ est une catégorie de Reedy.*

*(c) Les catégories $\mathcal{D}ir$ et $\mathcal{D}irf$ sont stables par sommes et produits finis.*

*(d) Pour toute catégorie directe $A$, pour tout foncteur $A \longrightarrow B$, et pour tout objet $b$ de $B$, $A/b$ et $b\backslash A$ sont des catégories directes.*

*(e) Toute sous-catégorie d'une catégorie directe est directe*

*(f) Si $A$ est une catégorie directe finie, alors $A^\circ$ est une catégorie directe finie (*i.e.* elle est aussi inverse).*

*Remarque* 4.6. $\mathcal{D}ir$ est donc une catégorie de diagrammes, et $\mathcal{D}irf$ une catégorie de diagrammes auto-duale (les assertions (c) et (e) impliquent que les catégories directes sont stables par produits fibrés).

4.7. Soit $(A, A_+, A_-)$ une catégorie de Reedy, et soit $a\ : e \longrightarrow A$ un objet de $A$. On note $\partial_a^- A$ (resp. $\partial_a^+ A$) la sous-catégorie pleine de $a_-\backslash A_-$ (resp. de $A_+/a_+$), définie par

$$\mathsf{Ob}\, \partial_a^- A = \mathsf{Ob}(a_-\backslash A_-) \setminus \{(a_-, 1_{a_-})\}$$

$$(\text{resp. } \mathsf{Ob}\, \partial_a^+ A = \mathsf{Ob}(A_+/a_+) \setminus \{(a_+, 1_{a_+})\}),$$

et $\lambda_a\ : \partial_a^- A \longrightarrow A$ (resp. $\mu_a\ : \partial_a^+ A \longrightarrow A$) le foncteur d'oubli. Si $A$ est une catégorie directe, on abrègera les notations en écrivant $\partial_a A$ pour $\partial_a^+ A$ (et on remarque qu'alors $\partial_a^- A = \varnothing$).

Si $\mathcal{M}$ est une catégorie admettant des limites inductives et projectives pertinentes, on définit deux foncteurs $L_a\ : \mathcal{M}(A) \longrightarrow \mathcal{M}$ et $M_a\ : \mathcal{M}(A) \longrightarrow \mathcal{M}$ par $L_a = p_{\partial_a^- A\, !}\, \lambda_a^*$ et $M_a = p_{\partial_a^+ A\, *}\, \mu_a^*$. Les foncteurs $\partial_a^- A \longrightarrow a\backslash A$ et $\partial_a^+ A \longrightarrow A/a$

induisent des morphismes de foncteurs $L_a \longrightarrow a^* \longrightarrow M_a$. En particulier, pour toute flèche $\phi\ : X \longrightarrow Y$ de $\mathcal{M}(A)$, on obtient le diagramme suivant dans $\mathcal{M}$.

$$\begin{tikzcd}
L_aX \arrow[rr] \arrow[d, "L_a\phi"'] & & X_a \arrow[r] \arrow[dl] \arrow[d, "\phi_a"] & Y_a \times_{M_aY} M_aX \arrow[r] \arrow[dl] & M_aX \arrow[d, "M_a\phi"] \\
L_aY \arrow[r] & L_aY \amalg_{L_aX} X_a \arrow[r] & Y_a \arrow[rr] & & M_aY
\end{tikzcd}$$

Si $(\mathcal{M}, \mathcal{W}, \mathsf{Fib}, \mathsf{Cof})$ est une catégorie de modèles, la catégorie $\mathcal{M}$ admettant des limites inductives et projectives pertinentes, on définit $\mathsf{Cof}_A$ comme la classe des flèches $X \longrightarrow Y$ de $\mathcal{M}(A)$, telles que pour tout $a \in \mathsf{Ob}\, A$, le morphisme $L_aY \amalg_{L_aX} X_a \longrightarrow Y_a$ soit une cofibration, et $\mathsf{Fib}_A$ comme la classe des flèches $X \longrightarrow Y$ de $\mathcal{M}(A)$ telles que pout tout $a \in \mathsf{Ob}\, A$ le morphisme $X_a \longrightarrow Y_a \times_{M_aY} M_aX$ soit une fibration. On obtient la

**Proposition 4.8.** $(\mathcal{M}(A), \mathcal{W}_A, \mathsf{Fib}_A, \mathsf{Cof}_A)$ *est une catégorie de modèles, et pour tout élément* $X \longrightarrow Y$ *de* $\mathsf{Fib}_A$ *(resp. de* $\mathsf{Fib}_A \cap \mathcal{W}_A$*), et pour tout* $a \in \mathsf{Ob}\, A$*, le morphisme* $X_a \longrightarrow Y_a$ *est une fibration (resp. une fibration triviale).*

*En outre, si* $A$ *est une catégorie directe, la classe* $\mathsf{Cof}_A$ *est exactement la classe des morphismes* $X \longrightarrow Y$ *de* $\mathcal{M}(A)$ *tels que pour tout objet* $a$ *de* $A$*, la flèche* $X_a \longrightarrow Y_a$ *soit une cofibration.*

*Démonstration.* Voir [16, théorème 5.2.5], ou [15, théorème 17.3.3]. □

**Lemme 4.9.** *Soit* $u\ : A \longrightarrow B$ *un foncteur dont la source est une catégorie directe, et soit* $b$ *un objet de* $B$*. On note* $j\ : A/b \longrightarrow A$ *le foncteur d'oubli. Alors le foncteur* $j^*\ : \mathcal{M}(A) \longrightarrow \mathcal{M}(A/b)$ *respecte les fibrations au sens de la structure de catégorie de modèles définie ci-dessus.*

*Démonstration.* Soit $(a, \beta)$ un objet de $A/b$ (*i.e.* $a$ est un objet de $A$, et $\beta$ un élément de $\mathsf{Hom}_B(u(a), b)$). On remarque qu'on a un isomorphisme de catégories canonique $A/a \simeq (A/b)/(a, \beta)$, d'où un isomorphisme $\partial_a A \simeq \partial_{(a,\beta)} A/b$, et donc un isomorphisme de foncteurs $M_{(a,\beta)} j^* \simeq M_a$, ce qui permet de conclure. □

**Proposition 4.10.** *Pour tout localisateur de Quillen* $(\mathcal{M}, \mathcal{W})$*, le prédérivateur restreint* $\mathbb{D}_{(\mathcal{M},\mathcal{W})}\,|_{\mathcal{D}irf}$ *est un dérivateur.*

*Si en outre* $\mathcal{M}$ *admet des petites limites projectives, le prédérivateur* $\mathbb{D}_{(\mathcal{M},\mathcal{W})}$ *induit un dérivateur faible à gauche* $\mathbb{D}_{(\mathcal{M},\mathcal{W})}\,|_{\mathcal{D}ir}$*.*

*Démonstration.* Cela résulte de la proposition 4.8, du lemme 4.9, et du théorème 2.9. □

4.11. Soit $(\mathcal{M}, \mathcal{W}, \mathsf{Fib}, \mathsf{Cof})$ une catégorie de modèles. On note $\mathcal{M}_f$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{M}$ formée des objets fibrants, et $\mathcal{W}_f = \mathcal{W} \cap \mathsf{Fl}\, \mathcal{M}_f$, ce qui définit un localisateur $(\mathcal{M}_f, \mathcal{W}_f)$, appelé le *localisateur des objets fibrants* associé à $\mathcal{M}$, et un morphisme de localisateurs $i\ : (\mathcal{M}_f, \mathcal{W}_f) \longrightarrow (\mathcal{M}, \mathcal{W})$. On note encore $i\ : \mathbb{D}_{(\mathcal{M}_f,\mathcal{W}_f)} \longrightarrow \mathbb{D}_{(\mathcal{M},\mathcal{W})}$ le $\mathcal{C}at$-morphisme induit.

**Proposition 4.12.** *Le morphisme* $i\ : \mathbb{D}_{(\mathcal{M}_f,\mathcal{W}_f)}\,|_{\mathcal{D}irf} \longrightarrow \mathbb{D}_{(\mathcal{M},\mathcal{W})}\,|_{\mathcal{D}irf}$ *est une* $\mathcal{D}irf$*-équivalence.*

*Si en outre la catégorie $\mathcal{M}$ admet des petites limites projectives, alors la restriction aux catégories directes* $i\ :\mathbb{D}_{(\mathcal{M}_f,\mathcal{W}_f)}\,|_{\mathcal{D}ir}\longrightarrow\mathbb{D}_{(\mathcal{M},\mathcal{W})}\,|_{\mathcal{D}ir}$ *est une $\mathcal{D}ir$-équivalence.*

Cela résulte immédiatement du lemme ci-dessous (lequel est par ailleurs évident si les factorisation de l'axiome CM5 sont supposées fonctorielles).

**Lemme 4.13.** *Soit $A$ une petite catégorie telle que $\mathcal{M}(A)$ admette une structure de catégorie de modèles $(\mathcal{M}(A),\mathcal{W}_A,\mathsf{Fib}_A,\mathsf{Cof}_A)$ vérifiant l'inclusion $\mathsf{Fib}_A\subset\{\phi\in\mathsf{Fl}\,\mathcal{M}(A)\mid\forall a\in\mathsf{Ob}\,A\ \phi_a\in\mathsf{Fib}\}$. Alors le foncteur*

$$i\ :\mathcal{W}_{f,A}^{-1}\mathcal{M}_f(A)\longrightarrow\mathcal{W}_A^{-1}\mathcal{M}(A)$$

*est une équivalence de catégories.*

*Démonstration.* On note comme ci-dessus $\mathcal{M}(A)_f$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{M}(A)$ formée des objets fibrants, et $\mathcal{W}_{A,f}=\mathcal{M}(A)_f\cap\mathcal{W}_A$. On obtient alors un triangle commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{W}_{A,f}^{-1}\mathcal{M}(A)_f \arrow[rr, "k"] \arrow[dr, "j"'] & & \mathcal{W}^{-1}\mathcal{M}(A) \\
& \mathcal{W}_{f,A}^{-1}\mathcal{M}_f(A) \arrow[ur, "i"'] &
\end{tikzcd} .$$

On sait que $k$ est une équivalence de catégories (en vertu de [22, I.1, théorème 1]). On en déduit que le foncteur $j$ est fidèle, et qu'il suffit de montrer que $j$ est plein et essentiellement surjectif. Soit $X\longrightarrow Y$ une flèche de $\mathcal{W}_{f,A}^{-1}\mathcal{M}_f(A)$. Elle est représentée par un diagramme de $\mathcal{M}_f(A)$ du type

$$X=X_0\xleftarrow{u_1}X_1\xrightarrow{v_1}X_2\xleftarrow{u_3}\cdots\xrightarrow{v_{n-2}}X_{n-1}\xleftarrow{u_n}X_n=Y\ ,$$

où les flèches $u_l$ sont des éléments de $\mathcal{W}_{f,A}$. Pour chaque $l$, on choisit une cofibration triviale de but fibrant $X_l\longrightarrow Z_l$ dans $\mathcal{M}(A)$, et pour chaque flèche $X_l\longrightarrow X_{l\pm1}$, le carré suivant admet un relèvement $Z_l\longrightarrow Z_{l\pm1}$

$$\begin{tikzcd}
X_l \arrow[r] \arrow[d] & X_{l\pm1} \arrow[r] & Z_{l\pm1} \arrow[d] \\
Z_l \arrow[rr] & & *
\end{tikzcd} ,$$

ce qui donne le diagramme commutatif suivant dans $\mathcal{M}_f(A)$

$$\begin{tikzcd}
X_0 \arrow[d] & X_1 \arrow[l, "u_1"'] \arrow[r, "v_1"] \arrow[d] & X_2 \arrow[d] & \cdots \arrow[l, "u_3"'] \arrow[r, "v_{n-2}"] & X_{n-1} \arrow[d] & X_n \arrow[l, "u_n"'] \arrow[d] \\
Z_0 & Z_1 \arrow[l, "s_1"] \arrow[r, "t_1"'] & Z_2 & \cdots \arrow[l, "s_3"] \arrow[r, "t_{n-2}"'] & Z_{n-1} & Z_n \arrow[l, "s_n"]
\end{tikzcd} ,$$

dont les flèches verticales sont des équivalences faibles, ainsi que les flèches $s_l$. Cela montre que $j$ est plein et essentiellement surjectif, et achève donc la démonstration. □

**Proposition 4.14.** *Soient $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$ deux catégories de modèles, et $F\ :\mathcal{M}\longrightarrow\mathcal{M}'$ un foncteur de Quillen à droite. Alors Il existe un $\mathcal{D}irf$-morphisme*

$$\mathsf{R}F\ :\mathbb{D}_{(\mathcal{M},\mathcal{W})}\,|_{\mathcal{D}irf}\longrightarrow\mathbb{D}_{(\mathcal{M}',\mathcal{W}')}\,|_{\mathcal{D}irf}\ ,$$

*tel que pour chaque catégorie directe finie $A$, le foncteur*

$$\mathsf{R}F\ :\mathbb{D}_{(\mathcal{M},\mathcal{W})}(A)\longrightarrow\mathbb{D}_{(\mathcal{M}',\mathcal{W}')}(A)$$

*soit le foncteur dérivé à droite du foncteur $F\ :\mathcal{M}(A)\longrightarrow\mathcal{M}'(A)$. Le $\mathcal{D}irf$-morphisme $\mathsf{R}F$ est continu dès que $F$ commute aux limites projectives finies.*

*Si de plus $\mathcal{M}$ admet des petites limites projectives, ce dernier se prolonge en un $\mathcal{D}ir$-morphisme*

$$\mathsf{R}F\ :\mathbb{D}_{(\mathcal{M},\mathcal{W})}\,|_{\mathcal{D}ir}\longrightarrow\mathbb{D}_{(\mathcal{M}',\mathcal{W}')}\,|_{\mathcal{D}ir}\ ,$$

*tel que pour chaque catégorie directe $A$, le foncteur*

$$\mathsf{R}F\ :\mathbb{D}_{(\mathcal{M},\mathcal{W})}(A)\longrightarrow\mathbb{D}_{(\mathcal{M}',\mathcal{W}')}(A)$$

*soit le foncteur dérivé à droite du foncteur $F\ :\mathcal{M}(A)\longrightarrow\mathcal{M}'(A)$. En outre, si $\mathcal{M}'$ admet des petites limites projectives, et si $F$ commute aux limites projectives, alors le $\mathcal{D}ir$-morphisme $\mathsf{R}F$ est continu.*

*Démonstration.* Dans ce qui suit, $\mathcal{D}ia$ désigne ou bien la catégorie des catégories directes finies, ou bien celle des catégories directes. On suppose dans un premier temps que pour tout objet $A$ de $\mathcal{D}ia$, la catégorie $\mathcal{M}$ admet des limites projectives de type $A^\circ$. On note $(\mathcal{M}_f,\mathcal{W}_f)$ le localisateur des objets fibrants associé à $\mathcal{M}$. La restriction de $F$ à $\mathcal{M}_f$ définit un morphisme de localisateurs $\overline{F}\ :(\mathcal{M}_f,\mathcal{W}_f)\longrightarrow(\mathcal{M}',\mathcal{W}')$, et donc un $\mathcal{C}at$-morphisme $\overline{F}\ :\mathbb{D}_{(\mathcal{M}_f,\mathcal{W}_f)}\longrightarrow\mathbb{D}_{(\mathcal{M}',\mathcal{W}')}$. D'autre part, en vertu de la proposition 4.12, on a une $\mathcal{D}ia$-équivalence

$$i\ :\mathbb{D}_{(\mathcal{M}_f,\mathcal{W}_f)}\,|_{\mathcal{D}ia}\longrightarrow\mathbb{D}_{(\mathcal{M},\mathcal{W})}\,|_{\mathcal{D}ia}\ ,$$

ce qui permet de définir $\mathsf{R}F$ par le triangle commutatif suivant (en choisissant un quasi-inverse de $i$) :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{D}_{(\mathcal{M}_f,\mathcal{W}_f)}\,|_{\mathcal{D}ia} \arrow[rr, "\overline{F}"] \arrow[dr, "i"'] & & \mathbb{D}_{(\mathcal{M}',\mathcal{W}')}\,|_{\mathcal{D}ia} \\
& \mathbb{D}_{(\mathcal{M},\mathcal{W})}\,|_{\mathcal{D}ia} \arrow[ur, "\mathsf{R}F"'] &
\end{tikzcd}\ .$$

On suppose à présent qu'en outre, pour tout objet $A$ de $\mathcal{D}ia$, la catégorie $\mathcal{M}'$ admet des limites projectives de type $A^\circ$, et que le foncteur $F$ commute aux limites projectives de type $A^\circ$. On considère un foncteur $u\ :A\longrightarrow B$ dans $\mathcal{D}ia$. Alors les foncteurs $u_*\ :\mathcal{M}(A)\longrightarrow\mathcal{M}(B)$, $u_*\ :\mathcal{M}'(A)\longrightarrow\mathcal{M}'(B)$, $F\ :\mathcal{M}(A)\longrightarrow\mathcal{M}'(A)$ et $F\ :\mathcal{M}(B)\longrightarrow\mathcal{M}'(B)$ sont des foncteurs de Quillen à droite, et comme le morphisme canonique $F\,u_*\longrightarrow u_*\,F$ est un isomorphisme de $\mathcal{M}'(B)$, on obtient le diagramme commutatif suivant (les isomorphismes verticaux étant les isomorphismes canoniques de la proposition 2.7, (ii)) :

$$\begin{tikzcd} \mathsf{R}(F\,u_*) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\wr"'] & \mathsf{R}(u_*\,F) \arrow[d, "\wr"] \\ \mathsf{R}F\,\mathsf{R}u_* \arrow[r] & \mathsf{R}u_*\,\mathsf{R}F \end{tikzcd} \quad .$$

On a ainsi un isomorphisme canonique $\mathsf{R}F\,\mathsf{R}u_* \simeq \mathsf{R}u_*\,\mathsf{R}F$. □

## 5. Hom externes et cofinalité

5.1. On fixe pour le moment une catégorie de modèles $\mathcal{M}$, et un objet cofibrant $A$ de $\mathcal{M}(\mathbf{\Delta}^\circ) = \underline{\mathsf{Hom}}(\mathbf{\Delta}, \mathcal{M})$ (au sens de la structure de catégorie de modèles de la proposition 4.8), tel que pour toute flèche $\Delta_m \longrightarrow \Delta_n$ de $\mathbf{\Delta}$, le morphisme $A_m \longrightarrow A_n$ soit une équivalence faible.

On note $\widehat{\mathbf{\Delta}}_{pf}$ la sous-catégorie pleine de $\widehat{\mathbf{\Delta}}$ formée des ensembles simpliciaux de présentation finie (c'est-à-dire des ensembles simpliciaux $K$ tels que le foncteur $\mathsf{Hom}_{\widehat{\mathbf{\Delta}}}(K,\ .\ )$ commute aux petites limites inductives filtrantes). On remarque que comme dans la catégorie des ensembles, les limites inductives filtrantes commutent aux limites projectives finies, la catégorie $\widehat{\mathbf{\Delta}}_{pf}$ est stable par limites inductives finies. Il est en outre évident que les simplexes standard $\Delta_n$ sont de présentation finie, d'où on déduit que les ensembles simpliciaux $\partial\,\Delta_n$, $\Lambda^k_n$ sont de présentation finie. En fait, on peut montrer qu'un ensemble simplicial est de présentation finie si et seulement si l'ensemble de ses simplexes non-dégénérés est fini.

**Lemme 5.2.** *Il existe un foncteur, unique à isomorphisme unique près, $A_!$ : $\widehat{\mathbf{\Delta}}_{pf} \longrightarrow \mathcal{M}$ qui commute aux limites inductives finies, tel que pour tout entier positif $n$, $A_!\Delta_n = A_n$.*

*Démonstration.* On rappelle que si $K$ est un ensemble simplicial, et si $\mathbf{\Delta}/K$ désigne la catégorie des simplexes au-dessus de $K$ (*i.e.* les objets de $\mathbf{\Delta}/K$ sont les couple $(\Delta_n, u)$ où $u \in \mathsf{Hom}_{\widehat{\mathbf{\Delta}}}(\Delta_n, K)$ et les flèches sont les triangles commutatifs évidents), on a un foncteur $\phi_K\ :\ \mathbf{\Delta}/K \longrightarrow \widehat{\mathbf{\Delta}}$, $(\Delta_n, u) \longmapsto \Delta_n$, et que le morphisme canonique $\varinjlim \phi_K \longrightarrow K$ est un isomorphisme. D'autre part, si $K$ est de présentation finie, on peut montrer que $K$ est le conoyau d'une double flèche du type $L' \rightrightarrows L$, où $L$ et $L'$ sont des sommes finies de préfaisceaux représentables. Comme les préfaisceaux représentables sont connexes, les flèches de $L'$ vers $L$ sont induites par des morphismes entre préfaisceaux représentables. On note $I$ la sous catégorie pleine de $\mathbf{\Delta}/K$ engendrée par ces flèches (lesquelles sont au-dessus de $K$ par le morphisme canonique $L \longrightarrow K$), et $i\ :\ I \longrightarrow \mathbf{\Delta}/K$ l'inclusion. La catégorie $I$ est finie, et on vérifie que le morphisme canonique $\varinjlim i^*\phi_K \longrightarrow \varinjlim \phi_K$ est un isomorphisme. On en déduit que le foncteur $i$ est cofinal (*i.e.* que pour tout objet $(\Delta_n, u)$ de $\mathbf{\Delta}/K$, la catégorie $(\Delta_n, u)\backslash I$ est connexe). Par suite, toute catégorie $C$ admettant des limites inductives finies admet des limites inductives de type $\mathbf{\Delta}/K$ (car si $F\ :\ \mathbf{\Delta}/K \longrightarrow C$ est un foncteur l'objet $\varinjlim i^*F$ représente le foncteur $X \longmapsto \varprojlim \mathsf{Hom}_C(F, X)$).

On peut à présent définir le foncteur $A_!$ comme suit : si $K$ est un ensemble simplicial de présentation finie, on pose $A_!K = \varinjlim(A\,\phi_K)$, et si $f\ : K \longrightarrow L$ est un morphisme de $\widehat{\mathbf{\Delta}}_{pf}$, il induit un foncteur $\mathbf{\Delta}/f\ : \mathbf{\Delta}/K \longrightarrow \mathbf{\Delta}/L$, d'où un morphisme canonique $A_!f\ : A_!K \longrightarrow A_!L$. □

**Lemme 5.3.** *Pour tout $n \geq 0$, le morphisme $A_!(\partial\,\Delta_n) \longrightarrow A_!(\Delta_n)$ est une cofibration, et pour $n \geq 1$, $0 \leq i \leq n$, les morphismes $A_!(\Lambda^k_n) \longrightarrow A_!(\Delta_n)$ sont des cofibrations triviales.*

*Démonstration.* La présentation de $\partial\,\Delta_n$ dans [9, II.3.9] et l'explicitation de la construction de $L_nA\ := L_{\Delta_n}A$ montrent que $A_!(\partial\,\Delta_n)$ et $L_nA$ sont canoniquement isomorphes, ce qui montre la première assertion puisqu'on a supposé $A$ cofibrant. On en déduit que pour tout monomorphisme $i\ : K \longrightarrow L$ de $\widehat{\mathbf{\Delta}}_{pf}$, $A_!K \longrightarrow A_!L$ est une cofibration, car $i$ est un composé fini d'images directes de sommes finies d'inclusions du type $\partial\Delta_n \longrightarrow \Delta_n$ (cela résulte de la décomposition des monomorphismes de $\widehat{\mathbf{\Delta}}$ *via* les foncteurs squelettes (voir [9, IV.2.1.2]), et du fait que l'ensemble des simplexes non-dégénérés d'un ensembles simplicial de présentation finie est fini). Pour conclure, il suffit de reproduire telle quelle la preuve de [16, proposition 3.6.8]. □

**Proposition 5.4.** *L'objet cosimplicial $A$ induit un foncteur*

$$A^*\ : \mathcal{M} \longrightarrow \widehat{\mathbf{\Delta}}\ ,$$

*défini sur les objets par $X \longmapsto (\Delta_n \longmapsto \mathsf{Hom}_{\mathcal{M}}(A_n, X))$, lequel est un foncteur de Quillen à droite et commute aux petites limites projectives. En outre, pour tout objet fibrant $X$ de $\mathcal{M}$, l'ensemble $\pi_0A^*X$ s'identifie canoniquement à l'ensemble $\mathsf{Hom}_{\mathsf{Ho}\,\mathcal{M}}(A_0, X)$.*

*Démonstration.* Si $K$ est un ensemble simplicial de présentation finie, et si $X$ est un objet de $\mathcal{M}$, on a une bijection naturelle

$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{M}}(A_!K, X) \simeq \mathsf{Hom}_{\widehat{\mathbf{\Delta}}}(K, A^*X)\ .$$

Cette constatation, le lemme 5.3 et le théorème 3.9 permettent de montrer que le foncteur $A^*$ respecte les fibrations et les fibrations triviales. Il est d'autre part immédiat que $A^*$ commute aux limites projectives, et donc que $A^*$ est un foncteur de Quillen à droite.

Soit $X$ un objet fibrant de $\mathcal{M}$. Comme $A^*X$ est un ensemble simplicial fibrant, deux éléments $u_0$ et $u_1$ de $(A^*X)_0 = \mathsf{Hom}_{\mathcal{M}}(A_0, X)$ sont dans la même composante connexe si et seulement s'il existe $h \in (A^*X)_1 = \mathsf{Hom}_{\mathcal{M}}(A_1, X)$ tel que $h_0 = u_0$ et $h_1 = u_1$. Or

$$L_1A = A_0 \amalg A_0 \longrightarrow A_1 \longrightarrow A_0$$

est un cylindre de $A_0$, et donc $\pi_0A^*X$ est l'ensemble $\mathsf{Hom}_{\mathcal{M}}(A_0, X)$, quotienté par la relation d'homotopie (laquelle ne dépend pas du cylindre choisi). La proposition 2.4 achève ainsi cette démonstration. □

**Proposition 5.5.** *Soit $(\mathcal{M}, \mathcal{W}, \mathsf{Fib}, \mathsf{Cof})$ une catégorie de modèles, la catégorie $\mathcal{M}$ admettant des petites limites projectives. Pour tout objet $X$ de $\mathsf{Ho}\,\mathcal{M}$, il existe un $\mathcal{D}ir$-morphisme continu,*

$$\mathsf{R}\,\mathsf{Hom}(X,\ .\ )\ : \mathbb{D}_{(\mathcal{M},\mathcal{W})}\,|_{\mathcal{D}ir} \longrightarrow \mathsf{HOT}\,|_{\mathcal{D}ir}$$

*tel que le triangle suivant commute (à isomorphisme près) :*

$$\begin{tikzcd} \mathsf{Ho}\,\mathcal{M} \arrow[rr, "\mathsf{R}\,\mathsf{Hom}(X,\ .\ )"] \arrow[dr, "\mathsf{Hom}_{\mathsf{Ho}\,\mathcal{M}}(X,\ .\ )"'] & & \mathsf{Hot} \arrow[dl, "\pi_0"] \\ & \mathcal{E}ns & \end{tikzcd} .$$

*Démonstration.* Soit $X$ un objet de $\mathcal{M}$. On choisit une équivalence faible de source cofibrante $A \longrightarrow p^*_{\mathbf{\Delta}^\circ} X$ au sens de la structure de catégorie de modèles de la proposition 4.8, et on obtient en vertu des propositions 5.4 et 4.14, un $\mathcal{D}ir$-morphisme continu

$$\mathsf{R}A^* \ : \mathbb{D}_{(\mathcal{M},\mathcal{W})}\,|_{\mathcal{D}ir} \longrightarrow \mathsf{HOT}\,|_{\mathcal{D}ir} \ .$$

On pose $\mathsf{R}\,\mathsf{Hom}(X,\ .\ ) = \mathsf{R}A^*$. Comme $X \simeq A_0$ dans $\mathsf{Ho}\,\mathcal{M}$, on conclut grâce à la seconde assertion de la proposition 5.4. □

*Remarque* 5.6. Le morphisme $\mathsf{R}\,\mathsf{Hom}(X,\ .\ )$ construit ci-dessus ne dépend pas du choix de l'objet cosimplicial $A$, dans le sens où si $B \longrightarrow p^*_{\mathbf{\Delta}^\circ} X$ est une équivalence faible de source cofibrante, on aura un isomorphisme $\mathsf{R}A^* \simeq \mathsf{R}B^*$, ce qu'on peut montrer en utilisant [16, proposition 5.4.1] et l'axiome Der 2. De manière plus conceptuelle, on peut montrer qu'un tel morphisme est défini à isomorphisme unique près, en exhibant une propriété universelle adéquate (voir la remarque 6.15).

**Corollaire 5.7.** *Soit* $(\mathcal{M}, \mathcal{W}, \mathsf{Fib}, \mathsf{Cof})$ *une catégorie de modèles, la catégorie* $\mathcal{M}$ *admettant des petites limites projectives. Pour tout foncteur* $\mathsf{HOT}$*-coasphérique entre catégories directes,* $u \ : A \longrightarrow B$*, le morphisme canonique*

$$\mathsf{R}p_{B*} \longrightarrow \mathsf{R}p_{A*}\, u^*$$

*est un isomorphisme dans* $\mathsf{Ho}\,\mathcal{M}$*.*

*Démonstration.* Comme $\mathsf{HOT}$ est un dérivateur faible à droite (théorème 3.11), en vertu du corollaire 1.25, on a un isomorphisme $\mathsf{R}p_{B*} \simeq \mathsf{R}p_{A*}\, u^*$ dans $\mathsf{HOT}$. Soient $X$ un objet de $\mathbb{D}_{(\mathcal{M},\mathcal{W})}(e)$, et $F$ un objet de $\mathbb{D}_{(\mathcal{M},\mathcal{W})}(B)$. On a alors grâce à la proposition 5.5 :

$$\begin{aligned} \mathsf{Hom}_{\mathsf{Ho}\,\mathcal{M}}(X, \mathsf{R}p_{B*}\, F) &\simeq \pi_0\, \mathsf{R}\,\mathsf{Hom}(X, \mathsf{R}p_{B*}\, F) \\ &\simeq \pi_0\, \mathsf{R}p_{B*}\, \mathsf{R}\,\mathsf{Hom}(X, F) \\ &\simeq \pi_0\, \mathsf{R}p_{A*}\, u^*\, \mathsf{R}\,\mathsf{Hom}(X, F) \\ &\simeq \pi_0\, \mathsf{R}\,\mathsf{Hom}(X, \mathsf{R}p_{A*}\, u^*\, F) \\ &\simeq \mathsf{Hom}_{\mathsf{Ho}\,\mathcal{M}}(X, \mathsf{R}p_{A*}\, u^*\, F) \ . \end{aligned}$$

Le lemme de Yoneda achève ainsi la démonstration. □

## 6. Prolongement

6.1. Soit $\mathcal{M}$ une catégorie de modèles. On note $i \ : \mathcal{M}_f \longrightarrow \mathcal{M}$ l'inclusion de la sous-catégorie des objets fibrants de $\mathcal{M}$, laquelle induit une équivalence de catégories $i \ : \mathsf{Ho}\,\mathcal{M}_f \longrightarrow \mathsf{Ho}\,\mathcal{M}$. On considère un localisateur $(\mathcal{M}', \mathcal{W}')$ et une sous-catégorie pleine $\mathcal{M}''$ de $\mathcal{M}'$. On suppose que $\mathcal{W}'$ est stable par "2 sur 3" (*i.e.* vérifie l'axiome CM2). On note $j\ : \mathcal{M}'' \longrightarrow \mathcal{M}'$ l'inclusion, et on définit un localisateur $(\mathcal{M}'', \mathcal{W}'')$ par $\mathcal{W}'' = j^{-1}\mathcal{W}'$. On obtient de la sorte un foncteur $j\ : \mathsf{Ho}\,\mathcal{M}'' \longrightarrow \mathsf{Ho}\,\mathcal{M}'$. Pour chaque objet $X$ de $\mathcal{M}$, on choisit une cofibration triviale de but fibrant $u_X\ : X \longrightarrow RX$. Il existe alors un unique foncteur $R\ : \mathsf{Ho}\,\mathcal{M} \longrightarrow \mathsf{Ho}\,\mathcal{M}_f$ tel que $R(X) = RX$ sur les objets, et tel que les flèches $u_X$ définissent un isomorphisme de foncteurs $u\ : 1_{\mathsf{Ho}\,\mathcal{M}} \longrightarrow iR$.

Soit $D\ : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}'$ un foncteur tel que $D(\mathsf{Fib} \cap \mathcal{W}) \subset \mathcal{W}'$ et $D\mathcal{M}_f \subset \mathcal{M}''$. Si $D_f\ : \mathcal{M}_f \longrightarrow \mathcal{M}''$ désigne la restriction de $D$ à $\mathcal{M}_f$, on a donc $D\mathcal{W}_f \subset \mathcal{W}''$ (en vertu de [16, lemme 1.1.12]), et ainsi un foncteur $D_f\ : \mathsf{Ho}\,\mathcal{M}_f \longrightarrow \mathsf{Ho}\,\mathcal{M}''$. On définit $\underline{D} = D_f R$, et $\mathsf{R}D = j\underline{D}$, ce qui donne le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathsf{Ho}\,\mathcal{M} \arrow[r, "\mathsf{R}D"] \arrow[d, "R"'] \arrow[dr, "\underline{D}"] & \mathsf{Ho}\,\mathcal{M}' \\ \mathsf{Ho}\,\mathcal{M}_f \arrow[r, "D_f"'] & \mathsf{Ho}\,\mathcal{M}'' \arrow[u, "j"'] \end{tikzcd} .$$

Le foncteur $\mathsf{R}D$ ci-dessus n'est autre que le foncteur dérivé à droite du foncteur $D$.

Supposons en outre que le foncteur $D$ admette un adjoint à gauche $G\ : \mathcal{M}' \longrightarrow \mathcal{M}$ tel que $G\mathcal{W}' \subset \mathcal{W}$. On note encore $G\ : \mathsf{Ho}\,\mathcal{M}' \longrightarrow \mathsf{Ho}\,\mathcal{M}$ le foncteur localisé, et $\underline{G}\ : \mathsf{Ho}\,\mathcal{M}'' \longrightarrow \mathsf{Ho}\,\mathcal{M}$ celui induit par la restriction de $G$ à $\mathcal{M}''$. On a alors un triangle commutatif :

$$(\star) \qquad \begin{tikzcd} \mathsf{Ho}\,\mathcal{M}'' \arrow[rr, "\underline{G}"] \arrow[dr, "j"'] & & \mathsf{Ho}\,\mathcal{M} \\ & \mathsf{Ho}\,\mathcal{M}' \arrow[ur, "G"'] & \end{tikzcd} .$$

Soient $\varepsilon\ : GD \longrightarrow 1_{\mathcal{M}}$ et $\eta\ : 1_{\mathcal{M}'} \longrightarrow DG$ les morphismes d'adjonction. Pour chaque objet $X$ de $\mathcal{M}$, on note $\underline{\varepsilon}_X\ : \underline{G}\,\underline{D}X \longrightarrow X$ le morphisme composé

$$GD(RX) \xrightarrow{\varepsilon_{RX}} RX \xrightarrow{u_X^{-1}} X\ ,$$

et pour chaque objet $Y$ de $\mathcal{M}''$, on définit un morphisme $\underline{\eta}_Y\ : Y \longrightarrow \underline{D}\,\underline{G}Y$ par la composition

$$Y \xrightarrow{\eta_Y} DGY \xrightarrow{Du_{GY}} D(RGY)\ .$$

On obtient ainsi deux morphismes de foncteurs

$$\underline{G}\,\underline{D} \xrightarrow{\underline{\varepsilon}} 1_{\mathsf{Ho}\,\mathcal{M}} \quad \text{et} \quad 1_{\mathsf{Ho}\,\mathcal{M}''} \xrightarrow{\underline{\eta}} \underline{D}\,\underline{G} \quad ,$$

grâce au fait que pour toute flèche $f\ : X \longrightarrow Y$ de $\mathcal{M}$, il existe un carré commutatif dans $\mathcal{M}$ de la forme

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u_X"] \arrow[d, "f"'] & RX \arrow[d] \\ Y \arrow[r, "u_Y"'] & RY \end{tikzcd} .$$

**Proposition 6.2.** *Le couple* $(\underline{G}, \underline{D})$ *est une adjonction pour les morphismes* $\underline{\varepsilon}$ *et* $\underline{\eta}$.

*Démonstration.* Si $X$ est un objet de $\mathcal{M}$, comme $RX$ est un objet fibrant, et comme $u_{GD(RX)}$ est une cofibration triviale, il existe une flèche $v\ :RGD(RX) \longrightarrow RX$ telle que $v\,u_{GD(RX)} = \varepsilon_{RX}$ dans $\mathcal{M}$. On a alors le diagramme commutatif suivant dans $\mathsf{Ho}\,\mathcal{M}''$.

$$\begin{tikzcd}
\underline{D}(X) = D(RX) \arrow[r, "\eta_{D(RX)}"] \arrow[rr, bend left, "1_{D(RX)}"] \arrow[dr, "\underline{\eta}_{\underline{D}(X)}"'] & DGD(RX) \arrow[r, "D\varepsilon_{RX}"] \arrow[d, "Du_{GD(RX)}"'] & D(RX) = \underline{D}(X) \\
& \underline{D}\,\underline{G}\,\underline{D}(X) \arrow[ur, "Dv = \underline{D}\,\underline{\varepsilon}_X"'] &
\end{tikzcd}$$

Si $Y$ est un objet de $\mathcal{M}'$ on a le diagramme commutatif suivant dans $\mathsf{Ho}\,\mathcal{M}$.

$$\begin{tikzcd}
\underline{G}(Y) = G(Y) \arrow[r, "G\eta_Y"] \arrow[rr, bend left, "1_{\underline{G}(Y)}"] \arrow[dr, "G\underline{\eta}_Y"'] & GDG(Y) \arrow[r, "\varepsilon_{GY}"] \arrow[d, "GDu_{GY}"] & G(Y) = \underline{G}(Y) \arrow[d, "u_{GY}"] \\
& \underline{G}\,\underline{D}\,\underline{G}(Y) \arrow[ur, "\underline{\varepsilon}_{\underline{G}(Y)}"'] \arrow[r, "\varepsilon_{RGY}"'] & RGY
\end{tikzcd}$$

Ceci prouve l'assertion. □

**Corollaire 6.3.** *Le foncteur* $G\ :\mathsf{Ho}\,\mathcal{M}' \longrightarrow \mathsf{Ho}\,\mathcal{M}$ *est un adjoint à gauche du foncteur* $\mathsf{R}D\ :\mathsf{Ho}\,\mathcal{M} \longrightarrow \mathsf{Ho}\,\mathcal{M}'$. *Si en outre pour tout objet* $Y$ *de* $\mathcal{M}'$, *le morphisme* $Y \longrightarrow DGY \longrightarrow D(RGY)$ *est dans* $\mathcal{W}'$, *alors le foncteur homotopique* $G : :\mathsf{Ho}\,\mathcal{M}' \longrightarrow \mathsf{Ho}\,\mathcal{M}$ *est pleinement fidèle, et le foncteur* $j\ :\mathsf{Ho}\,\mathcal{M}'' \longrightarrow \mathsf{Ho}\,\mathcal{M}'$ *est une équivalence de catégories.*

*Démonstration.* La première assertion est une spécialisation de la proposition ci-dessus. Pour la seconde, on remarque que l'hypothèse implique que les foncteurs $G$ et $\underline{G}$ sont pleinement fidèles, puisque les morphismes d'adjonction $1_{\mathsf{Ho}\,\mathcal{M}''} \longrightarrow \underline{D}\,\underline{G}$ et $1_{\mathsf{Ho}\,\mathcal{M}'} \longrightarrow \mathsf{R}D\,G$ sont des isomorphismes, et que le foncteur $j$ est essentiellement surjectif. Il reste donc à vérifier que $j$ est pleinement fidèle, ce qui résulte immédiatement de la commutativité du triangle $(\star)$. □

6.4. Soit $\mathbf{\Delta}'$ la sous-catégorie de $\mathbf{\Delta}$ dont les flèches sont les monomorphismes de $\mathbf{\Delta}$. On a deux inclusions évidentes $\mathbf{\Delta}' \longrightarrow \mathbf{\Delta}$ et $\mathbf{\Delta} \longrightarrow \mathcal{C}at$, d'où un foncteur $i\ :\mathbf{\Delta}' \longrightarrow \mathcal{C}at$. Le foncteur $i$ permet de définir un foncteur $\mathbf{\Delta}'/-\ :\mathcal{C}at \longrightarrow \mathcal{C}at$, $A \longmapsto \mathbf{\Delta}'/A$. Si $A$ est une petite catégorie, la catégorie $\mathbf{\Delta}'/A$ a pour objets les couples $(\Delta_m, \alpha)$, où $\alpha\ :\Delta_m \longrightarrow A$ est un foncteur (*i.e.* une suite de $m$ flèches composables de $A$), et pour flèches $f\ :(\Delta_m, \alpha) \longrightarrow (\Delta_n, \beta)$ les applications croissantes et injectives $f\ :\Delta_m \longrightarrow \Delta_n$ telles que $\beta f = \alpha$. On définit un foncteur $\tau_A\ :\mathbf{\Delta}'/A \longrightarrow A$ par $\tau_A(\Delta_m, \alpha) = \alpha(m)$ sur les objets et $\tau_A f = \beta(f(m) \longrightarrow n)$ sur les flèches. On obtient ainsi un morphisme de foncteurs $\tau\ :\mathbf{\Delta}'/- \longrightarrow 1_{\mathcal{C}at}$.

**Lemme 6.5.** *Pour toute petite catégorie $A$, $\mathbf{\Delta}'/A$ est une catégorie directe. Le foncteur $\mathbf{\Delta}'/-$ commute aux sommes et aux produits fibrés, et pour tout foncteur $u\ :A\longrightarrow B$, pour tout objet $b$ de $B$, le morphisme canonique $\mathbf{\Delta}'/(A/b)\longrightarrow(\mathbf{\Delta}'/A)/b$ est un isomorphisme.*

La démonstration est laissée au lecteur.

**Proposition 6.6.** *Soit $A$ une petite catégorie admettant un objet final $\omega$. On forme le carré cartésien suivant dans $\mathcal{C}at$ :*

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d] & \mathbf{\Delta}'/A \arrow[d, "\tau_A"] \\ e \arrow[r, "\omega"'] & A \end{tikzcd} .$$

*Alors la catégorie $F$ est contractile, et pout tout objet $\xi$ de $\mathbf{\Delta}'/A$, la catégorie $\xi\backslash F$ est contractile. En particulier, le foncteur $\lambda$ est $\mathsf{HOT}$-coasphérique.*

*Démonstration.* On définit un foncteur $D\ :\mathbf{\Delta}'/A\longrightarrow\mathbf{\Delta}'/A$ par

$$D(\mathit{\Delta}_m,\alpha)=(\mathit{\Delta}_{m+1},D\alpha)\ ,$$

où

$$D\alpha(k)=\begin{cases}\alpha(k) & \text{si } k\leq m\\ \omega & \text{si } k=m+1,\end{cases}$$

et si $f\ :(\mathit{\Delta}_m,\alpha)\longrightarrow(\mathit{\Delta}_n,\beta)$ est une flèche de $\mathbf{\Delta}'/A$, on pose

$$Df(k)=\begin{cases}f(k) & \text{si } k\leq m\\ n+1 & \text{si } k=m+1.\end{cases}$$

On note $\Omega\ :\mathbf{\Delta}'/A\longrightarrow\mathbf{\Delta}'/A$ le foncteur constant de valeur $(\mathit{\Delta}_0,\omega)$. Les inclusions $\mathit{\Delta}_m\longrightarrow\mathit{\Delta}_{m+1}$, $k\longmapsto k$, et $\mathit{\Delta}_0\longrightarrow\mathit{\Delta}_m$, $0\longmapsto m+1$ induisent des morphismes de foncteurs

$$\begin{tikzcd} \mathbf{\Delta}'/A \arrow[r, bend left, "1_{\mathbf{\Delta}'/A}"] \arrow[r, bend right, "D"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow"] & \mathbf{\Delta}'/A \end{tikzcd} \qquad \text{et} \qquad \begin{tikzcd} \mathbf{\Delta}'/A \arrow[r, bend left, "\Omega"] \arrow[r, bend right, "D"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow"] & \mathbf{\Delta}'/A \end{tikzcd} .$$

On remarque ensuite que le foncteur $\lambda$ est pleinement fidèle, que $(\mathit{\Delta}_0,\omega)$ est un objet de $F$, et que $\mathsf{Im}\,D\subset F$, et on obtient des morphismes de foncteurs par restriction des précédents

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, bend left, "1_F"] \arrow[r, bend right, "D"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow"] & F \end{tikzcd} \qquad \text{et} \qquad \begin{tikzcd} F \arrow[r, bend left, "\Omega"] \arrow[r, bend right, "D"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow"] & F \end{tikzcd} .$$

Cela implique que $F$ est contractile.

Soit $\xi$ un objet de $\mathbf{\Delta}'/A$. On note $\Omega_\xi\ :\xi\backslash F\longrightarrow\xi\backslash F$ le foncteur constant de valeur $(D\xi,\xi\longrightarrow D\xi)$, et on définit un foncteur $D_\xi\ :\xi\backslash F\longrightarrow\xi\backslash F$ par

$$D_\xi(\zeta,\xi\longrightarrow\zeta)=(D\zeta,\xi\longrightarrow D\xi\longrightarrow D\zeta)\ .$$

On a alors deux morphismes de foncteurs

$$\begin{tikzcd} \xi\backslash F \arrow[r, bend left, "1_{\xi\backslash F}"] \arrow[r, bend right, "D_\xi"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow"] & \xi\backslash F \end{tikzcd} \quad \text{et} \quad \begin{tikzcd} \xi\backslash F \arrow[r, bend left, "\Omega_\xi"] \arrow[r, bend right, "D_\xi"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow"] & \xi\backslash F \end{tikzcd} ,$$

définis grâce au fait que pour toute flèche $\xi \longrightarrow \zeta$ dans $\mathbf{\Delta}'/A$, on a un carré commutatif

$$\begin{tikzcd} \xi \arrow[r] \arrow[d] & D\xi \arrow[d] \\ \zeta \arrow[r] & D\zeta \end{tikzcd} .$$

On a ainsi montré que $\xi\backslash F$ est contractile. □

6.7. On considère à présent une catégorie de modèles $(\mathcal{M}, \mathcal{W}, \mathsf{Fib}, \mathsf{Cof})$, la catégorie $\mathcal{M}$ admettant des petites limites projectives, et on note $\mathbb{D} = \mathbb{D}_{(\mathcal{M},\mathcal{W})}$ le prédérivateur associé. Si $(\mathcal{M}_f, \mathcal{W}_f)$ désigne le localisateur des objets fibrants de $\mathcal{M}$, on note $\mathbb{D}_f = \mathbb{D}_{(\mathcal{M}_f,\mathcal{W}_f)}$.

Si $A$ est une catégorie directe on considère $\mathcal{M}(A)$ munie de sa structure de catégorie de modèles de Reedy (voir la proposition 4.8). On sait en outre que $\mathbb{D}\,|_{\mathcal{D}ir}$ est un dérivateur faible à gauche (proposition 4.10).

**Lemme 6.8.** *Soit $u\ : A \longrightarrow B$ un foncteur entre petites catégories. On suppose que $A$ est une catégorie directe.*

*(i) Pour toute fibration (resp. fibration triviale) $X \longrightarrow Y$ de $\mathcal{M}(A)$, et pour tout objet $b$ de $B$, le morphisme $(u_*X)_b \longrightarrow (u_*Y)_b$ est une fibration (resp. une fibration triviale) de $\mathcal{M}$.*

*(ii) Le foncteur $u_*\ : \mathcal{M}(A) \longrightarrow \mathcal{M}(B)$ admet un foncteur dérivé à droite $\mathsf{R}u_*\ : \mathbb{D}(A) \longrightarrow \mathbb{D}(B)$, lequel est un adjoint à droite du foncteur image inverse $u^*\ : \mathbb{D}(B) \longrightarrow \mathbb{D}(A)$.*

*(iii) Pour tout objet $b$ de $B$, le morphisme de changement de base $b^*\,\mathsf{R}u_* \longrightarrow \mathsf{R}p_*\,j^*$, induit par le 2-diagramme standard*

$$\begin{tikzcd} A/b \arrow[r, "j"] \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, phantom, "\swarrow\alpha"] & A \arrow[d, "u"] \\ e \arrow[r, "b"'] & B \end{tikzcd} ,$$

*est un isomorphisme dans $\mathbb{D}(e)$.*

*Démonstration.* Soit $b \in B$. Avec les notations de (iii), on a un isomorphisme canonique $b^*u_* \simeq p_*j^*$ dans $\mathcal{M}$. Or les foncteurs $p_*$ et $j^*$ sont des foncteurs de Quillen à droite en vertu de la proposition 4.8 et du lemme 4.9. Cela montre le point (i), et on en déduit le point (ii) par le corollaire 6.3.

Pour montrer le point (iii), on remarque que $\mathsf{R}(p_*\,j^*) \longrightarrow \mathsf{R}p_*\,\mathsf{R}j^* = \mathsf{R}p_*\,j^*$ est un isomorphisme par la proposition 2.7 (ii), et que $\mathsf{R}(b^*u_*) \simeq b^*\mathsf{R}u_*$ car le foncteur $b^*\ : \mathcal{M}(B) \longrightarrow \mathcal{M}$ respecte les équivalences faibles. L'isomorphisme $b^*\,u_* \simeq p_*\,j^*$ induit donc un isomorphisme $b^*\,\mathsf{R}u_* \simeq \mathsf{R}p_*\,j^*$. □

**Proposition 6.9.** *Pour toute petite catégorie $A$, le foncteur*

$$\tau_A^* \ : \mathbb{D}(A) \longrightarrow \mathbb{D}(\mathbf{\Delta}'/A)$$

*est pleinement fidèle et admet un adjoint à droite*

$$\mathsf{R}\tau_{A*} \ : \mathbb{D}(\mathbf{\Delta}'/A) \longrightarrow \mathbb{D}(A)\,.$$

*Le $\mathcal{C}at$-morphisme $\mathbb{D}_f \longrightarrow \mathbb{D}$ est une $\mathcal{C}at$-équivalence.*

*Démonstration.* Soit $X$ un objet de $\mathcal{M}(A)$. On se donne une équivalence faible de but fibrant $\tau_A^* X \longrightarrow Y$ dans $\mathcal{M}(\mathbf{\Delta}'/A)$, et on va montrer que le morphisme induit par adjonction $X \longrightarrow \tau_{A*}Y$ est une équivalence faible. Pour chaque objet $a$ de $A$, on a le 2-diagramme standard

$$\begin{tikzcd} \mathbf{\Delta}'/A/a \arrow[r, "j"] \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, phantom, "\Swarrow\alpha"] & \mathbf{\Delta}'/A \arrow[d, "\tau_A"] \\ e \arrow[r, "a"'] & A \end{tikzcd} \quad ,$$

et un isomorphisme canonique $a^*\,\tau_{A*} \simeq p_*\,j^*$. On veut donc montrer que la flèche $X_a \longrightarrow p_*j^*Y$ est une équivalence faible de $\mathcal{M}$, ou encore qu'elle induit un isomorphisme dans $\mathsf{Ho}\,\mathcal{M}$ (en vertu de la proposition 2.3). On a en outre l'identification $p_*\,j^*Y = \mathsf{R}p_*\,j^*\,\tau_A^*X$ dans $\mathsf{Ho}\,\mathcal{M}$ (par les lemmes 4.9 et 6.8). Formons le carré cartésien suivant dans $\mathcal{C}at$ :

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "q"'] & \mathbf{\Delta}'/A/a \arrow[d, "\tau_{A/a}"] \\ e \arrow[r, "(a{,}1_a)"'] & A/a \end{tikzcd} \quad .$$

Par la proposition 6.6, on sait que $F$ est une catégorie contractile, et donc $\mathbb{D}$-asphérique, ce qui donne un isomorphisme canonique $1_{\mathsf{Ho}\,\mathcal{M}} \longrightarrow \mathsf{R}q_*\,q^*$, et que le foncteur $\lambda$ est $\mathsf{HOT}$-coasphérique, ce qui implique par le corollaire 5.7 que le morphisme canonique $\mathsf{R}p_* \longrightarrow \mathsf{R}q_*\,\lambda^*$ est un isomorphisme. Vu que $\lambda^*\,j^*\,\tau_A^* = q^*\,a^*$, on en déduit les isomorphismes suivants dans $\mathsf{Ho}\,\mathcal{M}$ :

$$X_a \simeq \mathsf{R}q_*\,q^*X_a \simeq \mathsf{R}q_*\,q^*\,a^*X \simeq \mathsf{R}q_*\,\lambda^*\,j^*\,\tau_A^*X \simeq \mathsf{R}p_*\,j^*\,\tau_A^*X \ .$$

Le lemme 6.8, (i) permet d'appliquer le corollaire 6.3 pour $G = \tau_A^*$ et $D = \tau_{A*}$ (la catégorie $\mathcal{M}_f(A)$ jouant le rôle de $\mathcal{M}''$), ce qui achève la démonstration. □

**Corollaire 6.10.** *Pour toute petite catégorie $A$, la catégorie $\mathbb{D}(A)$ est localement petite (autrement-dit, pour toute paire $X, Y$ d'objets de $\mathbb{D}(A)$, $\mathsf{Hom}_{\mathbb{D}(A)}(X,Y)$ est un petit ensemble).*

**Théorème 6.11.** *Sous les hypothèses du numéro 6.7, le prédérivateur $\mathbb{D}$ est un dérivateur faible à gauche de domaine $\mathcal{C}at$.*

*Démonstration.* Soit $(A_i)_i$ une famille de petites catégories. Alors le foncteur canonique $\mathbb{D}(\coprod_i A_i) \longrightarrow \prod_i \mathbb{D}(A_i)$ est une équivalence de catégories. En effet, comme il est évident qu'il est biunivoque sur les objets, il suffit de vérifier qu'il est pleinement fidèle, ce qui se déduit du carré commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{D}(\coprod_i A_i) \arrow[r] \arrow[d, "(\coprod_i \tau_{A_i})^*"'] & \prod_i \mathbb{D}(A_i) \arrow[d, "\prod_i \tau^*_{A_i}"] \\
\mathbb{D}(\coprod_i \mathbf{\Delta}'/A_i) \arrow[r] & \prod_i \mathbb{D}(\mathbf{\Delta}'/A_i)
\end{tikzcd} \quad ,$$

car les foncteurs $(\coprod_i \tau_{A_i})^* = \tau^*_{\coprod_i A_i}$ et $\prod_i \tau^*_{A_i}$ sont pleinement fidèles (proposition 6.9), et le foncteur $\mathbb{D}(\coprod_i \mathbf{\Delta}'/A_i) \longrightarrow \prod_i \mathbb{D}(\mathbf{\Delta}'/A_i)$ est une équivalence de catégories en vertu du lemme 2.8. Etant donné que l'on sait déjà que $\mathbb{D}(\varnothing) = e$, cela montre en particulier l'axiome Der 1.

Montrons l'axiome Der 2. Soit $A$ une petite catégorie. Si $\phi$ est une flèche de $\mathbb{D}(A)$ telle que pour tout objet $a$ de $A$, $\phi_a$ soit un isomorphisme de $\mathbb{D}(e)$, alors pour tout objet $\xi$ de $\mathbf{\Delta}'/A$, $(\tau^*_A\phi)_\xi$ est un isomorphisme, et donc $\tau^*_A\phi$ est un isomorphisme de $\mathbb{D}(\mathbf{\Delta}'/A)$. Comme le foncteur $\tau^*_A$ est pleinement fidèle (proposition 6.9), on en déduit que $\phi$ est un isomorphisme.

Soit $u \ : A \longrightarrow B$ un foncteur entre petites catégories. On a alors le carré commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{\Delta}'/A \arrow[r, "\mathbf{\Delta}'/u"] \arrow[d, "\tau_A"'] & \mathbf{\Delta}'/B \arrow[d, "\tau_B"] \\
A \arrow[r, "u"'] & B
\end{tikzcd} \quad .$$

On définit un foncteur $\mathsf{R}u_* \ : \mathbb{D}(A) \longrightarrow \mathbb{D}(B)$ comme le composé

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{D}(\mathbf{\Delta}'/A) \arrow[r, "\mathsf{R}(\mathbf{\Delta}'/u)_*"] & \mathbb{D}(\mathbf{\Delta}'/B) \arrow[d, "\mathsf{R}\tau_{B*}"] \\
\mathbb{D}(A) \arrow[u, "\tau^*_A"] \arrow[r, "\mathsf{R}u_*"'] & \mathbb{D}(B)
\end{tikzcd} \qquad \mathsf{R}u_* = \mathsf{R}\tau_{B*}\,\mathsf{R}(\mathbf{\Delta}'/u)_*\,\tau^*_A \quad .$$

La pleine fidèlité du foncteur $\tau^*_A$ (proposition 6.9) et le lemme 6.8, (ii) montrent que ce foncteur est un adjoint à droite du foncteur $u^* \ : \mathbb{D}(B) \longrightarrow \mathbb{D}(A)$, ce qui montre Der 3g.

Il reste donc à montrer l'axiome Der 4g. Soit $u \ : A \longrightarrow B$ un foncteur entre petites catégories, et $b$ un objet de $B$. On a le 2-diagramme standard associé à $(u, b)$,

$$\begin{tikzcd}
A/b \arrow[r, "j"] \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, phantom, "\swArrow\,\alpha"] & A \arrow[d, "u"] \\
e \arrow[r, "b"'] & B
\end{tikzcd}$$

ainsi que le carré cartésien ci-dessous.

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{\Delta}'/A/b \arrow[r, "\mathbf{\Delta}'/j"] \arrow[d, "\tau_{A/b}"'] & \mathbf{\Delta}'/A \arrow[d, "\tau_A"] \\
A/b \arrow[r, "j"'] & A
\end{tikzcd}$$

On retrouve en les composant le 2-diagramme standard associé au couple $(u\tau_A, b)$.

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{\Delta}'/A/b \arrow[r, "\mathbf{\Delta}'/j"] \arrow[d, "q"'] \arrow[dr, phantom, "\swarrow \beta"] & \mathbf{\Delta}'/A \arrow[d, "u\tau_A"] \\
e \arrow[r, "b"'] & B
\end{tikzcd}$$

En vertu du lemme 6.8, on a un isomorphisme $b^* \, \mathsf{R}(u\tau_A)_* \simeq \mathsf{R}q_* \, (\mathbf{\Delta}'/j)^*$. Comme les foncteurs $\tau_A^*$ et $\tau_{A/b}^*$ sont pleinement fidèles, on obtient les isomorphismes canoniques ci-dessous, ce qui achève la démonstration. □

$$\begin{aligned}
b^* \, \mathsf{R}u_* &\simeq b^* \, \mathsf{R}u_* \, \mathsf{R}\tau_{A*} \, \tau_A^* \\
&\simeq b^* \, \mathsf{R}(u\tau_A)_* \, \tau_A^* \\
&\simeq \mathsf{R}q_* \, (\mathbf{\Delta}'/j)^* \, \tau_A^* \\
&\simeq \mathsf{R}p_* \, \mathsf{R}\tau_{A/b_*} \, (\mathbf{\Delta}'/j)^* \, \tau_A^* \\
&\simeq \mathsf{R}p_* \, \mathsf{R}\tau_{A/b_*} \, \tau_{A/b}^* \, j^* \\
&\simeq \mathsf{R}p_* \, j^* \ .
\end{aligned}$$

**Proposition 6.12.** *Soient* $(\mathcal{M}', \mathcal{W}', \mathsf{Fib}', \mathsf{Cof}')$ *une catégories de modèles, et* $F \ : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}'$ *un foncteur de Quillen à droite. On note* $\mathbb{D}'$ *le prédérivateur associé au localisateur* $(\mathcal{M}', \mathcal{W}')$*. Alors Il existe un* $\mathcal{C}at$*-morphisme*

$$\mathsf{R}F \ : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}' \ ,$$

*tel que pour chaque petite catégorie* $A$*, le foncteur* $\mathsf{R}F \ : \mathbb{D}(A) \longrightarrow \mathbb{D}'(A)$ *soit le foncteur dérivé à droite du foncteur* $F \ : \mathcal{M}(A) \longrightarrow \mathcal{M}'(A)$*.*

*En outre, si* $\mathcal{M}'$ *admet des petites limites projectives, et si* $F$ *commute aux limites projectives, alors le* $\mathcal{C}at$*-morphisme* $\mathsf{R}F$ *est continu.*

*Démonstration.* La restriction de $F$ à $\mathcal{M}_f$ définit un morphisme de localisateurs $\overline{F} \ : (\mathcal{M}_f, \mathcal{W}_f) \longrightarrow (\mathcal{M}', \mathcal{W}')$, et donc un $\mathcal{C}at$-morphisme $\overline{F} \ : \mathbb{D}_f \longrightarrow \mathbb{D}'$. D'autre part, en vertu de la proposition 6.9, on a une $\mathcal{C}at$-équivalence $i \ : \mathbb{D}_f \longrightarrow \mathbb{D}$. On choisit un quasi-inverse $i^{-1}$ de $i$, et on définit $\mathsf{R}F$ par $\mathsf{R}F = \overline{F} \, i^{-1}$.

Supposons qu'en outre $\mathcal{M}'$ admette des petites limites projectives, et que $F$ commute aux limites projectives, et considérons une petite catégorie $A$. Alors le morphisme canonique $\mathsf{R}F \, \mathsf{R}\tau_{A*} \longrightarrow \mathsf{R}\tau_{A_*}\mathsf{R}F$ est un isomorphisme, car pour chaque objet $a$ de $A$, en regard du 2-diagramme standard

$$\begin{tikzcd} \mathbf{\Delta}'/A/a \arrow[r, "j"] \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, phantom, "\Swarrow\alpha"] & \mathbf{\Delta}'/A \arrow[d, "\tau_A"] \\ e \arrow[r, "a"'] & A \end{tikzcd} ,$$

on a des isomorphismes $a^* \,\mathsf{R}\tau_{A*} \simeq \mathsf{R}p_*\, j^*$ dans $\mathsf{Ho}\,\mathcal{M}$ et $\mathsf{Ho}\,\mathcal{M}'$, et comme on sait que $\mathsf{R}F|_{\mathcal{D}ir}$ est continu (par la proposition 4.14), on obtient des isomorphismes

$$a^*\mathsf{R}F\,\mathsf{R}\tau_{A*} \simeq \mathsf{R}F\,a^*\mathsf{R}\tau_{A*} \simeq \mathsf{R}F\,\mathsf{R}p_*\,j^* \simeq \mathsf{R}p_*\,j^*\mathsf{R}F \simeq a^*\,\mathsf{R}\tau_{A*}\,\mathsf{R}F\ ,$$

ce qui permet de conclure en utilisant Der 2.

Si $u\ : A \longrightarrow B$ est un foncteur entre petites catégories, on a un carré commutatif dans $\mathcal{C}at$

$$\begin{tikzcd} \mathbf{\Delta}'/A \arrow[r, "\mathbf{\Delta}'/u"] \arrow[d, "\tau_A"'] & \mathbf{\Delta}'/B \arrow[d, "\tau_B"] \\ A \arrow[r, "u"'] & B \end{tikzcd} ,$$

et $\mathsf{R}u_* = \mathsf{R}\tau_{B*}\,\mathsf{R}(\mathbf{\Delta}'/u)_*\,\tau_A^*$. On en déduit les identifications suivantes dans $\mathbb{D}'(B)$,

$$\mathsf{R}F\,\mathsf{R}u_* = \mathsf{R}F\,\mathsf{R}\tau_{B*}\,\mathsf{R}(\mathbf{\Delta}'/u)_*\,\tau_A^* \simeq \mathsf{R}\tau_{B*}\,\mathsf{R}(\mathbf{\Delta}'/u)_*\,\tau_A^*\mathsf{R}F = \mathsf{R}u_*\,\mathsf{R}F,$$

ce qui achève la démonstration. □

*Remarque* 6.13. Si on note encore $\mathcal{M}$ le prédérivateur représenté par $\mathcal{M}$, on a un $\mathcal{C}at$-morphisme canonique de localisation $\gamma\ : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{D}$, ainsi que son analogue $\gamma'\ : \mathcal{M}' \longrightarrow \mathbb{D}'$, et le $\mathcal{C}at$-morphisme $\mathsf{R}F$ défini dans la proposition ci-dessus peut alors être vu comme le $\mathcal{C}at$-morphisme dérivé à droite du $\mathcal{C}at$-morphisme $F\ : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}'$, *i.e.* pour tout $\mathcal{C}at$-morphisme $G\ : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}'$, on a une bijection canonique

$$\mathsf{Hom}(\mathsf{R}F, G) \simeq \mathsf{Hom}(\gamma'\,F, G\,\gamma)\ .$$

Les propositions 2.7, (ii) et 6.12 montrent qu'on définit ainsi un 2-pseudo-foncteur de la 2-catégorie des catégories de modèles admettant des petites limites projectives, avec pour 1-flèches les foncteurs de Quillen à droite, et pour 2-flèches les morphismes de tels foncteurs, vers celle des dérivateurs faibles à gauche.

**Proposition 6.14.** *Pour tout objet $X$ de $\mathsf{Ho}\,\mathcal{M}$, il existe un $\mathcal{C}at$-morphisme continu,*

$$\mathsf{R}\,\mathsf{Hom}(X,\ .\ )\ : \mathbb{D} \longrightarrow \mathsf{HOT}\ ,$$

*tel que le triangle suivant commute (à isomorphisme près) :*

$$\begin{tikzcd} \mathsf{Ho}\,\mathcal{M} \arrow[rr, "\mathsf{R}\,\mathsf{Hom}(X,\ .\ )"] \arrow[dr, "\mathsf{Hom}_{\mathsf{Ho}\,\mathcal{M}}(X,\ .\ )"'] & & \mathsf{Hot} \arrow[dl, "\pi_0"] \\ & \mathcal{E}ns & \end{tikzcd} .$$

*Démonstration.* Soit $X$ un objet de $\mathcal{M}$. On choisit une équivalence faible de source cofibrante $A \longrightarrow p^*_{\mathbf{\Delta}^\circ}X$ au sens de la structure de catégorie de modèles de la proposition 4.8, et on obtient en vertu des propositions 5.4 et 6.12, un $\mathcal{C}at$-morphisme continu $\mathsf{R}A^* \ : \mathbb{D} \longrightarrow \mathsf{HOT}$. On pose $\mathsf{R}\,\mathsf{Hom}(X,\ .\ ) = \mathsf{R}A^*$. Comme $X \simeq A_0$ dans $\mathsf{Ho}\,\mathcal{M}$, on conclut grâce à la seconde assertion de la proposition 5.4. □

*Remarque heuristique* 6.15 (unicité du $\mathsf{Hom}$ externe). On rappelle que le foncteur nerf $\mathsf{N}\ : \mathcal{C}at \longrightarrow \widehat{\mathbf{\Delta}}$ est défini par

$$A \longmapsto (\Delta_n \longmapsto \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}at}(\Delta_n, A))\ ,$$

et que si on pose $\mathcal{W}_\infty = \mathsf{N}^{-1}\,\mathcal{W}_{\widehat{\mathbf{\Delta}}}$, on peut montrer que le morphisme de localisateurs induit $\mathsf{N}\ : (\mathcal{C}at, \mathcal{W}_\infty) \longrightarrow (\widehat{\mathbf{\Delta}}, \mathcal{W}_{\widehat{\mathbf{\Delta}}})$ définit une $\mathcal{C}at$-équivalence $\mathbb{D}_{(\mathcal{C}at,\mathcal{W}_\infty)} \longrightarrow \mathsf{HOT}$ (voir [4]). Dans ce qui suit, on considère le modèle de $\mathsf{HOT}$ donné par $(\mathcal{C}at, \mathcal{W}_\infty)$. On peut alors montrer que pour toute petite catégorie $A$, on a un isomorphisme canonique dans $\mathsf{Hot}$ : $\mathsf{L}p_{A!}\,p^*_A(e) \simeq A$. En outre, pour chaque préfaisceau $F$ sur $A$ à valeur dans $\mathcal{C}at$, on peut considérer sa catégorie fibrée associée $K_F$, et noter $\sigma_F\ : K_F \longrightarrow A$ la projection canonique (qui est donc une fibration au sens catégorique du terme). On vérifie qu'on a alors un isomorphisme canonique dans $\mathsf{HOT}(A)$ : $\mathsf{L}\sigma_{F!}\,p^*_{K_F}(e) \simeq F$ (voir [4]). Cela permet de définir pour chaque objet $X$ de $\mathbb{D}(e)$ et chaque objet $Y$ de $\mathbb{D}(A)$, un foncteur

$$\mathsf{HOT}(A)^\circ \longrightarrow \mathcal{E}ns \quad , \qquad F \longmapsto \mathsf{Hom}_{\mathbb{D}(e)}(X, \mathsf{R}p_{K_F*}\,\sigma^*_F\,Y)\ .$$

Or pour tout $\mathcal{C}at$-morphisme $\mathsf{R}\,\mathsf{Hom}(X,\ .\ )$ vérifiant les propriétés demandées dans la proposition ci-dessus, on a les bijections naturelles suivantes :

$$\begin{aligned}
\mathsf{Hom}_{\mathbb{D}(e)}(X, \mathsf{R}p_{K_F*}\,\sigma^*_F\,Y) &\simeq \pi_0\,\mathsf{R}\,\mathsf{Hom}(X, \mathsf{R}p_{K_F*}\,\sigma^*_F\,Y)\\
&\simeq \mathsf{Hom}_{\mathsf{Hot}}(e, \mathsf{R}\,\mathsf{Hom}(X, \mathsf{R}p_{K_F*}\,\sigma^*_F\,Y))\\
&\simeq \mathsf{Hom}_{\mathsf{Hot}}(e, \mathsf{R}p_{K_F*}\,\sigma^*_F\,\mathsf{R}\,\mathsf{Hom}(X, Y))\\
&\simeq \mathsf{Hom}_{\mathsf{HOT}(A)}(\mathsf{L}\sigma_{F!}\,p^*_{K_F}(e), \mathsf{R}\,\mathsf{Hom}(X, Y))\\
&\simeq \mathsf{Hom}_{\mathsf{HOT}(A)}(F, \mathsf{R}\,\mathsf{Hom}(X, Y))\ .
\end{aligned}$$

Cela montre que le foncteur $F \longmapsto \mathsf{Hom}_{\mathbb{D}(e)}(X, \mathsf{R}p_{K_F*}\,\sigma^*_F\,Y)$, est représenté par l'objet $\mathsf{R}\,\mathsf{Hom}(X, Y)$, et donc que pour chaque objet $X$ de $\mathsf{Ho}\,\mathcal{M}$, le $\mathcal{C}at$-morphisme continu $\mathsf{R}\,\mathsf{Hom}(X,\ .\ )$ défini dans la proposition ci-dessus est unique à isomorphisme unique près.

**Corollaire 6.16.** *Pour tout foncteur* $\mathsf{HOT}$*-coasphérique entre petites catégories,* $u\ : A \longrightarrow B$*, le morphisme canonique* $\mathsf{R}p_{B*} \longrightarrow \mathsf{R}p_{A*}\,u^*$ *est un isomorphisme dans* $\mathsf{Ho}\,\mathcal{M}$*.*

*Démonstration.* On procède comme pour la preuve du corollaire 5.7 en utilisant cette fois la proposition 6.14. □

*Scholie* 6.17. On rappelle qu'une catégorie de modèles est *propre à droite* si l'image réciproque de toute équivalence faible par une fibration est une équivalence faible. Une catégorie de modèles $\mathcal{M}$ est *propre à gauche* si $\mathcal{M}^\circ$ est propre à droite, et elle est *propre* si elle est propre à droite et à gauche. Par exemple la catégorie des ensembles simpliciaux est propre, et si $A$ est un anneau, les deux structures de catégorie de modèles définies sur la catégorie des complexes de $A$-modules [16, théorèmes 2.3.11 et 2.3.13] sont propres. La proposition 6.9 implique le résultat suivant.

**Théorème.** *Soit $\mathcal{M}$ une catégorie de modèles admettant des petites limites projectives, dont les cofibrations sont exactement les monomorphismes. Si $\mathcal{M}$ est propre à droite, alors pour toute petite catégorie $A$, $\mathcal{M}(A)$ admet une structure de catégorie de modèles dont les cofibrations sont les monomorphismes et dont les équivalences faibles sont les éléments de $\mathcal{W}_A$.*

*Démonstration.* Si $A$ est une petite catégorie, on note $\mathsf{Cof}_A$ la classe des monomorphismes de $\mathcal{M}(A)$, *i.e.* des flèches $f$ telles que pour tout $a \in \mathsf{Ob}\, A$, $f_a \in \mathsf{Cof}$, et $\mathsf{Fib}_A = r(\mathsf{Cof}_A \cap \mathcal{W}_A)$. On veut montrer que $(\mathcal{M}(A), \mathcal{W}_A, \mathsf{Fib}_A, \mathsf{Cof}_A)$ est une catégorie de modèles, sachant que cela est vérifié lorsque la catégorie d'indice est directe. Les axiomes CM1, CM2 et CM3 sont immédiats. Comme le foncteur $\tau_A^*$ respecte les cofibrations et les cofibrations triviales, on a les inclusions

$$\tau_{A*}\mathsf{Fib}_{\mathbf{\Delta}'/A} \subset \mathsf{Fib}_A \quad \text{et} \quad \tau_{A*}\mathsf{Fib}_{\mathbf{\Delta}'/A} \cap \mathcal{W}_{\mathbf{\Delta}'/A} \subset r(\mathsf{Cof}_A) \cap \mathcal{W}_A \subset \mathsf{Fib}_A \cap \mathcal{W}_A \ .$$

D'autre part, comme le foncteur $\tau_{A*}$ est un adjoint à droite, il respecte les monomorphismes, et donc les cofibrations. On en déduit facilement grâce à la pleine fidélité du foncteur $\tau_A^* : \mathcal{M}(A) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{\Delta}'/A)$ que toute flèche $f$ de $\mathcal{M}(A)$ admet une factorisation en une cofibration $i$ suivie d'un élément $p$ de $r(\mathsf{Cof}_A) \cap \mathcal{W}_A \subset \mathsf{Fib}_A \cap \mathcal{W}_A$. Le lemme du rétracte [16, lemme 1.1.9] permet alors de montrer la partie manquante de CM4. Soit $f : X \longrightarrow Y$ une flèche de $\mathcal{M}(A)$. On va montrer que $f$ admet une factorisation en une cofibration triviale suivie d'une fibration. On choisit une cofibration triviale de but fibrant $k : \tau_A^* Y \longrightarrow Y'$ dans $\mathcal{M}(\mathbf{\Delta}'/A)$, puis une factorisation de $k\tau_A^* f$ en une cofibration triviale $j : \tau_A^* X \longrightarrow X'$ suivie d'une fibration $q : X' \longrightarrow Y'$. Les propositions 2.3 et 6.9 impliquent que $\tau_{A*}j$ et $\tau_{A*}k$ sont des équivalences faibles, et donc que ce sont des cofibrations triviales. D'autre part, $\tau_{A*}q$ est une fibration. On forme le diagramme commutatif suivant dans $\mathcal{M}(A)$ (dans lequel on considère l'isomorphisme canonique $1_{\mathcal{M}(A)} \simeq \tau_{A*}\, \tau_A^*$ comme une égalité).

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "i"'] \arrow[drr, bend left, "\tau_{A*}j"] \arrow[ddr, bend right, "f"'] & & \\
& Z \arrow[r] \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, phantom, "\text{cartésien}"] & \tau_{A*}X' \arrow[d, "\tau_{A*}q"] \\
& Y \arrow[r, "\tau_{A*}k"'] & \tau_{A*}Y'
\end{tikzcd}$$

Comme $p$ est l'image réciproque de la fibration $\tau_{A*}q$, $p \in \mathsf{Fib}_A$, et comme $i$ est un monomorphisme, la propreté à droite de $\mathcal{M}$ et le lemme 6.8, (i) impliquent que $i \in \mathsf{Cof}_A \cap \mathcal{W}_A$, ce qui prouve l'assertion. On a ainsi montré l'axiome CM5. $\square$

## Références

[1] D. W. Anderson. Fibrations and geometric realizations. *Bulletin of the A.M.S.*, 84(5) :765–788, 1978.

[2] W. Chachólski, J. Scherer. Homotopy theory of diagrams. *Memoirs of the Amer. Math. Soc.*, 155(736), 2002.

[3] D.-C. Cisinski. Le localisateur fondamental minimal. Prépublication, 2002.

[4] D.-C. Cisinski. Propriétés universelles et extensions de Kan dérivées. Prépublication, 2002.

[5] S. E. Crans. Quillen closed model structures for sheaves. *J. Pure Appl. Algebra*, 101 :35–57, 1995.

[6] W. G. Dwyer and D. M. Kan. Function complexes in homotopical algebra. *Topology*, 19 :427–440, 1980.

[7] W. G. Dwyer, P. S. Hirschhorn, D. M. Kan. *Model categories and more abstract homotopy theory : a work in what we like to think of as progress*. En préparation.

[8] W. G. Dwyer, P. S. Hirschhorn, D. M. Kan. *Model categories and more abstract homotopy theory : the next generation*. En préparation.

[9] P. Gabriel, M. Zisman. *Calculus of fractions and homotopy theory*. Ergebnisse der Mathematik, Band 35. Springer-Verlag, 1967.

[10] A. Grothendieck. *Pursuing stacks*. Manuscrit, 1983.

[11] A. Grothendieck. *Dérivateurs*. Manuscrit, ∼1990.

[12] A. Heller. Homotopy theories. *Memoirs of the Amer. Math. Soc.*, 71(383), 1988.

[13] A. Heller. Homological algebra and (semi)stable homotopy. *J. Pure. Appl. Algebra*, 115 :131–139, 1997.

[14] A. Heller. Stable homotopy theories and stabilization. *J. Pure. Appl. Algebra*, 115 :113–130, 1997.

[15] P. S. Hirschhorn. *Localization of model categories*. En préparation.

[16] M. Hovey. *Model Categories*. Math. surveys and monographs, Vol. 63. Amer. Math. Soc., 1999.

[17] A. Joyal and M. Tierney. *An introduction to simplicial homotopy theory*. Prépublication.

[18] S. Mac Lane. *Categories for the working mathematician*. Graduate texts in Mathematics. Springer-Verlag, 1998. Second edition.

[19] G. Maltsiniotis. *Introduction à la théorie des dérivateurs*. En préparation. Version préliminaire disponible à l'adresse http ://www.math.jussieu.fr/~maltsin/, 2002.

[20] G. Maltsiniotis. *La théorie de l'homotopie de Grothendieck*. Avec deux appendices par D.-C. Cisinski. Prépublication 332 de l'Institut de Mathématiques de Jussieu (Universités Paris 6 et Paris 7/CNRS), juin 2002.

[21] T. Psarogiannakopoulos. *Kan extensions for Quillen's closed model category structures*. Thèse. Cambridge, 1999.

[22] D. Quillen. *Homotopical Algebra*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 43. Springer-Verlag, 1967.

[23] D. Quillen. Higher algebraic K-theory, *Higher K-theories I*, pages 85–147. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 341. Springer-Verlag, 1973.

[24] R. Thomason. Homotopy colimits in the category of small categories. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 85 :91–109, 1979.

Institut de Mathématiques de Jussieu, Université Paris 7, case 7012, 2, place Jussieu, 75251 Paris cedex 05 France.

*E-mail address*: `cisinski@math.jussieu.fr`