LE DÉRIVATEUR TRIANGULÉ ASSOCIÉ À UNE CATÉGORIE EXACTE

BERNHARD KELLER

Abstract. Nous esquissons une démonstration du fait que la catégorie dérivée d'une catégorie exacte est à la base d'un dérivateur triangulé.

1. La catégorie dérivée

Soit $\mathcal{E}$ une catégorie exacte au sens de Quillen [2]. Suivant la terminologie de Gabriel [1], nous appelons *conflations* ses suites exactes admissibles, *inflations* ses monomorphismes admissibles et *déflations* ses épimorphismes admissibles. Un complexe

$$\ldots \to M^p \xrightarrow{d^p} M^{p+1} \to \ldots \ , \ p \in \mathbb{Z} \ , \ d^2 = 0 \ ,$$

sur $\mathcal{E}$ est *borné* si M^p s'annule pour tout $|p| \gg 0$. On note $\mathsf{C}^b\mathcal{E}$ *la catégorie des complexes bornés* sur $\mathcal{E}$ et $\mathsf{H}^b\mathcal{E}$ *la catégorie quotient* de $\mathsf{C}^b\mathcal{E}$ par l'idéal des morphismes homotopes à zéro. Rappelons que la catégorie $\mathsf{H}^b\mathcal{E}$ est triangulée au sens de Verdier [3].

Un complexe M est *contractile* s'il est isomorphe au complexe nul dans $\mathsf{H}^b\mathcal{E}$. Il est *acyclique* s'il existe des conflations

$$Z^p \xrightarrow{i^p} M^p \xrightarrow{q^p} Z^{p+1} \ , \ p \in \mathbb{Z} \ ,$$

telles que $d^p = i^{p+1}q^p$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$. Si $\mathcal{E}$ est *Karoubienne* (c'est-à-dire que tout endomorphisme idempotent d'un objet de $\mathcal{E}$ admet un noyau), alors tout complexe contractile est acyclique. On note $\mathcal{N} = \mathcal{N}_{\mathcal{E}}$ la sous-catégorie pleine de $\mathsf{H}^b\mathcal{E}$ dont les objets sont les complexes qui, dans $\mathsf{H}^b\mathcal{E}$, sont isomorphes à des complexes acycliques. Voici une autre description de $\mathcal{N}$: soit $\mathcal{E} \to \widetilde{\mathcal{E}}$ le foncteur additif universel de $\mathcal{E}$ vers une catégorie additive Karoubienne. La catégorie $\widetilde{\mathcal{E}}$ devient exacte si on la munit des suites qui sont des facteurs directs d'images de conflactions de $\mathcal{E}$. On montre alors qu'un complexe sur $\mathcal{E}$ appartient à $\mathcal{N}$ si et seulement si son image dans $\mathsf{H}^b\widetilde{\mathcal{E}}$ est acyclique. La catégorie $\mathcal{N}_{\widetilde{\mathcal{E}}}$ est une sous-catégorie triangulée épaisse de $\mathsf{H}^b\widetilde{\mathcal{E}}$. On en déduit que $\mathcal{N}$ est une sous-catégorie triangulée épaisse de $\mathsf{H}^b\mathcal{E}$. On note Σ le système multiplicatif associé à $\mathcal{N}$ et on appelle *quasi-isomorphismes* les éléments de Σ. Un morphisme s de $\mathsf{H}^b\mathcal{E}$ est donc un quasi-isomorphisme ssi, dans tout triangle

$$L \xrightarrow{s} M \to N \to L[1] \ ,$$

le complexe N appartient à $\mathcal{N}$. La *catégorie dérivée* $\mathsf{D}^b\mathcal{E}$ est la localisée de $\mathsf{H}^b\mathcal{E}$ par rapport à Σ. Il en résulte que $\mathsf{D}^b\mathcal{E}$ est une catégorie triangulée, 2-fonctorielle en la catégorie exacte $\mathcal{E}$.

Date: August 6, 2002, last modified on August 6, 2002.
Key words and phrases. Derived category.

2. Le dérivateur triangulé

Soit $\mathcal{E}$ une catégorie exacte. Soit A une petite catégorie. La catégorie des préfaisceaux

$$\mathcal{E}(A) = \underline{\mathsf{H}om}(A^o, \mathcal{E})$$

devient une catégorie exacte si on la munit des suites qui sont des conflations argument par argument. Nous avons un isomorphisme de catégories exactes

$$\widetilde{\mathcal{E}(A)} \xrightarrow{\sim} \widetilde{\mathcal{E}}(A).$$

On en déduit qu'un morphisme s de $\mathsf{H}^b(\mathcal{E}(A))$ appartient à $\Sigma_{\mathcal{E}(A)}$ si et seulement si $s(a)$ appartient à $\Sigma_{\mathcal{E}}$ pour tout objet a de A. On pose

$$\mathbb{D}A = \mathbb{D}_{\mathcal{E}}A = \mathsf{D}^b(\mathcal{E}(A)).$$

On obtient ainsi un prédérivateur défini sur la 2-catégorie des petites catégories. On montre que $\mathbb{D}$ satisfait aux axiomes **Der 1** et **Der 2** d'un dérivateur.

Dorénavant nous considérons la restriction de $\mathbb{D}$ à la 2-catégorie des catégories directes finies. Nous la notons encore $\mathbb{D}$. Nous allons esquisser une démonstration du fait qu'elle est un dérivateur triangulé.

Soit A une catégorie directe finie et a un objet de A. Notons $i_{a,A} : e \to A$ le foncteur déterminé par a. Le foncteur d'évaluation

$$i_{a,A}^* : \mathcal{E}(A) \to \mathcal{E}(e)\ ,\ F \mapsto F(a)$$

admet un adjoint à droite $i_{a,A\,*}$ qui envoie un objet M de $\mathcal{E}$ sur le préfaisceau

$$b \mapsto \prod_{A(a,b)} M.$$

Les foncteurs $i_{a,A}^*$ et $i_{a,A\,*}$ sont exacts. Ils induisent donc un couple de foncteurs adjoints, désignés par les mêmes symboles, entre $\mathbb{D}(A)$ et $\mathbb{D}(e)$.

Lemme 1. *La catégorie triangulée $\mathbb{D}A$ est engendrée par les objets $i_{a,A\,*}M$, où a parcourt les objets de A et M ceux de $\mathcal{E}$.*

Proof. Comme $\mathbb{D}A$ est engendrée par $\mathcal{E}(A)$, il suffit de montrer que tout objet de $\mathcal{E}(A)$ appartient à la sous-catégorie triangulée de $\mathbb{D}A$ engendrée par les $i_{a,A\,*}M$. Soit F un objet de $\mathcal{E}(A)$. Considérons le morphisme

$$F \xrightarrow{\varphi F} \prod_{a \in \mathsf{obj}\, A} i_{a,A\,*}(F(a))$$

dont les composantes sont les morphismes d'adjonction. Pour tout objet a de A, le morphisme $(\varphi F)(a)$ admet une rétraction. Donc φF est une inflation de $\mathcal{E}(A)$. Notons IF son but et CF son conoyau. Nous obtenons un complexe acyclique naturel

$$0 \to F \to IF \to ICF \to \ldots \to IC^pF \to \ldots\ ,$$

D'où un quasi-isomorphisme entre F et ce complexe amputé de F. On vérifie que C^pF s'annule dès que p excède la longueur maximale d'une chaîne

$$a_0 \to a_1 \to \ldots \to a_n$$

de morphismes non identiques de A. L'affirmation en découle. $\surd$

Lemme 2. *Soient $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$ des catégories triangulées et $F : \mathcal{S} \to \mathcal{T}$ un foncteur triangulé. Supposons que $\mathcal{T}$ est engendrée, en tant que catégorie triangulée, par une classe d'objets $\mathcal{X}$.*

a) *Le foncteur F admet un adjoint à droite si (et seulement si) pour tout objet $X \in \mathcal{X}$, le foncteur*

$$\mathcal{T}\,(F?, X) : \mathcal{S}^o \to \mathsf{A}b$$

est représentable. Dans ce cas, cet adjoint se complète de manière canonique en un foncteur triangulé.

b) *Soit $G : \mathcal{S} \to \mathcal{T}$ un autre foncteur triangulé et soit $\varphi : F \to G$ un morphisme de foncteurs triangulés. Le morphisme φ est inversible si (et seulement si) φX est inversible pour tout objet $X \in \mathcal{X}$.*

$\surd$

Montrons l'axiome **Der 3g**. Soit $u : A \to B$ un foncteur entre catégories directes finies. Pour montrer l'existence de l'adjoint à droite u_*, vérifions la condition du point a) du lemme 2. Soient a un objet de A, M un objet de $\mathcal{E}$ et F un objet de $\mathbb{D}B$. Alors nous avons des bijections, fonctorielles en F,

$$(\mathbb{D}A)\,(u^*F, i_{a,A\,*}M) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{D}e)\,(F(u(a)), M) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{D}B)\,(F, i_{u(a),B\,*}M).$$

Le foncteur $(\mathbb{D}A)\,(u^*?, i_{a,A\,*}M)$ est donc bien représentable et u^* admet un adjoint à droite.

A l'aide du point b) du lemme 2, on vérifie facilement l'axiome **Der 4g**.

Considérons l'axiome **Der 6g**. Sous les hypothèses de **Der 6g**, on montre d'abord que u_* est pleinement fidèle, c'est-à-dire que le morphisme d'adjonction $u^*u_* \to \mathbf{1}_{\mathbb{D}A}$ est inversible (on utilise le point b) du lemme 2). Ensuite, on se sert du point a) du lemme 2, pour montrer l'existence de l'adjoint à droite de u_*.

Considérons les 'versions droites' des axiomes **Der 3**, **Der 4** et **Der 6**. Elles découlent des 'versions gauches' appliquées au prédérivateur $\mathbb{D}_{\mathcal{E}^o}$ grâce à l'isomorphisme entre $\mathbb{D}_{\mathcal{E}^o}$ et le prédérivateur

$$A \mapsto (\mathbb{D}_{\mathcal{E}}(A^o))^o.$$

Considérons l'axiome **Der 7**. L'inclusion

$$\lrcorner \to \square \quad \text{(resp. } \llcorner \to \square\text{)}$$

est un cocrible (resp. un crible). Donc les foncteurs $i_{\lrcorner *}$ et $i_{\llcorner !}$ sont pleinement fidèles. Il s'agit de vérifier que les images essentielles de ces deux foncteurs coïncident. Pour cela, il suffit de vérifier que les images par $i_{\lrcorner *}$ des générateurs $i_{a,\lrcorner\,*}M$, $a \in \mathsf{o}bj\,\lrcorner$, $M \in \mathsf{o}bj\mathcal{E}$, sont coccartésiens et que les images par $i_{\llcorner !}$ des générateurs $i_{a,\llcorner\,*}M$, $a \in \mathsf{o}bj\,\llcorner$, $M \in \mathsf{o}bj\mathcal{E}$, sont cartésiens. Ces images ne sont autres que $i_{a,\square\,*}M$, $a \in \lrcorner$, resp. $i_{a,\square\,!}M$, $a \in \llcorner$, et la vérification est facile.

Considérons l'axiome **Der 5**. Il suffit de montrer que le foncteur canonique

$$\mathsf{D}^b(\underline{\mathsf{H}om}(\Delta_1^o, \mathcal{E})) \to \underline{\mathsf{H}om}(\Delta_1^o, \mathsf{D}^b\mathcal{E})$$

est plein et essentiellement surjectif. A l'aide du calcul des fractions pour la classe $\Sigma_{\mathcal{E}}$ de $\mathsf{H}^b\mathcal{E}$, on montre aisément qu'il est essentiellement surjectif. Soient maintenant L et M deux objets de $\mathsf{D}^b(\underline{\mathsf{H}om}(\Delta_1^o, \mathcal{E}))$. On note $L_1 \to L_0$ l'image de L dans $\underline{\mathsf{H}om}(\Delta_1^o, \mathsf{D}^b\mathcal{E})$. Soit

$$\begin{tikzcd} L_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d] & M_1 \arrow[d] \\ L_0 \arrow[r, "f_0"'] & M_0 \end{tikzcd}$$

un morphisme de $\underline{\mathsf{H}om}(\Delta_1^o, \mathsf{D}^b\mathcal{E})$. A l'aide du calcul des fractions, on montre qu'il existe un objet M' de $\mathsf{D}^b(\underline{\mathsf{H}om}(\Delta_1^o, \mathcal{E}))$ et un diagramme commutatif dans $\mathsf{H}^b\mathcal{E}$

$$\begin{tikzcd} L_1 \arrow[r, "g_1"] \arrow[d] & M_1' \arrow[d] & M_1 \arrow[l, "s_1"'] \arrow[d] \\ L_0 \arrow[r, "g_0"'] & M_0' & M_0 \arrow[l, "s_0"] \end{tikzcd}$$

où s_1 et s_0 sont des quasi-isomorphismes tels que $s_1^{-1}g_1 = f_1$ et $s_0^{-1}g_0 = f_0$ dans $\mathsf{D}^b\mathcal{E}$. Ainsi, il reste à montrer que tout carré commutatif

$$\begin{tikzcd} U_1 \arrow[r, "\overline{w_1}"] \arrow[d, "\overline{u}"'] & V_1 \arrow[d, "\overline{v}"] \\ U_0 \arrow[r, "\overline{w_0}"'] & V_0 \end{tikzcd}$$

de $\mathsf{H}^b\mathcal{E}$ se relève en un morphisme de $\mathsf{D}^b(\mathcal{E}(\Delta_1))$. Ici, nous notons $\overline{f}$ la classe d'homotopie d'un morphisme de complexes f. Choisissons une factorisation

$$vw_1 - w_0u = hk$$

à travers un complexe contractile I. Considérons le diagramme commutatif de $\mathsf{C}^b\mathcal{E}$

$$\begin{tikzcd} U_1 \arrow[d, "u"'] & U_1 \arrow[l, "\mathbf{1}"'] \arrow[r, "w_1"] \arrow[d, "\begin{bmatrix} u \\ k \end{bmatrix}"] & V_1 \arrow[d, "v"] \\ U_0 & U_0 \oplus I \arrow[l, "{[\mathbf{1}\ 0]}"] \arrow[r, "{[w_0\ h]}"'] & V_0 \end{tikzcd}$$

Clairement, il fournit un morphisme de $\mathsf{D}^b(\mathcal{E}(\Delta_1))$ qui relève le morphisme donné $(\overline{w_0}, \overline{w_1})$.

References

[1] B. Keller, *Chain complexes and stable categories*, Manus. Math. **67** (1990), 379–417.

[2] D. Quillen, *Higher Algebraic K-theory I*, Springer LNM **341** (1973), 85–147.

[3] J.-L. Verdier, *Des catégories dérivées des catégories abéliennes*, édité par G. Maltsiniotis, Astérisque **239** (1996).

UFR de Mathématiques, UMR 7586 du CNRS, Case 7012, Université Paris 7, 2, place Jussieu, 75251 Paris Cedex 05, France

E-mail address: `keller@math.jussieu.fr`
`www.math.jussieu.fr/~keller`