Une méthode compliquée pour définir un groupe, ou une catégorie additive

Georges MALTSINIOTIS

25 mars 2001, révisé le 18 mai 2002

Une méthode compliquée pour définir un groupe.

On note Δ la *catégorie des simplexes*, sous-catégorie pleine de la catégorie des ensembles ordonnés, dont les objets sont les ensembles ordonnés

$$\Delta_n = \{0 < 1 < \cdots < m\} \ , \quad m \in \mathbb{N} \ ,$$

de sorte que la catégorie $\widehat{\Delta}$ des préfaisceaux sur Δ soit la catégorie des *ensembles simpliciaux.*

On définit une inclusion $\Delta \hookrightarrow \mathcal{C}at$ en associant à Δ_m la catégorie correspondant à cet ensemble ordonné, notée aussi Δ_m. Le foncteur nerf $N : \mathcal{C}at \to \widehat{\Delta}$ est défini par

$$C \longmapsto \big(\Delta_m \mapsto \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}at}(\Delta_m, C)\big) \quad .$$

On rappelle que ce foncteur est pleinement fidèle et que son image essentielle peut être décrite comme suit. Un ensemble simplicial X est dans l'image essentielle du foncteur nerf si et seulement si il satisfait à la propriété d'exactitude suivante. Pour tous entiers m, n, le carré cocartésien

$$\begin{tikzcd} \Delta_0 \arrow[r, "b"] \arrow[d, "a"'] & \Delta_n \arrow[d, "j"] \\ \Delta_m \arrow[r, "i"'] & \Delta_{m+n} \end{tikzcd} \quad ,$$

où

$$a(0) = m \ , \quad b(0) = 0 \ , \quad i(k) = k \ , \ 0 \leq k \leq m \ , \quad j(l) = m + l \ , \ 0 \leq l \leq n \ ,$$

se transforme en un carré cartésien

$$
(*_{m,n}) \qquad \begin{array}{ccc} X_{m+n} & \xrightarrow{X(i)} & X_m \\ {\scriptstyle X(j)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle X(a)} \\ X_n & \xrightarrow[X(b)]{} & X_0 \end{array} \qquad .
$$

On note $\widetilde{\Delta}$ la sous-catégorie pleine de la catégorie des ensembles $\mathcal{E}ns$, dont les objets sont les ensembles

$$
\widetilde{\Delta}_m = \{0, 1, \dots, m\} \quad , \qquad m \geq 0 \quad ,
$$

de sorte que Δ s'identifie à la sous-catégorie de $\widetilde{\Delta}$ ayant mêmes objets et dont les morphismes sont les applications croissantes. Habituellement, on identifie la catégorie $\mathcal{E}ns$ à la sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}at$ formée des catégories discrètes dont les seules flèches sont les morphismes identiques. De façon diamétralement opposée, on peut identifier $\mathcal{E}ns$ à la sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}at$ formée des “groupoïdes simplement connexes”, catégories A telles que pour tout couple a_0, a_1 d'objets de A, il existe exactement une flèche de a_0 à a_1. C'est ce point de vue qu'on adoptera ici. En composant l'inclusion $\widetilde{\Delta} \hookrightarrow \mathcal{E}ns$ avec cette inclusion, on déduit une inclusion $\widetilde{\Delta} \hookrightarrow \mathcal{C}at$

$$
\widetilde{\Delta} \hookrightarrow \mathcal{E}ns \hookrightarrow \mathcal{C}at
$$

identifiant $\widetilde{\Delta}_m$ au groupoïde obtenu de Δ_m en inversant toutes ses flèches

$$
\widetilde{\Delta}_m = \pi_1(\Delta_m) = \Delta_m[\mathsf{Fl}(\Delta_m)^{-1}] \quad .
$$

Proposition. *Soient A une petite catégorie et $NA : \Delta^{\circ} \longrightarrow \mathcal{E}ns$ son nerf. Pour que le foncteur NA se prolonge en un foncteur $\widetilde{N}A : \widetilde{\Delta}^{\circ} \longrightarrow \mathcal{E}ns$, il faut et il suffit que A soit un groupoïde, et alors ce prolongement est unique. De plus, si $u : A_1 \to A_2$ est un foncteur entre petits groupoïdes, le morphisme d'ensembles simpliciaux $Nu : NA_1 \to NA_2$ induit un morphisme $\widetilde{N}u : \widetilde{N}A_1 \to \widetilde{N}A_2$ de préfaisceaux sur $\widetilde{\Delta}$.*

Démonstration. Soit A une petite catégorie, supposons que le nerf $NA : \Delta^{\circ} \longrightarrow \mathcal{E}ns$ se prolonge en un foncteur $\widetilde{\Delta}^{\circ} \longrightarrow \mathcal{E}ns$, et choisissons un tel prolongement, de sorte que pour *toute* application

$$
\varphi : \{0, 1, \dots, m\} \longrightarrow \{0, 1, \dots, n\} \quad ,
$$

on ait une application

$$
\varphi^* : (NA)_n \longrightarrow (NA)_m \quad ,
$$

et ceci fonctoriellement. Notons τ la transposition $(0,1)$ dans $\{0,1\}$. Soit n un entier, notons τ_i, $1 \leq i \leq n$, la transposition $(i-1,i)$ dans $\{0,1,\ldots,n\}$,

$$\begin{array}{ccc} \alpha_i : \{0,1\} & \longrightarrow & \{0,1,\ldots,n\} \quad , \qquad 1 \leq i \leq n \quad , \\ 0 & \longmapsto & i-1 \\ 1 & \longmapsto & i \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccc} \beta_i : \{0,1\} & \longrightarrow & \{0,1,\ldots,n\} \quad , \qquad 1 < i \leq n \quad . \\ 0 & \longmapsto & i-2 \\ 1 & \longmapsto & i \end{array}$$

On vérifie facilement que si $(g_n,\ldots,g_1) \in NA_n$

$$a_0 \xrightarrow{g_1} a_1 \xrightarrow{g_2} \cdots \xrightarrow{g_n} a_n \quad ,$$

alors

$$\alpha_i^*(g_n,\ldots,g_1) = g_i \quad , \qquad 1 \leq i \leq n \quad ,$$
$$\beta_i^*(g_n,\ldots,g_1) = g_i g_{i-1} \ , \quad 1 < i \leq n \quad ,$$

et que

$$\tau_i\alpha_j = \alpha_j \quad , \qquad |j-i| \geq 2 \ , \ 1 \leq i,j \leq n \ ,$$
$$\tau_i\alpha_{i-i} = \beta_i \quad , \qquad 1 < i \leq n \ ,$$
$$\tau_i\alpha_i = \alpha_i\tau \quad , \qquad 1 \leq i \leq n \ ,$$
$$\tau_i\alpha_{i+1} = \beta_{i+1} \quad , \qquad 1 \leq i < n \ ,$$

de sorte que

$$\tau_1^*(g_n,\ldots,g_1) = (g_n,\ldots,g_3,g_2g_1,\tau^*g_1)$$
$$\tau_i^*(g_n,\ldots,g_1) = (g_n,\ldots,g_{i+2},g_{i+1}g_i,\tau^*g_i,g_ig_{i-1},g_{i-2},\ldots,g_1), \ 1 < i < n$$
$$\tau_n^*(g_n,\ldots,g_1) = (\tau^*g_n,g_ng_{n-1},g_{n-2},\ldots,g_1) \quad .$$

On en déduit que l'unicité du prolongement résultera si l'on démontre l'unicité de τ^*. Étudions le cas $n=2$. On a

$$\tau_1^*(g_2,g_1) = (g_2g_1,\tau^*g_1) \qquad \text{et} \qquad \tau_2^*(g_2,g_1) = (\tau^*g_2,g_2g_1) \quad ,$$

et un calcul direct montre que

$$\tau_1\beta_2 = \alpha_2 \qquad \text{et} \qquad \tau_2\beta_2 = \alpha_1 \quad ,$$

d'où

$$g_2 g_1 \tau^*(g_1) = g_2 \qquad \text{et} \qquad \tau^*(g_2) g_2 g_1 = g_1 \quad .$$

En appliquant la première formule à $g_2 = 1_{b(g_1)}$ et la deuxième à $g_1 = 1_{s(g_2)}$ (où s, b désignent les applications source et but respectivement), on en déduit que

$$g_1 \tau^*(g_1) = 1_{b(g_1)} \qquad \text{et} \qquad \tau^*(g_2) g_2 = 1_{s(g_2)} \quad ,$$

ce qui prouve à la fois l'unicité de τ^*, et que A est un groupoïde.

Réciproquement, supposons que A soit un groupoïde, et montrons l'existence d'un prolongement de NA à $\widetilde{\Delta}^{\circ}$. En vertu de la propriété universelle de la localisation, comme A est un groupoïde, on a, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$NA_n = \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}at}(\Delta_n, A) \simeq \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}at}(\widetilde{\Delta}_n, A) \quad ,$$

ce qui prouve l'assertion. Ce raisonnement démontre aussi l'assertion relative aux foncteurs entre groupoïdes.

Corollaire 1. *La catégorie des petits groupoïdes est équivalente à la sous-catégorie pleine des préfaisceaux X sur $\widetilde{\Delta}$ tels que pour tout couple d'entiers m, n, le carré $(*_{m,n})$ soit cartésien.*

Corollaire 2. *La catégorie des groupes est équivalente à la sous-catégorie pleine des préfaisceaux X sur $\widetilde{\Delta}$ satisfaisant aux deux conditions suivantes :*

a) *pour tout couple d'entiers m, n, le carré $(*_{m,n})$ est cartésien ;*

b) *l'ensemble X_0 a exactement un seul élément.*

Ω-catégories et catégories additives.

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie admettant des produits finis, et en particulier un objet final. On rappelle qu'un groupe dans $\mathcal{C}$ est un couple (M, m), où M est un objet et $m : M \times M \to M$ un morphisme de $\mathcal{C}$, tels que pour tout objet T de $\mathcal{C}$, l'ensemble $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(T, M)$ muni de la loi de composition

$$\begin{aligned} \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(T, M) \times \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(T, M) &\longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(T, M) \\ (f, g) &\longmapsto m \circ (f, g) \end{aligned}$$

déduite de m, soit un groupe. La notion de groupe commutatif, et de morphisme de groupes dans $\mathcal{C}$ se définit de la façon évidente. En vertu de ce qui précède, le lemme de Yoneda implique que pour définir un groupe dans $\mathcal{C}$, il suffit de définir un foncteur $X : \widetilde{\Delta} \longrightarrow \mathcal{C}$ tel que (en posant $X_m = X(\widetilde{\Delta}_m)$, $m \geq 0$)

i) X_0 soit un objet final de $\mathcal{C}$;

ii) pour tous $m, n \in \mathbb{N}$, le morphisme $(X(i), X(j)) : X_{m+n} \to X_m \times X_n$ (où $i : \widetilde{\Delta}_m \to \widetilde{\Delta}_{m+n}$, $j : \widetilde{\Delta}_n \to \widetilde{\Delta}_{m+n}$ sont les applications définies par $i(k) = k$, $0 \leq k \leq m$, $j(l) = m + l$, $0 \leq l \leq n$) soit un isomorphisme.

Définition. Une Ω-*catégorie* est un couple $(\mathcal{C}, \Omega)$, formé d'une catégorie $\mathcal{C}$, admettant des produits finis, et d'un foncteur Ω de $\mathcal{C}$ vers la catégorie des groupes dans $\mathcal{C}$, commutant aux produits finis. Le foncteur Ω peut être vu, de façon équivalente, comme un groupe dans la catégorie des endofoncteurs de $\mathcal{C}$. On notera aussi Ω l'endofoncteur sous-jacent à Ω et $m = m_\Omega : \Omega \times \Omega \to \Omega$ le morphisme d'endofoncteurs définissant la structure de groupe. En particulier, pour tout objet X de $\mathcal{C}$, $(\Omega(X), m_X)$ est un groupe dans $\mathcal{C}$.

Le lemme classique suivant implique que pour tout objet X de $\mathcal{C}$, $\Omega^2(X)$ est un groupe commutatif dans $\mathcal{C}$, et que $m_{\Omega(X)} = \Omega(m_X)$. En particulier, si Ω est un foncteur fidèle, le groupe Ω de la catégorie des endofoncteurs de $\mathcal{C}$ est commutatif.

Lemme. *Soit E un ensemble, muni de deux lois de composition $*$ et $\perp$, chacune admettant un élément neutre, et satisfaisant à la relation*

$$(a \perp b) * (c \perp d) = (a * c) \perp (b * d) \quad , \qquad \forall a, b, c, d \in E \quad .$$

Alors ces deux lois de composition coïncident et sont associatives et commutatives.

Exemple. On rappelle qu'une catégorie additive est une catégorie $\mathcal{A}$ admettant des produits finis et telle que pour tous objets A, B de $\mathcal{A}$, $\mathsf{Hom}_\mathcal{A}(A, B)$ soit un groupe commutatif, noté additivement, la composition des morphismes étant biadditive. Alors tout objet final de $\mathcal{A}$ est aussi un objet initial, autrement dit un objet nul, et le produit de deux objets A et B est aussi leur somme, et est noté $A \oplus B$. De plus pour tous morphismes $f, g : A \to B$ de $\mathcal{A}$, on a un carré commutatif

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f+g"] \arrow[d, "\Delta_A"'] & B \\ A \oplus A \arrow[r, "f \oplus g"'] & B \oplus B \arrow[u, "\nabla_B"'] \end{tikzcd} \quad ,$$

où Δ_A, et ∇_B désignent les morphismes diagonal et codiagonal respectivement, de sorte que la structure de groupe sur $\mathsf{Hom}_\mathcal{A}(A, B)$ soit canoniquement déterminée par la structure de catégorie. Ainsi, le couple formé d'une catégorie additive $\mathcal{A}$ et de l'endofoncteur identique, muni du morphisme de foncteurs $1_\mathcal{A} \times 1_\mathcal{A} \to 1_\mathcal{A}$, défini par la codiagonale, est une Ω-catégorie. Réciproquement, une Ω-catégorie $(\mathcal{C}, \Omega)$ telle que l'endofoncteur sous-jacent à Ω soit le foncteur identique de $\mathcal{C}$ est une catégorie additive. En effet, en vertu de ce qui précède, Ω est alors un groupe commutatatif dans la catégorie des endofoncteurs de $\mathcal{C}$, et définit pour tous objets A, B de $\mathcal{C}$ une stucture de groupe commutatif sur $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(A, 1_{\mathcal{C}}(B)) = \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ telle que la composition soit biadditive. Plus généralement, on a :

Proposition. *Soit* $(\mathcal{C}, \Omega)$ *une* Ω*-catégorie telle que l'endofoncteur sous-jacent à* Ω *soit pleinement fidèle. Alors la catégorie* $\mathcal{C}$ *est additive et le foncteur* Ω *est un foncteur additif.*

Démonstration. Comme par définition $\mathcal{C}$ admet des produits finis, et le foncteur Ω y commute, il suffit de définir pour tout couple d'objets A, B de $\mathcal{C}$ une structure de groupe commutatif sur $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$, de sorte que la composition de $\mathcal{C}$ soit biadditive. Comme Ω est en particulier fidèle, Ω est un groupe commutatif dans la catégorie des endofoncteurs de $\mathcal{C}$. Comme Ω est pleinement fidèle, pour tous objets A, B de $\mathcal{C}$, on a une bijection

$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \xrightarrow{\Omega} \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(\Omega A, \Omega B) \quad .$$

On définit ainsi, par transport de structure, une loi de groupe commutatif sur $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$, notée additivement, telle que

$$\Omega(f+g) = m_B(\Omega f, \Omega g) \quad , \qquad f, g \in \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \quad .$$

Si $h : A' \to A$ est un morphisme de $\mathcal{C}$, on a

$$\begin{aligned} \Omega((f+g)h) &= \Omega(f+g)\Omega h = m_B(\Omega f, \Omega g)\Omega h \\ &= m_B(\Omega f \Omega h, \Omega g \Omega h) = m_B(\Omega(fh), \Omega(gh)) = \Omega(fh+gh) \ , \end{aligned}$$

d'où $(f+g)h = fh + gh$. De même, si $k : B \to B'$ est un morphisme de $\mathcal{C}$, on a

$$\begin{aligned} \Omega(k(f+g)) &= \Omega k \Omega(f+g) = \Omega k m_B(\Omega f, \Omega g) = m_{B'}(\Omega k \times \Omega k)(\Omega f, \Omega g) \\ &= m_{B'}(\Omega k \Omega f, \Omega k \Omega g) = m_{B'}(\Omega(kf), \Omega(kg)) = \Omega(kf+kg) \ , \end{aligned}$$

d'où $k(f+g) = kf + kg$, ce qui prouve la proposition.

Georges Maltsiniotis, CNRS, Université Paris 7, UFR de Mathématiques, Case 7012, 2, place Jussieu, 75251 Paris Cedex 05, France
maltsin@math.jussieu.fr
www.math.jussieu.fr/~maltsin