INFINI CATÉGORIES NON STRICTES, BATANIN VERSUS GROTHENDIECK

par

Georges MALTSINIOTIS

1. Introduction

Le but de cet exposé est de montrer qu'une légère variante de la définition par Grothendieck d'un ∞-groupoïde non strict [**3**], que j'ai présenté dans mon exposé précédent [**5**], permet de définir une notion d'∞-catégorie non stricte, très proche, voire équivalente, à celle de Batanin [**1**], [**2**]. Je laisserai cette comparaison aux spécialistes.

2. La définition d'une ∞-catégorie non stricte

Dans la définition de Grothendieck d'un ∞-groupoïde non strict, un rôle important est joué par la notion de « produits fibrés itérés standard », ou le concept dual de « sommes amalgamées itérées standard ». Pour la définition d'une ∞-catégorie non stricte, une notion plus restrictive de produits fibrés itérés doit être utilisée, celle de « produits fibrés itérés standard ordonnés », qu'on appellera plus simplement « produits globulaires ». Dans cet exposé, on mettra l'accent sur la notion duale de « sommes amalgamées itérées standard ordonnées », alias « sommes globulaires ».

Rappel de la définition de la catégorie $\mathbb{D}$. — On rappelle que la catégorie « globulaire » $\mathbb{D}$ est la sous-catégorie (non pleine) de la catégorie $\mathcal{T}op$, des espaces topologiques et applications continues, dont les objets sont les disques (ou boules) $\mathbf{D}_i$, $i \geq 0$,

$$\mathbf{D}_i = \{x \in \mathbb{R}^i \mid \|x\| \leq 1\} \quad ,$$

où $\|x\|$ désigne la norme euclidienne de x, et dont les morphismes sont les composés itérés des inclusions

$$\boldsymbol{\sigma}_i, \boldsymbol{\tau}_i : \mathbf{D}_{i-1} \hookrightarrow \mathbf{D}_i \quad , \qquad i \geq 1 \quad ,$$

définies par

$$\boldsymbol{\sigma}_i(x) = \big(x, -\sqrt{1-\|x\|^2}\,\big) \quad , \qquad \boldsymbol{\tau}_i(x) = \big(x, \sqrt{1-\|x\|^2}\,\big) \quad , \qquad x \in \mathbf{D}_{i-1} \quad .$$

Les applications $\boldsymbol{\sigma}_i$ et $\boldsymbol{\tau}_i$ se factorisent par

$$\mathbf{S}_{i-1} = \partial\mathbf{D}_i = \{x \in \mathbb{R}^i \mid \|x\| = 1\} \quad ,$$

et identifient $\mathbf{D}_{i-1}$ à l'hémisphère inférieur, respectivement supérieur de $\mathbf{S}_{i-1}$. On a les relations

$$\boldsymbol{\sigma}_i\boldsymbol{\sigma}_{i-1} = \boldsymbol{\tau}_i\boldsymbol{\sigma}_{i-1} \quad , \qquad \boldsymbol{\sigma}_i\boldsymbol{\tau}_{i-1} = \boldsymbol{\tau}_i\boldsymbol{\tau}_{i-1} \quad , \qquad i \geq 2 \quad ,$$

de sorte que si l'on pose

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}^i_l &= \boldsymbol{\sigma}_i\boldsymbol{\sigma}_{i-1}\cdots\boldsymbol{\sigma}_{i-l+1} : \mathbf{D}_{i-l} \longrightarrow \mathbf{D}_i \quad , \\ \boldsymbol{\tau}^i_l &= \boldsymbol{\tau}_i\boldsymbol{\tau}_{i-1}\cdots\boldsymbol{\tau}_{i-l+1} : \mathbf{D}_{i-l} \longrightarrow \mathbf{D}_i \quad , \end{aligned}\right. \qquad 1 \leq l \leq i \quad ,$$

on ait

$$\mathsf{Hom}_{\mathbb{D}}(\mathbf{D}_i, \mathbf{D}_{i'}) = \begin{cases} \{\boldsymbol{\sigma}^{i'}_{i'-i}, \boldsymbol{\tau}^{i'}_{i'-i}\} \quad , & 0 \leq i < i' \\ \{1_{\mathbf{D}_i}\} \quad , & i' = i \\ \varnothing & \text{sinon} \quad . \end{cases}$$

Sommes globulaires. — Soit $\mathbb{D} \to B$ un foncteur à valeurs dans une catégorie B, et notons $D_i, \sigma_i, \tau_i, \sigma^i_l, \tau^i_l$ les images de $\mathbf{D}_i, \boldsymbol{\sigma}_i, \boldsymbol{\tau}_i, \boldsymbol{\sigma}^i_l, \boldsymbol{\tau}^i_l$ dans B. Une *somme amalgamée itérée standard ordonnée*, ou plus simplement *somme globulaire*, de *longueur* m dans B est une somme amalgamée itérée de la forme

$$(D_{i_1}, \sigma^{i_1}_{i_1-i'_1}) \amalg_{D_{i'_1}} (\tau^{i_2}_{i_2-i'_1}, D_{i_2}, \sigma^{i_2}_{i_2-i'_2}) \amalg_{D_{i'_2}} \cdots \amalg_{D_{i'_{m-1}}} (\tau^{i_m}_{i_m-i'_{m-1}}, D_{i_m}) \quad ,$$

où $m \geq 1$, et pour tout j, $1 \leq j < m$, on a $i'_j < i_j$ et $i'_j < i_{j+1}$. Une telle somme amalgamée est déterminé à isomorphisme canonique près par son *tableau de dimensions*

$$\begin{pmatrix} i_1 & & i_2 & & \cdots & & i_m \\ & i'_1 & & i'_2 & \cdots & i'_{m-1} & \end{pmatrix} \quad ,$$

et elle peut donc être notée plus simplement

$$D_{i_1} \amalg_{D_{i'_1}} D_{i_2} \amalg_{D_{i'_2}} \cdots \amalg_{D_{i'_{m-1}}} D_{i_m} \quad .$$

Le plus souvent, on adoptera cette notation simplifiée.

Extensions globulaires. — On dit qu'un foncteur $\mathbb{D} \to B$ est une *extension globulaire* si les sommes globulaires existent dans B. Par exemple, *tout* foncteur de $\mathbb{D}$ vers une catégorie admettant des limites inductives finies est une extension globulaire. Plus généralement, toute extension cellulaire [**5**] est une extension globulaire.

Un *morphisme* d'une extension globulaire $\mathbb{D} \to B$ vers une autre $\mathbb{D} \to B'$ est un foncteur $B \to B'$ commutant aux sommes globulaires tel que le triangle

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[d] \\ \mathbb{D} \arrow[ur] \arrow[r] & B' \end{tikzcd}$$

soit commutatif. La catégorie des extensions cellulaires s'identifie à une sous-catégorie (non pleine) de celle des extensions globulaires. Il existe une extension globulaire universelle $\mathbb{D} \to \mathbf{\Theta}_0$, appelée *enveloppe globulaire* de $\mathbb{D}$, satisfaisant à la propriété universelle suivante. Pour toute extension globulaire $\mathbb{D} \to B$, il existe un morphisme d'extensions globulaires de $\mathbb{D} \to \mathbf{\Theta}_0$ vers $\mathbb{D} \to B$, unique à isomorphisme de foncteurs unique près. En particulier, il existe un morphisme d'extensions globulaires $\mathbf{\Theta}_0 \to \mathbf{B}_0$, unique à isomorphisme de foncteurs unique près, de $\mathbb{D} \to \mathbf{\Theta}_0$ vers l'enveloppe cellulaire $\mathbb{D} \to \mathbf{B}_0$ de $\mathbb{D}$ [*loc. cit.*]. On peut montrer que le foncteur $\mathbf{\Theta}_0 \to \mathbf{B}_0$ est fidèle et conservatif, et que l'image dans $\mathbf{B}_0$ de toute flèche de $\mathbf{\Theta}_0$ est un monomorphisme de $\mathbf{B}_0$.

Définition topologique de la catégorie $\mathbf{\Theta}_0$. — L'enveloppe globulaire $\mathbf{\Theta}_0$ de $\mathbb{D}$ admet une description topologique simple, analogue à celle de l'enveloppe cellulaire $\mathbf{B}_0$. Un objet de $\mathbf{\Theta}_0$ est une somme globulaire

$$\mathbf{X} = \mathbf{D}_{i_1} \amalg_{\mathbf{D}_{i'_1}} \mathbf{D}_{i_2} \amalg_{\mathbf{D}_{i'_2}} \cdots \amalg_{\mathbf{D}_{i'_{m-1}}} \mathbf{D}_{i_m}$$

dans $\mathcal{T}op$, *munie* des applications canoniques $\mathbf{D}_{i_k} \to \mathbf{X}$, $1 \leq k \leq m$. Pour définir les morphismes dans la catégorie $\mathbf{\Theta}_0$, il suffit de définir les flèches d'un disque $\mathbf{D}_i$ vers $\mathbf{X}$. Par définition, c'est les applications continues $\mathbf{D}_i \to \mathbf{X}$ telles qu'il existe k, $1 \leq k \leq m$, et une flèche $\mathbf{D}_i \to \mathbf{D}_{i_k}$ dans $\mathbb{D}$, telle que $\mathbf{D}_i \to \mathbf{X}$ soit le composé de cette flèche et de l'application canonique $\mathbf{D}_{i_k} \to \mathbf{X}$. On verra plus loin une définition purement combinatoire de la catégorie $\mathbf{\Theta}_0$.

Notions duales. — La notion de *produit fibré itéré standard ordonné*, ou *produit globulaire*, se définit de façon duale, ainsi que les notions *d'extension coglobulaire* de $\mathbb{G} = \mathbb{D}^\circ$ et *d'enveloppe coglobulaire*.

Rappels sur les ∞-catégories strictes. — On rappelle qu'une ∞-catégorie stricte consiste en la donnée :

- des ensembles des i-flèches F_i, $i \geq 0$ ($F_0 =$ objets) ;
- des applications source et but $s_i, t_i : F_i \to F_{i-1}$, $i > 0$, satisfaisant aux égalités

$$(*) \qquad s_{i-1}s_i = s_{i-1}t_i \quad , \qquad t_{i-1}s_i = t_{i-1}t_i \quad , \qquad i \geq 2 \quad ,$$

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, bend left] \arrow[r, bend right] \arrow[r, phantom, "\Downarrow"] & \bullet \end{tikzcd} \quad ,$$

de sorte que $\mathbf{D}_i \mapsto F_i$, $\boldsymbol{\sigma}_i \mapsto s_i$, $\boldsymbol{\tau}_i \mapsto t_i$ définisse un préfaisceau sur la catégorie globulaire $\mathbb{D}$, et qu'on puisse définir par composition exactement deux applications

$$s^i_l : F_i \to F_{i-l} \quad , \qquad t^i_l : F_i \to F_{i-l} \quad , \qquad 1 \leq l \leq i \quad ,$$
$$s^i_l = s_{i-l+1} \cdots s_{i-1} s_i \quad , \qquad t^i_l = t_{i-l+1} \cdots t_{i-1} t_i \quad ,$$

les applications source et but itérés, images des morphismes $\boldsymbol{\sigma}^i_l$ et $\boldsymbol{\tau}^i_l$ de $\mathbb{D}$;

– des compositions

$$\begin{aligned} (F_i, s^i_l) \times_{F_{i-l}} (t^i_l, F_i) &\longrightarrow F_i \\ (u, v) \qquad &\longmapsto \quad u \overset{i}{\underset{l}{*}} v \end{aligned}$$

satisfaisant à

$$(1) \qquad \begin{aligned} s_i(u \overset{i}{\underset{l}{*}} v) &= \begin{cases} s_i(v) \quad , & l = 1 \\ s_i(u) \overset{i-1}{\underset{l-1}{*}} s_i(v) \ , & l \geq 2 \end{cases} \\ t_i(u \overset{i}{\underset{l}{*}} v) &= \begin{cases} t_i(u) \quad , & l = 1 \\ t_i(u) \overset{i-1}{\underset{l-1}{*}} t_i(v) \ , & l \geq 2 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{matrix} i = 2 \\ l = 1 \end{matrix} \quad \begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, bend left=50] \arrow[r] \arrow[r, bend right=50] \arrow[r, phantom, shift left=2ex, "\Downarrow"] \arrow[r, phantom, shift right=2ex, "\Downarrow"] & \bullet \end{tikzcd} \quad , \qquad \begin{matrix} i = 2 \\ l = 2 \end{matrix} \quad \begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, bend left] \arrow[r, bend right] \arrow[r, phantom, "\Downarrow"] & \bullet \arrow[r, bend left] \arrow[r, bend right] \arrow[r, phantom, "\Downarrow"] & \bullet \end{tikzcd} \quad ;$$

– des unités $k_i : F_i \to F_{i+1}$, $i \geq 0$, satisfaisant aux égalités

$$(2) \qquad s_{i+1} k_i = 1_{F_i} = t_{i+1} k_i \quad , \qquad i \geq 0 \quad .$$

Pour tout $i \geq 0$ et tout $l \geq 1$, on pose $k^i_l = k_{i+l-1} \cdots k_{i+1} k_i : F_i \to F_{i+l}$. Ces données (en plus des égalités $(*)$, (1), (2) ci-dessus, traduisant la structure globulaire et exprimant la compatibilité de la composition et des unités à cette structure) doivent satisfaire aux relations suivantes.

A) **Associativité :** pour tous i, l, $1 \leq l \leq i$ et tout triplet (u, v, w) appartenant au produit fibré $(F_i, s^i_l) \times_{F_{i-l}} (t^i_l, F_i, s^i_l) \times_{F_{i-l}} (t^i_l, F_i)$, on a

$$(u \overset{i}{\underset{l}{*}} v) \overset{i}{\underset{l}{*}} w = u \overset{i}{\underset{l}{*}} (v \overset{i}{\underset{l}{*}} w) \quad .$$

B) **Unité :** pour tous i, l, $1 \leq l \leq i$ et tout $u \in F_i$, on a

$$u \overset{i}{\underset{l}{*}} k_l^{i-l} s_l^i(u) = u = k_l^{i-l} t_l^i(u) \overset{i}{\underset{l}{*}} u \quad .$$

C) **Règle de Godement, ou d'échange, ou fonctorialité de la composition :** pour tous i, l, l', $1 \leq l < l' \leq i$, et tous u, u', v, $v' \in F_i$ tels que

$$s_l^i(u) = t_l^i(u') \ , \quad s_l^i(v) = t_l^i(v') \quad \text{et} \quad s_{l'}^i(u) = s_{l'}^i(u') = t_{l'}^i(v) = t_{l'}^i(v')$$

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, bend left=50] \arrow[r] \arrow[r, bend right=50] \arrow[r, phantom, shift left=2.5ex, "\Downarrow v'"] \arrow[r, phantom, shift right=2.5ex, "\Downarrow v"] & \bullet \arrow[r, bend left=50] \arrow[r] \arrow[r, bend right=50] \arrow[r, phantom, shift left=2.5ex, "\Downarrow u'"] \arrow[r, phantom, shift right=2.5ex, "\Downarrow u"] & \bullet \end{tikzcd} \quad ,$$

autrement dit, tels que

$$(u, u', v, v') \in (F_i, s_l^i) \times_{F_{i-l}} (t_l^i, F_i, s_{l'}^i) \times_{F_{i-l'}} (t_{l'}^i, F_i, s_l^i) \times_{F_{i-l}} (t_l^i, F_i) \quad ,$$

on a

$$(u \overset{i}{\underset{l}{*}} u') \overset{i}{\underset{l'}{*}} (v \overset{i}{\underset{l}{*}} v') = (u \overset{i}{\underset{l'}{*}} v) \overset{i}{\underset{l}{*}} (u' \overset{i}{\underset{l'}{*}} v') \quad .$$

D) **Fonctorialité des unités :** pour tous i, l, $1 \leq l \leq i$ et tout couple (u, v) appartenant au produit fibré $(F_i, s_l^i) \times_{F_{i-l}} (t_l^i, F_i)$, on a

$$k_i(u \overset{i}{\underset{l}{*}} v) = k_i(u) \overset{i+1}{\underset{l+1}{*}} k_i(v) \quad .$$

La catégorie Θ.— La catégorie Θ est l'extension globulaire de $\mathbb{D}$ « engendrée par les générateurs duaux à $\overset{i}{\underset{l}{*}}$ et k_i, soumis aux relations duales ». De façon plus précise, on a une extension globulaire $\mathbb{D} \to \Theta$, et en notant D_i, σ_i, τ_i, σ_l^i, τ_l^i les images dans Θ de $\mathbf{D}_i$, $\boldsymbol{\sigma}_i$, $\boldsymbol{\tau}_i$, $\boldsymbol{\sigma}_l^i$, $\boldsymbol{\tau}_l^i$, on a des flèches de Θ

$$\nabla_l^i : D_i \longrightarrow (D_i, \sigma_l^i) \amalg_{D_{i-l}} (\tau_l^i, D_i) \quad , \qquad 1 \leq l \leq i \quad ,$$

$$\kappa_i : D_{i+1} \longrightarrow D_i \quad , \qquad i \geq 0 \quad ,$$

telles que

$$\kappa_i \sigma_{i+1} = 1_{D_i} = \kappa_i \tau_{i+1} \quad , \qquad i \geq 0 \quad ,$$

et rendant commutatifs les diagrammes

$$\begin{tikzcd} D_{i-1} \arrow[r, "\sigma_i"] \arrow[d, "\sigma_i"'] & D_i \arrow[d, "\varepsilon_2"] \\ D_i \arrow[r, "\nabla_1^i"'] & D_i \amalg_{D_{i-1}} D_i \end{tikzcd} \quad , \qquad \begin{tikzcd} D_{i-1} \arrow[r, "\tau_i"] \arrow[d, "\tau_i"'] & D_i \arrow[d, "\varepsilon_1"] \\ D_i \arrow[r, "\nabla_1^i"'] & D_i \amalg_{D_{i-1}} D_i \end{tikzcd} \quad ,$$

$i \geq 1$, où $\varepsilon_1, \varepsilon_2 : D_i \to D_i \amalg_{D_{i-1}} D_i$ désignent les flèches canoniques,

$$
\begin{tikzcd}
D_{i-1} \arrow[r, "\nabla^{i-1}_{l-1}"] \arrow[d, "\sigma_i"'] & D_{i-1} \amalg_{D_{i-l}} D_{i-1} \arrow[d, "\sigma_i \amalg_{D_{i-l}} \sigma_i"] \\
D_i \arrow[r, "\nabla^i_l"'] & D_i \amalg_{D_{i-l}} D_i
\end{tikzcd}
\quad , \qquad
\begin{tikzcd}
D_{i-1} \arrow[r, "\nabla^{i-1}_{l-1}"] \arrow[d, "\tau_i"'] & D_{i-1} \amalg_{D_{i-l}} D_{i-1} \arrow[d, "\tau_i \amalg_{D_{i-l}} \tau_i"] \\
D_i \arrow[r, "\nabla^i_l"'] & D_i \amalg_{D_{i-l}} D_i
\end{tikzcd}
\quad ,
$$

$2 \leq l \leq i$, ainsi que les diagrammes

A)
$$
\begin{tikzcd}
D_i \arrow[r, "\nabla^i_l"] \arrow[d, "\nabla^i_l"'] & D_i \amalg_{D_{i-l}} D_i \arrow[d, "1_{D_i} \amalg_{D_{i-l}} \nabla^i_l"] \\
D_i \amalg_{D_{i-l}} D_i \arrow[r, "\nabla^i_l \amalg_{D_{i-l}} 1_{D_i}"'] & D_i \amalg_{D_{i-l}} D_i \amalg_{D_{i-l}} D_i
\end{tikzcd}
\qquad 1 \leq l \leq i
$$

B)
$$
\begin{tikzcd}
 & D_i \arrow[dl, "\sim"'] \arrow[d, "\nabla^i_l"] \arrow[dr, "\sim"] & \\
D_{i-l} \amalg_{D_{i-l}} D_i & D_i \amalg_{D_{i-l}} D_i \arrow[l, "\kappa^{i-l}_l \amalg_{D_{i-l}} 1_{D_i}"] \arrow[r, "1_{D_i} \amalg_{D_{i-l}} \kappa^{i-l}_l"'] & D_i \amalg_{D_{i-l}} D_{i-l}
\end{tikzcd}
\qquad 1 \leq l \leq i
$$

C)
$$
\begin{tikzcd}
 & D_i \arrow[dl, "\nabla^i_{l'}"'] \arrow[dr, "\nabla^i_l"] & \\
D_i \amalg_{D_{i-l'}} D_i \arrow[d, "\nabla^i_l \amalg_{D_{i-l'}} \nabla^i_l"'] & & D_i \amalg_{D_{i-l}} D_i \arrow[d, "\nabla^i_{l'} \amalg_{\nabla^{i-l}_{l'-l}} \nabla^i_{l'}"] \\
(D_i \amalg_{D_{i-l}} D_i) \amalg_{D_{i-l'}} (D_i \amalg_{D_{i-l}} D_i) \arrow[rr, "\sim"'] & & (D_i \amalg_{D_{i-l'}} D_i) \amalg_{D_{i-l} \amalg_{D_{i-l'}} D_{i-l}} (D_i \amalg_{D_{i-l'}} D_i)
\end{tikzcd}
\qquad 1 \leq l < l' \leq i
$$

la somme amalgamée en bas à droite étant

$$(D_i \amalg_{D_{i-l'}} D_i,\ \sigma^i_l \amalg_{D_{i-l'}} \sigma^i_l) \amalg_{D_{i-l} \amalg_{D_{i-l'}} D_{i-l}} (\tau^i_l \amalg_{D_{i-l'}} \tau^i_l,\ D_i \amalg_{D_{i-l'}} D_i)$$

D)
$$\begin{tikzcd} D_{i+1} \arrow[r, "\nabla_{l+1}^{i+1}"] \arrow[d, "\kappa_i"'] & D_{i+1} \amalg_{D_{i-l}} D_{i+1} \arrow[d, "\kappa_i \amalg_{D_{i-l}} \kappa_i"] \\ D_i \arrow[r, "\nabla_l^i"'] & D_i \amalg_{D_{i-l}} D_i \end{tikzcd} \qquad 1 \leq l \leq i$$

et cette extension est universelle : pour toute extension globulaire $\mathbb{D} \to B$, et toute famille de flèches

$$D_i \longrightarrow D_i \amalg_{D_{i-1}} D_i \ , \quad 1 \leq l \leq i \ , \qquad D_{i+1} \longrightarrow D_i \ , \quad i \geq 0 \ ,$$

(où on note aussi D_i l'image de $\mathbf{D}_i$ dans B) satisfaisant aux « mêmes » relations que ci-dessus, il existe un morphisme d'extensions globulaires

$$\begin{tikzcd} & \Theta \arrow[d] \\ \mathbb{D} \arrow[ur] \arrow[r] & B \end{tikzcd}$$

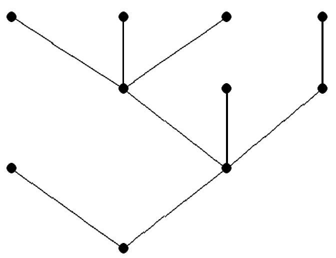
unique à isomorphisme de foncteurs unique près. Ainsi, une ∞-catégorie stricte est exactement un préfaisceaux $F : \Theta^{\circ} \to \mathcal{E}ns$ sur Θ tel que le foncteur F transforme les sommes globulaires en produits globulaires.

En vertu de la propriété universelle de l'enveloppe globulaire $\mathbb{D} \to \mathbf{\Theta}_0$, il existe un morphisme d'extensions globulaires

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{\Theta}_0 \arrow[d] \\ \mathbb{D} \arrow[ur] \arrow[r] & \Theta \end{tikzcd}$$

unique à isomorphisme de foncteurs unique près. On peut montrer que le foncteur $\mathbf{\Theta}_0 \to \Theta$ est fidèle, conservatif et induit même une bijection des ensembles des classes d'isomorphisme des objets de $\mathbf{\Theta}_0$ et Θ. En particulier, on peut supposer que $\mathbf{\Theta}_0$ et Θ ont même ensemble d'objets.

Définition combinatoire de la catégorie $\mathbf{\Theta}_0$. — La catégorie $\mathbf{\Theta}_0$ admet une description combinatoire simple en termes d'arbres planaires finis. Voici un exemple d'arbre planaire.



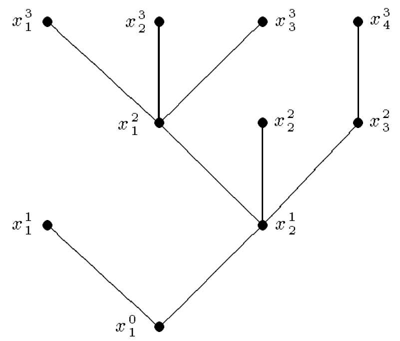
Formellement un *arbre* est un couple

$$\mathbf{X} = \big((X_i)_{i\geq 0}, (d_i)_{i\geq 0}\big) \quad ,$$

où pour tout $i \geq 0$, X_i est un ensemble, $d_i : X_{i+1} \to X_i$ une application, et l'ensemble X_0 est un singleton, dont l'unique élément est la *racine* de l'arbre. À l'arbre $\mathbf{X}$ on associe un graphe dont l'ensemble des sommets est la somme disjointe $X = \amalg_{i\geq 0} X_i$, deux sommets x et x' étant reliés par une arête s'il existe $i \geq 0$ tel que $x \in X_{i+1}$ et $x' = d_i(x)$. On dit qu'un sommet $x \in X$ est de *dimension* i si x appartient à X_i. L'arbre $\mathbf{X}$ est fini si l'ensemble X est fini, autrement dit si le graphe associé est fini. La *dimension* d'un arbre fini est le maximum des dimensions de ses sommets. Dans la suite, tous les arbres considérés seront finis. Pour tout $i \geq 0$ et tout $x \in X_i$, la fibre de x est l'ensemble des $x' \in X_{i+1}$ tels que $d_i(x') = x$. On dit qu'un sommet x est *maximal* si sa fibre est vide. Une *structure d'arbre planaire* sur $\mathbf{X}$ est la donnée pour tout $i \geq 0$ et tout $x \in X_i$, d'un ordre total sur la fibre de x. On démontre que l'ensemble des structures d'arbre planaire sur $\mathbf{X}$ est en bijection avec l'ensemble des plongements du graphe associé à $\mathbf{X}$ dans un plan orienté, à difféomorphisme orienté près.

Dans l'exemple ci-dessus

$$\begin{array}{cc} X_3 & = \\ \big\downarrow{\scriptstyle d_2} & \\ X_2 & = \\ \big\downarrow{\scriptstyle d_1} & \\ X_1 & = \\ \big\downarrow{\scriptstyle d_0} & \\ X_0 & = \end{array}$$

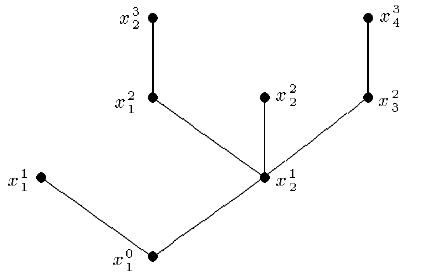


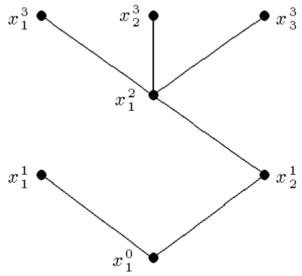
l'ensemble des sommets est

$$X = \{x_1^0,\ x_1^1,\ x_2^1,\ x_1^2,\ x_2^2,\ x_3^2,\ x_1^3,\ x_2^3,\ x_3^3,\ x_4^3\} \quad ,$$

la dimension d'un sommet, indiquée par l'indice du haut, étant égale au nombre des arêtes qu'on doit parcourir pour aller de ce sommet à la racine de l'arbre. Si x est un sommet de dimension $i+1$, $d_i(x)$ est l'unique sommet de dimension i relié par une arête à x. La relation d'ordre total sur la fibre d'un sommet x de dimension i est définie en convenant que si x_1 et x_2 sont deux sommets de dimension $i+1$ tels que $d_i(x_1) = d_i(x_2) = x$, on a $x_1 \leq x_2$ si $(\overrightarrow{xx_2}, \overrightarrow{xx_1})$ est un repère direct du plan orienté. Dans notre exemple, cet ordre correspond à l'ordre défini par l'indice du bas.

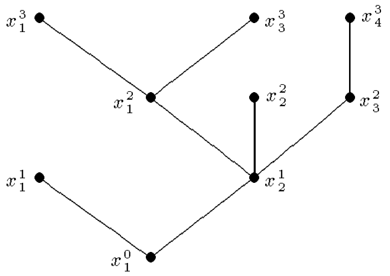
Un morphisme $\mathbf{f} : \mathbf{X}' \to \mathbf{X}$ d'un arbre $\mathbf{X}' = \big((X'_i)_{i\geq 0}, (d'_i)_{i\geq 0}\big)$ vers un arbre $\mathbf{X} = \big((X_i)_{i\geq 0}, (d_i)_{i\geq 0}\big)$ est une famille d'applications $\mathbf{f} = (f_i)_{i\geq 0}$, $f_i : X'_i \to X_i$, telle que pour tout $i \geq 0$, $d_i f_{i+1} = f_i d'_i$. Si $\mathbf{X}$ et $\mathbf{X}'$ sont des arbres planaires on dit que $\mathbf{f}$ est un *morphisme d'arbres planaires* si les applications f_i induisent des applications croissantes dans les fibres. On vérifie facilement qu'un arbre planaire n'admet pas d'automorphismes non triviaux. Un *sous-arbre* d'un arbre $\mathbf{X} = \big((X_i)_{i\geq 0}, (d_i)_{i\geq 0}\big)$ est un arbre $\mathbf{X}' = \big((X'_i)_{i\geq 0}, (d'_i)_{i\geq 0}\big)$ tel que pour tout $i \geq 0$, X'_i soit un sous-ensemble de X_i et l'application $d'_i : X'_{i+1} \to X'_i$ soit induite par $d_i : X_{i+1} \to X_i$. Les inclusions $X'_i \hookrightarrow X_i$ définissent alors un morphisme de $\mathbf{X}'$ vers $\mathbf{X}$. Si $\mathbf{X}$ est un arbre planaire, on en déduit une structure d'arbre planaire sur $\mathbf{X}'$ faisant de ce morphisme un morphisme d'arbres planaires. On dit alors que $\mathbf{X}'$ est un *sous-arbre planaire* de $\mathbf{X}$. Un sous-arbre planaire $\mathbf{X}'$ de $\mathbf{X}$ est *plein* si l'inclusion de $\mathbf{X}'$ dans $\mathbf{X}$ identifie la fibre de tout sommet de $\mathbf{X}'$ à un *segment* de la fibre de ce sommet dans $\mathbf{X}$, autrement dit, si pour tout $i \geq 0$, et tous x_1, x_2, $x_3 \in X_{i+1}$ tels que $d_i(x_1) = d_i(x_2) = d_i(x_3)$ et $x_1 \leq x_2 \leq x_3$, si x_1 et x_3 sont dans X'_{i+1}, il en est de même de x_2. Voici deux sous-arbres planaires pleins de l'exemple ci-dessus

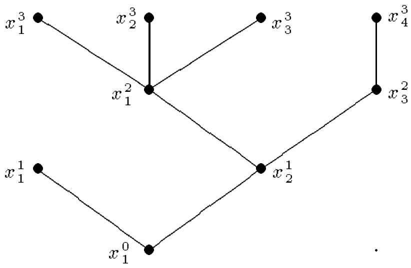




,

et deux sous-arbres planaires *non* pleins

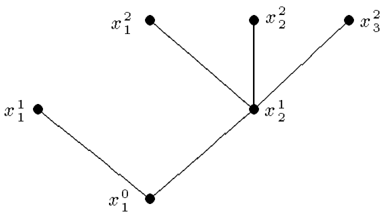




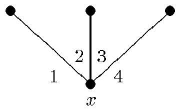
.

Si $\mathbf{X}$ est un arbre planaire de dimension $n > 0$, l'ensemble de ses sommets de dimension strictement plus petite forme un sous-arbre planaire plein noté $\partial^{1/2}\mathbf{X}$, qui est un arbre planaire de dimension $n-1$. Si X est l'arbre planaire de notre exemple, qui est de dimension $n = 3$, on a

$\partial^{1/2}\mathbf{X} =$

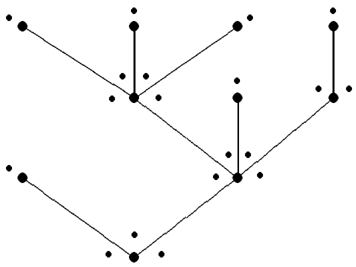


Si $\mathbf{X}$ est un arbre planaire et x un sommet de dimension i de $\mathbf{X}$, ayant une fibre de cardinal n, alors les n arêtes reliant x à un sommet de dimension $i+1$ déterminent $n+1$ *secteurs de dimension* i.

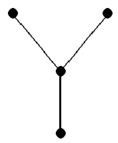


$n = 3$

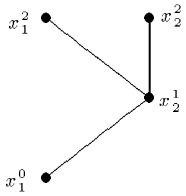
Voici les dix neuf secteurs de notre exemple indiqués par un point.

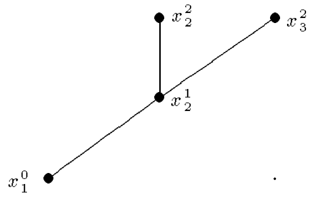


On peut maintenant poser la définition combinatoire de $\mathbf{\Theta}_0$. Les objets de $\mathbf{\Theta}_0$ sont les arbres planaires (finis). Si $\mathbf{X}$ et $\mathbf{X}'$ sont deux arbres planaires, un morphisme de $\mathbf{\Theta}_0$ de $\mathbf{X}'$ vers $\mathbf{X}$ est la donnée d'un morphisme d'arbres planaires identifiant X à un sous-arbre planaire plein de $\mathbf{X}$, et pour chaque sommet maximal de $\mathbf{X}'$ d'un secteur de son image dans $\mathbf{X}$. Par exemple, si $\mathbf{X}$ est notre arbre planaire fétiche et

$\mathbf{X}' =$  ,

alors il y a exactement six morphismes de $\mathbf{\Theta}_0$ de $\mathbf{X}'$ vers $\mathbf{X}$, correspondant aux deux sous-arbres planaires pleins



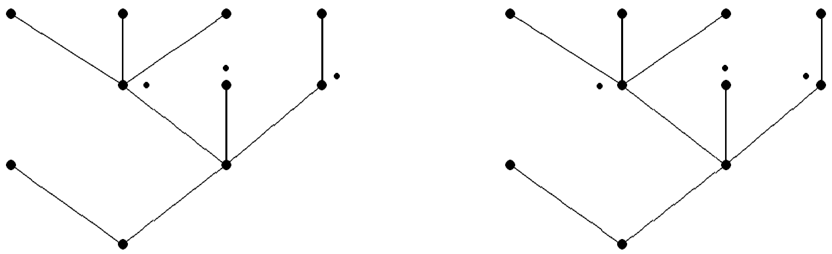


de $\mathbf{X}$, et au choix d'un des quatre secteurs du sommet x_1^2 dans $\mathbf{X}$, pour le premier, et d'un des deux secteurs du sommet x_3^2, pour le second (le sommet x_2^2 n'ayant qu'un seul secteur).

Pour tout arbre planaire $\mathbf{X}$ de dimension strictement positive, on définit deux morphismes de $\mathbf{\Theta}_0$

$$\sigma_{\mathbf{X}},\ \tau_{\mathbf{X}} : \partial^{1/2}\mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{X}$$

par le sous-arbre planaire plein $\partial^{1/2}\mathbf{X}$ de $\mathbf{X}$ et le choix, pour chaque sommet maximal de $\partial^{1/2}\mathbf{X}$, de la région la plus à droite, respectivement la plus à gauche, du sommet correspondant de $\mathbf{X}$. Ci-dessous on indique par un point les régions définissant respectivement $\sigma_{\mathbf{X}}$ et $\tau_{\mathbf{X}}$ pour $\mathbf{X}$ notre arbre préféré.

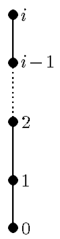


On vérifie facilement que pour tout arbre planaire de dimension au moins égale à 2, on a les égalités

$$\sigma_{\mathbf{X}}\,\sigma_{\partial^{1/2}\mathbf{X}} = \tau_{\mathbf{X}}\,\sigma_{\partial^{1/2}\mathbf{X}} \qquad \text{et} \qquad \sigma_{\mathbf{X}}\,\tau_{\partial^{1/2}\mathbf{X}} = \tau_{\mathbf{X}}\,\tau_{\partial^{1/2}\mathbf{X}}$$

Pour tout $i \geq 0$, on note $\mathbf{D}_i$ l'arbre

$\mathbf{D}_i \; =$



et pour tout $i \geq 1$, on pose

$$\boldsymbol{\sigma}_i = \sigma_{\mathbf{D}_i} : \mathbf{D}_{i-1} = \partial^{1/2}\mathbf{D}_i \longrightarrow \mathbf{D}_i \qquad \text{et} \qquad \boldsymbol{\tau}_i = \tau_{\mathbf{D}_i} : \mathbf{D}_{i-1} = \partial^{1/2}\mathbf{D}_i \longrightarrow \mathbf{D}_i \quad .$$

Pour tout $i \geq 2$, on a

$$\boldsymbol{\sigma}_i\boldsymbol{\sigma}_{i-1} = \boldsymbol{\tau}_i\boldsymbol{\sigma}_{i-1} \qquad \text{et} \qquad \boldsymbol{\sigma}_i\boldsymbol{\tau}_{i-1} = \boldsymbol{\tau}_i\boldsymbol{\tau}_{i-1} \quad ,$$

et la catégorie $\mathbb{D}$ s'identifie ainsi à une sous-catégorie pleine de $\mathbf{\Theta}_0$. On démontre que la catégorie $\mathbf{\Theta}_0$ ainsi définie est une enveloppe globulaire de $\mathbb{D}$ (ce qui justifie la notation adoptée).

De façon plus précise, soit $\mathbf{X}$ un arbre planaire. On vérifie facilement que pour tout $i \geq 0$, l'ensemble des morphismes de $\mathbf{D}_i$ vers $\mathbf{X}$ est en bijection avec les régions de dimension i de $\mathbf{X}$. En particulier, chaque sommet maximal x de dimension i de $\mathbf{X}$ définit un unique morphisme $j_x : \mathbf{D}_i \to \mathbf{X}$. D'autre part, l'orientation du plan définit un ordre total sur l'ensemble des sommets maximaux de $\mathbf{X}$ (en prenant le sens trigonométrique inverse). Cet ordre total peut être défini également de façon purement combinatoire à l'aide des relations d'ordre total sur les fibres des sommets de $\mathbf{X}$. Soit donc $\{x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_m\}$ l'ensemble des sommets maximaux de $\mathbf{X}$ ainsi ordonné, et soit i_k la dimension du sommet x_k. Pour tout k, $1 \leq k < m$, soit x'_k le sommet de dimension maximale appartenant à la fois au sous-arbre de $\mathbf{X}$ définissant le morphisme $j_{x_k} : \mathbf{D}_{i_k} \to \mathbf{X}$ et celui définissant $j_{x_{k+1}} : \mathbf{D}_{i_{k+1}} \to \mathbf{X}$, et notons i'_k sa dimension. Alors $\mathbf{X}$ est la somme globulaire

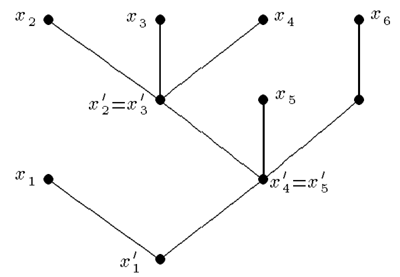
$$\mathbf{X} = \mathbf{D}_{i_1} \amalg_{\mathbf{D}_{i'_1}} \mathbf{D}_{i_2} \amalg_{\mathbf{D}_{i'_2}} \cdots \amalg_{\mathbf{D}_{i'_{m-1}}} \mathbf{D}_{i_m}$$

dont le tableau des dimensions est

$$\begin{pmatrix} i_1 & & i_2 & & \cdots & & i_m \\ & i'_1 & & i'_2 & \cdots & i'_{m-1} & \end{pmatrix} \quad ,$$

et pour tout $1 \leq k \leq m$, $j_{x_k} : \mathbf{D}_{i_k} \to \mathbf{X}$ est le morphisme canonique. L'arbre $\mathbf{X}$ de notre exemple favori

$\mathbf{X}$ =



est donc la somme globulaire

$$\mathbf{X} = \mathbf{D}_1 \amalg_{\mathbf{D}_0} \mathbf{D}_3 \amalg_{\mathbf{D}_2} \mathbf{D}_3 \amalg_{\mathbf{D}_2} \mathbf{D}_3 \amalg_{\mathbf{D}_1} \mathbf{D}_2 \amalg_{\mathbf{D}_1} \mathbf{D}_3$$

dont le tableau de dimensions est

$$\begin{pmatrix} 1 & & 3 & & 3 & & 3 & & 2 & & 3 \\ & 0 & & 2 & & 2 & & 1 & & 1 & \end{pmatrix} \quad .$$

Il est facile de montrer que l'application associant à un tableau d'entiers positifs ou nuls de la forme

$$\begin{pmatrix} i_1 & & i_2 & & \cdots & & i_m \\ & i'_1 & & i'_2 & \cdots & i'_{m-1} & \end{pmatrix} \quad ,$$

où pour tout k, $1 \leq k < m$, $i'_k < i_k$ et $i'_k < i_{k+1}$, la somme globulaire dans $\mathbf{\Theta}_0$

$$\mathbf{X} = \mathbf{D}_{i_1} \amalg_{\mathbf{D}_{i'_1}} \mathbf{D}_{i_2} \amalg_{\mathbf{D}_{i'_2}} \cdots \amalg_{\mathbf{D}_{i'_{m-1}}} \mathbf{D}_{i_m}$$

établit une bijection entre l'ensemble de ces tableaux et les classes d'isomorphisme d'objets de $\mathbf{\Theta}_0$. Ainsi, quitte à remplacer $\mathbf{\Theta}_0$ par une catégorie équivalente, on peut supposer que les objets de $\mathbf{\Theta}_0$ *sont* les tableaux de ce type, et alors les seuls isomorphismes de $\mathbf{\Theta}_0$ sont les identités.

Théories globulaires. — Une *théorie algébrique globulaire*, ou plus simplement *théorie globulaire*, est une extension globulaire $\mathbb{D} \to B$ de $\mathbb{D}$ telle que le morphisme d'extensions globulaires $\mathbf{\Theta}_0 \to B$, défini par la propriété universelle de l'enveloppe globulaire $\mathbf{\Theta}_0$, est un foncteur fidèle induisant une bijection des ensembles des classes d'isomorphisme des objets de $\mathbf{\Theta}_0$ et de B. Quitte à remplacer B par une catégorie équivalente, on peut supposer, sans perte de généralité, que ce foncteur induit une bijection des ensembles des objets, ce qu'on fera toujours dans la suite. On dira parfois plus simplement que B est une théorie globulaire. Par exemple, la catégorie universelle Θ pour l'espèce de structure d'∞-catégorie stricte est une théorie globulaire. Un *morphisme de théories globulaires* est un morphisme des extensions globulaires sous-jacentes, autrement dit, si $\mathbb{D} \to B$ et $\mathbb{D} \to B'$ sont deux théories globulaires, un morphisme de la première vers la seconde est un foncteur $B \to B'$ commutant aux sommes globulaires et rendant commutatif le triangle suivant

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[d] \\ \mathbb{D} \arrow[ur] \arrow[r] & B' \end{tikzcd} .$$

En vertu de la propriété universelle de $\mathbf{\Theta}_0$, on en déduit un triangle commutatif

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[d] \\ \mathbf{\Theta}_0 \arrow[ur] \arrow[r] & B' \end{tikzcd}$$

de théories globulaires. La terminologie de *théorie algébrique* globulaire est inspirée par celle de Lawvere [**4**].

Morphismes globulaires, algébriques. — Soit $\mathbb{D} \to B$ une théorie globulaire, et $\mathbf{\Theta}_0 \to B$ le foncteur défini par la propriété universelle de $\mathbf{\Theta}_0$ (qui est fidèle et induit une bijection des ensembles des objets). On identifiera $\mathbf{\Theta}_0$ à une sous-catégorie (non pleine) de B. On dit qu'une flèche f de B est *globulaire* si elle appartient à $\mathbf{\Theta}_0$. On dit qu'elle est *algébrique* si pour toute décomposition de la forme $f = gf'$, avec g morphisme globulaire, g est un isomorphisme (une identité, si on a choisi un modèle de $\mathbf{\Theta}_0$ sans isomorphismes non triviaux).

Couples de flèches admissibles. — En gardant les notations du paragraphe précédent, on dit qu'un couple (f, g) de flèches de B

$$\mathbf{D}_i \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} \mathbf{X}$$

est *admissible pour une théorie d'∞-catégories*, ou plus simplement *admissible* si les deux conditions suivantes sont satisfaites *a*) si $i \geq 1$, on a

$$f\boldsymbol{\sigma}_i = g\boldsymbol{\sigma}_i \qquad \text{et} \qquad f\boldsymbol{\tau}_i = g\boldsymbol{\tau}_i \quad ;$$

b) ou bien f et g sont des flèches algébriques, ou bien il existe des décompositions

$$f = \sigma_{\mathbf{X}} f' \qquad \text{et} \qquad g = \tau_{\mathbf{X}} g'$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{D}_i \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "f'"'] & & \mathbf{X} \\
& \partial^{1/2}\mathbf{X} \arrow[ur, "\sigma_{\mathbf{X}}"'] &
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbf{D}_i \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "g'"'] & & \mathbf{X} \\
& \partial^{1/2}\mathbf{X} \arrow[ur, "\tau_{\mathbf{X}}"'] &
\end{tikzcd}$$

avec f' et g' algébriques.

On dit que le couple (f, g) est *admissible pour une théorie d'∞-groupoïdes* si seulement la première de ces deux conditions est satisfaite. Un *relèvement* du couple de flèches (f, g) est un morphisme $h : \mathbf{D}_{i+1} \to \mathbf{X}$ de B tel que

$$f = h\boldsymbol{\sigma}_{i+1} \qquad \text{et} \qquad g = h\boldsymbol{\tau}_{i+1} \quad .$$

Un couple *strictement admissible pour une théorie d'∞-catégories* ou *d'∞-groupoïdes* est un couple admissible qui n'admet *pas* de relèvement.

Cohérateurs globulaires. — Un *cohérateur globulaire d'∞-catégorie* (resp. *d'∞-groupoïde*) est une théorie globulaire $\mathbf{\Theta}$ telle qu'il existe une tour de théories globulaires

$$\mathbb{D} \longrightarrow \mathbf{\Theta}_0 \longrightarrow \mathbf{\Theta}_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathbf{\Theta}_n \longrightarrow \mathbf{\Theta}_{n+1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathbf{\Theta} \simeq \varinjlim \mathbf{\Theta}_n \quad ,$$

où pour tout $n \geq 0$, $\mathbf{\Theta}_n$ est une petite catégorie et $\mathbf{\Theta}_n \to \mathbf{\Theta}_{n+1}$ un morphisme de théories globulaires, satisfaisant aux conditions suivantes :

a) tout couple de flèches de $\mathbf{\Theta}$ admissible pour une théorie d'∞-catégories (resp. d'∞-groupoïdes) admet un relèvement ;

b_0) $\mathbb{D} \to \mathbf{\Theta}_0$ est une enveloppe globulaire ;

b) pour tout $n \geq 0$, il existe un ensemble de couples de flèches de $\mathbf{\Theta}_n$ strictement admissibles pour une théorie d'∞-catégories (resp. d'∞-groupoïdes) tel que $\mathbf{\Theta}_{n+1}$ soit l'extension globulaire obtenue de $\mathbf{\Theta}_n$ par adjonction formelle d'un relèvement pour chaque couple appartenant à cet ensemble.

La condition (*b*) signifie exactement qu'il existe un ensemble E de couples de flèches de $\mathbf{\Theta}_n$, strictement admissibles pour une théorie d'∞-catégories (resp. d'∞-groupoïdes), et pour tout couple $e = (\mathbf{f}, \mathbf{g})$ appartenant à E, un relèvement $\mathbf{h}_e$ du couple $(\mathbf{f}, \mathbf{g})$ dans $\mathbf{\Theta}_{n+1}$ (où on note aussi $\mathbf{f}$, $\mathbf{g}$ l'image de $\mathbf{f}$, $\mathbf{g}$ par le foncteur $\mathbf{\Theta}_n \to \mathbf{\Theta}_{n+1}$) satisfaisant à la propriété universelle suivante. Pour toute extension globulaire $\mathbb{D} \to B$, et tout morphisme d'extensions globulaires $\mathbf{\Theta}_n \to B$, si pour tout $e = (\mathbf{f}, \mathbf{g})$ appartenant à E, h_e est un relèvement du couple (f, g), image de $(\mathbf{f}, \mathbf{g})$ dans B, alors il existe un unique morphisme d'extensions globulaires $F : \mathbf{\Theta}_{n+1} \to B$ tel que pour tout e dans E, $h_e = F(\mathbf{h}_e)$ et rendant commutatif le triangle

$$\begin{tikzcd} \mathbf{\Theta}_n \arrow[r] \arrow[dr] & \mathbf{\Theta}_{n+1} \arrow[d, "F"] \\ & B \end{tikzcd} .$$

Une construction catégorique très générale permet d'affirmer que pour tout ensemble E, comme ci-dessus, une telle extension globulaire $\mathbf{\Theta}_{n+1}$ existe, $\mathbf{\Theta}_n \to \mathbf{\Theta}_{n+1}$ induit une bijection sur les ensembles des objets, et on peut montrer que ce foncteur est fidèle. Ainsi, en prenant de proche en proche pour E l'ensemble de *tous* les couples strictement admissibles pour une théorie d'∞-catégories (resp. d'∞-groupoïdes), on déduit l'existence de cohérateurs globulaires d'∞-catégorie (resp. d'∞-groupoïde).

La définition d'une ∞-catégorie. — Soit $\mathbf{\Theta}$ un cohérateur globulaire d'∞-catégorie (resp. d'∞-groupoïde). Une ∞-catégorie (resp. ∞-groupoïde) de type $\mathbf{\Theta}$ est un préfaisceau $F : \mathbf{\Theta}^\circ \to \mathcal{E}ns$ transformant les sommes globulaires en produits globulaires.

Quelques flèches structurales. — On se fixe un cohérateur globulaire d'∞-catégorie $\mathbb{D} \to \mathbf{\Theta}$. On identifie $\mathbf{\Theta}_0$ à une sous-catégorie de $\mathbf{\Theta}$ ayant les mêmes objets, autrement dit, les arbres planaires. Pour tout arbre planaire $\mathbf{X}$, on note $i_{\mathbf{X}}$ sa dimension. Il existe une famille de flèches algébriques de $\mathbf{\Theta}$,

$$\big(\nabla_{i_{\mathbf{X}}} : \mathbf{D}_{i_{\mathbf{X}}} \longrightarrow \mathbf{X}\big)_{\mathbf{X} \in \mathsf{Ob}\,\mathbf{\Theta}} \quad ,$$

telle que pour tout arbre planaire $\mathbf{X}$ de dimension i strictement positive, on ait

$$\begin{tikzcd} \mathbf{D}_i \arrow[r, "\nabla_{\mathbf{X}}"] & \mathbf{X} \\ \mathbf{D}_{i-1} \arrow[u, shift left, "\boldsymbol{\sigma}_i"] \arrow[u, shift right, "\boldsymbol{\tau}_i"'] \arrow[r, "\nabla_{\partial^{1/2}\mathbf{X}}"'] & \partial^{1/2}\mathbf{X} \arrow[u, shift left, "\sigma_{\mathbf{X}}"] \arrow[u, shift right, "\tau_{\mathbf{X}}"'] \end{tikzcd} \qquad \nabla_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\sigma}_i = \sigma_{\mathbf{X}}\nabla_{\partial^{1/2}\mathbf{X}} \quad \text{et} \quad \nabla_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\tau}_i = \tau_{\mathbf{X}}\nabla_{\partial^{1/2}\mathbf{X}} \quad .$$

On peut construire les flèches $\nabla_{\mathbf{X}}$ par récurrence sur la dimension de $\mathbf{X}$. Pour le seul arbre de dimension 0, $\mathbf{X} = \mathbf{D}_0$, on pose $\nabla_{\mathbf{D}_0} = 1_{\mathbf{D}_0}$. Soit $i \geq 0$, supposons qu'on ait construit ces flèches pour tout arbre de dimension i, et soit $\mathbf{X}$ un arbre de dimension $i+1$. Le couple de flèches

$$\begin{tikzcd} \mathbf{D}_i \arrow[r, shift left, "\sigma_{\mathbf{X}}\nabla_{\partial^{1/2}\mathbf{X}}"] \arrow[r, shift right, "\tau_{\mathbf{X}}\nabla_{\partial^{1/2}\mathbf{X}}"'] & \mathbf{X} \end{tikzcd}$$

est admissible pour une théorie d'∞-catégories. En effet, par hypothèse de récurrence $\nabla_{\partial^{1/2}\mathbf{X}}$ est une flèche algébrique, et si $i>0$, on a

$$\sigma_{\mathbf{X}}\nabla_{\partial^{1/2}\mathbf{X}}\boldsymbol{\sigma}_i = \sigma_{\mathbf{X}}\sigma_{\partial^{1/2}\mathbf{X}}\nabla_{\partial^{1/2}\partial^{1/2}\mathbf{X}} = \tau_{\mathbf{X}}\sigma_{\partial^{1/2}\mathbf{X}}\nabla_{\partial^{1/2}\partial^{1/2}\mathbf{X}} = \tau_{\mathbf{X}}\nabla_{\partial^{1/2}\mathbf{X}}\boldsymbol{\sigma}_i \quad ,$$

$$\sigma_{\mathbf{X}}\nabla_{\partial^{1/2}\mathbf{X}}\boldsymbol{\tau}_i = \sigma_{\mathbf{X}}\tau_{\partial^{1/2}\mathbf{X}}\nabla_{\partial^{1/2}\partial^{1/2}\mathbf{X}} = \tau_{\mathbf{X}}\tau_{\partial^{1/2}\mathbf{X}}\nabla_{\partial^{1/2}\partial^{1/2}\mathbf{X}} = \tau_{\mathbf{X}}\nabla_{\partial^{1/2}\mathbf{X}}\boldsymbol{\tau}_i \quad .$$

On en déduit l'existence d'un relèvement $\nabla_{\mathbf{X}} : \mathbf{D}_{i+1} \to \mathbf{X}$ tel que

$$\nabla_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\sigma}_{i+1} = \sigma_{\mathbf{X}}\nabla_{\partial^{1/2}\mathbf{X}} \quad \text{et} \quad \nabla_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\tau}_{i+1} = \tau_{\mathbf{X}}\nabla_{\partial^{1/2}\mathbf{X}} \quad ,$$

ce qui prouve l'assertion, modulo la vérification non triviale que ce relèvement est une flèche algébrique de $\mathbf{\Theta}$. On remarque facilement que pour tout $i \geq 0$, la flèche $\nabla_{\mathbf{D}_i}$ peut être choisie comme étant l'identité de $\mathbf{D}_i$.

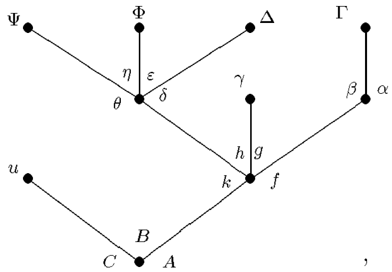
Les arbres planaires peuvent être considérés comme des « schémas de composition » ("pasting schemes"), et si $F : \mathbf{\Theta} \to \mathcal{E}ns$ est une ∞-catégorie de type $\mathbf{\Theta}$, et pour tout $i \geq 0$, $F_i = F(\mathbf{D}_i)$ l'ensemble des i-flèches, alors pour tout arbre planaire de dimension i,

$$\mathbf{X} = \mathbf{D}_{i_1} \amalg_{\mathbf{D}_{i'_1}} \mathbf{D}_{i_2} \amalg_{\mathbf{D}_{i'_2}} \cdots \amalg_{\mathbf{D}_{i'_{m-1}}} \mathbf{D}_{i_m} \quad ,$$

l'application

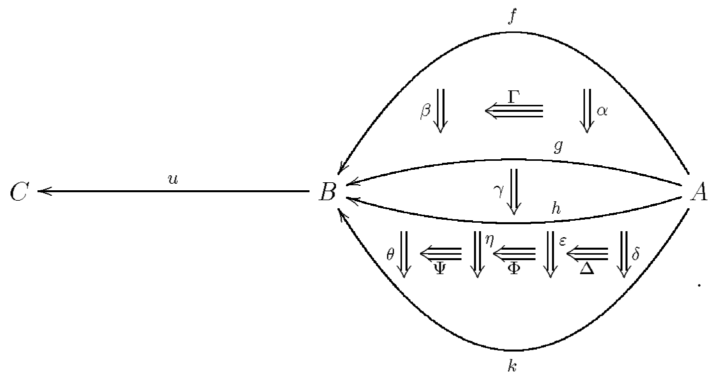
$$F(\nabla_X) : F_{i_1} \times_{F_{i'_1}} F_{i_2} \times_{F_{i'_2}} \cdots \times_{F_{i'_{m-1}}} F_{i_m} \longrightarrow F_i$$

peut être vue comme l'application de composition, suivant le « schéma » défini par l'arbre $\mathbf{X}$. Par exemple, si $\mathbf{X}$ est l'arbre planaire de notre paradigme :



,

alors le schéma de composition correspondant est



.

Références

[1] M. A. Batanin – « Monoidal globular categories as natural environment for the theory of weak n-categories », *Advances in Mathematics* **136** (1998), p. 39–103.

[2] C. Berger – « A cellular nerve for higher categories », *Advances in Mathematics* **169** (2002), p. 118–175.

[3] A. Grothendieck – « *Pursuing stacks* », Manuscrit, 1983, à paraître dans *Documents Mathématiques*.

[4] F. W. Lawvere – « Functional semantics of algebraic theories », *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **50** (1963), p. 869–872.

[5] G. Maltsiniotis – « *Infini groupoïdes d'après Grothendieck* », Exposé au groupe de travail *Algèbre et topologie homotopiques*, le 24 janvier 2007.

Georges MALTSINIOTIS, Institut de Mathématiques de Jussieu, Université Paris 7 Denis Diderot, Case Postale 7012, 2, place Jussieu, F-75251 PARIS cedex 05, FRANCE
E-mail : `maltsin@math.jussieu.fr` • *Url :* `http://www.math.jussieu.fr/~maltsin/`