INFINI GROUPOÏDES D'APRÈS GROTHENDIECK

par

Georges MALTSINIOTIS

1. Introduction

Mea culpa. — Je n'ai jamais entendu dire que Grothendieck avait réussi à dégager, dans "Pursuing Stacks" [**4**], une définition des ∞-groupoïdes non stricts. J'avais moi-même affirmé le contraire dans ce groupe de travail il y a dix ans, en janvier 97, lors de mes exposés sur les catégories test. En faisant une n-ième lecture de ce texte à l'occasion de mon travail d'édition, je me suis aperçu qu'en fait il y avait bel et bien une telle définition en bonne et due forme. La particularité de cette définition est que la notion d'∞-groupoïde non strict est posée sans référence à une notion d'∞-catégorie non stricte, qui elle n'est pas dégagée. Dans ce cadre, un ∞-groupoïde *n'est pas* un cas particulier d'∞-catégorie. Je me suis aperçu, et sans doute Grothendieck était conscient de ce fait, qu'une variante de sa définition permet de définir également la notion d'∞-catégorie non stricte. Cela fera l'objet d'un autre exposé, où on remarquera que cela conduit à une notion très proche, sinon équivalente, à celle de Batanin [**1**]. Dans le présent exposé, je vais me limiter à une mise en forme de la définition de Grothendieck d'un ∞-groupoïde non strict, et à l'énoncé de quelques conjectures et d'une stratégie pour les démontrer.

Le programme de Grothendieck. — Le programme de Grothendieck est de montrer que pour tout n, $0 \leq n \leq \infty$, l'étude des types d'homotopie n-tronqués est équivalente à celle des n-groupoïdes ; je laisse tomber l'adjectif non strict. En particulier, l'étude des types d'homotopie non tronqués, devra être équivalente à celle des ∞-groupoïdes. Pour cela, il s'agit d'associer à tout espace topologique, ou ensemble simplicial, X un n-groupoïde fondamental $\Pi_n(X)$, généralisant le groupoïde fondamental de Poincaré pour $n = 1$. L'idée évidente est que les objets de $\Pi_n(X)$ doivent être les points de X, les 1-flèches les chemins de X, les 2-flèches les homotopies entre chemins, les 3-flèches les homotopies entre homotopies, *etc.* Il s'agit de définir l'espèce de structure de n-groupoïdes permettant de réaliser ce programme. De façon plus précise, il s'agit de définir aussi une notion de n-équivalence entre n-groupoïdes, et établir que le foncteur qui associe à un espace topologique son n-groupoïde fondamental induit une équivalence de catégories entre la catégorie des espaces topologiques, localisée par les n-équivalences d'espaces topologiques, et celle des n-groupoïdes, localisée par les n-équivalences de n-groupoïdes. On rappelle qu'une application continue $f : X \to Y$ est une n-équivalence si l'application $\pi_0(f) : \pi_0(X) \to \pi_0(Y)$ est bijective, et si pour tout i, $1 \le i \le n$, et tout point x de X, $\pi_i(f;x) : \pi_i(X;x) \to \pi_i(Y;f(x))$ est un isomorphisme de groupes.

Les structures auxquelles on s'attend. — On va s'intéresser au cas des ∞-groupoïdes, la variante des n-groupoïdes, pour $n < \infty$, étant facile à deviner.
On a d'abord les structures existant aussi pour les ∞-groupoïdes stricts :

- ensembles des i-flèches F_i, $i \ge 0$ ($F_0 =$ objets) ;
- applications source et but $s_i, t_i : F_i \to F_{i-1}$, $i > 0$, satisfaisant aux égalités

$$s_{i-1}s_i = s_{i-1}t_i \quad , \qquad t_{i-1}s_i = t_{i-1}t_i \quad , \qquad i \ge 2 \quad ,$$

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, bend left] \arrow[r, bend right] \arrow[r, phantom, "\Downarrow"] & \bullet \end{tikzcd} \quad ,$$

  de sorte qu'on puisse définir par composition exactement deux applications

$$s^i_l : F_i \to F_{i-l} \quad , \qquad t^i_l : F_i \to F_{i-l} \quad , \qquad 1 \le l \le i \quad ,$$
$$s^i_l = s_{i-l+1} \cdots s_{i-1}s_i \quad , \qquad t^i_l = t_{i-l+1} \cdots t_{i-1}t_i \quad ,$$

  les applications source et but itérés ;
- les compositions

$$\begin{array}{ccc} (F_i, s^i_l) \times_{F_{i-l}} (t^i_l, F_i) & \longrightarrow & F_i \\ (u,v) & \longmapsto & u \overset{i}{\underset{l}{*}} v \end{array}$$

  satisfaisant à

$$s_i(u \overset{i}{\underset{l}{*}} v) \;=\; \begin{cases} s_i(v) \quad , & l = 1 \\ s_i(u) \overset{i-1}{\underset{l-1}{*}} s_i(v) \; , & l \ge 2 \end{cases}$$

$$t_i(u \overset{i}{\underset{l}{*}} v) \;=\; \begin{cases} t_i(u) \quad , & l = 1 \\ t_i(u) \overset{i-1}{\underset{l-1}{*}} t_i(v) \; , & l \ge 2 \end{cases}$$

$$i=2,\ l=1 \qquad \begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, bend left=50, ""{name=U, below}] \arrow[r, ""{name=M}] \arrow[r, bend right=50, ""{name=D, above}] & \bullet \arrow[Rightarrow, from=U, to=M] \arrow[Rightarrow, from=M, to=D] \end{tikzcd} \quad , \qquad i=2,\ l=2 \qquad \begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, bend left=50] \arrow[r, bend right=50] \arrow[r, phantom, "\Downarrow"] & \bullet \arrow[r, bend left=50] \arrow[r, bend right=50] \arrow[r, phantom, "\Downarrow"] & \bullet \end{tikzcd} \quad ;$$

– les unités $k_i : F_i \to F_{i+1}$, $i \geq 0$, satisfaisant aux égalités

$$s_{i+1}k_i = 1_{F_i} = t_{i+1}k_i \quad , \qquad i \geq 0 \quad ;$$

– les inverses $inv^i_l : F_i \to F_i$, $1 \leq l \leq i$, pour les compositions $\underset{l}{\overset{i}{*}}$, satisfaisant aux relations

$$s_i\, inv^i_l \;=\; \begin{cases} t_i \quad , & l = 1 \\ inv^{i-1}_{l-1}\, s_i \ , & l \geq 2 \end{cases}$$

$$t_i\, inv^i_l \;=\; \begin{cases} s_i \quad , & l = 1 \\ inv^{i-1}_{l-1}\, t_i \ , & l \geq 2 \end{cases}$$

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, bend left=50] \arrow[r, bend right=50] \arrow[r, phantom, "\Downarrow"] & \bullet \end{tikzcd} \;\xmapsto{\ inv^2_1\ }\; \begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, bend left=50] \arrow[r, bend right=50] \arrow[r, phantom, "\Uparrow"] & \bullet \end{tikzcd} \quad ,$$

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, bend left=50] \arrow[r, bend right=50] \arrow[r, phantom, "\Downarrow"] & \bullet \end{tikzcd} \;\xmapsto{\ inv^2_2\ }\; \begin{tikzcd} \bullet & \bullet \arrow[l, bend right=50] \arrow[l, bend left=50] \arrow[l, phantom, "\Downarrow"] \end{tikzcd} \quad .$$

Dans le cas des ∞-groupoïdes stricts, les données s'arrêtent là, et on impose un certain nombre d'égalités exprimant :

– associativité et unités ;

– règle d'échange ou de Godement

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, bend left=50, ""{name=U1, below}] \arrow[r, ""{name=M1}] \arrow[r, bend right=50, ""{name=D1, above}] & \bullet \arrow[r, bend left=50, ""{name=U2, below}] \arrow[r, ""{name=M2}] \arrow[r, bend right=50, ""{name=D2, above}] & \bullet \arrow[Rightarrow, from=U1, to=M1, "\alpha"] \arrow[Rightarrow, from=M1, to=D1, "\beta"] \arrow[Rightarrow, from=U2, to=M2, "\gamma"] \arrow[Rightarrow, from=M2, to=D2, "\delta"] \end{tikzcd}$$

$$(\delta \underset{l}{\overset{i}{*}} \gamma) \underset{l'}{\overset{i}{*}} (\beta \underset{l}{\overset{i}{*}} \alpha) = (\delta \underset{l'}{\overset{i}{*}} \beta) \underset{l}{\overset{i}{*}} (\gamma \underset{l'}{\overset{i}{*}} \alpha) \quad , \qquad 1 \leq l < l' \leq i \quad ;$$

– fonctorialité des unités ;

– les “inverses” sont des inverses.

Dans le cas des ∞-groupoïdes non stricts, ces égalités sont remplacées par des nouvelles données, les données de cohérence. Par exemple, pour les associativités, au lieu d'avoir les égalités

$$(u \overset{i}{\underset{l}{*}} v) \overset{i}{\underset{l}{*}} w = u \overset{i}{\underset{l}{*}} (v \overset{i}{\underset{l}{*}} w) \quad ,$$

on a une $i+1$-flèche

$$(u \overset{i}{\underset{l}{*}} v) \overset{i}{\underset{l}{*}} w \xrightarrow{\alpha_{u,v,w}} u \overset{i}{\underset{l}{*}} (v \overset{i}{\underset{l}{*}} w)$$

(d'ailleurs aussi une autre dans le sens opposé), autrement dit, une application

$$(F_i, s^i_l) \times_{F_{i-l}} (t^i_l, F_i, s^i_l) \times_{F_{i-l}} (t^i_l, F_i) \xrightarrow{\alpha = \alpha^i_l} F_{i+1}$$

telle que

$$s_{i+1}\alpha^i_l = \overset{i}{\underset{l}{*}} (\overset{i}{\underset{l}{*}} \times 1_{F_i}) \quad , \qquad t_{i+1}\alpha^i_l = \overset{i}{\underset{l}{*}} (1_{F_i} \times \overset{i}{\underset{l}{*}}) \quad .$$

On s'attend alors à un pentagone de MacLane, mais à nouveau au lieu d'une égalité, on a une flèche de cohérence

$$\begin{tikzcd}
 & (u * v) * (w * t) \arrow[dr] \arrow[dd, phantom, "\Downarrow"] & \\
((u * v) * w) * t \arrow[ur] \arrow[d] & & u * (v * (w * t)) \\
(u * (v * w)) * t \arrow[rr] & & u * ((v * w) * t) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

(et une autre dans l'autre sens) correspondant à une application

$$(F_i, s^i_l) \times_{F_{i-l}} (t^i_l, F_i, s^i_l) \times_{F_{i-l}} (t^i_l, F_i, s^i_l) \times_{F_{i-l}} (t^i_l, F_i) \longrightarrow F_{i+2} \quad ,$$

et cela devient vite inextricable. Il s'agit de trouver le fil d'Ariane permettant de s'en sortir. Grothendieck l'a trouvé après une ou deux après midis de réflexion.

Le fil d'Ariane. — La première observation est que les applications définies par les flèches de cohérence, ainsi que celles venant de la structure de groupoïde strict, ont comme source un produit fibré itéré d'un certain type, construit à l'aide des ensembles F_i et les applications source et but itérés, et comme but un ensemble F_j.

$$F_{i_1} \times_{F_{i'_1}} F_{i_2} \times_{F_{i'_2}} \cdots \times_{F_{i'_{m-1}}} F_{i_m} \xrightarrow{\alpha} F_j$$

L'application α peut être vue comme définissant une flèche de cohérence de $\alpha_0 = s_j\alpha$ vers $\alpha_1 = t_j\alpha$. Le principe servant de fil d'Ariane est de demander l'existence d'un tel α chaque fois que cela n'est pas déraisonnable. En effet, les égalités

$$(*) \qquad \alpha_0 = s_j\alpha \qquad \text{et} \qquad \alpha_1 = t_j\alpha$$

impliquent, si $j \geq 2$, qu'on a les relations

$$(**) \qquad s_{j-1}\alpha_0 = s_{j-1}\alpha_1 \qquad \text{et} \qquad t_{j-1}\alpha_0 = t_{j-1}\alpha_1 \quad .$$

Pour tout couple « d'applications structurales », autrement dit définies par la structure même de l'∞-groupoïde,

$$\alpha_0, \alpha_1 : F_{i_1} \times_{F_{i'_1}} F_{i_2} \times_{F_{i'_2}} \cdots \times_{F_{i'_{m-1}}} F_{i_m} \longrightarrow F_{j-1} \quad , \qquad j > 0 \quad ,$$

satisfaisant si $j \geq 2$ aux conditions $(**)$, on va demander l'existence d'une application structurale α satisfaisant aux relations $(*)$, du moins dans le cas universel, autrement dit, quand les égalités $(**)$ ne sont pas satisfaites « juste par accident », dans un ∞-groupoïde particulier. Cela demande plus d'explications :

Rappels de diverses méthodes de définition d'une espèce de structure algébrique. — Une structure algébrique est définie par la donnée d'une famille d'ensembles de base, d'opérations faisant intervenir certaines limites projectives finies construites à l'aide de ces ensembles, et des égalités entre ces opérations faisant également intervenir uniquement des limites projectives finies. Une espèce de structure algébrique peut être définie par la donnée d'une « structure universelle » vivant dans une petite catégorie admettant des limites projectives pertinentes, un modèle ensembliste d'une telle structure étant un foncteur de cette catégorie dans celle des ensembles, commutant aux dites limites projectives. Cette structure universelle n'est pas absolument canonique : elle dépend du choix d'une classe de limites projectives finies considérées comme pertinentes.

Par exemple, si on veut définir l'espèce de structure de magma (ensemble muni d'une seule opération binaire, ne satisfaisant aucune propriété particulière), on peut estimer que les limites projectives pertinentes sont les produits binaires (mais rien n'empêche d'être plus exigeant). On commence alors par construire la catégorie universelle $\mathbf{C}_0$ admettant des produits binaires, engendrée par un seul objet $\mathbf{X}$ (catégorie équivalente à la catégorie opposée à celle des ensembles finis non vides, l'objet $\mathbf{X}$ correspondant au singleton $\{*\}$). Le couple $(\mathbf{C}_0, \mathbf{X})$ satisfait à la propriété universelle suivante. Pour toute catégorie C admettant des produits binaires, et tout objet X de C, il existe un foncteur $F : \mathbf{C}_0 \to C$, unique à isomorphisme unique près, commutant aux produits binaires, et tel que $F(\mathbf{X}) = X$, autrement dit tel que le triangle

$$\begin{tikzcd} e \arrow[r, "\mathbf{X}"] \arrow[dr, "X"'] & \mathbf{C}_0 \arrow[d, "F"] \\ & C \end{tikzcd} \quad ,$$

où e désigne la catégorie ponctuelle et $\mathbf{X}$, X les foncteurs de source la catégorie ponctuelle définis par ces objets, soit commutatif. Ensuite, on peut construire la catégorie $\mathbf{C}$ obtenue de $\mathbf{C}_0$ en adjoignant formellement une flèche $\mathbf{m} : \mathbf{X} \times \mathbf{X} \to \mathbf{X}$, et en exigeant que le foncteur $\mathbf{C}_0 \to \mathbf{C}$ commute aux produits binaires (cette construction universelle étant toujours possible). La catégorie $\mathbf{C}$, munie de l'objet $\mathbf{X}$ (en notant aussi $\mathbf{X}$ l'image dans $\mathbf{C}$ de l'objet $\mathbf{X}$ de $\mathbf{C}_0$) et de la flèche $\mathbf{m}$, satisfait à la propriété universelle suivante. Pour toute catégorie C admettant des produits binaires, tout objet X de C, et toute flèche $m : X \times X \to X$, il existe un foncteur $F : \mathbf{C} \to C$, unique à isomorphisme unique près, commutant aux produits binaires, et tel que $F(\mathbf{X}) = X$ et $F(\mathbf{m}) = m$.

$$
\begin{tikzcd}
e \arrow[r, "\mathbf{X}"] \arrow[drr, "X"'] & \mathbf{C}_0 \arrow[r, "can"] \arrow[dr, dashed] & \mathbf{C} \arrow[d, dashed, "F"] \\
& & C
\end{tikzcd}
$$

Ainsi, la catégorie des magmas est équivalente à celle des foncteurs $\mathbf{C} \to \mathcal{E}ns$, à valeurs dans la catégorie des ensembles, commutant aux produits binaires. Plus généralement, un magma dans une catégorie C, admettant des produits binaires, peut être défini comme étant un foncteur $\mathbf{C} \to C$ commutant aux dits produits.

On peut montrer que le foncteur $\mathbf{C}_0 \to \mathbf{C}$ est fidèle et induit une bijection des ensembles des objets. La classe des flèches *homogènes monotones* (resp. *homogènes*) de $\mathbf{C}$ est la plus petite classe de flèches de $\mathbf{C}$, stable par composition et produits binaires, et contenant $\mathbf{m}$ et les identités (resp. et les isomorphismes). On définit ainsi deux sous-catégories $\mathbf{H}_{mon}$ et $\mathbf{H}$ de $\mathbf{C}$ ayant les mêmes objets que $\mathbf{C}$. Pour tout $n \geq 1$, on a

$$
\begin{aligned}
\mathsf{card}\big(\mathsf{Hom}_{\mathbf{H}_{mon}}(\mathbf{X}^n, \mathbf{X})\big) &= \text{nombre de parenthésages de } n \text{ objets} \\
&= (n-1)\text{-ème nombre de Catalan} = \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!}
\end{aligned}
$$

et

$$
\mathsf{card}\big(\,\mathsf{Hom}_{\mathbf{H}}(\mathbf{X}^n, \mathbf{X})\,\big) = \frac{(2n-2)!}{(n-1)!} \quad ,
$$

et la composition dans les catégories $\mathbf{H}_{mon}$ et $\mathbf{H}$ définit une opérade

$$
n \longmapsto \mathsf{Hom}_{\mathbf{H}_{mon}}(\mathbf{X}^n, \mathbf{X})
$$

et une opérade symétrique

$$
n \longmapsto \mathsf{Hom}_{\mathbf{H}}(\mathbf{X}^n, \mathbf{X}) \quad .
$$

La catégorie des magmas s'identifie à la catégorie des algèbres sur chacune de ses deux opérades. Par ailleurs, toute flèche f de $\mathbf{C}$ se décompose de façon unique en $f = hg$, avec h dans $\mathbf{H}_{mon}$ et g dans $\mathbf{C}_0$. Ainsi les opérades ci-dessus permettent facilement de reconstruire la catégorie universelle $\mathbf{C}$. Le point de vue de la structure universelle et le point de vue des opérades sont essentiellement équivalents. Le premier est celui de Grothendieck. Le second inspire le travail de Batanin.

2. La définition des ∞-groupoïdes

Le principe de la définition. — L'espèce de structure des ∞-groupoïdes (non stricts) sera définie en construisant une catégorie universelle $\mathbf{C}$ stable par un certain type de limites projectives finies, les *produits fibrés itérés standard*, et un ∞-groupoïde sera un foncteur $\mathbf{C} \to \mathcal{E}ns$ commutant à ces limites projectives. Le rôle de la catégorie ponctuelle e sera joué ici par la catégorie opposée $\mathbb{G}$ à la catégorie *globulaire*.

La catégorie $\mathbb{G}$. — La catégorie $\mathbb{G}$ est la catégorie engendrée par le graphe

$$\mathbf{F}_0 \underset{\mathbf{t}_1}{\overset{\mathbf{s}_1}{\leftleftarrows}} \mathbf{F}_1 \underset{\mathbf{t}_2}{\overset{\mathbf{s}_2}{\leftleftarrows}} \quad \cdots \quad \underset{\mathbf{t}_{i-1}}{\overset{\mathbf{s}_{i-1}}{\leftleftarrows}} \mathbf{F}_{i-1} \underset{\mathbf{t}_i}{\overset{\mathbf{s}_i}{\leftleftarrows}} \mathbf{F}_i \underset{\mathbf{t}_{i+1}}{\overset{\mathbf{s}_{i+1}}{\leftleftarrows}} \quad \cdots \quad ,$$

soumis aux relations

$$\mathbf{s}_{i-1}\mathbf{s}_i = \mathbf{s}_{i-i}\mathbf{t}_i \quad , \qquad \mathbf{t}_{i-1}\mathbf{s}_i = \mathbf{t}_{i-i}\mathbf{t}_i \quad , \qquad i \geq 2 \quad ,$$

de sorte que si on pose

$$\mathbf{s}^i_l = \mathbf{s}_{i-l+1} \cdots \mathbf{s}_{i-1}\mathbf{s}_i \quad , \qquad \mathbf{t}^i_l = \mathbf{t}_{i-l+1} \cdots \mathbf{t}_{i-1}\mathbf{t}_i \quad , \qquad 1 \leq l \leq i \quad ,$$

on ait

$$\mathsf{Hom}_{\mathbb{G}}(\mathbf{F}_i, \mathbf{F}_{i'}) = \begin{cases} \{\mathbf{s}^i_{i-i'}, \mathbf{t}^i_{i-i'}\} \quad , & i' < i \\ \{1_{\mathbf{F}_i}\} \qquad , & i' = i \\ \varnothing & \text{sinon} \quad . \end{cases}$$

Les produits fibrés itérés standard. — Soit $\mathbb{G} \to C$ un foncteur à valeurs dans une catégorie C, et notons F_i, s_i, t_i, s^i_l, t^i_l les images de $\mathbf{F}_i$, $\mathbf{s}_i$, $\mathbf{t}_i$, $\mathbf{s}^i_l$, $\mathbf{t}^i_l$ dans C. Un *produit fibré itéré standard de longueur* m dans C est un produit fibré itéré de la forme

$$X = \big((F_{i_1} \times_{F_{i'_1}} F_{i_2}) \times_{F_{i'_2}} F_{i_3}\big) \times_{F_{i'_3}} \cdots \times_{F_{i'_{m-1}}} F_{i_m}$$

défini récursivement comme suit :

a) pour tout $i \geq 0$, F_i est un produit fibré itéré standard de longueur 1 ;

b) si $X = \big((F_{i_1} \times_{F_{i'_1}} F_{i_2}) \times_{F_{i'_2}} F_{i_3}\big) \times_{F_{i'_3}} \cdots \times_{F_{i'_{m-1}}} F_{i_m}$ est un produit fibré itéré standard de longueur m, $X \to F_{i'}$ le composé d'une projection $X \to F_{i_k}$, $1 \leq k \leq m$, et d'une flèche $F_{i_k} \to F_{i'}$ image d'un morphisme de $\mathbb{G}$, et $F_i \to F_{i'}$ l'image d'une flèche de $\mathbb{G}$, alors $X \times_{F_{i'}} F_i$ est un produit fibré itéré standard de longueur $m+1$.

On peut vérifier sans difficulté qu'un produit fibré itéré standard est une limite projective finie indexée par un ensemble ordonné d'un type très particulier, facile à décrire.

Les extensions cocellulaires. — On dit qu'un foncteur $\mathbb{G} \to C$ est une *extension cocellulaire* si les produits fibrés itérés standard existent dans C. Par exemple, *tout* foncteur de $\mathbb{G}$ vers une catégorie admettant des limites projectives finies est une extension cocellulaire. Un *morphisme* d'une extension cocellulaire $\mathbb{G} \to C$ vers une autre $\mathbb{G} \to C'$ est un foncteur $C \to C'$ commutant aux produits fibrés itérés standard tel que le triangle

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[d] \\ \mathbb{G} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & C' \end{tikzcd}$$

soit commutatif. Il existe une extension cocellulaire universelle $\mathbb{G} \to \mathbf{C}_0$, appelée *enveloppe cocellulaire* de $\mathbb{G}$, satisfaisant à la propriété universelle suivante. Pour toute extension cocellulaire $\mathbb{G} \to C$, il existe un morphisme d'extensions cocellulaires de $\mathbb{G} \to \mathbf{C}_0$ vers $\mathbb{G} \to C$, unique à isomorphisme de foncteurs unique près.

Couples admissibles de flèches. — Soit $\mathbb{G} \to C$ un foncteur. On dit qu'un couple de flèches de C

$$X \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} F_i$$

est *admissible* si $i = 0$, ou si $i > 0$ et

$$s_i f = s_i g \qquad \text{et} \qquad t_i f = t_i g \quad .$$

Un *relèvement* du couple de flèches (f, g) est un morphisme $h : X \to F_{i+1}$ de C tel que

$$f = s_{i+1} h \qquad \text{et} \qquad g = t_{i+1} h \quad .$$

Pour que le couple (f, g) admette un relèvement, *il faut* qu'il soit admissible. Un couple *strictement admissible* est un couple admissible qui n'admet *pas* de relèvement.

Tours de définition de cohérateur. — Une *tour de définition de cohérateur* (resp. de *cohérateur réduit*) est une « tour » d'extension cocellulaires

$$\mathbb{G} \longrightarrow \mathbf{C}_0 \longrightarrow \mathbf{C}_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathbf{C}_n \longrightarrow \mathbf{C}_{n+1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathbf{C}_\infty = \varinjlim \mathbf{C}_n \quad ,$$

où pour tout $n \geq 0$, $\mathbf{C}_n$ est une petite catégorie et $\mathbf{C}_n \to \mathbf{C}_{n+1}$ un morphisme d'extensions cocellulaires, satisfaisant aux conditions suivantes :

- $a)$ tout couple de flèches admissible de $\mathbf{C}_\infty$ admet un relèvement ;
- $b_0)$ $\mathbb{G} \to \mathbf{C}_0$ est une enveloppe cocellulaire ;
- $b)$ pour tout $n \geq 0$, il existe un ensemble de couples admissibles (resp. strictement admissibles) de flèches de $\mathbf{C}_n$ tel que $\mathbf{C}_{n+1}$ soit l'extension cocellulaire obtenue de $\mathbf{C}_n$ par adjonction formelle d'un relèvement pour chaque couple appartenant à cet ensemble.

La condition (b) signifie exactement qu'il existe un ensemble E de couples admissibles (resp. strictement admissibles) de flèches de $\mathbf{C}_n$, et pour tout couple $e = (\mathbf{f}, \mathbf{g})$ appartenant à E un relèvement $\mathbf{h}_e$ du couple $(\mathbf{f}, \mathbf{g})$ dans $\mathbf{C}_{n+1}$ (où on note aussi $\mathbf{f}$, $\mathbf{g}$ l'image de $\mathbf{f}$, $\mathbf{g}$ par le foncteur $\mathbf{C}_n \to \mathbf{C}_{n+1}$) satisfaisant à la propriété universelle suivante. Pour toute extension cocellulaire $\mathbb{G} \to C$, et tout morphisme d'extensions cocellulaires $\mathbf{C}_n \to C$, si pour tout $e = (\mathbf{f}, \mathbf{g})$ appartenant à E, h_e est un relèvement du couple (f,g), image de $(\mathbf{f},\mathbf{g})$ dans C, alors il existe un unique morphisme d'extensions cocellulaires $F : \mathbf{C}_{n+1} \to C$ tel que pour tout e dans E, $h_e = F(\mathbf{h}_e)$ et rendant commutatif le triangle

$$\begin{tikzcd} \mathbf{C}_n \arrow[r] \arrow[dr] & \mathbf{C}_{n+1} \arrow[d, "F"] \\ & C \end{tikzcd} .$$

Une construction catégorique très générale permet d'affirmer que pour tout ensemble E, comme ci-dessus, une telle extension cocellulaire $\mathbf{C}_{n+1}$ existe, et $\mathbf{C}_n \to \mathbf{C}_{n+1}$ induit une bijection sur les ensembles des objets (et il semblerait que ce foncteur soit fidèle). En prenant pour E l'ensemble de *tous* les couples admissibles ou strictement admissibles, on déduit facilement l'existence de tours de définition de cohérateur ou de cohérateur réduit. Une *tour de cohérateur canonique* est une tour de cohérateur réduit construite de proche en proche en prenant l'ensemble de tous les couples strictement admissibles. Une telle tour ne dépend, à isomorphisme unique près, que du choix d'une enveloppe cocellulaire $\mathbf{C} \to \mathbf{C}_0$, qui est unique à équivalence de catégorie près.

Cohérateurs. — Un *cohérateur* (resp. *cohérateur réduit*, resp. *cohérateur canonique*) est une extension cocellulaire $\mathbb{G} \to \mathbf{C}$ telle qu'il existe une tour de définition de cohérateur (resp. de cohérateur réduit, resp. de cohérateur canonique)

$$\mathbb{G} \longrightarrow \mathbf{C}_0 \longrightarrow \mathbf{C}_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathbf{C}_n \longrightarrow \mathbf{C}_{n+1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathbf{C}_\infty = \varinjlim \mathbf{C}_n$$

telle qu'il existe une équivalence de catégories $\mathbf{C} \simeq \mathbf{C}_\infty$ qui soit un morphisme d'extensions cocellulaires. Par abus de langage, on dira parfois que $\mathbf{C}$ est un cohérateur.

Les ∞-groupoïdes. — Soit $\mathbf{C}$ un cohérateur. Un *∞-groupoïde de type* $\mathbf{C}$ est un foncteur $\mathcal{G} : \mathbf{C} \to \mathcal{E}ns$ commutant aux produits fibrés itérés standard. Un *∞-groupoïde* est un ∞-groupoïde de type un cohérateur canonique. Un *morphisme* d'un ∞-groupoïde $\mathcal{G} : \mathbf{C} \to \mathcal{E}ns$ de type $\mathbf{C}$ vers un autre $\mathcal{G}' : \mathbf{C} \to \mathcal{E}ns$ est un morphisme de foncteurs $\mathcal{G} \to \mathcal{G}'$. Ainsi un morphisme d'$\infty$-groupoïdes respecte *strictement* la structure d'∞-groupoïde. Deux cohérateurs différents peuvent donner naissance à des catégories non équivalentes d'∞-groupoïdes. En revanche s'ils sont des cohérateurs *canoniques* les catégories correspondantes d'∞-groupoïdes sont équivalentes. Dans le cas général, on s'attend seulement à ce que pour tout couple de cohérateurs $\mathbf{C}$ et $\mathbf{C}'$, les « ∞-catégories » (à définir) des ∞-groupoïdes de type $\mathbf{C}$ et $\mathbf{C}'$ soient « ∞-équivalentes ».

Quelques flèches structurales. — On se fixe un cohérateur $\mathbb{G} \to \mathbf{C}$. On note aussi $\mathbf{F}_i$, $\mathbf{s}_i$, $\mathbf{t}_i$, $\mathbf{s}^i_l$, $\mathbf{t}^i_l$ les images de $\mathbf{F}_i$, $\mathbf{s}_i$, $\mathbf{t}_i$, $\mathbf{s}^i_l$, $\mathbf{t}^i_l$ dans $\mathbf{C}$. En utilisant le fait que tout couple de flèches admissibles possède un relèvement dans $\mathbf{C}$, on en déduit d'autres flèches constituant la structure « primaire ». De ces dernières, en itérant ce procédé, on obtient les flèches formant la structure « secondaire », et puis la structure « ternaire », *etc.*

Quelques flèches structurales « primaires ».

– Composition $\overset{i}{\underset{1}{*}}$, $\quad i \geq 1$.

$$\begin{tikzcd}
& \mathbf{F}_i \arrow[d, shift right, "\mathbf{s}_i"'] \arrow[d, shift left, "\mathbf{t}_i"] \\
(\mathbf{F}_i,\mathbf{s}_i)\times_{\mathbf{F}_{i-1}}(\mathbf{t}_i,\mathbf{F}_i) \arrow[ur, dashed, "\overset{i}{\underset{1}{*}}"] \arrow[r, shift left, "\mathbf{s}_i\, pr_2"] \arrow[r, shift right, "\mathbf{t}_i\, pr_1"'] & \mathbf{F}_{i-1}
\end{tikzcd}$$

Si $i \geq 2$, on a

$$\mathbf{s}_{i-1}\mathbf{s}_i\, pr_2 = \mathbf{s}_{i-1}\mathbf{t}_i\, pr_2 = \mathbf{s}_{i-1}\mathbf{s}_i\, pr_1 = \mathbf{s}_{i-1}\mathbf{t}_i\, pr_1 \quad ,$$
$$\mathbf{t}_{i-1}\mathbf{s}_i\, pr_2 = \mathbf{t}_{i-1}\mathbf{t}_i\, pr_2 = \mathbf{t}_{i-1}\mathbf{s}_i\, pr_1 = \mathbf{t}_{i-1}\mathbf{t}_i\, pr_1 \quad ,$$

ce qui implique que le couple $(\mathbf{s}_i\, pr_2,\, \mathbf{t}_i\, pr_1)$ est admissible, et qu'il existe donc une flèche $\overset{i}{\underset{1}{*}}$ telle que

$$\mathbf{s}_i \circ \overset{i}{\underset{1}{*}} = \mathbf{s}_i\, pr_2 \qquad \text{et} \qquad \mathbf{t}_i \circ \overset{i}{\underset{1}{*}} = \mathbf{t}_i\, pr_1 \quad .$$

– Composition triple $\overset{i}{\underset{1}{**}}$, $\quad i \geq 1$.

$$\begin{tikzcd}
& \mathbf{F}_i \arrow[d, shift right, "\mathbf{s}_i"'] \arrow[d, shift left, "\mathbf{t}_i"] \\
(\mathbf{F}_i,\mathbf{s}_i)\times_{\mathbf{F}_{i-1}}(\mathbf{t}_i,\mathbf{F}_i,\mathbf{s}_i)\times_{\mathbf{F}_{i-1}}(\mathbf{t}_i,\mathbf{F}_i) \arrow[ur, dashed, "\overset{i}{\underset{1}{**}}"] \arrow[r, shift left, "\mathbf{s}_i\, pr_3"] \arrow[r, shift right, "\mathbf{t}_i\, pr_1"'] & \mathbf{F}_{i-1}
\end{tikzcd}$$

Si $i \geq 2$, on a

$$\mathbf{s}_{i-1}\mathbf{s}_i\, pr_3 = \mathbf{s}_{i-1}\mathbf{t}_i\, pr_3 = \mathbf{s}_{i-1}\mathbf{s}_i\, pr_2 = \mathbf{s}_{i-1}\mathbf{t}_i\, pr_2 = \mathbf{s}_{i-1}\mathbf{s}_i\, pr_1 = \mathbf{s}_{i-1}\mathbf{t}_i\, pr_1 \quad ,$$
$$\mathbf{t}_{i-1}\mathbf{s}_i\, pr_3 = \mathbf{t}_{i-1}\mathbf{t}_i\, pr_3 = \mathbf{t}_{i-1}\mathbf{s}_i\, pr_2 = \mathbf{t}_{i-1}\mathbf{t}_i\, pr_2 = \mathbf{t}_{i-1}\mathbf{s}_i\, pr_1 = \mathbf{t}_{i-1}\mathbf{t}_i\, pr_1 \quad ,$$

ce qui implique que le couple $(\mathbf{s}_i\, pr_3,\, \mathbf{t}_i\, pr_1)$ est admissible, et qu'il existe donc une flèche $\overset{i}{\underset{1}{**}}$ telle que

$$\mathbf{s}_i \circ \overset{i}{\underset{1}{**}} = \mathbf{s}_i\, pr_3 \qquad \text{et} \qquad \mathbf{t}_i \circ \overset{i}{\underset{1}{**}} = \mathbf{t}_i\, pr_1 \quad .$$

– Unités $\mathbf{k}_i\,,\quad i \geq 0.$

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbf{F}_{i+1} \arrow[d, shift right, "\mathbf{s}_{i+1}"'] \arrow[d, shift left, "\mathbf{t}_{i+1}"] \\
\mathbf{F}_i \arrow[ur, dashed, "\mathbf{k}_i"] \arrow[r, shift left, "1_{\mathbf{F}_i}"] \arrow[r, shift right, "1_{\mathbf{F}_i}"'] & \mathbf{F}_i
\end{tikzcd}$$

Le couple $(1_{\mathbf{F}_i}, 1_{\mathbf{F}_i})$ est admissible, et il existe donc une flèche $\mathbf{k}_i$ telle que

$$\mathbf{s}_{i+1}\mathbf{k}_i = 1_{\mathbf{F}_i} = \mathbf{t}_{i+1}\mathbf{k}_i \quad .$$

– Inverses $\mathbf{inv}_1^i\,,\quad i \geq 1.$

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbf{F}_{i} \arrow[d, shift right, "\mathbf{s}_{i}"'] \arrow[d, shift left, "\mathbf{t}_{i}"] \\
\mathbf{F}_i \arrow[ur, dashed, "\mathbf{inv}_1^i"] \arrow[r, shift left, "\mathbf{t}_i"] \arrow[r, shift right, "\mathbf{s}_i"'] & \mathbf{F}_{i-1}
\end{tikzcd}$$

Si $i \geq 2$, les égalités

$$\mathbf{s}_{i-1}\mathbf{t}_i = \mathbf{s}_{i-1}\mathbf{s}_i \qquad \text{et} \qquad \mathbf{t}_{i-1}\mathbf{t}_i = \mathbf{t}_{i-1}\mathbf{s}_i$$

impliquent que le couple $(\mathbf{t}_i, \mathbf{s}_i)$ est admissible, et par suite, qu'il existe une flèche $\mathbf{inv}_1^i$ telle que

$$\mathbf{s}_i\,\mathbf{inv}_1^i = \mathbf{t}_i \qquad \text{et} \qquad \mathbf{t}_i\,\mathbf{inv}_1^i = \mathbf{s}_i \quad .$$

Quelques flèches structurales « secondaires ».

– Composition $\overset{i}{\underset{2}{*}}\,,\quad i \geq 2\,.$

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbf{F}_{i} \arrow[d, shift right, "\mathbf{s}_{i}"'] \arrow[d, shift left, "\mathbf{t}_{i}"] \\
(\mathbf{F}_i, \mathbf{s}_2^i) \times_{\mathbf{F}_{i-2}} (\mathbf{t}_2^i, \mathbf{F}_i) \arrow[ur, dashed, "\overset{i}{\underset{2}{*}}"] \arrow[r, shift left, "\overset{i-1}{\underset{1}{*}}(\mathbf{s}_i \times_{\mathbf{F}_{i-2}} \mathbf{s}_i)"] \arrow[r, shift right, "\overset{i-1}{\underset{1}{*}}(\mathbf{t}_i \times_{\mathbf{F}_{i-2}} \mathbf{t}_i)"'] \arrow[d, shift right, "\mathbf{s}_i \times_{\mathbf{F}_{i-2}} \mathbf{s}_i"'] \arrow[d, shift left, "\mathbf{t}_i \times_{\mathbf{F}_{i-2}} \mathbf{t}_i"] & \mathbf{F}_{i-1} \\
(\mathbf{F}_{i-1}, \mathbf{s}_{i-1}) \times_{\mathbf{F}_{i-2}} (\mathbf{t}_{i-1}, \mathbf{F}_{i-1}) \arrow[ur, "\overset{i-1}{\underset{1}{*}}"'] &
\end{tikzcd}$$

Comme on a les égalités

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{s}_{i-1} \overset{i-1}{\underset{1}{*}} (\mathbf{s}_i \times_{\mathbf{F}_{i-2}} \mathbf{s}_i) = \mathbf{s}_{i-1}\, pr_2\, (\mathbf{s}_i \times_{\mathbf{F}_{i-2}} \mathbf{s}_i) = \mathbf{s}_{i-1}\mathbf{s}_i\, pr_2 \\
&\mathbf{s}_{i-1} \overset{i-1}{\underset{1}{*}} (\mathbf{t}_i \times_{\mathbf{F}_{i-2}} \mathbf{t}_i) = \mathbf{s}_{i-1}\, pr_2\, (\mathbf{t}_i \times_{\mathbf{F}_{i-2}} \mathbf{t}_i) = \mathbf{s}_{i-1}\mathbf{t}_i\, pr_2 = \mathbf{s}_{i-1}\mathbf{s}_i\, pr_2 \\
&\mathbf{t}_{i-1} \overset{i-1}{\underset{1}{*}} (\mathbf{s}_i \times_{\mathbf{F}_{i-2}} \mathbf{s}_i) = \mathbf{t}_{i-1}\, pr_1\, (\mathbf{s}_i \times_{\mathbf{F}_{i-2}} \mathbf{s}_i) = \mathbf{t}_{i-1}\mathbf{s}_i\, pr_1 \\
&\mathbf{t}_{i-1} \overset{i-1}{\underset{1}{*}} (\mathbf{t}_i \times_{\mathbf{F}_{i-2}} \mathbf{t}_i) = \mathbf{t}_{i-1}\, pr_1\, (\mathbf{t}_i \times_{\mathbf{F}_{i-2}} \mathbf{t}_i) = \mathbf{t}_{i-1}\mathbf{t}_i\, pr_1 = \mathbf{t}_{i-1}\mathbf{s}_i\, pr_1 \ ,
\end{aligned}
$$

le couple $\big(\overset{i-1}{\underset{1}{*}}(\mathbf{s}_i \times_{\mathbf{F}_{i-2}} \mathbf{s}_i)\, ,\ \overset{i-1}{\underset{1}{*}}(\mathbf{t}_i \times_{\mathbf{F}_{i-2}} \mathbf{t}_i) \big)$ est admissible, et il existe donc une flèche $\overset{i}{\underset{2}{*}}$ telle que

$$
\mathbf{s}_i \overset{i}{\underset{2}{*}} = \overset{i-1}{\underset{1}{*}}(\mathbf{s}_i \times_{\mathbf{F}_{i-2}} \mathbf{s}_i) \qquad \text{et} \qquad \mathbf{t}_i \overset{i}{\underset{2}{*}} = \overset{i-1}{\underset{1}{*}}(\mathbf{t}_i \times_{\mathbf{F}_{i-2}} \mathbf{t}_i) \quad .
$$

– Inverses $\mathbf{inv}_2^i$, $i \geq 2$.

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathbf{F}_i \arrow[d, shift right, "\mathbf{s}_i"'] \arrow[d, shift left, "\mathbf{t}_i"] \\
\mathbf{F}_i \arrow[ur, dashed, "\mathbf{inv}_2^i"] \arrow[r, shift left, "\mathbf{inv}_1^{i-1}\mathbf{s}_i"] \arrow[r, shift right, "\mathbf{inv}_1^{i-1}\mathbf{t}_i"'] & \mathbf{F}_{i-1}
\end{tikzcd}
$$

Comme on a les égalités

$$
\begin{aligned}
\mathbf{s}_{i-1}\, \mathbf{inv}_1^{i-1}\, \mathbf{s}_i = \mathbf{t}_{i-1}\mathbf{s}_i = \mathbf{t}_{i-1}\mathbf{t}_i = \mathbf{s}_{i-1}\, \mathbf{inv}_1^{i-1}\, \mathbf{t}_i \quad , \\
\mathbf{t}_{i-1}\, \mathbf{inv}_1^{i-1}\, \mathbf{s}_i = \mathbf{s}_{i-1}\mathbf{s}_i = \mathbf{s}_{i-1}\mathbf{t}_i = \mathbf{t}_{i-1}\, \mathbf{inv}_1^{i-1}\, \mathbf{t}_i \quad ,
\end{aligned}
$$

le couple $(\mathbf{inv}_1^{i-1}\mathbf{s}_i, \mathbf{inv}_1^{i-1}\mathbf{t}_i)$ est admissible, et il existe donc une flèche $\mathbf{inv}_2^i$ telle que

$$
\mathbf{s}_i\, \mathbf{inv}_2^i = \mathbf{inv}_1^{i-1}\, \mathbf{s}_i \qquad \text{et} \qquad \mathbf{t}_i\, \mathbf{inv}_2^i = \mathbf{inv}_1^{i-1}\, \mathbf{t}_i \quad .
$$

– Contrainte d'associativité $\boldsymbol{\alpha}_1^i$, $i \geq 1$.

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=large]
 & \mathbf{F}_{i+1} \arrow[d, shift right, "\mathbf{s}_{i+1}"'] \arrow[d, shift left, "\mathbf{t}_{i+1}"] \\
(\mathbf{F}_i, \mathbf{s}_i) \times_{\mathbf{F}_{i-1}} (\mathbf{t}_i, \mathbf{F}_i, \mathbf{s}_i) \times_{\mathbf{F}_{i-1}} (\mathbf{t}_i, \mathbf{F}_i) \arrow[ur, dashed, "\boldsymbol{\alpha}_1^i"] \arrow[r, shift left, "\overset{i}{\underset{1}{\ast}}(\overset{i}{\underset{1}{\ast}} \times_{\mathbf{F}_{i-1}} 1_{\mathbf{F}_i})"] \arrow[r, shift right, "\overset{i}{\underset{1}{\ast}}(1_{\mathbf{F}_i} \times_{\mathbf{F}_{i-1}} \overset{i}{\underset{1}{\ast}})"'] \arrow[d, shift right, "\overset{i}{\underset{1}{\ast}} \times_{\mathbf{F}_{i-1}} 1_{\mathbf{F}_i}"'] \arrow[d, shift left, "1_{\mathbf{F}_i} \times_{\mathbf{F}_{i-1}} \overset{i}{\underset{1}{\ast}}"] & \mathbf{F}_i \\
(\mathbf{F}_i, \mathbf{s}_i) \times_{\mathbf{F}_{i-1}} (\mathbf{t}_i, \mathbf{F}_i) \arrow[ur, "\overset{i}{\underset{1}{\ast}}"'] &
\end{tikzcd}$$

Comme on a les égalités

$$\mathbf{s}_i \overset{i}{\underset{1}{\ast}}(\overset{i}{\underset{1}{\ast}} \times_{\mathbf{F}_{i-1}} 1_{\mathbf{F}_i}) = \mathbf{s}_i\, pr_2\, (\overset{i}{\underset{1}{\ast}} \times_{\mathbf{F}_{i-1}} 1_{\mathbf{F}_i}) = \mathbf{s}_i\, pr_3 \ ,$$

$$\mathbf{s}_i \overset{i}{\underset{1}{\ast}}(1_{\mathbf{F}_i} \times_{\mathbf{F}_{i-1}} \overset{i}{\underset{1}{\ast}}) = \mathbf{s}_i\, pr_2\, (1_{\mathbf{F}_i} \times_{\mathbf{F}_{i-1}} \overset{i}{\underset{1}{\ast}}) = \mathbf{s}_i \overset{i}{\underset{1}{\ast}} pr_{23} = \mathbf{s}_i\, pr_2\, pr_{23} = \mathbf{s}_i\, pr_3 \ ,$$

$$\mathbf{t}_i \overset{i}{\underset{1}{\ast}}(\overset{i}{\underset{1}{\ast}} \times_{\mathbf{F}_{i-1}} 1_{\mathbf{F}_i}) = \mathbf{t}_i\, pr_1\, (\overset{i}{\underset{1}{\ast}} \times_{\mathbf{F}_{i-1}} 1_{\mathbf{F}_i}) = \mathbf{t}_i \overset{i}{\underset{1}{\ast}} pr_{12} = \mathbf{t}_i\, pr_1\, pr_{12} = \mathbf{t}_i\, pr_1 \ ,$$

$$\mathbf{t}_i \overset{i}{\underset{1}{\ast}}(1_{\mathbf{F}_i} \times_{\mathbf{F}_{i-1}} \overset{i}{\underset{1}{\ast}}) = \mathbf{t}_i\, pr_1\, (1_{\mathbf{F}_i} \times_{\mathbf{F}_{i-1}} \overset{i}{\underset{1}{\ast}}) = \mathbf{t}_i\, pr_1 \ ,$$

le couple $\big(\overset{i}{\underset{1}{\ast}}(\overset{i}{\underset{1}{\ast}} \times_{\mathbf{F}_{i-1}} 1_{\mathbf{F}_i}),\, \overset{i}{\underset{1}{\ast}}(1_{\mathbf{F}_i} \times_{\mathbf{F}_{i-1}} \overset{i}{\underset{1}{\ast}})\big)$ est admissible, et il existe donc une flèche $\boldsymbol{\alpha}_1^i$ telle que

$$\mathbf{s}_{i+1}\boldsymbol{\alpha}_1^i = \overset{i}{\underset{1}{\ast}}(\overset{i}{\underset{1}{\ast}} \times_{\mathbf{F}_{i-1}} 1_{\mathbf{F}_i}) \qquad \text{et} \qquad \mathbf{t}_{i+1}\boldsymbol{\alpha}_1^i = \overset{i}{\underset{1}{\ast}}(1_{\mathbf{F}_i} \times_{\mathbf{F}_{i-1}} \overset{i}{\underset{1}{\ast}}) \quad .$$

– Contrainte d'unité à droite $\boldsymbol{\rho}_1^i$, $i \geq 1$.

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=large]
 & \mathbf{F}_{i+1} \arrow[d, shift right, "\mathbf{s}_{i+1}"'] \arrow[d, shift left, "\mathbf{t}_{i+1}"] \\
\mathbf{F}_i \arrow[ur, dashed, "\boldsymbol{\rho}_1^i"] \arrow[r, shift left, "\overset{i}{\underset{1}{\ast}}(1_{\mathbf{F}_i}, \mathbf{k}_{i-1}\mathbf{s}_i)"] \arrow[r, shift right, "1_{\mathbf{F}_i}"'] & \mathbf{F}_i
\end{tikzcd}$$

Comme on a les égalités

$$\mathbf{s}_i \overset{i}{\underset{1}{\ast}}(1_{\mathbf{F}_i}, \mathbf{k}_{i-1}\mathbf{s}_i) = \mathbf{s}_i\, pr_2\, (1_{\mathbf{F}_i}, \mathbf{k}_{i-1}\mathbf{s}_i) = \mathbf{s}_i \mathbf{k}_{i-1}\mathbf{s}_i = \mathbf{s}_i \quad ,$$

$$\mathbf{t}_i \overset{i}{\underset{1}{\ast}}(1_{\mathbf{F}_i}, \mathbf{k}_{i-1}\mathbf{s}_i) = \mathbf{t}_i\, pr_1\, (1_{\mathbf{F}_i}, \mathbf{k}_{i-1}\mathbf{s}_i) = \mathbf{t}_i \quad ,$$

le couple $\big(\overset{i}{\underset{1}{*}}(1_{\mathbf{F}_i},\mathbf{k}_{i-1}\mathbf{s}_i)\,,\,1_{\mathbf{F}_i}\big)$ est admissible, et il existe donc une flèche $\boldsymbol{\rho}^i_1$ telle que

$$\mathbf{s}_{i+1}\boldsymbol{\rho}^i_1=\overset{i}{\underset{1}{*}}(1_{\mathbf{F}_i},\mathbf{k}_{i-1}\mathbf{s}_i)\qquad\text{et}\qquad\mathbf{t}_{i+1}\boldsymbol{\rho}^i_1=1_{\mathbf{F}_i}\quad.$$

– Contrainte d'inverse à droite $\boldsymbol{\delta}^i_1$, $i\geq 1$.

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathbf{F}_{i+1} \arrow[d, shift right, "\mathbf{s}_{i+1}"'] \arrow[d, shift left, "\mathbf{t}_{i+1}"] \\
\mathbf{F}_i \arrow[urr, dashed, "\boldsymbol{\delta}^i_1"] \arrow[rr, shift left, "\overset{i}{\underset{1}{*}}(1_{\mathbf{F}_i},\mathbf{inv}^i_1)"] \arrow[rr, shift right, "\mathbf{k}_{i-1}\mathbf{t}_i"'] & & \mathbf{F}_i
\end{tikzcd}$$

Comme on a les égalités

$$\mathbf{s}_i\overset{i}{\underset{1}{*}}(1_{\mathbf{F}_i},\mathbf{inv}^i_1)=\mathbf{s}_i\,pr_2\,(1_{\mathbf{F}_i},\mathbf{inv}^i_1)=\mathbf{s}_i\mathbf{inv}^i_1=\mathbf{t}_i=\mathbf{s}_i\mathbf{k}_{i-1}\mathbf{t}_i\quad,$$
$$\mathbf{t}_i\overset{i}{\underset{1}{*}}(1_{\mathbf{F}_i},\mathbf{inv}^i_1)=\mathbf{t}_i\,pr_1\,(1_{\mathbf{F}_i},\mathbf{inv}^i_1)=\mathbf{t}_i=\mathbf{t}_i\mathbf{k}_{i-1}\mathbf{t}_i\quad,$$

le couple $\big(\overset{i}{\underset{1}{*}}(1_{\mathbf{F}_i},\mathbf{inv}^i_1)\,,\,\mathbf{k}_{i-1}\mathbf{t}_i\big)$ est admissible, et il existe donc une flèche $\boldsymbol{\delta}^i_1$ telle que

$$\mathbf{s}_{i+1}\boldsymbol{\delta}^i_1=\overset{i}{\underset{1}{*}}(1_{\mathbf{F}_i},\mathbf{inv}^i_1)\qquad\text{et}\qquad\mathbf{t}_{i+1}\boldsymbol{\delta}^i_1=\mathbf{k}_{i-1}\mathbf{t}_i\quad.$$

Les groupes d'homotopie d'un ∞-groupoïde. — On se fixe un cohérateur $\mathbf{C}$ et un ∞-groupoïde $\mathcal{G}:\mathbf{C}\to\mathcal{E}ns$. On note

$$\mathbf{F}_i\,,\ \mathbf{s}_i\,,\ \mathbf{t}_i\,,\ \mathbf{s}^i_l\,,\ \mathbf{t}^i_l\,,\ \mathbf{k}_i\,,\ \overset{i}{\underset{l}{*}}\,,\ \mathbf{inv}^i_l\,,\ \textit{etc.}$$

les structures « universelles » dans $\mathbf{C}$ et

$$F_i\,,\ s_i\,,\ t_i\,,\ s^i_l\,,\ t^i_l\,,\ k_i\,,\ \overset{i}{\underset{l}{*}}\,,\ inv^i_l\,,\ \text{etc.}$$

leurs images par le foncteur $\mathcal{G}:\mathbf{C}\to\mathcal{E}ns$.

Pour tout $i\geq 0$, on définit une relation « d'homotopie » $\sim_i$ dans F_i par

$$f\sim_i g\quad\overset{\text{df}}{\Longleftrightarrow}\quad\exists h\in F_{i+1}\quad s_{i+1}h=f\ ,\quad t_{i+1}h=g\quad.$$

La relation d'homotopie est une relation d'équivalence.

a) Réflexivité. Soit $f\in F_i$. On a

$$s_{i+1}(k_if)=f\qquad\text{et}\qquad t_{i+1}(k_if)=f\quad.$$

b) Symétrie. Soient $f,g\in F_i$ tels que $f\sim_i g$. Alors il existe $h\in F_{i+1}$ tel que $s_{i+1}h=f$ et $t_{i+1}h=g$, et on a

$$s_{i+1}(inv^{i+1}_1h)=t_{i+1}h=g\qquad\text{et}\qquad t_{i+1}(inv^{i+1}_1h)=s_{i+1}h=f\quad.$$

c) TRANSITIVITÉ. Soient $f_0, f_1, f_2 \in F_i$ tels que $f_0 \sim_i f_1$ et $f_1 \sim_i f_2$. Alors il existe $h_1, h_2 \in F_{i+1}$ tels que

$$s_{i+1}h_1 = f_0 \ , \quad t_{i+1}h_1 = f_1 \ , \quad s_{i+1}h_2 = f_1 \ , \quad t_{i+1}h_2 = f_2 \ ,$$

et en particulier $(h_2, h_1) \in (F_{i+1}, s_{i+1}) \times_{F_i} (t_{i+1}, F_{i+1})$. Si on pose $h = h_2 \overset{i+1}{\underset{1}{*}} h_1$, on a $s_{i+1}h = s_{i+1}h_1 = f_0$ et $t_{i+1}h = t_{i+1}h_2 = f_2$, ce qui prouve que $f_0 \sim_i f_2$.

On note $\bar{F}_i$ l'ensemble quotient $F_i/\sim_i$ de F_i par la relation d'équivalence $\sim_i$. On appelle *ensemble de composantes connexes* de $\mathcal{G}$, et on note $\Pi_0(\mathcal{G})$, l'ensemble $\bar{F}_0$.

Supposons dans la suite que $i \geq 1$. On remarque que si $f \sim_i g$, $f, g \in F_i$, alors on a

$$s_i f = s_i g \qquad \text{et} \qquad t_i f = t_i g$$

(mais bien entendu la réciproque est en générale fausse ; à ne pas confondre avec la propriété définissant un cohérateur). Les applications $s_i, t_i : F_i \to F_{i-1}$ induisent donc, par passage au quotient, des applications $\bar{s}_i, \bar{t}_i : \bar{F}_i \to F_{i-1}$. D'autre part, la relation d'équivalence $\sim_i$ est compatible à la composition $\overset{i}{\underset{1}{*}}$. Soient par exemple $(g_1, f), (g_2, f) \in (F_i, s_i) \times_{F_{i-1}} (t_i, F_i)$, et supposons que $g_1 \sim_i g_2$. Alors $g_1 \overset{i}{\underset{1}{*}} f \sim_i g_2 \overset{i}{\underset{1}{*}} f$. En effet, par hypothèse, il existe $h \in F_{i+1}$ tel que $s_{i+1}h = g_1$ et $t_{i+1}h = g_2$. Alors si on pose $h' = h \overset{i+1}{\underset{2}{*}} k_i f$, on a

$$s_{i+1}h' = s_{i+1}h \overset{i}{\underset{1}{*}} s_{i+1}k_i f = g_1 \overset{i}{\underset{1}{*}} f \qquad \text{et} \qquad t_{i+1}h' = t_{i+1}h \overset{i}{\underset{1}{*}} t_{i+1}k_i f = g_2 \overset{i}{\underset{1}{*}} f \quad ,$$

ce qui prouve l'assertion. De même, si $(g, f_1), (g, f_2) \in (F_i, s_i) \times_{F_{i-1}} (t_i, F_i)$, et si $f_1 \sim_i f_2$, alors $g \overset{i}{\underset{1}{*}} f_1 \sim_i g \overset{i}{\underset{1}{*}} f_1$. L'application $\overset{i}{\underset{1}{*}} : (F_i, s_i) \times_{F_{i-1}} (t_i, F_i) \to F_i$, induit donc une application $(\bar{F}_i, \bar{s}_i) \times_{F_{i-1}} (\bar{t}_i, \bar{F}_i) \to \bar{F}_i$, définissant ainsi une catégorie $\mathcal{G}_i$ dont l'ensemble des objets est F_{i-1} et l'ensemble des flèches $\bar{F}_i$. On vérifie facilement que cette catégorie est un *groupoïde*.

Soit x un objet de $\mathcal{G}$, $x \in F_0$. On appelle i-ème *groupe d'homotopie* de $\mathcal{G}$ en x, et on note $\pi_i(\mathcal{G}; x)$, le groupe

$$\pi_i(\mathcal{G}; x) = \mathsf{Hom}_{\mathcal{G}_i}(k^0_{i-1}(x), k^0_{i-1}(x)) \quad ,$$

où pour tous $j \geq 0, l \geq 0$, $k^j_l : F_j \to F_{j+l}$ désigne l'application $k^j_l = k_{j+l-1} \cdots k_{j+1}k_j$, définie par les unités.

Les équivalences faibles d'∞-groupoïdes. — On dit qu'un morphisme de ∞-groupoïdes $f : \mathcal{G} \to \mathcal{G}'$ est une *équivalence faible* ou ∞-*équivalence* si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

a) l'application $\Pi_0(f) : \Pi_0(\mathcal{G}) \to \Pi_0(\mathcal{G}')$, induite par f, est bijective ;

b) pour tout $i \geq 1$, et tout objet x de $\mathcal{G}$, $\pi_i(f; x) : \pi_i(\mathcal{G}; x) \to \pi_i(\mathcal{G}', f(x))$ est un isomorphisme de groupes.

3. Les conjectures

Conjecture 1 (Grothendieck). — *Pour tout cohérateur* $\mathbf{C}$ *la localisation de la catégorie des* ∞*-groupoïdes de type* $\mathbf{C}$ *par les* ∞*-équivalences est une catégorie équivalente à* Hot*, la catégorie homotopique des* CW*-complexes*

Une stratégie pour prouver la conjecture. — On rappelle que la catégorie Hot est équivalente à la catégorie de *tous* les espaces topologiques localisée par les équivalences faibles topologiques, où à celle des ensembles simpliciaux localisée par les équivalences faibles simpliciales, ou encore à celle des petites catégories localisée par les équivalences faibles catégoriques, foncteurs dont l'image par le nerf est une équivalence faible simpliciale. On note $\mathcal{C}at$ la catégorie des petites catégories et $W_{\mathcal{C}at}$ la classe des équivalences faibles catégoriques, de sorte qu'on ait une équivalence de catégories $\mathsf{Hot} \simeq W_{\mathcal{C}at}^{-1}\mathcal{C}at$. Pour toute petite catégorie A, on note $\widehat{A}$ la catégorie des préfaisceaux sur A, et $i_A : \widehat{A} \to \mathcal{C}at$ le foncteur associant à un préfaisceau X la catégorie A/X de ses sections. On pose $W_{\widehat{A}} = i_A^{-1}(W_{\mathcal{C}at})$.

Soit $\mathbf{C}$ un cohérateur. On note $\mathbf{B}$ la catégorie opposée à $\mathbf{C}$, $\mathbf{B} = \mathbf{C}^{\circ}$, et $\mathbf{C}\text{-}\mathcal{G}r$ la catégorie des ∞-groupoïdes de type $\mathbf{C}$. La catégorie $\mathbf{C}\text{-}\mathcal{G}r$ s'identifie à une sous-catégorie pleine de la catégorie des préfaisceaux $\widehat{\mathbf{B}}$ sur $\mathbf{B}$, définie par des propriétés d'exactitude à gauche, et un résultat catégorique général implique que le foncteur d'inclusion

$$i : \mathbf{C}\text{-}\mathcal{G}r \hookrightarrow \widehat{\mathbf{B}}$$

admet un adjoint à *gauche* r, identifiant $\mathbf{C}\text{-}\mathcal{G}r$ à une localisation de $\widehat{\mathbf{B}}$.

La conjecture de Grothendieck est conséquence de la conjonction des quatre conjectures suivantes.

Conjecture A. — *La catégorie* $\mathbf{B}$ *est une catégorie test* [**4**], [**5**], [**6**].

On rappelle que cela signifie en particulier que le foncteur $i_{\mathbf{B}} : \widehat{\mathbf{B}} \to \mathcal{C}at$ induit une équivalence des catégories localisées $W_{\widehat{\mathbf{B}}}^{-1}\widehat{\mathbf{B}} \xrightarrow{\sim} W_{\mathcal{C}at}^{-1}\mathcal{C}at \simeq \mathsf{Hot}$. D'autre part, il existe alors une structure de catégorie de modèles fermée sur $\widehat{\mathbf{B}}$ dont les équivalences faibles sont les flèches de $\widehat{\mathbf{B}}$ appartenant à $W_{\widehat{\mathbf{B}}}$, et dont les cofibrations sont les monomorphismes de $\widehat{\mathbf{B}}$, appelée catégorie de modèles de Grothendieck-Cisinski [**4**], [**5**], [**2**].

Conjecture B. — *Un morphisme de* $\mathbf{C}\text{-}\mathcal{G}r$ *est une équivalence faible d'*∞*-groupoïdes de type* $\mathbf{C}$ *si et seulement si son image par le foncteur d'inclusion* $i : \mathbf{C}\text{-}\mathcal{G}r \hookrightarrow \widehat{\mathbf{B}}$ *appartient à* $W_{\widehat{\mathbf{B}}}$.

Conjecture C. — *Le couple de foncteurs adjoints* (r, i) *satisfait aux hypothèses du théorème de Crans* [**2**], [**3**]*, permettant de déduire de la structure de Grothendieck-Cisinski sur* $\widehat{\mathbf{B}}$ *une structure de catégorie de modèles fermée sur* $\mathbf{C}\text{-}\mathcal{G}r$ *ayant comme* *équivalences faibles* (resp. *comme fibrations*) *les morphismes dont l'image par le foncteur d'inclusion* $i : \mathbf{C}\text{-}\mathcal{G}r \hookrightarrow \widehat{\mathbf{B}}$ *est une équivalence faible* (resp. *une fibration*) *de* $\widehat{\mathbf{B}}$, *faisant du couple* (r, i) *une adjonction de Quillen.*

Conjecture D. — *L'adjonction de Quillen* (r, i) *est une équivalence de Quillen.*

4. L'∞-groupoïde fondamental d'un espace topologique

La catégorie $\mathbb{D}$. — La catégorie $\mathbb{G}$ est la catégorie opposée à la catégorie « globulaire » $\mathbb{D}$ sous-catégorie (non pleine) de la catégorie $\mathcal{T}op$, des espaces topologiques et applications continues, dont les objets sont les disques (ou boules) D_i, $i \geq 0$,

$$D_i = \{x \in \mathbb{R}^i \mid \|x\| \leq 1\} \quad ,$$

où $\|x\|$ désigne la norme euclidienne de x, et dont les morphismes sont les composés itérés des inclusions

$$\sigma_i, \tau_i : D_{i-1} \hookrightarrow D_i \quad , \qquad i > 0 \quad ,$$

définies par

$$\sigma_i(x) = \big(x, -\sqrt{1 - \|x\|^2}\,\big) \quad , \qquad \tau_i(x) = \big(x, \sqrt{1 - \|x\|^2}\,\big) \quad , \qquad x \in D_{i-1} \quad .$$

Les applications σ_i et τ_i se factorisent par

$$S_{i-1} = \partial D_i = \{x \in \mathbb{R}^i \mid \|x\| = 1\} \quad ,$$

et identifient D_{i-1} à l'hémisphère inférieur, respectivement supérieur de S_{i-1}. On remarque que toutes les flèches de $\mathbb{D}$ sont des cofibrations triviales de $\mathcal{T}op$.

Les sommes amalgamées itérés standard. — On peut donner une description topologique de la catégorie opposée $\mathbf{B}_0$ à l'enveloppe cocellulaire $\mathbf{C}_0$ de la catégorie $\mathbb{G}$. Étant donné un foncteur $\mathbb{G}^\circ \simeq \mathbb{D} \to B$, à valeurs dans une catégorie B, on définit la notion de *somme amalgamée itérée standard* de façon duale à celle de produit fibré itéré standard. De même, les notions *d'extension cellulaire* de $\mathbb{D}$, et *d'enveloppe cellulaire* sont duales à celles d'extension cocellulaire et d'enveloppe cocellulaire. L'inclusion $\mathbb{D} \hookrightarrow \mathcal{T}op$ est une extension cellulaire, puisque la catégorie $\mathcal{T}op$ admet des limites inductives. L'enveloppe cellulaire $\mathbf{B}_0$ de $\mathbb{D}$ admet une description topologique simple. Un objet de $\mathbf{B}_0$ est une somme amalgamée itérée standard

$$X = (D_{i_1} \amalg_{D_{i'_1}} D_{i_2}) \amalg_{D_{i'_2}} \cdots \amalg_{D_{i'_{m-1}}} D_{i_m}$$

dans $\mathcal{T}op$, *munie* des applications canoniques $D_{i_k} \to X$, $1 \leq k \leq m$. Pour définir les morphismes dans la catégorie $\mathbf{B}_0$, il suffit de définir les flèches d'un disque D_i vers X. Par définition, c'est les applications continues $D_i \to X$ telles qu'il existe k, $1 \leq k \leq m$, et une flèche $D_i \to D_{i_k}$ dans $\mathbb{D}$, telle que $D_i \to X$ soit le composé de cette flèche et de l'application canonique $D_{i_k} \to X$. On démontre facilement, par récurrence sur la longueur m de la somme amalgamée X, que les flèches canoniques $D_{i_k} \to X$ sont des cofibrations triviales, et en particulier que les sommes amalgamées itérées standard dans $\mathcal{T}op$ sont des espaces topologiques contractiles.

L'∞-groupoïde fondamental d'un espace topologique. — Soit $\mathbf{C}$ un cohérateur. Pour associer fonctoriellement à chaque espace topologique un ∞-groupoïde de type $\mathbf{C}$, il suffit de définir un ∞-*cogroupoïde* de type $\mathbf{C}$ dans $\mathcal{T}op$, autrement dit, un foncteur

$$\mathbf{C} \longrightarrow \mathcal{T}op^{\circ}$$

commutant aux produits fibrés itérés standard, l'∞-groupoïde fondamental d'un espace topologique X étant alors le composé de ce foncteur avec le foncteur

$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{T}op}(\,?\,,X) : \mathcal{T}op^{\circ} \longrightarrow \mathcal{E}ns$$

(qui commute aux limites projectives). Soient

$$\mathbb{G} \longrightarrow \mathbf{C}_0 \longrightarrow \mathbf{C}_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathbf{C}_n \longrightarrow \mathbf{C}_{n+1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathbf{C} \simeq \varinjlim \mathbf{C}_n$$

une tour de définition du cohérateur $\mathbf{C}$ et

$$\mathbb{D} \longrightarrow \mathbf{B}_0 \longrightarrow \mathbf{B}_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathbf{B}_n \longrightarrow \mathbf{B}_{n+1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathbf{B} \simeq \varinjlim \mathbf{B}_n$$

la tour opposée. Il s'agit de construire un foncteur $\mathbf{B} \to \mathcal{T}op$ commutant aux sommes amalgamées itérées standard. Or, on dispose déjà d'un foncteur évident $\mathbf{B}_0 \to \mathcal{T}op$. Il suffit donc de prouver qu'on peut prolonger un foncteur $\mathbf{B}_n \to \mathcal{T}op$, commutant aux sommes amalgamées itérées standard, en un foncteur $\mathbf{B}_{n+1} \to \mathcal{T}op$, commutant à ces limites inductives. En vertu de la propriété universelle de $\mathbf{B}_{n+1}$, duale de celle de $\mathbf{C}_{n+1}$, il suffit de montrer que pour toute somme amalgamée itérée standard X dans $\mathcal{T}op$, tout $i \geq 0$, et tout couple $f, g : D_i \to X$ d'applications continues, telles que si $i > 0$, on ait les égalités

$$f\sigma_i = g\sigma_i \qquad \text{et} \qquad f\tau_i = g\tau_i \quad ,$$

il existe une application continue $h : D_{i+1} \to X$ telle que

$$f = h\sigma_{i+1} \qquad \text{et} \qquad g = h\tau_{i+1} \quad .$$

$$\begin{tikzcd} D_{i+1} \arrow[drr, dashed, "h"] & & \\ D_i \arrow[u, shift left, "\sigma_{i+1}"] \arrow[u, shift right, "\tau_{i+1}"'] \arrow[rr, shift left, "f"] \arrow[rr, shift right, "g"'] & & X \end{tikzcd}$$

Comme $X \to *$, où $*$ désigne l'espace ponctuel, est une fibration triviale, et l'inclusion $S_i \hookrightarrow D_{i+1}$ une cofibration, cela résulte de la propriété de relèvement des carrés

$$\begin{tikzcd} S_i = D_i \amalg_{S_{i-1}} D_i \arrow[r, "{(f,g)}"] \arrow[d, hook, "{(\sigma_{i+1},\tau_{i+1})}"'] & X \arrow[d] \\ D_{i+1} \arrow[r] \arrow[ur, dashed, "h"] & * \end{tikzcd} .$$

Le foncteur $\mathbf{B} \to \mathcal{T}op$ ainsi défini *dépend* du choix des relèvements h.

Conjecture 2 (Grothendieck). — *Deux prolongements arbitraires du foncteur évident* $\mathbf{B}_0 \to \mathcal{T}op$ *en des foncteurs* $\mathbf{B} \to \mathcal{T}op$ *commutant aux sommes amalgamées itérés standard définissent, pour chaque espace topologique, des* ∞*-groupoïdes isomorphes dans la catégorie localisée par les équivalences faibles d'*∞*-groupoïdes.*

L'∞-groupoïde d'un objet d'une catégorie de modèles. — Une construction analogue peut se faire dans n'importe quelle catégorie de modèles de Quillen $\mathcal{M}$ *dont tous les objets sont fibrant.* En vertu de la conjecture 1, on obtient ainsi un foncteur $\mathcal{M} \to \mathsf{Hot}$.

Conjecture 3. — *Ce foncteur associe à tout objet* X *de* $\mathcal{M}$ *le* RHom *non additif* $\mathsf{RHom}_{\mathcal{M}}(*, X)$*, où* $*$ *désigne un objet final de* $\mathcal{M}$*, autrement dit le type d'homotopie du* Hom *simplicial du localisé de Dwyer-Kan de* $\mathcal{M}$ *par les équivalences faibles.*

Références

[1] M. A. Batanin – « Monoidal globular categories as natural environment for the theory of weak n-categories », *Advances in Mathematics* **136** (1998), p. 39–103.

[2] D.-C. Cisinski – « Les préfaisceaux comme modèles des types d'homotopie », *Astérisque* **308** (2006).

[3] S. E. Crans – « Quillen closed model structures for sheaves », *J. Pure Appl. Algebra* **101** (1995), p. 35–57.

[4] A. Grothendieck – « *Pursuing stacks* », Manuscrit, 1983, à paraître dans *Documents Mathématiques.*

[5] ______, « *Les dérivateurs* », Manuscrit, 1990, www.math.jussieu.fr/~maltsin/groth /Derivateurs.html.

[6] G. Maltsiniotis – « La théorie de l'homotopie de Grothendieck », *Astérisque* **301** (2005), p. 1–140.

Georges MALTSINIOTIS, Institut de Mathématiques de Jussieu, Université Paris 7 Denis Diderot, Case Postale 7012, 2, place Jussieu, F-75251 PARIS cedex 05, FRANCE
E-mail : `maltsin@math.jussieu.fr` • *Url :* `http://www.math.jussieu.fr/~maltsin/`