La K-théorie d'un dérivateur triangulé

Georges MALTSINIOTIS

25 mars 2001, révisé le 18 mai 2002

On note $\mathcal{CAT}$ la 2-catégorie des catégories, et $\mathcal{C}at$ celle des petites catégories. Un *dérivateur triangulé* $\mathbb{D}$ de domaine $\mathcal{D}ia$, où $\mathcal{D}ia$ désigne la sous-2-catégorie 2-pleine de $\mathcal{C}at$ formée des catégories finies, $\mathcal{C}at_f$, ou des catégories directes finies,[1] $\mathcal{D}ir_f$, ou encore des catégories correspondant à des ensembles ordonnés finis, $\mathcal{O}rd_f$, est un 2-foncteur strict contravariant

$$\mathcal{D}ia^\circ \longrightarrow \mathcal{CAT} \quad ,$$

associant à un objet I de $\mathcal{D}ia$ une catégorie $\mathbb{D}(I)$, à une flèche $u : I \to J$ de $\mathcal{D}ia$ un foncteur $u^* : \mathbb{D}(J) \to \mathbb{D}(I)$, et à une 2-flèche

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, bend left, "u"{name=U}] \arrow[r, bend right, "v"'{name=V}] \arrow[Rightarrow, from=U, to=V, "\alpha"] & J \end{tikzcd} \quad ,$$

de $\mathcal{D}ia$ un morphisme de foncteurs $\alpha^* : v^* \to u^*$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{D}(I) & \mathbb{D}(J) \arrow[l, bend right, "u^*"'{name=U}] \arrow[l, bend left, "v^*"{name=V}] \arrow[Rightarrow, from=V, to=U, "\alpha^*"] \end{tikzcd} \quad ,$$

de façon compatible aux identités et aux diverses compositions, et satisfaisant aux axiomes suivants **Der 1** - **Der 7**.

Der 1 *a*) Si I, J sont dans $\mathcal{D}ia$, alors

$$\mathbb{D}(I \amalg J) \xrightarrow{(i^*,j^*)} \mathbb{D}(I) \times \mathbb{D}(J) \quad ,$$

où $i : I \to I \amalg J$, $j : J \to I \amalg J$ désignent les foncteurs canoniques, est une équivalence de catégories.

b) $\mathbb{D}(\emptyset)$ est la catégorie finale.

[1] On rappelle qu'une catégorie directe finie est une catégorie finie sans cycles, ou de façon équivalente une catégorie C telle que le graphe orienté, dont les sommets sont les objets de C, et dont les arêtes sont les flèches non identiques de C, engendre une catégorie finie.

Der 2 Pour tout A dans $\mathcal{D}ia$, la famille des foncteurs $i^*_{A,a} : \mathbb{D}(A) \to \mathbb{D}(e)$, $a \in \mathsf{Ob}(A)$, où $i_{A,a} : e \to A$ désigne le foncteur de source la catégorie ponctuelle et de but A, défini par a, est conservative.

Der 3 Pour tout $u : A \to B$ dans $\mathcal{D}ia$, le foncteur $u^* : \mathbb{D}(B) \to \mathbb{D}(A)$ admet un adjoint à droite $u_* : \mathbb{D}(A) \to \mathbb{D}(B)$, et un adjoint à gauche $u_! : \mathbb{D}(A) \to \mathbb{D}(B)$.

Der 4 Pour tout $u : A \to B$ dans $\mathcal{D}ia$, et tout objet b de B, le morphisme de changement de base

$$k^* u_* \longrightarrow (u/b)_* j^*$$

correspondant au carré cartésien

$$\begin{tikzcd} A/b \arrow[r, "j"] \arrow[d, "u/b"'] & A \arrow[d, "u"] \\ B/b \arrow[r, "k"'] & B \end{tikzcd} \quad ,$$

où j et k désignent les morphismes canoniques et u/b le foncteur induit par u, est un isomorphisme, et dualement le morphisme de changement de base

$$(b\backslash u)_! j'^* \longrightarrow k'^* u_!$$

correspondant au carré cartésien

$$\begin{tikzcd} b\backslash A \arrow[r, "j'"] \arrow[d, "b\backslash u"'] & A \arrow[d, "u"] \\ b\backslash B \arrow[r, "k'"'] & B \end{tikzcd} \quad ,$$

où j' et k' désignent les morphismes canoniques et $b\backslash u$ le foncteur induit par u, est un isomorphisme. [2]

Notations. Soient I et J dans $\mathcal{D}ia$. On définit un foncteur

$$\mathbb{D}(I \times J) \xrightarrow{\mathsf{dia}_{I,J}} \underline{\mathsf{Hom}}(I^\circ, \mathbb{D}(J))$$

comme suit. Soit

$$I \longrightarrow \underline{\mathsf{Hom}}(J, I \times J)$$

[2]On rappelle que pour toute flèche $u : A \to B$ de $\mathcal{C}at$ et tout objet b de B, on note A/b (resp. $b\backslash A$) la catégorie dont les objets sont les couples (a, p), où a est un objet de A et $p : u(a) \to b$ (resp. $p : b \to u(a)$) une flèche de B, un morphisme de (a, p) vers (a', p') étant une flèche $f : a \to a'$ de A telle que $p'u(f) = p$ (resp. $u(f)p = p'$). En particulier, B/b (resp. $b\backslash B$) est la catégorie des objets de B au dessus de b (resp sous b).

$$i \longmapsto (j \mapsto (i,j)) \quad ,$$

on en déduit par composition

$$I^\circ \longrightarrow \underline{\mathsf{Hom}}(J, I\times J)^\circ \xrightarrow{\mathbb{D}} \underline{\mathsf{Hom}}(\mathbb{D}(I\times J), \mathbb{D}(J)) \quad ,$$

et par adjonction

$$I^\circ \times \mathbb{D}(I\times J) \longrightarrow \mathbb{D}(J) \quad .$$

Par une nouvelle adjonction, on déduit le foncteur

$$\mathbb{D}(I\times J) \xrightarrow{\mathsf{dia}_{I,J}} \underline{\mathsf{Hom}}(I^\circ, \mathbb{D}(J)) \quad .$$

Der 5 Pour tout A dans $\mathcal{D}ia$, le foncteur

$$\mathsf{dia}_{\Delta_1, A} : \mathbb{D}(\Delta_1 \times A) \longrightarrow \underline{\mathsf{Hom}}(\Delta_1^\circ, \mathbb{D}(A)) \quad ,$$

où Δ_1 désigne la catégorie $\{0 \to 1\}$, est plein et essentiellement surjectif.

Der 6 (Axiome de dérivateur pointé). Si $u : A \to B$ est une immersion fermée (un cocrible) (resp. ouverte (un crible)) dans $\mathcal{D}ia$, alors u_* (resp. $u_!$) admet un adjoint à droite $u^!$ (resp. à gauche $u^?$). [3]

Notations et terminologie. On note $\square$ la catégorie $\Delta_1^\circ \times \Delta_1^\circ$ et $\ulcorner$, $\lrcorner$ les catégories opposées aux sous-catégories

$$\begin{tikzcd} (0,0) \arrow[r] \arrow[d] & (0,1) \\ (1,0) & \end{tikzcd} \qquad , \qquad \begin{tikzcd} & (0,1) \arrow[d] \\ (1,0) \arrow[r] & (1,1) \end{tikzcd}$$

de $\square^\circ = \Delta_1 \times \Delta_1$ et $i_\ulcorner : \ulcorner \to \square$, $i_\lrcorner : \lrcorner \to \square$ les foncteurs d'inclusion. On dit qu'un objet F de $\mathbb{D}(\square)$ est (homotopiquement) *cartésien* (resp. *cocartésien*) si le morphisme d'adjonction

$$F \longrightarrow i_{\lrcorner *} i_\lrcorner^* F \qquad (\text{resp. } i_{\ulcorner !} i_\ulcorner^* F \to F\,)$$

est un isomorphisme.

Der 7 (Axiome de dérivateur triangulé.) Un objet F de $\mathbb{D}(\square)$ est cartésien si et seulement si il est cocartésien.

[3]On rappelle qu'un crible (resp. cocrible) d'une catégorie B est une sous-catégorie pleine A de B, telle que pour objet a de A et tout objet b de B, s'il existe une flèche $b \to a$ (resp. $a \to b$) de B, alors b est dans A.

Commentaires. Les axiomes **Der 1** - **Der 5** constituent le jeu d'axiomes le plus fort qu'on puisse envisager pour un dérivateur général, sauf peut-être à renforcer l'axiome **Der 5** en demandant que pour toute catégorie finie libre I dans $\mathcal{D}ia$ et tout J dans $\mathcal{D}ia$, le foncteur $\mathsf{dia}_{I,J}$ soit plein et essentiellement surjectif. L'axiome **Der 6** implique que les catégories $\mathbb{D}(I)$ admettent des objets nuls. On peut envisager à ne demander que ça à la place de l'axiome **Der 6**. Enfin, on démontre :

Théorème 1. *Pour tout dérivateur triangulé $\mathbb{D}$ de domaine $\mathcal{D}ia$, et tout A dans $\mathcal{D}ia$, la catégorie $\mathbb{D}(A)$ est canoniquement une catégorie triangulée.* [10]

Exemple. Soit $\mathcal{E}$ une catégorie exacte. Pour toute petite catégorie I, la catégorie $\underline{\mathsf{Hom}}(I^\circ, \mathcal{E})$ est une catégorie exacte, en définissant les monomorphismes (resp. épimorphismes) admissibles argument par argument.

Théorème 2. *Il existe un dérivateur triangulé $\mathbb{D}_{\mathcal{E}}$ de domaine $\mathcal{D}ia = \mathcal{D}ir_f$, où $\mathcal{D}ir_f$ désigne la sous-2-catégorie 2-pleine de $\mathcal{C}at$ formée des catégories directes finies, tel que pour tout I dans $\mathcal{D}ia$, $\mathbb{D}(I)$ soit la catégorie dérivée bornée $\mathsf{Der}^b\,\underline{\mathsf{Hom}}(I^\circ, \mathcal{E})$ de la catégorie exacte $\underline{\mathsf{Hom}}(I^\circ, \mathcal{E})$.* [8]

La K-théorie d'un dérivateur triangulé.

On note Δ_m la catégorie

$$\Delta_m = \{0 \to 1 \to 2 \to \cdots \to m\} \quad .$$

Soit $\mathbb{D}$ un dérivateur triangulé de domaine $\mathcal{D}ia$. On dit qu'un objet F de $\mathbb{D}(\Delta_m^\circ \times \Delta_n^\circ)$ est (homotopiquement multi-) *cartésien* si pour tous k_0, k_1, l_0, l_1, $0 \le k_0 < k_1 \le m$, $0 \le l_0 < l_1 \le n$, si l'on note

$$i : \square \longrightarrow \Delta_m^\circ \times \Delta_n^\circ$$

le foncteur défini par

$$i(\varepsilon, \eta) = (k_\varepsilon, l_\eta) \quad , \qquad \varepsilon, \eta = 0,\, 1 \ ,$$

l'objet i^*F de $\mathbb{D}(\square)$ est cartésien. Si l'on suppose que pour tout I dans $\mathcal{D}ia$, $\mathbb{D}(I)$ est une petite catégorie, on définit un objet bisimplicial $X(\mathbb{D})$ de $\mathcal{C}at$ par le composé

$$\Delta^\circ \times \Delta^\circ \hookrightarrow \mathcal{D}ia^\circ \xrightarrow{\mathbb{D}} \mathcal{C}at \xrightarrow{\mathcal{I}so} \mathcal{C}at \ , \quad X(\mathbb{D})_{m,n} = \mathcal{I}so(\mathbb{D}(\Delta_m^\circ \times \Delta_n^\circ)) \ ,$$

où $\mathcal{I}so$ désigne le foncteur associant à une catégorie C la catégorie ayant les mêmes objets que C, et comme flèches les isomorphismes de C. On vérifie facilement que si pour tous m, n on note $Q(\mathbb{D})_{m,n}$ la sous-catégorie pleine de $X(\mathbb{D})_{m,n}$ formée des objets cartésiens de $\mathbb{D}(\Delta_m^\circ \times \Delta_n^\circ)$, alors $Q(\mathbb{D})$ est une sous-catégorie bisimpliciale de $X(\mathbb{D})$. Notons $\delta : \Delta \to \Delta \times \Delta \times \Delta$ le morphisme diagonal, et $N : \mathcal{C}at \to \widehat{\Delta}$ le foncteur nerf. Alors $\delta^* NQ(\mathbb{D})$ est un ensemble simplicial dont les 0-simplexes sont exactement les objets de $\mathbb{D}(\Delta_0^\circ \times \Delta_0^\circ) \simeq \mathbb{D}(e)$, où e désigne la catégorie ponctuelle. Ainsi, $\delta^* NQ(\mathbb{D})$ est un ensemble simplicial pointé par l'objet nul de $\mathbb{D}(e)$.

Définition.[4] On pose

$$\mathsf{K}_n(\mathbb{D}) = \pi_{n+1}(\delta^* NQ(\mathbb{D})) = \pi_n(\Omega\delta^* NQ(\mathbb{D})) \quad .$$

Proposition. *On a un isomorphisme canonique* $\mathsf{K}_0(\mathbb{D}) \simeq \mathsf{K}_0(\mathbb{D}(e))$.

En vertu du théorème 1, $\mathbb{D}(e)$ est une catégorie triangulée, et $\mathsf{K}_0(\mathbb{D}(e))$ désigne le K_0 de $\mathbb{D}(e)$ en tant que catégorie triangulée.

Soient $\mathbb{D}$ et $\mathbb{D}'$ deux dérivateurs triangulés de domaine $\mathcal{D}ia$. Une *équivalence de dérivateurs triangulés* de $\mathbb{D}$ vers $\mathbb{D}'$ est un morphisme de 2-foncteurs $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}'$, tel que pour tout objet A de $\mathcal{D}ia$, $\varphi_A : \mathbb{D}(A) \to \mathbb{D}'(A)$ soit une équivalence de catégories.[5] On démontre qu'alors pour tout objet A de $\mathcal{D}ia$, φ_A est un foncteur exact de la catégorie triangulée $\mathbb{D}(A)$, vers la catégorie triangulée $\mathbb{D}'(A)$ (cf. théorème 1). On en déduit un morphisme de catégories bisimpliciales $Q(\varphi) : Q(\mathbb{D}) \to Q(\mathbb{D}')$.

Proposition. *Si φ est une équivalence de dérivateurs triangulés, le morphisme $Q(\varphi)$ induit une équivalence d'homotopie des espaces correspondants. En particulier, on a des isomorphismes de groupes* $\mathsf{K}_n(\mathbb{D}) \simeq \mathsf{K}_n(\mathbb{D}')$, $n \geq 0$.

Il résulte de [6] (en utilisant un argument analogue à celui de [13], corollaire au lemme 1.4.1), que la K-théorie d'une catégorie exacte $\mathcal{E}$ peut être définie comme suit. On définit une catégorie bisimpliciale

$$\begin{aligned} \Delta^\circ \times \Delta^\circ &\xrightarrow{X(\mathcal{E})} \mathcal{C}at \\ (\Delta_m, \Delta_n) &\longmapsto X(\mathcal{E})_{m,n} = \mathcal{I}so\, \underline{\mathsf{Hom}}(\Delta_m \times \Delta_n, \mathcal{E}) \quad . \end{aligned}$$

Pour tous m, n, on note $Q(\mathcal{E})_{m,n}$ la sous-catégorie pleine de $X(\mathcal{E})_{m,n}$ dont les objets sont les foncteurs

$$F : \Delta_m \times \Delta_n \longrightarrow \mathcal{E}$$

[4]Cette définition, legèrement différente de ma définition initiale (qui était canulée pour un dérivateur triangulé général) m'a été suggérée par Denis-Charles Cisinski.

[5]Pour cela il suffit, si $\mathcal{D}ia \subset \mathcal{D}ir_f$, que $\varphi_e : \mathbb{D}(e) \to \mathbb{D}'(e)$ soit une équivalence de catégories.

tels que pour tous k_0, k_1, l_0, l_1, $0 \leq k_0 < k_1 \leq m$, $0 \leq l_0 < l_1 \leq n$, le carré

$$\begin{tikzcd} F_{k_0,l_0} \arrow[r, tail] \arrow[d, two heads] & F_{k_0,l_1} \arrow[d, two heads] \\ F_{k_1,l_0} \arrow[r, tail] & F_{k_1,l_1} \end{tikzcd}$$

soit un carré bicartésien dont les flèches horizontales (resp. verticales) sont des monomorphismes (resp. épimorphismes) admissibles. On vérifie aussitôt qu'on définit ainsi une sous-catégorie bisimpliciale $Q(\mathcal{E})$ de $X(\mathcal{E})$. Les 0-simplexes de l'ensemble simplicial $\delta^* NQ(\mathcal{E})$ sont les objets de $\mathcal{E}$, et $\delta^* NQ(\mathcal{E})$ est pointé par l'objet nul de $\mathcal{E}$. On a alors

$$\mathsf{K}_n(\mathcal{E}) = \pi_{n+1}(\delta^* NQ(\mathcal{E})) = \pi_n(\Omega\delta^* NQ(\mathcal{E})) \quad .$$

Le morphisme canonique

$$\underline{\mathsf{Hom}}(\Delta_m \times \Delta_n, \mathcal{E}) \longrightarrow \mathsf{Der}^b(\underline{\mathsf{Hom}}(\Delta_m \times \Delta_n, \mathcal{E})) = \mathbb{D}_{\mathcal{E}}(\Delta_m^\circ \times \Delta_n^\circ)$$

(où $\mathbb{D}_{\mathcal{E}}$ désigne le dérivateur triangulé associé à la catégorie exacte $\mathcal{E}$ (cf. théorème 2)) induit un morphisme de catégories bisimpliciales

$$Q(\mathcal{E}) \longrightarrow Q(\mathbb{D}_{\mathcal{E}}) \quad .$$

Conjecture 1. (Comparaison). *Le morphisme ci-dessus induit une équivalence d'homotopie des espaces correspondants. En particulier, il induit pour tout $n \geq 0$, un isomorphisme $\mathsf{K}_n(\mathcal{E}) \simeq \mathsf{K}_n(\mathbb{D}_{\mathcal{E}})$.*

Cette conjecture semble avoir été démontrée par D.-C. Cisinski [2].

Une *suite exacte de dérivateurs triangulés* $\mathbb{D}' \to \mathbb{D} \to \mathbb{D}''$ de domaine $\mathcal{D}ia$ est un couple de morphismes de 2-foncteurs $i : \mathbb{D}' \to \mathbb{D}$, $p : \mathbb{D} \to \mathbb{D}''$ tel que pour tout objet A de $\mathcal{D}ia$,

$$\mathbb{D}'(A) \xrightarrow{i_A} \mathbb{D}(A) \xrightarrow{p_A} \mathbb{D}''(A)$$

soit une suite exacte de catégories triangulées. Autrement dit, on demande que le foncteur i_A identifie $\mathbb{D}'(A)$ à une sous-catégorie pleine triangulée épaisse de $\mathbb{D}(A)$, et que p_A identifie $\mathbb{D}''(A)$ au quotient de $\mathbb{D}(A)$ par cette sous-catégorie épaisse.[6]

[6]Si $\mathcal{D}ia \subset \mathcal{D}ir_f$, il suffit que $\mathbb{D}'(e) \to \mathbb{D}(e) \to \mathbb{D}''(e)$ soit une suite exacte de catégories triangulées.

Conjecture 2. (Localisation). *Toute suite exacte de dérivateurs triangulés $\mathbb{D}' \to \mathbb{D} \to \mathbb{D}''$ de domaine $\mathcal{D}ia$ induit un diagramme de catégories bisimpliciales*

$$Q(\mathbb{D}') \to Q(\mathbb{D}) \to Q(\mathbb{D}'')$$

identifiant l'espace correspondant à $Q(\mathbb{D}')$ à la fibre homotopique du morphisme $Q(\mathbb{D}) \to Q(\mathbb{D}'')$. En particuler, on a une longue suite exacte de groupes abéliens

$$\cdots \to \mathsf{K}_{n+1}(\mathbb{D}'') \to \mathsf{K}_n(\mathbb{D}') \to \mathsf{K}_n(\mathbb{D}) \to \mathsf{K}_n(\mathbb{D}'') \to \mathsf{K}_{n-1}(\mathbb{D}') \to \cdots \to \mathsf{K}_0(\mathbb{D}'') \to 0\,.$$

Soit $\mathbb{D}$ un dérivateur triangulé de domaine $\mathcal{D}ia$. Pour tout objet I de $\mathcal{D}ia$, on définit un dérivateur triangulé

$$\begin{aligned} \mathbb{D}_I : \mathcal{D}ia^\circ &\longrightarrow \mathcal{C}AT \\ J &\longmapsto \mathbb{D}(I \times J) \end{aligned}$$

appelé dérivateur induit, et pour tout morphisme $u : I' \to I$ de $\mathcal{D}ia$, les foncteurs $(u \times 1_J)^* : \mathbb{D}(I \times J) \to \mathbb{D}(I' \times J)$ définissent un morphisme de dérivateurs induits, noté aussi, quand aucune confusion n'en résulte

$$u^* : \mathbb{D}_I \longrightarrow \mathbb{D}_{I'} \quad .$$

On remarque que $\mathbb{D}_e \simeq \mathbb{D}$. Considérons le dérivateur induit $\mathbb{D}_\square$, et soit J un objet de $\mathcal{D}ia$. On dit qu'un objet X de $\mathbb{D}_\square(J) = \mathbb{D}(\square \times J)$ est cartésien si pour tout objet j de J, $(1_\square \times i_{J,j})^*(X)$ est un objet cartésien de $\mathbb{D}(\square \times e) \simeq \mathbb{D}(\square)$. Notons $\mathbb{D}'(J)$ la sous-catégorie pleine de $\mathbb{D}_\square(J)$ formée des objets cartésiens X de $\mathbb{D}_\square(J) = \mathbb{D}(\square \times J)$ tels que si

$$\mathsf{dia}_{\square,J}\, X = \begin{array}{ccc} X_{00} & \longrightarrow & X_{01} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_{10} & \longrightarrow & X_{11} \end{array} \quad ,$$

alors $X_{10} = 0$ (autrement dit, tels que pour tout objet j de J, $i^*_{\square \times J,((1,0),j)}X$ soit l'objet nul de $\mathbb{D}(e)$). On démontre que

$$\begin{aligned} \mathbb{D}' : \mathcal{D}ia^\circ &\longrightarrow \mathcal{C}AT \\ J &\longmapsto \mathbb{D}'(J) \end{aligned}$$

est un dérivateur triangulé de domaine $\mathcal{D}ia$, et que les inclusions

$$\mathbb{D}'(J) \hookrightarrow \mathbb{D}_\square(J) \quad , \qquad J \in \mathsf{Ob}\,\mathcal{D}ia \quad ,$$

définissent un morphisme de dérivateurs $\mathbb{D}' \to \mathbb{D}_\square$. D'autre part, les morphismes

$$i_{\square,(0,0)},\ i_{\square,(1,1)} : e \longrightarrow \square$$

de $\mathcal{D}ia$ définissent des morphismes de dérivateurs

$$i^*_{\square,(0,0)},\ i^*_{\square,(1,1)} : \mathbb{D}_\square \longrightarrow \mathbb{D} \quad ,$$

et en les composant avec le morphisme $\mathbb{D}' \to \mathbb{D}_\square$, on obtient des morphismes de dérivateurs

$$s,\ t : \mathbb{D}' \longrightarrow \mathbb{D} \quad .$$

De façon explicite, pour tout objet J de $\mathcal{D}ia$, et tout objet X de $\mathbb{D}'(J)$, si

$$\mathsf{dia}_{\square,J}\, X = \begin{tikzcd} X_{00} \arrow[r] \arrow[d] & X_{01} \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] & X_{11} \end{tikzcd} \quad ,$$

alors $s_J(X) = X_{00}$ et $t_J(X) = X_{11}$. On démontre que les foncteurs

$$s_J,\ t_J : \mathbb{D}'(J) \longrightarrow \mathbb{D}(J)$$

sont des foncteurs exacts de la catégorie triangulée $\mathbb{D}'(J)$ vers la catégorie triangulée $\mathbb{D}(J)$. On en déduit donc des morphismes de catégories bisimpliciales $Q(s),\ Q(t) : Q(\mathbb{D}') \to Q(\mathbb{D})$.

Conjecture 3. (Additivité). *Le morphisme*

$$(Q(s), Q(t) : Q(\mathbb{D}') \to Q(\mathbb{D}) \times Q(\mathbb{D})$$

induit une équivalence d'homotopie des espaces correspondants. En particulier, on a des isomorphismes de groupes $\mathsf{K}_n(\mathbb{D}') \simeq \mathsf{K}_n(\mathbb{D}) \times \mathsf{K}_n(\mathbb{D})$, $n \geq 0$.

Références

[**1**] D.-C. Cisinski, *Images directes cohomologiques dans les catégories de modèles*, preprint (2001), http ://www.math.jussieu.fr/~cisinski/.

[**2**] D.-C. Cisinski, *La* K*-théorie des dérivateurs triangulés*, manuscrit (2001).

[**3**] J. Franke, *Uniqueness theorems for certain triangulated categories possessing an Adams spectral sequence*, preprint, K-theory Preprint Archives 139 (1996).

[**4**] A. Grothendieck, "Les dérivateurs", manuscrit (∼1990), Chapitre I : *Généralités sur les (pré)dérivateurs*, http ://www.math.jussieu.fr/~maltsin/groth/Derivateurs.html.

[**5**] A. Heller, *Homotopy theories*, Memoirs of the American Mathematical Society, Vol 71, No 383, (1988).

[**6**] J. F. Jardine, *The multiple Q-construction*, Can. J. Math. Vol. XXXIX, No 5, pp. 1174-1209 (1987).

[**7**] B. Keller, *Derived categories and universal problems*, Comm. in Alg. 19(3), pp. 699-747 (1991).

[**8**] B. Keller, *Dérivateur associé à une catégorie exacte*, Exposés au groupe de travail "Algèbre et topologie homotopiques" (2001).

[**9**] G. Maltsiniotis, *Introduction à la théorie des dérivateurs, d'après Grothendieck*, Preprint (2001), http ://www.math.jussieu.fr/~maltsin/.

[**10**] G. Maltsiniotis, *Structure triangulée sur les catégories des coefficients d'un dérivateur triangulé*, Exposés au groupe de travail "Algèbre et topologie homotopiques" (2001).

[**11**] A. Neeman, K-*Theory for triangulated categories*, I(A), I(B), II, III(A), III(B), Asian J. Math. Vol. 1 No 2, pp. 330-417 (1997), Vol. 1 No 3, pp. 435-529 (1997), Vol. 2 No 1, pp. 1-125 (1998), Vol 2 No 3, pp. 495-589 (1998), Vol. 3 No 3, pp. 557-608 (1999).

[**12**] A. Neeman, K-*Theory for triangulated categories*, $3\frac{1}{2}$(A), $3\frac{1}{2}$(B), $3\frac{3}{4}$, K-Theory, Vol. 20, pp. 97-174 (2000), Vol. 20, pp. 243-298 (2000), Vol. 22 pp. 1-144 (2001).

[**13**] F. Waldhausen, *Algebraic* K-*Theory of spaces*, in Algebraic Geometric Topology Proceedings, Rutgers 1983, Lecture Notes in Mathematics 1126, pp. 318-419, Springer (1985).