Introduction à la théorie des dérivateurs

Georges MALTSINIOTIS

d'après Grothendieck

13 mars 2001

1 La définition des dérivateurs

1.1 Historique

Dans la théorie des dérivateurs, on ne peut citer, à ma connaissance, que quatre noms : A. Grothendieck, A. Heller, B. Keller, et J. Franke. La première fois où la notion, et le mot, apparaît est dans la "Poursuite des champs", lettre de plus de six cent pages, d'Alexandre Grothendieck à Quillen, datant de 1983. Le premier à avoir publié une axiomatique de cette théorie est Alex Heller dans "Homotopy theories", Memoirs of the AMS, vol 71, no 383 (1988). Dans ce texte les dérivateurs sont appelés "théories homotopiques". À peu près à la même époque, Grothendieck est en train de rédiger un manuscrit de plus de 1800 pages : "Les Dérivateurs", dont on peut estimer l'achèvement en 1990, et qui va être au centre de ces exposés. Dans sa thèse "Derived categories and universal problems", Comm. in Alg. 19, 3, pp. 699-747 (1991), Bernhard Keller développe une notion proche, dans le cadre des catégories triangulées, qu'il appelle "tour de catégories triangulées". Plus récemment, en 1996, également dans le cadre triangulé, Jens Franke développe une notion qu'il appelle "système de catégories triangulées de diagrammes".

1.2 La problématique

Le but de la théorie des dérivateurs est de dégager le "bon" cadre de l'algèbre homotopique et l'algèbre homologique. Assez rapidement, après l'introduction par Verdier de la notion de catégorie triangulée comme cadre de l'algèbre homologique, on s'est aperçu que ce cadre était insuffisant. Essentiellement pour deux raisons, d'ailleurs liées :

a) Un diagramme dans une catégorie triangulée ne contient pas suffisamment d'information pour déterminer sa limite ou colimite homotopique, à isomorphisme canonique près. Par exemple, le cône d'un morphisme n'est connu qu'à isomorphisme non canonique près.

b) La catégorie dérivée d'une catégorie abélienne ne satisfait pas une propriété universelle.

Dans sa thèse Bernhard Keller a résolu le deuxième problème en considérant "des tours de catégories triangulées", à la place des catégories triangulées isolées. Au lieu de considérer uniquement la catégorie dérivée d'une catégorie abélienne, on considère aussi les catégories dérivées des catégories abéliennes de diagrammes de type donné de la catégorie abélienne de départ. Bernhard Keller considère les diagrammes cubiques. En fait, on peux considérer des diagrammes plus généraux. Soit par exemple A une catégorie de Grothendieck. Pour toute petite catégorie I, la catégorie $\underline{\mathsf{Hom}}(I^{\circ}, A)$ des préfaisceaux sur I, à valeurs dans A, est aussi une catégorie de Grothendieck, et on peut considérer sa catégorie dérivée

$$\mathbb{D}(I) = \mathsf{Der}(\underline{\mathsf{Hom}}(I^\circ, A)) \quad .$$

Si $I = e$ est la catégorie ponctuelle,

$$\mathbb{D}(e) = \mathsf{Der}(\underline{\mathsf{Hom}}(e^\circ, A)) \simeq \mathsf{Der}(A)$$

est la catégorie dérivée de A. On rappelle que si $\mathsf{C}(A)$ désigne la catégorie des complexes de A, la catégorie dérivée $\mathsf{Der}(A)$ est la catégorie

$$\mathsf{Der}(A) = \mathsf{C}(A)[\mathcal{W}_{qis}^{-1}]$$

obtenue en inversant formellement les quasi-isomorphismes de $\mathsf{C}(A)$. En revenant au cas d'une petite catégorie arbitraire I, $\mathbb{D}(I)$ est donc la catégorie

$$\mathbb{D}(I) = \mathsf{C}(\underline{\mathsf{Hom}}(I^\circ, A))[\mathcal{W}_I^{-1}] \quad ,$$

où $\mathcal{W}_I$ est formé des quasi-isomorphismes de $\mathsf{C}(\underline{\mathsf{Hom}}(I^\circ, A))$. Or, on a un isomorphisme canonique

$$\mathsf{C}(\underline{\mathsf{Hom}}(I^\circ, A)) \simeq \underline{\mathsf{Hom}}(I^\circ, \mathsf{C}(A))$$

(les complexes d'une catégorie de préfaisceaux sont les préfaisceaux de la catégorie des complexes), les quasi-isomorphismes de $\mathsf{C}(\underline{\mathsf{Hom}}(I^\circ, A))$ s'identifiant aux morphismes de préfaisceaux qui sont des quasi-isomorphismes de $\mathsf{C}(A)$ argument par argument. Ainsi un objet de $\mathbb{D}(I)$ s'identifie à un foncteur

$$I^\circ \longrightarrow \mathsf{C}(A) \quad ,$$

et définit en particulier un foncteur (diagramme de type I°)

$$I^\circ \longrightarrow \mathsf{Der}(A) = \mathbb{D}(A) \quad .$$

Il contient néanmoins plus d'information et permet cette fois ci, à déterminer la limite ou colimite homotopique à isomorphisme canonique près. De façon plus précise, si $p : I \to e$ désigne l'unique foncteur de la catégorie I vers la catégorie ponctuelle, ce foncteur définit un foncteur “préfaisceau constant”

$$\mathsf{C}(A) \simeq \underline{\mathsf{Hom}}(e, \mathsf{C}(A)) \longrightarrow \underline{\mathsf{Hom}}(I^\circ, \mathsf{C}(A)) \quad ,$$

qui induit un foncteur

$$p^* : \mathsf{Der}(A) = \mathbb{D}(e) \longrightarrow \mathbb{D}(I) \quad .$$

Ce foncteur admet un adjoint à gauche $p_!$, et un adjoint à droite p_*

$$p_!,\, p_* : \mathbb{D}(I) \longrightarrow \mathbb{D}(A) \quad ,$$

associant fonctoriellement à un objet de $\mathbb{D}(I)$ la colimite, ou la limite, homotopique du diagramme de type I° correspondant. Plus généralement, un foncteur $u : I \to J$, entre deux petites catégories, définit un foncteur “préfaisceau image réciproque”

$$\underline{\mathsf{Hom}}(u^\circ, 1_{\mathsf{C}(A)}) : \underline{\mathsf{Hom}}(J^\circ, \mathsf{C}(A)) \longrightarrow \underline{\mathsf{Hom}}(I^\circ, \mathsf{C}(A)) \quad ,$$

qui induit un foncteur

$$u^* : \mathbb{D}(J) \longrightarrow \mathbb{D}(I) \quad ,$$

et on démontre que ce foncteur admet un adjoint à gauche $u_!$, généralisant les colimites homotopiques, et un adjoint à droite u_* généralisant les limites homotopiques.

De plus, on vérifie facilement que pour tout morphisme de foncteurs

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, bend left, "u"{name=U}] \arrow[r, bend right, "v"'{name=V}] \arrow[Rightarrow, from=U, to=V, "\alpha"] & J \end{tikzcd} \quad ,$$

on associe un morphisme de foncteurs $\alpha^* : v^* \to u^*$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{D}(I) & \mathbb{D}(J) \arrow[l, bend right, "u^*"'{name=U}] \arrow[l, bend left, "v^*"{name=V}] \arrow[Rightarrow, from=V, to=U, "\alpha^*"] \end{tikzcd} \quad ,$$

et qu’on définit ainsi un 2-foncteur strict de la 2-catégorie des petites catégories dans la 2-catégorie des catégories (non nécessairement petites)

$$I \longmapsto \mathbb{D}(I) \ , \quad f \longmapsto f^* \ , \quad \alpha \longmapsto \alpha^* \quad .$$

L’idée de Grothendieck est que c’est ce 2-foncteur qui code l’information complète de la “structure triangulée” d’une catégorie dérivée. Il s’agit donc de dégager des axiomes adéquats sur un tel 2-foncteur, en commençant dans un cadre non additif, puis en étudiant le cas “pointé”, et enfin le cas additif ou triangulé.

1.3 Prédérivateurs

On note $\mathcal{C}at$ la 2-catégorie des petites catégories. On se fixe une sous-2-catégorie $\mathcal{D}ia$ de $\mathcal{C}at$, appelée *catégorie de diagrammes*, et satisfaisant à toute les conditions de stabilité dont on aura besoin. En pratique, $\mathcal{D}ia$ sera soit $\mathcal{C}at$ toute entière, soit la sous-2-catégorie pleine formée des catégories finies, ou des catégories associées à des ensembles ordonnés finis.

Un *prédérivateur de domaine* $\mathcal{D}ia$ est un “2-foncteur contravariant strict”

$$\mathbb{D} : \mathcal{D}ia^{\circ} \longrightarrow \mathcal{CAT} \quad ,$$

où $\mathcal{CAT}$ désigne la “2-catégorie” des catégories non nécessairement petites. Cette définition doit être comprise comme étant une façon concise pour dire qu'un prédérivateur de domaine $\mathcal{D}ia$ est une fonction associant à une catégorie appartenant à $\mathcal{D}ia$ une catégorie (non nécessairement petite) $\mathbb{D}(I)$, à un foncteur $u : I \to J$ appartenant à $\mathcal{D}ia$ un foncteur

$$u^* = u^*_{\mathbb{D}} : \mathbb{D}(J) \to \mathbb{D}(I) \quad ,$$

et à un morphisme de foncteurs

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, bend left, "u"] \arrow[r, bend right, "v"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & J \end{tikzcd}$$

un morphisme de foncteurs $\alpha^* = \alpha^*_{\mathbb{D}} : v^* \to u^*$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{D}(I) \arrow[r, phantom, "\alpha^*\Uparrow"] & \mathbb{D}(J) \arrow[l, bend right, "u^*"'] \arrow[l, bend left, "v^*"] \end{tikzcd}$$

satisfaisant aux conditions suivantes. Si $I \xrightarrow{u} J \xrightarrow{v} K$ est dans $\mathcal{D}ia$

$$(vu)^* = u^* v^* \quad , \qquad 1^*_I = 1_{\mathbb{D}(I)} \quad ,$$

si

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] I \arrow[r, bend left=50, "u"] \arrow[r, "v" description] \arrow[r, bend right=50, "w"'] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\Downarrow\alpha"] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\Downarrow\beta"] & J \end{tikzcd} \qquad \text{est dans } \mathcal{D}ia \quad ,$$

$$(\beta\alpha)^* = \alpha^* \beta^* \quad , \qquad 1^*_u = 1_{u^*} \quad ,$$

et si

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, bend left, "u"] \arrow[r, bend right, "u'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & J \arrow[r, bend left, "v"] \arrow[r, bend right, "v'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\beta"] & K \end{tikzcd} \quad \text{est dans } \mathcal{D}ia \quad ,$$

$$(\beta \star \alpha)^* = \alpha^* \star \beta^* \quad .$$

Ces conditions impliquent que si

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, bend left, "u"] \arrow[r, bend right, "u'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & J \arrow[r, "v"] & K \end{tikzcd} \quad \text{est dans } \mathcal{D}ia \quad ,$$

$$(v \star \alpha)^* = \alpha^* \star v^* \quad ,$$

et si

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "u"] & J \arrow[r, bend left, "v"] \arrow[r, bend right, "v'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\beta"] & K \end{tikzcd} \quad \text{est dans } \mathcal{D}ia \quad ,$$

$$(\beta \star u)^* = u^* \star \beta^* \quad .$$

Si

$$\mathbb{D} : \mathcal{D}ia^\circ \longrightarrow \mathcal{CAT}$$

est un prédérivateur de domaine $\mathcal{D}ia$, on dit que les objets de $\mathcal{D}ia$ sont les *catégories d'indices pour* $\mathbb{D}$, les $\mathbb{D}(I)$ les *catégories de coefficients pour* $\mathbb{D}$, et les objets de $\mathbb{D}(I)$ les *coefficients de type* $\mathbb{D}$ *sur* I. Si $u : I \to J$ est dans $\mathcal{D}ia$, on dit que $u^* : \mathbb{D}(J) \to \mathbb{D}(I)$ est le *foncteur image inverse*. Si e désigne la catégorie finale, on dit que $\mathbb{D}(e)$ est la *catégorie fondamentale* du prédérivateur et les objets de $\mathbb{D}(e)$ les *coefficients fondamentaux* ou *absolus*. Pour toute petite catégorie I, on note $p_I : I \to e$ le foncteur canonique. On dit qu'un coefficient F de type $\mathbb{D}$ sur I est *constant* s'il existe un coefficient absolu M tel que $F \simeq p_I^* M$.

Exemple 1.3.1. Un *localisateur* est un couple $(\mathcal{M}, \mathcal{W})$ formé d'une catégorie $\mathcal{M}$, et d'une partie $\mathcal{W}$ de $\mathsf{Fl}(\mathcal{M})$. Pour toute petite catégorie I, on note $\mathcal{M}(I)$ la catégorie des préfaisceaux sur I à valeurs dans $\mathcal{M}$

$$\mathcal{M}(I) = \underline{\mathsf{Hom}}(I^\circ, \mathcal{M}) \quad ,$$

et $\mathcal{W}_I$ la partie de $\mathsf{Fl}(\mathcal{M}(I))$ formée des morphismes de préfaisceaux qui sont dans $\mathcal{W}$ argument par argument :

$$\varphi \in \mathcal{W}_I \Longleftrightarrow \forall i \in \mathsf{Ob}(I) \;\; \varphi_i \in \mathcal{W} \quad .$$

À tout localisateur $(\mathcal{M},\mathcal{W})$, on associe (modulo des difficultés ensemblistes) un prédérivateur $\mathbb{D}=\mathbb{D}_{(\mathcal{M},\mathcal{W})}$, de domaine $\mathcal{D}ia=\mathcal{C}at$, comme suit. Si I est une petite catégorie, on pose

$$\mathbb{D}(I)=\underline{\mathsf{Hom}}(I^\circ,\mathcal{M})[\mathcal{W}_I^{-1}] \quad .$$

Si $u:I\to J$ est un morphisme de $\mathcal{C}at$, on déduit un foncteur

$$\underline{\mathsf{Hom}}(u^\circ,1_{\mathcal{M}}):\underline{\mathsf{Hom}}(J^\circ,\mathcal{M})\longrightarrow\underline{\mathsf{Hom}}(I^\circ,\mathcal{M})$$

tel que

$$\underline{\mathsf{Hom}}(u^\circ,1_{\mathcal{M}})(\mathcal{W}_J)\subset\mathcal{W}_I \quad .$$

Il induit donc un foncteur

$$u^*:\mathbb{D}(J)\longrightarrow\mathbb{D}(I) \quad .$$

Si

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, bend left, "u"{name=U}] \arrow[r, bend right, "v"'{name=V}] & J \arrow[from=U, to=V, phantom, "\Downarrow\alpha"] \end{tikzcd}$$

est un morphisme de foncteurs dans $\mathcal{C}at$, $\alpha_i:u(i)\to v(i)$, $i\in\mathsf{Ob}(I)$, on déduit un morphisme de foncteurs

$$\begin{tikzcd} \underline{\mathsf{Hom}}(I^\circ,\mathcal{M}) \arrow[r, phantom, "\Uparrow"] & \underline{\mathsf{Hom}}(J^\circ,\mathcal{M}) \arrow[l, bend right, "\underline{\mathsf{Hom}}(u^\circ{,}1_{\mathcal{M}})"'] \arrow[l, bend left, "\underline{\mathsf{Hom}}(v^\circ{,}1_{\mathcal{M}})"] \end{tikzcd}$$

$$F:J^\circ\longrightarrow\mathcal{M} \qquad \underline{\mathsf{Hom}}(v^\circ,1_{\mathcal{M}})(F)=Fv^\circ\longrightarrow Fu^\circ=\underline{\mathsf{Hom}}(u^\circ,1_{\mathcal{M}})(F)$$

$$\mathsf{Ob}(I)\ni i\longmapsto F(\alpha_i):Fv(i)\longrightarrow Fu(i) \quad ,$$

qui, en vertu de la 2-fonctorialité de la localisation, définit un morphisme de foncteurs

$$\begin{tikzcd} \mathbb{D}(I) \arrow[r, phantom, "\alpha^*\Uparrow"] & \mathbb{D}(J) \arrow[l, bend right, "u^*"'] \arrow[l, bend left, "v^*"] \end{tikzcd} \quad .$$

Le plus souvent $\mathcal{M}$ sera une catégorie de modèles fermée de Quillen, et $\mathcal{W}$ la partie de $\mathsf{Fl}(\mathcal{M})$ formée des équivalences faibles. On dit alors que $(\mathcal{M},\mathcal{W})$

est un *localisateur de Quillen*, et dans ce cas les difficultés ensemblistes disparaissent. L'exemple des catégories dérivées envisagé dans l'introduction est le cas particulier où $\mathcal{M} = \mathsf{C}(A)$ est la catégorie des complexes d'une catégorie de Grothendieck, et $\mathcal{W} = \mathcal{W}_{qis}$ est formé des quasi-isomorphismes. D'après Fabien Morel, $(\mathsf{C}(A), \mathcal{W}_{qis})$ est un localisateur de Quillen.

Un autre exemple important est le prédérivateur HOT correspondant au localisateur de Quillen $(\mathcal{T}op, \mathcal{W}_{\mathcal{T}op})$, où $\mathcal{W}_{\mathcal{T}op}$ est formé des équivalences faibles topologiques, applications continues $f : X \to Y$ telles que :

a) $\pi_0(f) : \pi_0(X) \to \pi_0(Y)$ est une application bijective ;

b) pour tout $n \geq 1$, et tout $x \in X$, $\pi_n(X, x) \to \pi_n(Y, f(x))$ est un isomorphisme de groupes.

En vertu de la théorie classique des ensembles simpliciaux, le prédérivateur HOT peut être également défini par le localisateur de Quillen $(\widehat{\Delta}, \mathcal{W}_{\widehat{\Delta}})$, où $\widehat{\Delta}$ désigne la catégorie des ensembles simpliciaux, et $\mathcal{W}_{\widehat{\Delta}}$ est formé des équivalences faibles d'ensembles simpliciaux, morphismes d'ensembles simpliciaux dont la réalisation topologique est une équivalence faible topologique. Enfin, en vertu de la théorie de Thomason, le prédérivateur HOT est aussi défini par le localisateur de Quillen $(\mathcal{C}at, \mathcal{W}_\infty)$, où $\mathcal{W}_\infty$ est formé des morphismes de $\mathcal{C}at$ dont le nerf est une équivalence faible d'ensembles simpliciaux.

Revenons au cas d'un prédérivateur général $\mathbb{D}$. Un fait crucial et élémentaire est le suivant.

Proposition 1.3.2. *Si (u, v) est un couple de foncteurs adjoints dans $\mathcal{D}ia$ et*

$$\varepsilon : uv \longrightarrow 1 \quad , \qquad \eta : 1 \longrightarrow vu$$

les morphismes d'adjonction (supposés dans $\mathcal{D}ia$), alors (u^*, v^*) est un couple de foncteurs adjoints et

$$\eta^* : u^* v^* \longrightarrow 1 \quad , \qquad \varepsilon^* : 1 \longrightarrow v^* u^*$$

les morphismes d'adjonction.

Démonstration. En effet, par hypothèse, on a

$$u \xrightarrow{u\star\eta} uvu \xrightarrow{\varepsilon\star u} u \quad , \qquad v \xrightarrow{\eta\star v} vuv \xrightarrow{v\star\varepsilon} v \quad ,$$

$$(\varepsilon \star u)(u \star \eta) = 1_u \quad , \qquad (v \star \varepsilon)(\eta \star v) = 1_v \quad ,$$

d'où

$$1_{u^*} = (1_u)^* = (u \star \eta)^* (\varepsilon \star u)^* = (\eta^* \star u^*)(u^* \star \varepsilon^*) \quad ,$$

$$1_{v^*} = (1_v)^* = (\eta \star v)^*(v \star \varepsilon)^* = (v^* \star \eta^*)(\varepsilon^* \star v^*) \quad ,$$

ce qui prouve l'assertion.

Corollaire 1.3.3. *Si* (u, v) *est un couple de foncteurs adjoints dans* $\mathcal{D}ia$, *et si* u (resp. v) *est pleinement fidèle, alors* v^* (resp. u^*) *est pleinement fidèle.*

DÉMONSTRATION. En effet, si

$$\varepsilon : uv \longrightarrow 1 \quad , \qquad \eta : 1 \longrightarrow vu$$

désignent les morphismes d'adjonction, l'hypothèse que u (resp. v) est pleinement fidèle implique que η (resp. ε) est un isomorphisme, donc η^* (resp. ε^*) aussi, ce qui implique, en vertu de la proposition précédente, que v^* (resp. u^*) est pleinement fidèle.

Soit $u : I \to J$ dans $\mathcal{D}ia$. On dit que u est une $\mathbb{D}$-*équivalence* si le foncteur $u^* : \mathbb{D}(J) \to \mathbb{D}(I)$ induit un foncteur pleinement fidèle sur la sous-catégorie de $\mathbb{D}(J)$ formée des coefficients constants, autrement dit, si pour tous coefficients absolus M, N (M, $N \in \mathsf{Ob}\ \mathbb{D}(e)$) l'application

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Hom}_{\mathbb{D}(J)}(p_J^* M, p_J^* N) \arrow[r] & \mathsf{Hom}_{\mathbb{D}(I)}(p_I^* M, p_I^* N) \\
\varphi \arrow[r, mapsto] & u^*(\varphi)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "p_I"'] & & J \arrow[dl, "p_J"] \\
& e &
\end{tikzcd}$$

$$p_I = p_J u$$

$$p_I^* = u^* p_J^*$$

est bijective. On note $\mathcal{W}_{\mathbb{D}}$ la partie de $\mathsf{Fl}(\mathcal{D}ia)$ formée des $\mathbb{D}$-équivalences. On dit qu'une petite catégorie I dans $\mathcal{D}ia$ est $\mathbb{D}$-*asphérique* si $p_I : I \to e$ est une $\mathbb{D}$-équivalence. Comme tout coefficient absolu est constant, dire que I est $\mathbb{D}$-asphérique signifie que le foncteur p_I^* est pleinement fidèle.

Exemple 1.3.4. On verra que si $\mathbb{D}$ est le prédérivateur HOT, alors les $\mathbb{D}$-équivalences sont exactement les équivalences faibles de $\mathcal{C}at$, autrement dit, $\mathcal{W}_{\mathbb{D}} = \mathcal{W}_\infty$.

Revenons au cas d'un prédérivateur général $\mathbb{D}$.

Proposition 1.3.5. *Le localisateur* $(\mathcal{D}ia, \mathcal{W}_{\mathbb{D}})$ *est fortement saturé.*

On dit qu'un localisateur $(\mathcal{M}, \mathcal{W})$ est *fortement saturé* si pour toute flèche u de $\mathcal{M}$, $u \in \mathcal{W}$ si et seulement si $\gamma_{\mathcal{M}}(u)$ est un isomorphisme, où

$$\gamma_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}[\mathcal{W}^{-1}]$$

désigne le foncteur de localisation.

DÉMONSTRATION. Soit $u_0 : I_0 \to J_0$ une flèche de $\mathcal{D}ia$ telle que $\gamma_{\mathbb{D}}(u_0)$ soit un isomorphisme, où

$$\gamma_{\mathbb{D}} : \mathcal{D}ia \longrightarrow \mathcal{D}ia[\mathcal{W}_{\mathbb{D}}^{-1}]$$

désigne le foncteur de localisation. Montrons que u_0 est dans $\mathcal{W}_{\mathbb{D}}$. Soient M, N deux coefficients absolus, et considérons le foncteur

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}ia & \xrightarrow{\Phi_{M,N}} & \mathcal{E}ns^{\circ} \\ I & \longmapsto & \mathsf{Hom}_{\mathbb{D}(I)}(p_I^*(M), p_I^*(N)) \\ u & \longmapsto & (\varphi \mapsto u^*(\varphi)) \end{array}$$

Par définition d'une $\mathbb{D}$-équivalence, si u est une $\mathbb{D}$-équivalence, son image par ce foncteur est une bijection. En vertu de la propriété universelle de la localisation, on a donc un triangle commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathcal{D}ia \arrow[d, "\gamma_{\mathbb{D}}"'] \arrow[dr, "\Phi_{M,N}"] & \\ \mathcal{D}ia[\mathcal{W}_{\mathbb{D}}^{-1}] \arrow[r, "\overline{\Phi}_{M,N}"'] & \mathcal{E}ns^{\circ} \end{tikzcd} .$$

Comme $\gamma_{\mathbb{D}}(u_0)$ est un isomorphisme, il en est de même pour $\Phi_{M,N}(u_0) = \overline{\Phi}_{M,N}\gamma_{\mathbb{D}}(u_0)$, autrement dit pour tous coefficients constants M, N, $\Phi_{M,N}(u_0)$ est une bijection. On en déduit que u_0 est une $\mathbb{D}$-équivalence, ce qu'il falait démontrer.

Corollaire 1.3.6. *Le localisateur* $(\mathcal{D}ia, \mathcal{W}_{\mathbb{D}})$ *est faiblement saturé.*

On dit qu'un localisateur $(\mathcal{M}, \mathcal{W})$ est *faiblement saturé* si :

a) Les identités de $\mathcal{M}$ sont dans $\mathcal{W}$.

b) Si dans un triangle commutatif deux des trois flèches sont dans $\mathcal{W}$, il en est de même pour la troisième.

c) Si $i : X' \to X$ admet une retraction $r : X \to X'$ ($ri = 1_{X'}$), et si $ir \in \mathcal{W}$, alors $r \in \mathcal{W}$ (et donc aussi $i \in \mathcal{W}$, par (a) et (b)).

Proposition 1.3.7. *Soient A une petite catégorie dans $\mathcal{D}ia$ admettant un objet final (ou initial), et B une petite catégorie arbitraire dans $\mathcal{D}ia$. Si $p : A \times B \to B$ désigne la deuxième projection, alors p^* est pleinement fidèle. En particulier, p est une $\mathbb{D}$-équivalence.*

Démonstration. Supposons, par exemple, que A admet un objet final e_A, et notons $i : B \to A \times B$ le foncteur $b \mapsto (e_A, b)$. Ce foncteur est pleinement fidèle, et (p, i) est un couple de foncteurs adjoints. On en déduit que p^* est pleinement fidèle (corollaire 1.3.3).

Corollaire 1.3.8. *Une petite catégorie dans $\mathcal{D}ia$ admettant un objet final (ou initial) est $\mathbb{D}$-asphérique.*

On rappelle que deux morphismes $u_0, u_1 : A \to B$ de $\mathcal{C}at$ sont dits *homotopes* s'ils appartiennent à une même composante connexe de $\underline{\mathsf{Hom}}(A, B)$. La relation d'homotopie est donc la relation d'équivalence engendrée par la relation : il existe un foncteur $h : \Delta_1 \times A \to B$ tel que $hi_\varepsilon = u_\varepsilon$, $\varepsilon = 0, 1$, où Δ_1 désigne la catégorie $\{0 \to 1\}$, et i_ε le foncteur $a \mapsto (\varepsilon, a)$, $\varepsilon = 0, 1$. Cette relation est compatible à la composition, ce qui permet de définir une catégorie $\overline{\mathcal{C}at}$, ayant mêmes objets que $\mathcal{C}at$, et telle que

$$\mathsf{Hom}_{\overline{\mathcal{C}at}}(A, B) = \pi_0(\underline{\mathsf{Hom}}(A, B) \quad ,$$

et un foncteur de passage au quotient

$$Q : \mathcal{C}at \longrightarrow \overline{\mathcal{C}at} \quad .$$

On dit qu'une flèche u de $\mathcal{C}at$ est un *homotopisme* si $Q(u)$ est un isomorphisme de $\overline{\mathcal{C}at}$. On dit qu'une petite catégorie A est *contractile* si $p_A : A \to e$ est un homotopisme.

Lemme 1.3.9. *Soient $u_0, u_1 : A \to B$ deux flèches homotopes de $\mathcal{D}ia$. Alors u_0 est une $\mathbb{D}$-équivalence si et seulement u_1 l'est.*

Démonstration. On peut supposer qu'il existe $h : \Delta_1 \times A \to B$ telle que $u_\varepsilon = hi_\varepsilon$, $\varepsilon = 0$, 1. Notons $p : \Delta_1 \times A \to A$ la deuxième projection. On a

$$pi_0 = 1_A = pi_1 \quad ,$$

et comme Δ_1 admet un objet final, en vertu de 1.3.7, p est une $\mathbb{D}$-équivalence, donc par saturation faible i_0 et i_1 sont aussi des $\mathbb{D}$-équivalences. On en déduit, toujours par saturation faible, que u_ε est une $\mathbb{D}$-équivalence si et seulement si h l'est, ce qui pouve le lemme.

Proposition 1.3.10. *Une catégorie contractile est $\mathbb{D}$-asphérique.*

Démonstration. Soit A une catégorie contractile. Par définition, il existe $s : e \to A$ tel que sp_A soit homotope à 1_A. Il résulte du lemme précédent que sp_A est une $\mathbb{D}$-équivalence, et comme $p_A s = 1_e$, il résulte de la saturation faible que p_A est une $\mathbb{D}$-équivalence, ce qui prouve l'assertion.

1.4 Les axiomes des dérivateurs

1.4.1. On dit qu'un prédérivateur $\mathbb{D}$ de domaine $\mathcal{D}ia$ est un *dérivateur faible à gauche* si les axiomes suivants sont satisfaits.

Der 1 *a*) Si I, J sont dans $\mathcal{D}ia$, alors

$$\mathbb{D}(I \amalg J) \xrightarrow{(i^*,j^*)} \mathbb{D}(I) \times \mathbb{D}(J) \quad ,$$

où $i : I \to I \amalg J$, $j : J \to I \amalg J$ désignent les foncteurs canoniques, est une équivalence de catégories.

b) $\mathbb{D}(\emptyset)$ est la catégorie finale.

Notation. Pour toute petite catégorie A, et tout objet a de A, on note $i_{A,a} : e \to A$ le foncteur de la catégorie ponctuelle e vers A défini par l'objet a de A.

Der 2 Pour tout A dans $\mathcal{D}ia$, la famille de foncteurs $i^*_{A,a} : \mathbb{D}(A) \to \mathbb{D}(e)$, $a \in \mathsf{Ob}(A)$, est conservative, autrement dit, si φ est un morphisme de $\mathbb{D}(A)$ tel que pour tout objet a de A, $i^*_{A,a}(\varphi)$ est un isomorphisme, alors φ est un isomorphisme.

Si F est un coefficient de type $\mathbb{D}$ sur A ($F \in \mathsf{Ob}\ \mathbb{D}(A)$), et a un objet de A, on pose $F_a = i^*_{A,a}(F)$, et si $\varphi : F \to F'$ est un morphisme entre deux tels coefficients, on pose $\varphi_a = i^*_{A,a}(\varphi) : F_a \to F'_a$. On dit que F_a, qui est un coefficient absolu ($F_a \in \mathsf{Ob}\ \mathbb{D}(e)$), est la *fibre* de F en a, et $\varphi_a : F_a \to F'_a$ le *morphisme induit par* φ *dans les fibres.*

L'axiome ci-dessus affirme donc que, pour tout A dans $\mathcal{D}ia$, tout morphisme $\varphi : F \to F'$ entre coefficients de type $\mathbb{D}$ sur A induisant, pour tout objet a de A, un isomorphisme dans les fibres, est un isomorphisme.

Der 3g Pour tout $u : A \to B$ dans $\mathcal{D}ia$, le foncteur $u^* : \mathbb{D}(B) \to \mathbb{D}(A)$ admet un adjoint *à droite* $u_* = u_*^{\mathbb{D}} : \mathbb{D}(A) \to \mathbb{D}(B)$.

Le foncteur u_* s'appelle foncteur *image directe cohomologique pour* u. Si F est un coefficient de type $\mathbb{D}$ sur A, l'objet $u_*(F)$ de $\mathbb{D}(B)$ s'appelle l'objet de *cohomologie relative de* A *sur* B *(par* u*) à coefficients dans* F.

Notation. Soit A dans $\mathcal{D}ia$. Pour tout coefficient F de type $\mathbb{D}$ sur A, on pose

$$\mathsf{H}^*(A,F) = \mathsf{H}^*_{\mathbb{D}}(A,F) = (p_A)_*(F) \quad .$$

L'objet $\mathsf{H}^*(A,F)$ de $\mathbb{D}(e)$ s'appelle *cohomologie de* A *à coefficients dans* F. Une terminologie plus classique est d'appeler cet objet *limite homotopique* de F, et de le noter $\underleftarrow{\mathrm{holim}}_{A^\circ} F$. Si M est un coefficient absolu, on pose

$$\mathsf{H}^*(A,M) = \mathsf{H}^*(A,p_A^*(M)) = (p_A)_* p_A^*(M) \quad ,$$

et cet objet s'appelle *cohomologie de* A *à coefficients dans* M.

Pour énoncer l'axiome suivant, on a besoin de quelques préliminaires. Soit

$$\begin{tikzcd}
X' & X \arrow[l, "g"'] \\
Y' \arrow[u, "f'"] \arrow[ur, phantom, "\theta\nearrow"] & Y \arrow[l, "h"] \arrow[u, "f"']
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
f'h \xrightarrow{\theta} gf$$

un 2-diagramme de catégories, et supposons que f et f' admettent des adjoints à droite r et r' respectivement,

$$fr \xrightarrow{\varepsilon} 1\,, \qquad 1 \xrightarrow{\eta} rf\,, \qquad\qquad f'r' \xrightarrow{\varepsilon'} 1\,, \qquad 1 \xrightarrow{\eta'} r'f'$$

étant les morphismes d'adjonction. On en déduit un 2-diagramme

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[d, "r'"'] \arrow[dr, phantom, "\widetilde{\theta}\nwarrow"] & X \arrow[l, "g"'] \arrow[d, "r"] \\
Y' & Y \arrow[l, "h"]
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
hr \xrightarrow{\widetilde{\theta}} r'g\ ,$$

le morphisme de foncteurs $\widetilde{\theta}$ étant défini par

$$\widetilde{\theta} = (r'g \star \varepsilon)(r' \star \theta \star r)(\eta' \star hr)$$

$$hr \xrightarrow{\eta' \star hr} r'f'hr \xrightarrow{r' \star \theta \star r} r'gfr \xrightarrow{r'g \star \varepsilon} r'g \qquad .$$

Soit maintenant un 2-diagramme dans $\mathcal{D}ia$

$$\mathcal{D} \ = \quad \begin{tikzcd}
A' \arrow[r, "v"] \arrow[d, "u'"'] & A \arrow[d, "u"] \arrow[dl, phantom, "\swarrow_{\alpha}"] \\
B' \arrow[r, "w"'] & B
\end{tikzcd} \qquad .$$

On en déduit un 2-diagramme de catégories

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{D}(A') & \mathbb{D}(A) \arrow[l, "v^*"'] \\
\mathbb{D}(B') \arrow[u, "u'^*"] \arrow[ur, phantom, "\alpha^*\nearrow"] & \mathbb{D}(B) \arrow[l, "w^*"] \arrow[u, "u^*"']
\end{tikzcd} \qquad ,$$

et, en vertu de ce qui précède (pourvu que $\mathbb{D}$ satisfasse à **Der 3g**) un 2-diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{D}(A') \arrow[d, "u'_*"'] \arrow[dr, phantom, "\widetilde{\alpha^*}\Nwarrow"] & \mathbb{D}(A) \arrow[l, "v^*"'] \arrow[d, "u_*"] \\
\mathbb{D}(B') & \mathbb{D}(B) \arrow[l, "w^*"]
\end{tikzcd} \qquad .$$

On pose

$$c_{\mathcal{D}} = \widetilde{\alpha^*} : w^* u_* \longrightarrow u'_* v^* \quad ,$$

et on appelle $c_{\mathcal{D}}$ le *morphisme de changement de base pour les images directes cohomologiques, relatif au diagramme* $\mathcal{D}$.

Soit $u : A \to B$ un morphisme de $\mathcal{C}at$, b un objet de B. On définit un 2-diagramme

$$\mathcal{D}_{u,b} \;=\; \begin{tikzcd}
A/b \arrow[r, "j_{u,b}"] \arrow[d, "p_{A/b}"'] \arrow[dr, phantom, "\Swarrow\alpha_{u,b}"] & A \arrow[d, "u"] \\
e \arrow[r, "i_{B,b}"'] & B
\end{tikzcd} \qquad ,$$

en notant A/b la catégorie dont les objets sont les couples (a, y), a objet de A, $y : u(a) \to b$ morphisme de B, $j = j_{u,b}$ le morphisme canonique, associant à un objet (a, y) de A/b, l'objet a de A, et en définissant le morphisme de foncteurs $\alpha = \alpha_{u,b}$ par

$$\alpha_{(a,y)} : uj(a, y) = u(a) \xrightarrow{y} b = i_{B,b} p_{A/b}(a, y) \quad .$$

Der 4g Pour tout $u : A \to B$ dans $\mathcal{D}ia$, et tout objet b de B, le morphisme de changement de base

$$c_{u,b} = c_{\mathcal{D}_{u,b}} : i^*_{B,b} u_* \longrightarrow (p_{A/b})_* j^*_{u,b}$$

est un isomorphisme. Autrement dit, pour tout coefficient F de type $\mathbb{D}$ sur A, le morphisme

$$c_{u,b} : (u_* F)_b = i^*_{B,b} u_* F \longrightarrow (p_{A/b})_* j^*_{u,b} F = \mathsf{H}^*(A/b, j^* F) = \mathsf{H}^*(A/b, F|(A/b))$$

est un isomorphisme (calcul des fibres des images directes cohomologiques).

Exemple 1.4.2. Soit $\mathcal{M}$ une catégorie admettant des petites limites projectives. Définissons un prédérivateur $\mathbb{D}$ de domaine $\mathcal{C}at$, en posant, pour toute petite catégorie I,

$$\mathbb{D}(I) = \underline{\mathsf{Hom}}(I^\circ, \mathcal{M}) \quad ,$$

en définissant, pour tout $u : I \to J$ dans $\mathcal{C}at$, u^* comme étant le foncteur "préfaisceau image inverse"

$$u^* = \underline{\mathsf{Hom}}(u^\circ, 1_{\mathcal{M}}) : \underline{\mathsf{Hom}}(J^\circ, \mathcal{M}) \longrightarrow \underline{\mathsf{Hom}}(I^\circ, \mathcal{M}) \quad ,$$

et, pour tout morphisme de foncteurs

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r, bend left, "u"] \arrow[r, bend right, "v"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & J
\end{tikzcd}$$

dans $\mathcal{C}at$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{D}(I) = \underline{\mathsf{Hom}}(I^\circ, \mathcal{M}) & \underline{\mathsf{Hom}}(J^\circ, \mathcal{M}) = \mathbb{D}(J) \arrow[l, bend right, "u^*=\underline{\mathsf{Hom}}(u^\circ{,}1_{\mathcal{M}})"'] \arrow[l, bend left, "v^*=\underline{\mathsf{Hom}}(v^\circ{,}1_{\mathcal{M}})"] \arrow[l, phantom, "\alpha^*\Uparrow"]
\end{tikzcd}$$

par

$$\alpha^*(F)(i) = F(\alpha_i) \quad , \qquad F \in \mathsf{Hom}(J^\circ, \mathcal{M}) = \mathsf{Ob}\ \mathbb{D}(J) \ , \quad i \in \mathsf{Ob}(I) \quad .$$

Le prédérivateur $\mathbb{D}$ ainsi défini n'est autre que le prédérivateur défini par le localisateur $(\mathcal{M}, \mathcal{W})$, où $\mathcal{W}$ est formé des isomorphismes de $\mathcal{M}$ (qui est même un localisateur de Quillen, pourvu que $\mathcal{M}$ admette aussi des limites inductives finies). On remarque que la catégorie fondamentale $\mathbb{D}(e) = \underline{\mathsf{Hom}}(e^\circ, \mathcal{M})$ de $\mathbb{D}$ n'est autre que $\mathcal{M}$, que pour toute petite catégorie A et tout coefficient absolu M, M objet de $\mathcal{M}$, $p_A^*(M)$ est le préfaisceau constant sur A de valeur M, et que pour tout objet a de A et tout coefficient F de type $\mathbb{D}$ sur A, F préfaisceau sur A à valeurs dans $\mathcal{M}$, la fibre $F_a = i_{A,a}^* F$ de F en a est la valeur $F(a)$ de F en a.

Le prédérivateur $\mathbb{D}$ est un dérivateur faible à droite. L'axiome **Der 1** est évident, en vertu de la définition d'une somme disjointe et d'un objet initial. L'axiome **Der 2** résulte du fait qu'un morphisme de préfaisceaux qui est un isomorphisme argument par argument est un isomorphisme.

Comme $\mathcal{M}$ admet des petites limites projectives, pour toute petite catégorie A, le foncteur préfaisceau constant $p^* : \mathcal{M} = \mathbb{D}(e) \to \mathbb{D}(A) = \underline{\mathsf{Hom}}(A^\circ, \mathcal{M})$

admet un adjoint à droite $(p_A)_* : \mathbb{D}(A) \to \mathbb{D}(e) = \mathcal{M}$ qui n'est autre que le foncteur limite projective

$$\begin{aligned} \varprojlim_{A^\circ} : \mathbb{D}(A) = \underline{\mathsf{Hom}}(A^\circ, \mathcal{M}) &\longrightarrow \mathcal{M} = \mathbb{D}(e) \\ F &\longmapsto \varprojlim_{A^\circ} F \end{aligned}$$

Plus généralement, la théorie classique des extensions de Kan implique que pour tout foncteur $u : I \to J$ dans $\mathcal{C}at$, le foncteur

$$u^* : \mathbb{D}(J) = \underline{\mathsf{Hom}}(J^\circ, \mathcal{M}) \to \underline{\mathsf{Hom}}(I^\circ, \mathcal{M}) = \mathbb{D}(I)$$

admet un adjoint à droite

$$u_* : \mathbb{D}(I) = \underline{\mathsf{Hom}}(I^\circ, \mathcal{M}) \to \underline{\mathsf{Hom}}(J^\circ, \mathcal{M}) = \mathbb{D}(J)$$

défini par

$$u_*(F)(j) = \varprojlim_{\substack{(I/j)^\circ \\ u(i) \to j}} F(i) \quad , \qquad F \in \mathsf{Hom}(I^\circ, \mathcal{M}) \ , \quad j \in \mathsf{Ob}(J) \ ,$$

ce qui prouve **Der 3g**, et l'axiome **Der 4g** n'est autre, dans ce cas, que la formule ci-dessus.

1.4.3. Un *dérivateur faible à droite* est un prédérivateur satisfaisant aux axiomes **Der 1**, **Der 2**, et aux axiomes **Der 3d** et **Der 4d** duaux des axiomes **Der 3g** et **Der 4g**.

Der 3d Pour tout $u : A \to B$ dans $\mathcal{D}ia$, le foncteur $u^* : \mathbb{D}(B) \to \mathbb{D}(A)$ admet un adjoint à *gauche* $u_! = u_!^{\mathbb{D}} : \mathbb{D}(A) \to \mathbb{D}(B)$.

Le foncteur $u_!$ s'appelle *foncteur image directe homologique* pour u. Si F est un coefficient de type $\mathbb{D}$ sur A, l'objet $f_!(F)$ de $\mathbb{D}(B)$ s'appelle l'objet *d'homologie relative de A sur B (par u) à coefficients dans F.*

Notation. Soit A dans $\mathcal{D}ia$. Pour tout coefficient F de type $\mathbb{D}$ sur A, on pose

$$\mathsf{H}_*(A, F) = \mathsf{H}_*^{\mathbb{D}}(A, F) = (p_A)_!(F) \quad .$$

L'objet $\mathsf{H}_*(A, F)$ de $\mathbb{D}(e)$ s'appelle *homologie de A à coefficients dans F.* Une terminologie plus classique est d'appeler cet objet *colimite homotopique* de F et le noter $\underrightarrow{\mathrm{holim}}_{A^\circ} F$. Si M est un coefficient absolu, on pose

$$\mathsf{H}_*(A, M) = \mathsf{H}_*(A, p_A^*(M)) = (p_A)_! p_A^*(M) \quad ,$$

et cet objet s'appelle *homologie de A à coefficients dans M.*

Si

$$\mathcal{D} \;=\; \begin{tikzcd} A' \arrow[r, "v"] \arrow[d, "u'"'] & A \arrow[d, "u"] \\ B' \arrow[r, "w"'] \arrow[ur, Rightarrow, shorten=4mm, "\alpha"] & B \end{tikzcd}$$

est un 2-diagramme dans $\mathcal{D}ia$, une construction duale à celle définissant le morphisme de changement de base pour les images directes cohomologiques permet de définir un morphisme de foncteurs

$$c'_{\mathcal{D}} : u'_! v^* \longrightarrow w^* u_! \quad ,$$

qu'on appelle le *morphisme de changement de base pour les images directes homologiques, relatif au diagramme* $\mathcal{D}$.

De même, si $u : A \to B$ est un morphisme de $\mathcal{C}at$, et b un objet de B, on définit un 2-diagramme

$$\mathcal{D}'_{u,b} \;=\; \begin{tikzcd} b\backslash A \arrow[r, "j'_{u,b}"] \arrow[d, "p_{b\backslash A}"'] & A \arrow[d, "u"] \\ e \arrow[r, "i_{B,b}"'] \arrow[ur, Rightarrow, shorten=6mm, "\alpha'_{u,b}"] & B \end{tikzcd} \qquad ,$$

dualement à $\mathcal{D}'_{u,b}$.

Der 4d Pour tout $u : A \to B$ dans $\mathcal{D}ia$, et tout objet b de B, le morphisme de changement de base

$$c'_{u,b} = c'_{\mathcal{D}_{u,b}} : (p_{b\backslash A})_! j'^*_{u,b} \longrightarrow i^*_{B,b} u_!$$

est un isomorphisme. Autrement dit, pour tout coefficient F de type $\mathbb{D}$ sur A, le morphisme

$$c'_{u,b} : \mathsf{H}_*(b\backslash A, F|(b\backslash A)) = \mathsf{H}_*(b\backslash A, j'^*_{u,b}F) = (p_{b\backslash A})_! j'^*_{u,b}F \longrightarrow i^*_{B,b} u_! F = (u_! F)_b$$

est un isomorphisme (calcul des fibres des images directes homologiques).

Un *dérivateur* est un prédérivateur qui est à la fois un dérivateur faible à gauche et un dérivateur faible à droite.

1.5 Les conséquences élémentaires des axiomes

Proposition 1.5.1. *Soit $\mathbb{D}$ un prédérivateur de domaine $\mathcal{D}ia$.*

a) *Si les axiomes* **Der 1** (a) *et* **Der 3g** *sont satisfaits, alors pour tout I dans $\mathcal{D}ia$, $\mathbb{D}(I)$ admet des produits binaires.*

b) *Si les axiomes* **Der 1** (b) *et* **Der 3g** *sont satisfaits, alors pour tout I dans $\mathcal{D}ia$, $\mathbb{D}(I)$ admet un objet final.*

Ainsi, pour tout dérivateur faible à gauche $\mathbb{D}$, les catégories $\mathbb{D}(I)$, pour I dans $\mathcal{D}ia$, possèdent des produits finis.

Démonstration. (a) Pour montrer que la catégorie $\mathbb{D}(I)$ possède des produits binaires, il suffit de montrer que le foncteur diagonal

$$\Delta_{\mathbb{D}(I)} : \mathbb{D}(I) \longrightarrow \mathbb{D}(I) \times \mathbb{D}(I)$$

possède un adjoint à droite. Notons

$$I \xrightarrow{i_1} I \amalg I \xleftarrow{i_2} I$$

les foncteurs canoniques, et $\nabla_I : I \amalg I \to I$ le foncteur codiagonal, défini par $\nabla_I i_k = 1_I$, $k = 1, 2$. On a un triangle commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{D}(I) \arrow[r, "\nabla_I^*"] \arrow[dr, "\Delta_{\mathbb{D}(I)}"'] & \mathbb{D}(I \amalg I) \arrow[d, "(i_1^*{,}i_2^*)"] \\
 & \mathbb{D}(I) \times \mathbb{D}(I)
\end{tikzcd} \quad ,$$

car $i_k^* \nabla_I^* = (\nabla_I i_k)^* = 1_I^* = 1_{\mathbb{D}(I)}$, $k = 1, 2$. En vertu de **Der 3g**, ∇_I^* admet un adjoint à droite, et en vertu de **Der 1** (a), (i_1^*, i_2^*) est une équivalence de catégories, donc admet aussi un adjoint à droite. On en déduit qu'il en est de même pour $\Delta_{\mathbb{D}(I)}$.

(b) Pour montrer que la catégorie $\mathbb{D}(I)$ possède un objet final, il suffit de prouver que le foncteur canonique $p_{\mathbb{D}(I)} : \mathbb{D}(I) \to e$ admet un adjoint à droite. Notons $i : \emptyset \to I$ le foncteur canonique. On a un triangle commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{D}(I) \arrow[r, "i^*"] \arrow[dr, "p_{\mathbb{D}(I)}"'] & \mathbb{D}(\emptyset) \arrow[d, "l"] \\
 & e
\end{tikzcd} \quad .$$

En vertu de **Der 3g**, i^* admet un adjoint à droite, et en vertu de **Der 1** (b), $\mathbb{D}(\emptyset) \to e$ est un isomorphisme. On en déduit que $p_{\mathbb{D}(I)}$ admet un adjoint à droite, ce qui achève la démonstration.

Proposition 1.5.2. *Soit $\mathbb{D}$ un prédérivateur, de domaine $\mathcal{D}ia$, satisfaisant à* **Der 2**. *Si $(u_j : A_j \to A)_{j\in J}$ est une famille de flèches de $\mathcal{D}ia$, telle que $\mathsf{Ob}(A) = \bigcup\limits_{j\in J} u_j(\mathsf{Ob}(A_j))$, alors la famille de foncteurs $(u_j^*)_{j\in J}$ est conservative.*

Démonstration. Soit $\varphi : F \to F'$ une flèche de $\mathbb{D}(A)$ telle que pour tout j, $j \in J$, $u_j^*(\varphi)$ soit un isomorphisme. Comme

$$\mathsf{Ob}(A) = \bigcup_{j\in J} u_j(\mathsf{Ob}(A_j)) \quad ,$$

pour tout objet a de A, il existe j, $j \in J$, et un objet a' de A_j tels que $a = u_j(a')$. On a alors

$$\begin{tikzcd} & A_j \arrow[dd, "u_j"] \\ e \arrow[ur, "i_{A_j,a'}"] \arrow[dr, "i_{A,a}"'] & \\ & A \end{tikzcd} \qquad i_{A,a} = u_j i_{A_j,a'} \quad .$$

On en déduit que $i_{A,a}^*(\varphi) = i_{A_j,a'}^* u_j^*(\varphi)$ est un isomorphisme. Il résulte donc de **Der 2** que φ est un isomorphisme.

1.5.3. Soit $\mathbb{D}$ un prédérivateur de domaine $\mathcal{D}ia$. Pour tout objet I de $\mathcal{D}ia$, on définit un foncteur

$$\mathsf{dia}_I : \mathbb{D}(I) \longrightarrow \underline{\mathsf{Hom}}(I^\circ, \mathbb{D}(e))$$

comme suit. On a un isomorphisme de catégories

$$I \xrightarrow{\sim} \underline{\mathsf{Hom}}(e, I) \quad ,$$

d'où, en composant avec le foncteur défini par $\mathbb{D}$

$$I^\circ \xrightarrow{\sim} \underline{\mathsf{Hom}}(e, I)^\circ \xrightarrow{\mathbb{D}} \underline{\mathsf{Hom}}(\mathbb{D}(I), \mathbb{D}(e)) \quad ,$$

on en déduit un foncteur $I^\circ \to \underline{\mathsf{Hom}}(\mathbb{D}(I), \mathbb{D}(e))$, d'où par adjonction un foncteur

$$\mathsf{dia}_I : \mathbb{D}(I) \longrightarrow \underline{\mathsf{Hom}}(I^\circ, \mathbb{D}(e)) \quad ,$$

appelé *foncteur diagramme associé*. On vérifie immédiatement que pour toute flèche $u : I \to J$ de $\mathcal{D}ia$, on a un carré commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathbb{D}(J) \arrow[r, "\mathsf{dia}_J"] \arrow[d, "u^*"'] & \underline{\mathsf{Hom}}(J^\circ, \mathbb{D}(e)) \arrow[d, "\underline{\mathsf{Hom}}(u^\circ, 1_{\mathbb{D}(e)})"] \\ \mathbb{D}(I) \arrow[r, "\mathsf{dia}_I"'] & \underline{\mathsf{Hom}}(I^\circ, \mathbb{D}(e)) \end{tikzcd} \quad ,$$

et en particulier, pour tout A dans $\mathcal{D}ia$, et tout objet a de A, on a un carré commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{D}(A) \arrow[r, "\mathsf{dia}_A"] \arrow[d, "i^*_{A,a}"'] & \underline{\mathsf{Hom}}(A^\circ, \mathbb{D}(e)) \arrow[d, "\underline{\mathsf{Hom}}(i^\circ_{A,a}, 1_{\mathbb{D}(e)})"] \\
\mathbb{D}(e) \arrow[r, "\sim"'] & \underline{\mathsf{Hom}}(e^\circ, \mathbb{D}(e))
\end{tikzcd} \quad .$$

Comme la famille des foncteurs $\underline{\mathsf{Hom}}(i^\circ_{A,a}, 1_{\mathbb{D}(e)})$, $a \in \mathsf{Ob}(A)$, est conservative, on en déduit :

Proposition 1.5.4. *Un prédérivateur $\mathbb{D}$ de domaine $\mathcal{D}ia$ satisfait à l'axiome* **Der 2** *si et seulement si pour tout A dans $\mathcal{D}ia$, le foncteur*

$$\mathsf{dia}_A : \mathbb{D}(A) \longrightarrow \underline{\mathsf{Hom}}(A^\circ, \mathbb{D}(e))$$

est conservatif.

1.5.5. Soit $\mathbb{D}$ un prédérivateur de domaine $\mathcal{D}ia$ satisfaisant à l'axiome **Der 3g**. Si $u : A \to B$ est une flèche de $\mathcal{D}ia$, et F un coefficient de type $\mathbb{D}$ sur B ($F \in \mathsf{Ob}\ \mathbb{D}(B)$), on en déduit un morphisme

$$\mathsf{H}^*(u, F) : \mathsf{H}^*(B, F) \longrightarrow \mathsf{H}^*(A, u^*F) \quad .$$

Ce morphisme est défini par

$$\mathsf{H}^*(u, F) = (p_B)_* \star \eta(F) \quad ,$$

où $\eta : 1_{\mathbb{D}(B)} \to u_*u^*$ désigne le morphisme d'adjonction.

$$\mathsf{H}^*(B, F) = (p_B)_*(F) \xrightarrow{(p_B)_*(\eta_F)} (p_B)_*u_*u^*(F) \simeq (p_A)_*u^*(F) = \mathsf{H}^*(A, u^*F)$$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "p_A"'] & & B \arrow[dl, "p_B"] \\
& e &
\end{tikzcd}$$

$$p_A = p_B u$$

$$(p_A)_* \simeq (p_B)_* u_*$$

En particulier, si F est un coefficient constant, $F = p^*_B M$, où M est un coefficient absolu, on en déduit un morphisme

$$\mathsf{H}^*(B, M) = \mathsf{H}^*(B, p^*_B M) \xrightarrow{\mathsf{H}^*(u,M)} \mathsf{H}^*(A, u^*p^*_B M) = \mathsf{H}^*(A, p^*_A M) = \mathsf{H}^*(A, M)$$

$$\mathsf{H}^*(u, M) = (p_B)_* \star \eta(p^*_B M) = (p_B)_* \star \eta \star p^*_B(M) \quad ,$$

qui définit un morphisme de foncteurs

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge] \mathbb{D}(e) \arrow[r, bend left, "\mathsf{H}^*(B,?)=(p_B)_*p_B^*"] \arrow[r, bend right, "\mathsf{H}^*(A,?)=(p_A)_*p_A^*"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\ \mathsf{H}^*(u,?)=(p_B)_*\star\eta\star p_B^*"] & \mathbb{D}(e) \end{tikzcd} \quad .$$

Proposition 1.5.6. *Soit $\mathbb{D}$ un prédérivateur de domain $\mathcal{D}ia$ satisfaisant à l'axiome* **Der 3g**. *Si $u : A \to B$ est une flèche de $\mathcal{D}ia$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) *u est une $\mathbb{D}$-équivalence ;*

b) *le morphisme canonique*

$$p_{B*} \star \eta \star p_B^* : p_{B*}p_B^* \longrightarrow p_{A*}p_A^*$$

est un isomorphisme canonique ;

c) *pour tout coefficient absolu M le morphisme canonique*

$$\mathsf{H}^*(u, M) : \mathsf{H}^*(B, M) \longrightarrow \mathsf{H}^*(A, M)$$

est un isomorphisme ;

d) *pour tout coefficient constant F sur B le morphisme canonique*

$$\mathsf{H}^*(B, F) \longrightarrow \mathsf{H}^*(A, u^*F)$$

est un isomorphisme.

Démonstration. L'équivalence de (b), (c) et (d) est tautologique. Par définition, la condition (a) signifie que pour tous coefficients absolus M et N, l'application

$$\mathsf{Hom}_{\mathbb{D}(B)}(p_B^*N, p_B^*M) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathbb{D}(A)}(p_A^*N, p_A^*M)$$

est bijective, ou par adjonction, que l'application

$$\mathsf{Hom}_{\mathbb{D}(e)}(N, p_{B*}p_B^*M) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathbb{D}(e)}(N, p_{A*}p_A^*)$$

est bijective, ce qui équivaut à dire que pour tout coefficient absolu M, le morphisme $p_{B*}p_B^*M \to p_{A*}p_A^*M$ est un isomorphisme. Cela établit l'équivalence de (a) et (b), et démontre la proposition.

Lemme 1.5.7. *Soit* $\mathbb{D}$ *un prédérivateur de domaine* $\mathcal{D}ia$ *satisfaisant à l'axiome* **Der 3g**, *et considérons des 2-diagrammes :*

$$\begin{tikzcd}
A'' \arrow[r, "v'"] \arrow[d, "u''"'] \arrow[dr, phantom, "\swarrow_{\alpha'}"] & A' \arrow[r, "v"] \arrow[d, "u'"] \arrow[dr, phantom, "\swarrow_{\alpha}"] & A \arrow[d, "u"] & A'' \arrow[r, "v''=vv'"] \arrow[d, "u''"'] \arrow[dr, phantom, "\swarrow_{\alpha''}"] & A \arrow[d, "u"] \\
B'' \arrow[r, "w'"'] & B' \arrow[r, "w"'] & B & B'' \arrow[r, "w''=ww'"'] & B \\
\mathcal{D}' & \mathcal{D} & & \mathcal{D}\circ\mathcal{D}' &
\end{tikzcd},$$

où $\alpha'' = (w\star\alpha')(\alpha\star v')$. *Alors on a* $c_{\mathcal{D}\circ\mathcal{D}'} = (c_{\mathcal{D}'}\star v^*)(w'^*\star c_{\mathcal{D}})$.

$$\begin{tikzcd}
(ww')^*u_* \arrow[rr, "c_{\mathcal{D}\circ\mathcal{D}'}"] \arrow[d, equal] & & u''_*(vv')^* \arrow[d, equal] \\
w'^*w^*u_* \arrow[dr, "w'^*\star c_{\mathcal{D}}"'] & & u''_*v'^*v^* \\
& w'^*u'_*v^* \arrow[ur, "c_{\mathcal{D}'}\star v^*"'] &
\end{tikzcd}$$

Démonstration. La démonstration est laissée au lecteur.

On dit qu'un 2-carré $\mathcal{D}$ de $\mathcal{D}ia$

$$\mathcal{D} \ = \ \begin{tikzcd}
A' \arrow[r, "v"] \arrow[d, "u'"'] \arrow[dr, phantom, "\swarrow_{\alpha}"] & A \arrow[d, "u"] \\
B' \arrow[r, "w"'] & B
\end{tikzcd}$$

satisfait à la propriété de changement de base (cohomologique) si le morphisme de changement de base $c_{\mathcal{D}}$ est un isomorphisme.

En gardant les notations du lemme précédent, ce lemme implique que si $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ satisfont à la propriété de changement de base, alors il en est de même pour $\mathcal{D}\circ\mathcal{D}'$.

Lemme 1.5.8. *Soit* $\mathbb{D}$ *un prédérivateur de domaine* $\mathcal{D}ia$ *satisfaisant à l'axiome* **Der 3g**. *Pour tout* $u : A \to B$ *dans* $\mathcal{D}ia$, *si* b *est un objet final de* B, *alors le 2-carré*

$$\mathcal{D}_{u,b} \ = \ \begin{tikzcd}
A/b \arrow[r, "j_{u,b}"] \arrow[d, "p_{A/b}"'] \arrow[dr, phantom, "\swarrow_{\alpha_{u,b}}"] & A \arrow[d, "u"] \\
e \arrow[r, "i_{B,b}"'] & B
\end{tikzcd}$$

satisfait à la propriété de changement de base.

DÉMONSTRATION. Comme b est un objet final de B, $A/b \simeq A$, $p_{A/b}$ s'identifie à p_A, et $j_{u,b}$ à l'identité de A. Ainsi le morphisme de changement de base se réduit à

$$i^*_{B,b}u_* \xrightarrow{c_{u,b}} p_{A*} \simeq p_{B*}u_* \quad .$$

Or, comme b est un objet final de B, $(p_B, i_{B,b})$ est un couple de foncteurs adjoints, donc $(p^*_B, i^*_{B,b})$ aussi (1.3.2), et $p_{B*} \simeq i^*_{B,b}$. On conclut en vérifiant que le triangle

$$\begin{tikzcd}
i^*_{B,b}u_* \arrow[rr, "c_{u,b}"] \arrow[dr, "\simeq"'] & & p_{A*} \\
& p_{B*}u_* \arrow[ur, "\simeq"'] &
\end{tikzcd}$$

est commutatif.

Proposition 1.5.9. *Soit $\mathbb{D}$ un prédérivateur de domaine $\mathcal{D}ia$ satisfaisant aux axiomes* **Der 2** *et* **Der 3g**. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) *$\mathbb{D}$ satisfait à l'axiome* **Der 4g**, *autrement dit, pour tout morphisme $u : A \to B$ de $\mathcal{D}ia$, et tout objet b de B, le 2-carré*

$$\mathcal{D}_{u,b} \quad = \quad \begin{tikzcd}
A/b \arrow[r, "j_{u,b}"] \arrow[d, "p_{A/b}"'] \arrow[dr, phantom, "\swarrow\alpha_{u,b}"] & A \arrow[d, "u"] \\
e \arrow[r, "i_{B,b}"'] & B
\end{tikzcd}$$

satisfait à la propriété de changement de base ;

b) *Pour tout morphisme $u : A \to B$ de $\mathcal{D}ia$, et tout objet b de B, le carré cartésien*

$$\mathcal{D}^c_{u,b} \quad = \quad \begin{tikzcd}
A/b \arrow[r, "j_{u,b}"] \arrow[d, "u/b"'] & A \arrow[d, "u"] \\
B/b \arrow[r, "j_{1_B,b}"'] & B
\end{tikzcd}$$

satisfait à la propriété de changement de base.

DÉMONSTRATION. Soient $u : A \to B$ une flèche de $\mathcal{D}ia$, b un objet de B, et

$(b', y : b' \to b)$ un objet de B/b. Considérons le 2-diagramme

$$\begin{tikzcd}
A/b' \simeq (A/b)/(b',y) \arrow[r, "j_{u/b,(b',y)}"] \arrow[d, "p_{A/b'}"'] \arrow[dr, phantom, "\swarrow \alpha_{u/b,(b',y)}"] & A/b \arrow[r, "j_{u,b}"] \arrow[d, "u/b"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{cart}"] & A \arrow[d, "u"] \\
e \arrow[r, "i_{B/b,(b',y)}"'] & B/b \arrow[r, "j_{1_B,b}"'] & B
\end{tikzcd} \quad .$$

$$\mathcal{D}' = \mathcal{D}_{u/b,(b',y)} \qquad\qquad \mathcal{D} = \mathcal{D}^c_{u,b}$$

On vérifie immédiatement que

$$\mathcal{D}^c_{u,b} \circ \mathcal{D}_{u/b,(b',y)} = \mathcal{D}_{u,b'} \quad .$$

On remarque que si $b' = b$ et $y = 1_b$, (b', y) est un objet final de B/b, et les deux lemmes précédents entraînent l'implication $(b) \Rightarrow (a)$.

Pour prouver l'implication $(a) \Rightarrow (b)$, il sufit, en vertu de **Der 2**, de prouver que **Der 4g** implique que pour tout objet $(b', y : b' \to b)$ de B/b, $i^*_{B/b,(b',y)}(c_{\mathcal{D}^c_{u,b}})$ est un isomorphisme. Or, en vertu du lemme 1.5.7, on a

$$c_{\mathcal{D}_{u,b'}} = (c_{\mathcal{D}_{u/b,(b',y)}} \star j^*_{u,b})(i^*_{B/b,(b',y)} \star c_{\mathcal{D}^c_{u,b}}) \quad .$$

Comme **Der 4g** implique que $c_{\mathcal{D}_{u,b'}}$ et $c_{\mathcal{D}_{u/b,(b',y)}}$ sont des isomorphismes, cela démontre l'assertion.

1.5.10. Soit $\mathcal{W}$ une partie de $\mathsf{Fl}(\mathcal{D}ia)$. On dit qu'une flèche $u : A \to B$ de $\mathcal{D}ia$ est $\mathcal{W}$-*asphérique* si pour tout objet b de B, le morphisme $u/b : A/b \to B/b$, induit par u, est dans $\mathcal{W}$. On dit que la flèche u est $\mathcal{W}$-*coasphérique* si la flèche $u^\circ : A^\circ \to B^\circ$ est $\mathcal{W}$-asphérique, autrement dit, si pour tout objet b de B, le morphisme $b\backslash u : b\backslash A \to b\backslash B$, induit par u, est dans $\mathcal{W}$.

Si $\mathbb{D}$ est un prédérivateur de domaine $\mathcal{D}ia$, on dit qu'une flèche $u : A \to B$ de $\mathcal{D}ia$ est $\mathbb{D}$-*asphérique* (resp. $\mathbb{D}$-*coasphérique*) si elle est $\mathcal{W}_{\mathbb{D}}$-asphérique (resp. $\mathcal{W}_{\mathbb{D}}$-coasphérique), où $\mathcal{W}_{\mathbb{D}}$ désigne la partie de $\mathsf{Fl}(\mathcal{D}ia)$ formée des $\mathbb{D}$-équivalences.

Dans la suite on se fixe un prédérivateur $\mathbb{D}$ de domaine $\mathcal{D}ia$ satisfaisant à **Der 2, Der 3g, Der 4g**.

Proposition 1.5.11. *Soit $u : A \to B$ une flèche dans $\mathcal{D}ia$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) *u est $\mathbb{D}$-asphérique ;*

b) *pour tout objet b de B, la catégorie A/b est $\mathbb{D}$-asphérique ;*

c) *le morphisme canonique $p^*_B \to u_*u^*p^*_B = u_*p^*_A$, défini par le morphisme d'adjonction, est un isomorphisme.*

Démonstration. Pour tout objet b de B, on a un triangle commutatif

$$\begin{tikzcd}
A/b \arrow[rr, "u/b"] \arrow[dr, "p_{A/b}"'] & & B/b \arrow[dl, "p_{B/b}"] \\
& e &
\end{tikzcd} \quad ,$$

et comme la catégorie B/b admet un objet final, il résulte des corollaires 1.3.8 et 1.3.6 que u/b est une $\mathbb{D}$-équivalence si et seulement si $p_{A/b}$ l'est, ce qui prouve l'équivalence de (a) et (b).

Montrons l'équivalence de (b) et (c). En vertu de **Der 2**, la condition (c) est satisfaite si et seulement si pour tout objet b de B, le morphisme canonique

$$1_{\mathbb{D}(e)} = i^*_{B,b}p^*_B \longrightarrow i^*_{B,b}u_*u^*p^*_B$$

est un isomorphisme. En vertu de **Der 4g**, on a un isomorphisme

$$i^*_{B,b}u_*u^*p^*_B \xrightarrow{\sim} (p_{A/b})_*j^*_{u,b}u^*p^*_B = (p_{A/b})_*(p_{A/b})^* \quad ,$$

et on vérifie facilement que le triangle

$$\begin{tikzcd}
1_{\mathbb{D}(e)} = i^*_{B,b}p^*_B \arrow[r] \arrow[dr, "\mathrm{adj}"'] & i^*_{B,b}u_*u^*p^*_B \arrow[d, "\wr"] \\
& (p_{A/b})_*(p_{A/b})^*
\end{tikzcd}$$

est commutatif. On en déduit que la condition (c) est satisfaite si et seulement si pour tout objet b de B, le morphisme d'adjonction $1_{\mathbb{D}(e)} \to (p_{A/b})_*(p_{A/b})^*$ est un isomorphisme, autrement dit, si le foncteur $p^*_{A/b}$ est pleinement fidèle, ou encore si A/b est $\mathbb{D}$-asphérique. Cela prouve l'équivalence des conditions (b) et (c).

Corollaire 1.5.12. *Un morphisme $\mathbb{D}$-asphérique est une $\mathbb{D}$-équivalence.*

Démonstration. En effet, en vertu de la proposition précédente, si le morphisme $u : A \to B$ est $\mathbb{D}$-asphérique, le morphisme canonique $p^*_B \to u_*p^*_A$ est un isomorphisme, et il en est donc de même pour

$$p_{B*}p^*_B \longrightarrow p_{B*}u_*p^*_A \simeq p_{A*}p^*_A \quad ,$$

et le corollaire résulte de la proposition 1.5.6.

Proposition 1.5.13. *Soit*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "v"'] & & B \arrow[dl, "w"] \\
& C &
\end{tikzcd}$$

un triangle commutatif dans $\mathcal{D}ia$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) *pour tout objet c de C, le morphisme $u/c : A/c \to B/c$ induit par u est une $\mathbb{D}$-équivalence.*

b) *le morphisme canonique $w_* p_B^* \to v_* p_A^*$, défini par*

$$w_* \star \eta \star p_B^* : w_* p_B^* \longrightarrow w_* u_* u^* p_B^* \simeq v_* p_A^* \quad ,$$

où $\eta : 1_{\mathbb{D}(B)} \to u_* u^*$ désigne le morphisme d'adjonction, est un isomorphisme.

Démonstration. En vertu de **Der 2**, la condition (b) est satisfaite si et seulement si pour tout objet c de C, le morphisme canonique

$$i_{C,c}^* w_* p_B^* \longrightarrow i_{C,c}^* v_* p_A^*$$

est un isomorphisme. En vertu de **Der 4g**, on a des isomorphismes

$$i_{C,c}^* w_* p_B^* \xrightarrow{\sim} (p_{B/c})_* j_{w,c}^* p_B^* = (p_{B/c})_* (p_{B/c})^*$$

et

$$i_{C,c}^* v_* p_A^* \xrightarrow{\sim} (p_{A/c})_* j_{v,c}^* p_A^* = (p_{A/c})_* (p_{A/c})^* \quad ,$$

et on vérifie facilement que le carré

$$\begin{tikzcd}
i_{C,c}^* w_* p_B^* \arrow[r] \arrow[d, "\wr"'] & i_{C,c}^* v_* p_A^* \arrow[d, "\wr"] \\
(p_{B/c})_* (p_{B/c})^* \arrow[r] & (p_{A/c})_* (p_{A/c})^*
\end{tikzcd}$$

est commutatif. L'équivalence de (a) et (b) résulte donc de la proposition 1.5.6.

Corollaire 1.5.14. *Si $\mathcal{D}ia = \mathcal{C}at$, et si $\mathcal{W}_{\mathbb{D}}$ désigne la partie de $\mathsf{Fl}(\mathcal{C}at)$ formée des $\mathbb{D}$-équivalences, alors $(\mathcal{C}at, \mathcal{W}_{\mathbb{D}})$ est un localisateur fondamental fort.*

On appelle *localisateur fondamental fort* un localisateur $(\mathcal{C}at, \mathcal{W})$ satisfaisant aux conditions suivantes :

$a)$ $(\mathcal{C}at, \mathcal{W})$ est faiblement saturé ;

$b)$ si A est une petite catégorie admettant un objet final, alors $p_A : A \to e$ est dans $\mathcal{W}$;

$c)$ Si

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "v"'] & & B \arrow[dl, "w"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

désigne un triangle commutatif de $\mathcal{C}at$, et si pour tout objet c de C, le morphisme $u/c : A/c \to B/c$, induit par u, est dans $\mathcal{W}$, alors u est dans $\mathcal{W}$.

DÉMONSTRATION DU COROLLAIRE. Les propriétés (a) et (b) ont déjà été établies (1.3.6 et 1.3.8). Montrons la propriété (c). En vertu de la proposition précédente, l'hypothèse que pour tout objet c de C, le morphisme u/c est une $\mathbb{D}$-équivalence implique que le morphisme canonique $w_* p_B^* \to v_* p_A^*$ est un isomorphisme. On en déduit qu'il en est de même pour

$$p_{B*} p_B^* \simeq p_{C*} w_* p_B^* \longrightarrow p_{C*} v_* p_A^* \simeq p_{A*} p_A^* \quad ,$$

et il résulte donc de la proposition 1.5.6 que u est une $\mathbb{D}$-équivalence.