LA K-THÉORIE D'UN DÉRIVATEUR TRIANGULÉ

GEORGES MALTSINIOTIS

RÉSUMÉ. On définit la notion de dérivateur triangulé, et on y associe un espace de K-théorie. On énonce quelques conjectures, et on calcule le K_0.

1. Introduction.

Le but de cet article est de présenter un cadre permettant de définir la K-théorie d'une "structure triangulée", avec l'espoir de pouvoir montrer que la K-théorie d'une catégorie exacte coïncide avec la K-théorie de sa "structure triangulée dérivée". L'origine de cette problématique est un théorème de Thomason [Th] affirmant qu'un foncteur exact entre catégories exactes induisant une équivalence des catégories dérivées bornées, induit une équivalence en K-théorie. Ce résultat suggère qu'on puisse peut être reconstruire la K-théorie d'une catégorie exacte à partir de sa catégorie dérivée bornée. Amnon Neeman a défini une K-théorie des catégories triangulées [N1], [N2], [N3] telle que la K-théorie d'une catégorie *abélienne* coïncide avec celle de sa catégorie dérivée bornée. Sa théorie a trois limitations. Il définit une K-théorie uniquement pour les catégories triangulées admettant un certain type de modèles introduits par Thomason [Th] "les catégories de Waldhausen bicompliciales" (biWaldhausen complicial categories), sa définition n'est pas fonctorielle, et il démontre le théorème de comparaison uniquement pour les catégories abéliennes. Pire, Marco Schlichting [S] fournit un contre-exemple qui prouve qu'il n'existe pas de "bonne" K-théorie des catégories triangulées satisfaisant au "théorème" de comparaison pour les catégories exactes. De façon plus précise, il montre qu'il n'existe pas de foncteur $\mathbb{K}$ de la catégorie des catégories triangulées vers celle des "espaces" satisfaisant aux deux conditions suivantes.

a) (Localisation.) Si $\mathcal{A} \to \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ est une suite exacte de catégories triangulées, alors $\mathbb{K}(\mathcal{A}) \to \mathbb{K}(\mathcal{B}) \to \mathbb{K}(\mathcal{C})$ identifie l'espace $\mathbb{K}(\mathcal{A})$ à la fibre homotopique de $\mathbb{K}(\mathcal{B}) \to \mathbb{K}(\mathcal{C})$.

b) (Comparaison.) Pour toute catégorie exacte $\mathcal{E}$, l'espace $\mathsf{K}(\mathcal{E})$ de K-théorie de $\mathcal{E}$ est isomorphe dans la catégorie homotopique à $\mathbb{K}(\mathsf{D}^b(\mathcal{E}))$, où $\mathsf{D}^b(\mathcal{E})$ désigne la catégorie dérivée bornée de $\mathcal{E}$.

Pour obtenir une théorie satisfaisante, il semble donc qu'il faille modifier la notion de catégorie triangulée en la remplaçant par une structure plus riche. Dans cet article, on opte pour celle de dérivateur triangulé, en suivant pour cela la philosophie de Grothendieck. La première fois où la notion, et le mot, de dérivateur apparaît est dans la "Poursuite des champs" [PS], lettre de plus de six cent pages, d'Alexandre Grothendieck à Quillen, datant de 1983. Le premier à avoir publié une axiomatique de cette théorie est Alex Heller dans "Homotopy theories" [H], où les dérivateurs sont appelés "théories homotopiques". À peu près à la même époque, Grothendieck est en train de rédiger un manuscrit de près de 2000 pages : "Les Dérivateurs" [Der], [M1], dont on peut estimer l'achèvement en 1990. Dans sa thèse "Derived categories and universal problems" [K], Bernhard Keller développe une notion proche, dans le cadre des catégories triangulées, qu'il appelle "tour de catégories triangulées".

Plus récemment, en 1996, également dans le cadre triangulé, Jens Franke développe une notion qu'il appelle "système de catégories triangulées de diagrammes" [F]. La notion de dérivateur triangulé introduite dans cet article est très proche de celle de Franke, mais la présentation adoptée ici permet de mieux comprendre le passage du cas non additif au cas triangulé. Elle est obtenue en ajoutant aux axiomes définissant un dérivateur ponctué de Grothendieck, deux autres inspirés du texte de Franke.

Assez rapidement, après l'introduction par Verdier [V] de la notion de catégorie triangulée comme cadre de l'algèbre homologique, on s'est aperçu que ce cadre était insuffisant. Par exemple, la structure de catégorie triangulée ne permet pas de définir les limites et colimites homotopiques, et la catégorie dérivée d'une catégorie abélienne, munie de sa seule structure de catégorie triangulée ne possède pas une propriété universelle. Pour pallier ces insuffisances, Grothendieck propose [PS] de remplacer la donnée de la catégorie dérivée d'une catégorie abélienne par la donnée des toutes les catégories dérivées des catégories des diagrammes à valeurs dans la catégorie abélienne. On obtient ainsi un 2-foncteur de la catégorie des petites catégories vers celle des catégories, satisfaisant un certain nombre de propriétés. Un dérivateur triangulé est un 2-foncteur satisfaisant à ces propriétés.

Ce texte n'est pas destiné à être une introduction à la théorie des dérivateurs. Le lecteur intéressé peut consulter pour cela [Der], [M1], [M2]. Dans les paragraphes 2 et 3, on présente la définition d'un dérivateur triangulé, et quelques propriétés utiles pour la suite. Le paragraphe 4 est consacré à la définition de la K-théorie d'un dérivateur triangulé, et le paragraphe 5 à l'énoncé des conjectures. Dans le paragraphe 6, on calcule le K_0 d'un dérivateur triangulé, et on en déduit la conjecture de comparaison pour le K_0. Le paragraphe 7, plus technique, sert à démontrer un lemme de strictification permettant de simplifier l'étude de la K-théorie. Dans un appendice, Bernhard Keller associe à une catégorie exacte un "dérivateur triangulé dérivé".

2. Dérivateurs triangulés.

On désigne par $\mathcal{C}at$ à la fois la 2-catégorie des petites catégories, et sa 1-catégorie sous-jacente, autrement dit, la catégorie des petites catégories. On note $\varnothing$ la catégorie vide, et e la catégorie ponctuelle (n'ayant qu'un seul objet et comme seule flèche l'identité de cet objet). Si A est une petite catégorie, on note $\mathsf{Ob}(A)$ l'ensemble de ses objets, $\mathsf{Fl}(A)$ l'ensemble de ses flèches, et A° sa catégorie opposée. Si A et B sont deux petites catégories, $\underline{\mathsf{Hom}}(A,B)$ désigne la catégorie des foncteurs de A vers B. Si $u : A \to B$ est un foncteur, et si b est un objet de B, on désigne par A/b la catégorie dont les objets sont les couples (a,f), où a est un objet de A et $f : u(a) \to b$ une flèche de B, un morphisme de (a,f) vers (a',f') étant une flèche $g : a \to a'$ de A, telle que $f = f'u(g)$, la loi de composition étant induite par celle de A. Dualement, on définit $b\backslash A$ par $b\backslash A = (A^\circ/b)^\circ$. On a alors des foncteurs d'oubli canoniques $A/b \to A$ et $b\backslash A \to A$ définis par $(a,f) \mapsto a$, et on vérifie que les carrés suivants sont cartésiens.

$$
\begin{tikzcd}
A/b \arrow[r] \arrow[d, "u/b"'] & A \arrow[d, "u"] \\
B/b \arrow[r] & B
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
b\backslash A \arrow[r] \arrow[d, "b\backslash u"'] & A \arrow[d, "u"] \\
b\backslash B \arrow[r] & B
\end{tikzcd}
$$

Une *catégorie de diagrammes* est une 2-sous-catégorie pleine [1] $\mathcal{D}ia$ de la 2-catégorie des petites catégories $\mathcal{C}at$ satisfaisant aux axiomes suivants.

Dia 0 *Toute catégorie associée à un ensemble ordonné fini est dans* $\mathcal{D}ia$.

Dia 1 $\mathcal{D}ia$ *est stable par sommes finies et par produits fibrés.*

Dia 2 *Pour toute petite catégorie* A *dans* $\mathcal{D}ia$, *et tout objet* a *de* A, *la catégorie* A/a *est dans* $\mathcal{D}ia$.

Dia 3 $\mathcal{D}ia$ *est stable par passage à la catégorie opposée.*

En vertu de **Dia 0**, la catégorie ponctuelle e est dans $\mathcal{D}ia$, et **Dia 1** implique donc que $\mathcal{D}ia$ est stable par limites projectives finies. On démontre qu'en présence de **Dia 1**, pour avoir **Dia 0**, il suffit de supposer que la catégorie ponctuelle e et la catégorie Δ_1 associée à l'ensemble ordonné $\{0 < 1\}$ sont dans $\mathcal{D}ia$. Les conditions **Dia 1** et **Dia 2** impliquent que pour tout foncteur $u : A \to B$ dans $\mathcal{D}ia$, et pour tout objet b de B, la catégorie A/b est dans $\mathcal{D}ia$, et l'axiome **Dia 3** que $b\backslash A$ aussi.

Les exemples les plus importants de catégories de diagrammes sont la 2-catégorie $\mathcal{C}at$ toute entière, et les sous-2-catégories pleines $\mathcal{C}at_f$, $\mathcal{O}rd$, $\mathcal{O}rd_f$, et $\mathcal{D}ir_f$ de $\mathcal{C}at$ formées des catégories finies, des catégories associées à un ensemble ordonné, des catégories associées à un ensemble ordonné fini, et des catégories directes finies [2] respectivement.

Soit $\mathcal{D}ia$ une catégorie de diagrammes. Un *dérivateur triangulé* $\mathbb{D}$ *de domaine* $\mathcal{D}ia$ est un 2-foncteur strict contravariant

$$\mathcal{D}ia^{\circ} \longrightarrow \mathcal{C}at \quad ,$$

associant à un objet I de $\mathcal{D}ia$ une catégorie $\mathbb{D}(I)$, à une flèche $u : I \to J$ de $\mathcal{D}ia$ un foncteur $u^* : \mathbb{D}(J) \to \mathbb{D}(I)$, et à une 2-flèche

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, bend left, "u"] \arrow[r, bend right, "v"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & J \end{tikzcd} \quad ,$$

de $\mathcal{D}ia$ un morphisme de foncteurs $\alpha^* : v^* \to u^*$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{D}(I) \arrow[r, phantom, "\alpha^*\Uparrow"] & \mathbb{D}(J) \arrow[l, bend right, "u^*"'] \arrow[l, bend left, "v^*"] \end{tikzcd} \quad ,$$

de façon compatible aux identités et aux diverses compositions, et satisfaisant aux axiomes suivants **Der 1** - **Der 7**.

Der 1 a) *Si* I, J *sont dans* $\mathcal{D}ia$, *alors*

$$\mathbb{D}(I \amalg J) \xrightarrow{(i^*, j^*)} \mathbb{D}(I) \times \mathbb{D}(J) \quad ,$$

où $i : I \to I \amalg J$, $j : J \to I \amalg J$ *désignent les foncteurs canoniques, est une équivalence de catégories.*

b) *La catégorie* $\mathbb{D}(\varnothing)$ *est équivalente à la catégorie ponctuelle* e.

[1] Dans le sens le plus fort : si A et B sont deux petites catégories objets de $\mathcal{D}ia$, tout foncteur de A vers B est une 1-flèche de $\mathcal{D}ia$, et tout morphisme de foncteurs de A vers B est une 2-flèche de $\mathcal{D}ia$.

[2] On rappelle qu'une catégorie directe finie est une catégorie finie sans cycles non triviaux, ou de façon équivalente une catégorie C telle que le graphe orienté, dont les sommets sont les objets de C, et dont les arêtes sont les flèches non identiques de C, engendre une catégorie finie, ou encore une catégorie C dont le nerf est un ensemble simplicial fini.

Notations. Pour toute petite catégorie A, et tout objet a de A, on désigne par $i_{A,a} : e \longrightarrow A$ le foncteur de la catégorie ponctuelle e vers A défini par l'objet a de A. Quand aucune ambiguïté n'en résulte, ce foncteur sera noté $a : e \longrightarrow A$.

Der 2 *Pour tout A dans $\mathcal{D}ia$, la famille des foncteurs $i^*_{A,a} : \mathbb{D}(A) \longrightarrow \mathbb{D}(e)$, $a \in \mathsf{Ob}(A)$, est conservative, autrement dit, pour qu'un morphisme f de $\mathbb{D}(A)$ soit un isomorphisme, il suffit que pour tout objet a de A, $i^*_{A,a}(f)$ soit un isomorphisme de $\mathbb{D}(e)$.*

Notations et terminologie. Pour tout A dans $\mathcal{D}ia$, si F est un objet de $\mathbb{D}(A)$, on pose $F_a = i^*_{A,a}(F)$, et si $\varphi : F \longrightarrow F'$ est un morphisme de $\mathbb{D}(A)$, on pose $\varphi_a = i^*_{A,a}(\varphi) : F_a \longrightarrow F'_a$. On dit que l'objet F_a de $\mathbb{D}(e)$ est la *fibre* de F en a, et que $\varphi_a : F_a \longrightarrow F'_a$ est le *morphisme induit dans les fibres par* φ.

L'axiome ci-dessus affirme donc que, pour tout A dans $\mathcal{D}ia$, toute flèche $\varphi : F \longrightarrow F'$ de $\mathbb{D}(A)$ induisant, pour tout objet a de A, un isomorphisme dans les fibres, est un isomorphisme.

Der 3 *Pour tout $u : A \longrightarrow B$ dans $\mathcal{D}ia$, le foncteur $u^* : \mathbb{D}(B) \longrightarrow \mathbb{D}(A)$ admet un adjoint à droite noté $u_* : \mathbb{D}(A) \longrightarrow \mathbb{D}(B)$, et un adjoint à gauche noté $u_! : \mathbb{D}(A) \longrightarrow \mathbb{D}(B)$.*

Notations et terminologie. Pour tout "2-carré" dans $\mathcal{D}ia$,

$$\mathcal{D} \;=\; \begin{tikzcd} A' \arrow[r, "v"] \arrow[d, "u'"'] \arrow[dr, phantom, "\swarrow\alpha"] & A \arrow[d, "u"] \\ B' \arrow[r, "w"'] & B \end{tikzcd} \qquad\qquad \alpha : uv \longrightarrow wu' \quad ,$$

si l'on note

$$\varepsilon : u^*u_* \longrightarrow 1_{\mathbb{D}(A)} \quad , \qquad \eta : 1_{\mathbb{D}(B)} \longrightarrow u_*u^* \quad ,$$
$$\varepsilon' : u'^*u'_* \longrightarrow 1_{\mathbb{D}(A')} \quad , \qquad \eta' : 1_{\mathbb{D}(B')} \longrightarrow u'_*u'^*$$

les morphismes d'adjonction, on déduit un morphisme $c_{\mathcal{D}} : w^*u_* \longrightarrow u'_*v^*$ défini par $c_{\mathcal{D}} = (u'_*v^* \star \varepsilon)(u'_* \star \alpha^* \star u_*)(\eta' \star w^*u_*)$,

$$\begin{tikzcd} w^*u_* \arrow[rr, "c_{\mathcal{D}}"] \arrow[d, "\eta'\star w^*u_*"'] & & u'_*v^* \\ u'_*u'^*w^*u_* \arrow[d, equal] & & u'_*v^*u^*u_* \arrow[u, "u'_*v^*\star\varepsilon"'] \arrow[d, equal] \\ u'_*(wu')^*u_* \arrow[rr, "u'_*\star\alpha^*\star u_*"'] & & u'_*(uv)^*u_* \end{tikzcd}$$

appelé *morphisme de changement de base*. Dualement, on définit un morphisme $c'_{\mathcal{D}} : v_!u'^* \longrightarrow u^*w_!$, "transposé" du précédent.

Pour toute petite catégorie A, on note $p_A : A \longrightarrow e$ l'unique foncteur de A vers la catégorie ponctuelle e. Si A est dans $\mathcal{D}ia$, et si F est un objet de $\mathbb{D}(A)$, on pose

$$\underleftarrow{\mathrm{holim}}\, F = p_{A*}(F) \qquad \text{et} \qquad \underrightarrow{\mathrm{holim}}\, F = p_{A!}(F) \quad ,$$

et on dit que l'objet $\underleftarrow{\mathrm{holim}}\, F$ de $\mathbb{D}(e)$ est la *limite projective homotopique* de F, et que $\underrightarrow{\mathrm{holim}}\, F$ en est la *limite inductive homotopique*. Soit $u : A \longrightarrow B$ dans $\mathcal{D}ia$, et soient b un objet de B et F un objet de $\mathbb{D}(A)$. On note $F\,|\,A/b$ (resp. $F \mid b\backslash A$) l'objet $j^*(F)$ de $\mathbb{D}(A/b)$ (resp. de $\mathbb{D}(b\backslash A)$), où j désigne le foncteur d'oubli

$$A/b \longrightarrow A \qquad (\text{resp.} \quad b\backslash A \longrightarrow A\ ) \ .$$

En considérant les "2-carrés"

$$\begin{tikzcd} A/b \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\swArrow_{\alpha}"] & A \arrow[d, "u"] \\ e \arrow[r, "b"'] & B \end{tikzcd} \qquad \text{et} \qquad \begin{tikzcd} b\backslash A \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "{}^{\alpha'}\!\nearrow"] & A \arrow[d, "u"] \\ e \arrow[r, "b"'] & B \end{tikzcd} \quad ,$$

où les morphismes de foncteurs α et α' sont définis par

$$\alpha_{(a,f)} = f \quad , \qquad (a, f : u(a) \to b) \in \mathsf{Ob}(A/b) \quad ,$$
$$\alpha'_{(a,g)} = g \quad , \qquad (a, g : b \to u(a)) \in \mathsf{Ob}(b\backslash A) \quad ,$$

on déduit des morphismes canoniques de changement de base

$$(u_* F)_b \longrightarrow \varprojlim\nolimits_{\mathrm{ho}}(F \mid A/b) \qquad \text{et} \qquad \varinjlim\nolimits_{\mathrm{ho}}(F \mid b\backslash A) \longrightarrow (u_! F)_b \quad .$$

Der 4 *Pour tout $u : A \to B$ dans $\mathcal{D}ia$, tout objet b de B, et tout objet F de $\mathbb{D}(A)$, les morphismes canoniques*

$$(u_* F)_b \longrightarrow \underleftarrow{\mathrm{holim}}(F \mid A/b) \qquad \textit{et} \qquad \underrightarrow{\mathrm{holim}}(F \mid b\backslash A) \longrightarrow (u_! F)_b$$

sont des isomorphismes.

Commentaire. L'axiome **Der 4** signifie que les adjoints u_* et $u_!$ "se calculent" de façon analogue aux extensions de Kan usuelles.

Notations. Soient I et J dans $\mathcal{D}ia$. On définit un foncteur

$$\mathbb{D}(I \times J) \xrightarrow{\mathsf{dia}_{I,J}} \underline{\mathsf{Hom}}(I^\circ, \mathbb{D}(J))$$

(où $\underline{\mathsf{Hom}}(I^\circ, \mathbb{D}(J))$ désigne la catégorie des foncteurs de I° vers $\mathbb{D}(J)$) comme suit. Soit

$$\begin{aligned} I &\longrightarrow \underline{\mathsf{Hom}}(J, I \times J) \\ i &\longmapsto (j \mapsto (i,j)) \quad , \end{aligned}$$

on en déduit par composition

$$I^\circ \longrightarrow \underline{\mathsf{Hom}}(J, I \times J)^\circ \xrightarrow{\mathbb{D}} \underline{\mathsf{Hom}}(\mathbb{D}(I \times J), \mathbb{D}(J)) \quad ,$$

et par adjonction

$$I^\circ \times \mathbb{D}(I \times J) \longrightarrow \mathbb{D}(J) \quad .$$

Par une nouvelle adjonction, on déduit le foncteur

$$\mathbb{D}(I \times J) \xrightarrow{\mathsf{dia}_{I,J}} \underline{\mathsf{Hom}}(I^\circ, \mathbb{D}(J)) \quad .$$

Quand J est la catégorie ponctuelle e, le foncteur $\mathsf{dia}_{I,e}$ est noté plus simplement

$$\mathsf{dia}_I : \mathbb{D}(I) \simeq \mathbb{D}(I \times e) \longrightarrow \underline{\mathsf{Hom}}(I^\circ, \mathbb{D}(e)) \quad ,$$

et pour un objet F de $\mathbb{D}(I)$, on pose, quand aucune confusion n'en résulte,

$$\mathsf{dia}(F) = \mathsf{dia}_I(F) : I^\circ \to \mathbb{D}(e) \quad ,$$

et on dit que $\mathsf{dia}(F)$ est le *diagramme sous-jacent* à F. On remarque que pour tout objet i de I, $\mathsf{dia}(F)(i) = F_i$ est la fibre de F en i. Ainsi une formulation équivalente de l'axiome **Der 2** ci-dessus est que pour tout I dans $\mathcal{D}ia$, le foncteur dia_I est conservatif.

Der 5 *Pour tout A dans $\mathcal{D}ia$, le foncteur*

$$\mathsf{dia}_{\Delta_1, A} : \mathbb{D}(\Delta_1 \times A) \longrightarrow \underline{\mathsf{Hom}}(\Delta_1^\circ, \mathbb{D}(A)) \quad ,$$

où Δ_1 désigne la catégorie $\{0 \to 1\}$, est plein et essentiellement surjectif.

Der 6 (Axiome de dérivateur pointé.) *Si $u : A \to B$ est une immersion fermée* (un cocrible) (resp. *ouverte* (un crible)) *dans $\mathcal{D}ia$, alors u_** (resp. $u_!$) *admet un adjoint à droite $u^!$* (resp. *à gauche $u^?$*). [3]

Notations et terminologie. On note $\square$ la catégorie $\Delta_1^\circ \times \Delta_1^\circ$, et $\ulcorner$, $\lrcorner$ les sous-catégories

$$\begin{tikzcd} (0,0) & (0,1) \arrow[l] \\ (1,0) \arrow[u] & \end{tikzcd} \quad , \quad \begin{tikzcd} & (0,1) \\ (1,0) & (1,1) \arrow[l] \arrow[u] \end{tikzcd}$$

de $\square$, et $i_\ulcorner : \ulcorner \to \square$, $i_\lrcorner : \lrcorner \to \square$ les foncteurs d'inclusion. On dit qu'un objet F de $\mathbb{D}(\square)$ est *homotopiquement cartésien* (resp. *homotopiquement cocartésien*), ou plus simplement, quand aucune confusion n'en résulte, *cartésien* (resp. *cocartésien*), si le morphisme d'adjonction

$$F \longrightarrow i_{\lrcorner *} i_\lrcorner^* F \qquad (\text{resp. } i_{\ulcorner !} i_\ulcorner^* F \to F\,)$$

est un isomorphisme.

Der 7 (Axiome de dérivateur triangulé.) *Un objet F de $\mathbb{D}(\square)$ est homotopiquement cartésien si et seulement si il est homotopiquement cocartésien* (on dira alors parfois qu'il est *homotopiquement bicartésien*, ou plus simplement *bicartésien*).

Commentaires. Les axiomes **Der 1** - **Der 4** définissent la notion de *dérivateur* au sens de Grothendieck, et si l'on ajoute l'axiome **Der 6** (qui implique que les catégories $\mathbb{D}(I)$ admettent des objets nuls), on obtient sa notion de *dérivateur pointé* [Der]. L'axiome **Der 5** est une version affaiblie d'un axiome de Heller qui demande que pour toute catégorie finie libre I dans $\mathcal{D}ia$ et tout J dans $\mathcal{D}ia$, le foncteur $\mathsf{dia}_{I,J}$ soit plein et essentiellement surjectif [H]. L'axiome **Der 7** a été introduit par Franke [F]. La philosophie des dérivateurs est de considérer que le 2-foncteur $\mathbb{D} : \mathcal{D}ia^\circ \to \mathcal{C}at$ constitue une "structure" sur la catégorie $\mathbb{D}(e)$, appelée la *catégorie fondamentale* du dérivateur $\mathbb{D}$.

Quelques conséquences des axiomes. Pour tout dérivateur $\mathbb{D}$ de domaine $\mathcal{D}ia$, les axiomes **Der 1** et **Der 3** impliquent aussitôt que pour tout I dans $\mathcal{D}ia$, la catégorie $\mathbb{D}(I)$ admet des sommes finies et des produits finis, et en particulier un objet initial et un objet final. Il résulte facilement des axiomes **Der 2**, **Der 3**, et **Der 4** que si un foncteur $u : I \to J$ dans $\mathcal{D}ia$ est pleinement fidèle, alors il en est de même des foncteurs u_* et $u_!$, autrement dit, les morphismes d'adjonction $u^*u_* \to 1_{\mathbb{D}(I)}$ et $1_{\mathbb{D}(I)} \to u^*u_!$ sont des isomorphismes, et que si en outre u est un cocrible (resp. un crible), alors pour tout objet F de $\mathbb{D}(I)$, et tout objet j de J n'appartenant pas à l'image de I, la fibre en j de $u_*(F)$ (resp. $u_!(F)$) est un objet final (resp. initial) de $\mathbb{D}(e)$, et pour tout carré cartésien dans $\mathcal{D}ia$ de la forme

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "v"] \arrow[d, "u'"'] & A \arrow[d, "u"] \\ B' \arrow[r, "w"'] & B \end{tikzcd} \quad ,$$

les morphismes de changement de base

$$v_! u'^* \longrightarrow u^* w_! \qquad \text{et} \qquad w^* u_* \longrightarrow u'_* v^*$$

$$(\text{resp.} \quad u^* w_* \longrightarrow v_* u'^* \qquad \text{et} \qquad u'_! v^* \longrightarrow w^* u_! \quad)$$

[3]On rappelle qu'un crible (resp. cocrible) d'une catégorie B est une sous-catégorie pleine A de B, telle que pour objet a de A et tout objet b de B, s'il existe une flèche $b \to a$ (resp. $a \to b$) de B, alors b est dans A.

sont des isomorphismes. Pour un dérivateur triangulé, on démontre le théorème suivant :

Théorème 1. *Pour tout dérivateur triangulé $\mathbb{D}$ de domaine $\mathcal{D}ia$, et tout A dans $\mathcal{D}ia$, la catégorie $\mathbb{D}(A)$ est canoniquement une catégorie triangulée, et pour tout $u : A \to B$ dans $\mathcal{D}ia$, le foncteur $u^* : \mathbb{D}(B) \to \mathbb{D}(A)$ est un foncteur exact pour les structures canoniques de catégorie triangulée sur $\mathbb{D}(A)$ et $\mathbb{D}(B)$.*

Ce théorème résulte facilement d'un théorème plus général valable pour un dérivateur pointé arbitraire [M2]. Il peut également être obtenu par une adaptation de la preuve du théorème correspondant de Franke [F]. Dans le paragraphe suivant, on donnera une description de la structure de catégorie triangulée sur la catégorie $\mathbb{D}(e)$.

Exemple. Soit $\mathcal{E}$ une catégorie exacte. Pour toute petite catégorie I, la catégorie $\underline{\mathsf{Hom}}(I^\circ, \mathcal{E})$ est une catégorie exacte, en définissant les monomorphismes (resp. épimorphismes) admissibles argument par argument.

Théorème 2. *Il existe un dérivateur triangulé $\mathbb{D}_{\mathcal{E}}$ de domaine $\mathcal{D}ia = \mathcal{D}ir_f$, où $\mathcal{D}ir_f$ désigne la sous-2-catégorie 2-pleine de $\mathcal{C}at$ formée des catégories directes finies, tel que pour tout I dans $\mathcal{D}ia$, $\mathbb{D}(I)$ soit la catégorie dérivée bornée $\mathsf{D}^b\,\underline{\mathsf{Hom}}(I^\circ, \mathcal{E})$ de la catégorie exacte $\underline{\mathsf{Hom}}(I^\circ, \mathcal{E})$.*

Ce théorème est démontré dans un appendice par Bernhard Keller.

3. La description de la structure de catégorie triangulée.

Dans ce paragraphe, on se fixe un dérivateur triangulé $\mathbb{D}$ de domaine $\mathcal{D}ia$.

Soit I une petite catégorie appartenant à $\mathcal{D}ia$. Comme $\mathcal{D}ia$ est stable par produits binaires, on définit un 2-foncteur

$$\mathbb{D}_I : \mathcal{D}ia^\circ \to \mathcal{C}at \quad , \qquad J \mapsto \mathbb{D}(I \times J) \quad ,$$

et on vérifie que $\mathbb{D}_I$ est un dérivateur triangulé, appelé le *dérivateur triangulé induit par $\mathbb{D}$ sur I*. On remarque qu'on a $\mathbb{D}_I(e) = \mathbb{D}(I \times e) \simeq \mathbb{D}(I)$, autrement dit, la catégorie fondamentale du dérivateur $\mathbb{D}_I$ est la catégorie $\mathbb{D}(I)$. Ainsi pour décrire la structure de catégorie triangulée sur les catégories $\mathbb{D}(I)$, il suffit de décrire celle de $\mathbb{D}(e)$.

Notons

$$i_0 : e \longrightarrow \ulcorner \quad , \qquad i_1 : e \longrightarrow \square$$

les foncteurs $i_{\ulcorner,(0,0)}$, $i_{\square,(1,1)}$ définis par les objets $(0,0)$ et $(1,1)$ de $\ulcorner$ et $\square$ respectivement. Le foncteur de *suspension* $S : \mathbb{D}(e) \to \mathbb{D}(e)$ est défini par $S = i_1^*\, i_{\ulcorner !}\, i_{0*}$. Les axiomes **Der 1** - **Der 4** et **Der 6** d'un dérivateur pointé impliquent que pour tout objet X de $\mathbb{D}(e)$, l'objet $S(X)$ de $\mathbb{D}(e)$ est muni d'une structure de cogroupe, fonctorielle en X, et l'axiome **Der 7** implique que S est une auto-équivalence de la catégorie $\mathbb{D}(e)$. En particulier, on en déduit que $\mathbb{D}(e)$ est une catégorie additive [M2]. On remarque que pour tout objet X de $\mathbb{D}(e)$, l'objet $i_{\ulcorner !}\, i_{0*}X$ de $\mathbb{D}(\square)$ est homotopiquement bicartésien, et les diagrammes sous-jacent à $i_{0*}X$ et $i_{\ulcorner !}\, i_{0*}X$ sont

$$\mathsf{dia}(i_{0*}X) \simeq \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \\ 0 & & \end{array} \quad ,$$

et

$$\mathsf{dia}(i_{\ulcorner !}\, i_{0*}X) \simeq \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & S(X) \end{array} \quad ,$$

où 0 désigne l'objet nul de $\mathbb{D}(e)$ (quitte à remplacer $\mathbb{D}(e)$ par une catégorie équivalente, on peut supposer, pour simplifier, que l'objet nul est unique).

On note Δ_m la catégorie

$$\Delta_m = \{0 \to 1 \to 2 \to \cdots \to m\} \quad .$$

On dit qu'un objet F de $\mathbb{D}(\Delta_m^\circ \times \Delta_n^\circ)$ est *homotopiquement polycartésien*, ou plus simplement, quand aucune confusion n'en résulte, *polycartésien*, si pour tous k_0, k_1, l_0, l_1, $0 \leq k_0 \leq k_1 \leq m$, $0 \leq l_0 \leq l_1 \leq n$, si l'on note

$$i : \square \longrightarrow \Delta_m^\circ \times \Delta_n^\circ$$

le foncteur défini par

$$i(\varepsilon, \eta) = (k_\varepsilon, l_\eta) \quad , \qquad \varepsilon, \eta = 0, 1 \ ,$$

l'objet i^*F de $\mathbb{D}(\square)$ est homotopiquement bicartésien. On démontre qu'il suffit que cette condition soit satisfaite pour les "petits carrés" non triviaux, autrement dit, quand $k_1 = k_0 + 1$ et $l_1 = l_0 + 1$.

Un *triangle* dans $\mathbb{D}(e)$ est un diagramme de la forme

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} S(X) \quad ,$$

et on a une notion évidente de *morphisme* et *d'isomorphisme* de triangles. Soit F un objet homotopiquement polycartésien de $\mathbb{D}(\Delta_1^\circ \times \Delta_2^\circ)$ tel que les fibres de F en $(1,0)$ et en $(0,2)$ soient nulles, de sorte que le diagramme sous-jacent à F soit de la forme

$$\mathsf{dia}(F) \ = \ \begin{tikzcd} F_{00} \arrow[r, "f_0"] \arrow[d] & F_{01} \arrow[r] \arrow[d, "f_1"] & 0 \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] & F_{11} \arrow[r, "f_2"'] & F_{12} \end{tikzcd} \quad .$$

On a un foncteur $i : \square \to \Delta_1^\circ \times \Delta_2^\circ$

$$(0,0) \mapsto (0,0) \ , \quad (0,1) \mapsto (0,2) \ , \quad (1,0) \mapsto (1,0) \ , \quad (1,1) \mapsto (1,2) \ ,$$

et par définition d'un objet polycartésien, $i^*(F)$ est un objet homotopiquement bicartésien de $\mathbb{D}(\square)$. On remarque que

$$\mathsf{dia}(i^*(F)) \ = \ \begin{tikzcd} F_{00} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] & F_{12} \end{tikzcd} \quad ,$$

ce qui implique par **Der 2** que le morphisme d'adjonction

$$i_\ulcorner^* \, i^*(F) \longrightarrow i_{0*} \, i_0^* \, i_\ulcorner^* \, i^*(F) = i_{0*}(F_{00})$$

(où $i_0 = i_{\ulcorner,(0,0)}$) est un isomorphisme. Comme $i^*(F)$ est en particulier un objet homotopiquement cocartésien de $\mathbb{D}(\square)$, le morphisme d'adjonction

$$i_{\ulcorner !} \, i_\ulcorner^* \, i^*(F) \longrightarrow i^*(F)$$

est aussi un isomorphisme. On en déduit des isomorphismes

$$F_{12} = i_1^* \, i^*(F) \xleftarrow{\ \sim\ } i_1^* \, i_{\ulcorner !} \, i_\ulcorner^* \, i^*(F) \xrightarrow{\ \sim\ } i_1^* \, i_{\ulcorner !} \, i_{0*}(F_{00}) = S(F_{00})$$

(où $i_1 = i_{\square,(1,1)}$), d'où un isomorphisme $\theta : F_{12} \xrightarrow{\sim} S(F_{00})$, et un triangle

$$F_{00} \xrightarrow{f_0} F_{01} \xrightarrow{f_1} F_{11} \xrightarrow{\theta f_2} S(F_{00}) \quad .$$

On dit qu'un triangle ainsi obtenu, à partir d'un objet homotopiquement polycartésien de $\mathbb{D}(\Delta_1^\circ \times \Delta_2^\circ)$, est un *triangle distingué standard.* Par définition, un *triangle distingué* est un triangle isomorphe à un triangle distingué standard. Le théorème 1 affirme donc que la catégorie additive $\mathbb{D}(e)$, munie de la suspension S et de la classe des triangles distingués ainsi définis, est une catégorie triangulée.

4. La K-théorie d'un dérivateur triangulé.

On note $\mathbf{\Delta}$ la catégorie des simplexes, qu'on identifie à la sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}at$ formée des catégories Δ_m, $m \geq 0$, et $\widehat{\mathbf{\Delta}}$ la catégorie des préfaisceaux sur $\mathbf{\Delta}$, autrement dit, celle des ensembles simpliciaux. Soit $\mathbb{D}$ un dérivateur triangulé de domaine $\mathcal{D}ia$. On définit un objet bisimplicial $X(\mathbb{D})$ de $\mathcal{C}at$ par le composé

$$\mathbf{\Delta}^\circ \times \mathbf{\Delta}^\circ \hookrightarrow \mathcal{D}ia^\circ \xrightarrow{\mathbb{D}} \mathcal{C}at \xrightarrow{\mathcal{I}so} \mathcal{C}at \ , \quad X(\mathbb{D})_{m,n} = \mathcal{I}so(\mathbb{D}(\Delta_m^\circ \times \Delta_n^\circ)) \ ,$$

où $\mathcal{I}so$ désigne le foncteur associant à une catégorie C la catégorie ayant les mêmes objets que C, et comme flèches les isomorphismes de C. On remarque que si pour tous m, n, on note $Q(\mathbb{D})_{m,n}$ la sous-catégorie pleine de $X(\mathbb{D})_{m,n}$ formée des objets homotopiquement polycartésiens de $\mathbb{D}(\Delta_m^\circ \times \Delta_n^\circ)$, alors $Q(\mathbb{D})$ est une sous-catégorie bisimpliciale de $X(\mathbb{D})$. Notons $\delta : \mathbf{\Delta} \longrightarrow \mathbf{\Delta} \times \mathbf{\Delta} \times \mathbf{\Delta}$ le morphisme diagonal, et $N : \mathcal{C}at \longrightarrow \widehat{\mathbf{\Delta}}$ le foncteur nerf. Alors $\delta^* NQ(\mathbb{D})$ est un ensemble simplicial dont les 0-simplexes sont exactement les objets de $\mathbb{D}(\Delta_0^\circ \times \Delta_0^\circ) \simeq \mathbb{D}(e)$, où e désigne la catégorie ponctuelle. Ainsi, $\delta^* NQ(\mathbb{D})$ est un ensemble simplicial pointé par l'objet nul de $\mathbb{D}(e)$.

Définition.[4] On pose

$$\mathsf{K}_n(\mathbb{D}) = \pi_{n+1}(\delta^* NQ(\mathbb{D})) = \pi_n(\Omega\delta^* NQ(\mathbb{D})) \quad .$$

Proposition 1. *On a un isomorphisme canonique* $\mathsf{K}_0(\mathbb{D}) \simeq \mathsf{K}_0(\mathbb{D}(e))$.

En vertu du théorème 1, $\mathbb{D}(e)$ est une catégorie triangulée, et $\mathsf{K}_0(\mathbb{D}(e))$ désigne le K_0 de $\mathbb{D}(e)$ en tant que catégorie triangulée. Cette proposition sera démontrée au paragraphe 6.

Soient $\mathbb{D}$ et $\mathbb{D}'$ deux dérivateurs triangulés de domaine $\mathcal{D}ia$. Une *équivalence de dérivateurs triangulés* de $\mathbb{D}$ vers $\mathbb{D}'$ est un morphisme de 2-foncteurs $\varphi : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}'$ tel que pour tout objet A de $\mathcal{D}ia$, le foncteur $\varphi_A : \mathbb{D}(A) \longrightarrow \mathbb{D}'(A)$ soit une équivalence de catégories. On en déduit alors un morphisme de catégories bisimpliciales $Q(\varphi) : Q(\mathbb{D}) \longrightarrow Q(\mathbb{D}')$.

Proposition 2. *Si φ est une équivalence de dérivateurs triangulés, le morphisme $Q(\varphi)$ induit une équivalence d'homotopie des espaces correspondants. En particulier, on a des isomorphismes de groupes* $\mathsf{K}_n(\mathbb{D}) \simeq \mathsf{K}_n(\mathbb{D}')$, $n \geq 0$.

Cette proposition découle aussitôt des définitions. Elle permet, en particulier, de supposer, pour toute question concernant la K-théorie d'un dérivateur triangulé $\mathbb{D}$, que la catégorie fondamentale $\mathbb{D}(e)$ possède un *unique* objet nul 0 (et de même les catégories $\mathbb{D}(I)$, pour I dans $\mathcal{D}ia$). On fera cette hypothèse simplificatrice dans tout le reste de cet article.

---

[4] Cette définition, légèrement différente de ma définition initiale (qui était canulée pour un dérivateur triangulé général) m'a été suggérée par Denis-Charles Cisinski.

5. Les conjectures.

Il résulte de [J] (en utilisant un argument analogue à celui de [W], corollaire au lemme 1.4.1) que la K-théorie d'une catégorie exacte $\mathcal{E}$ peut être définie comme suit. On définit une catégorie bisimpliciale

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{\Delta}^\circ \times \mathbf{\Delta}^\circ & \xrightarrow{X(\mathcal{E})} & \mathcal{C}at \\ (\Delta_m, \Delta_n) & \longmapsto & X(\mathcal{E})_{m,n} = \mathcal{I}so\,\underline{\mathsf{Hom}}(\Delta_m \times \Delta_n, \mathcal{E}) \end{array} \quad .$$

Pour tous m, n, on note $Q(\mathcal{E})_{m,n}$ la sous-catégorie pleine de $X(\mathcal{E})_{m,n}$ dont les objets sont les foncteurs

$$F : \Delta_m \times \Delta_n \longrightarrow \mathcal{E}$$

tels que pour tous k_0, k_1, l_0, l_1, $0 \leq k_0 \leq k_1 \leq m$, $0 \leq l_0 \leq l_1 \leq n$, le carré

$$\begin{tikzcd} F_{k_0,l_0} \arrow[r, tail] \arrow[d, two heads] & F_{k_0,l_1} \arrow[d, two heads] \\ F_{k_1,l_0} \arrow[r, tail] & F_{k_1,l_1} \end{tikzcd}$$

soit un carré bicartésien dont les flèches horizontales (resp. verticales) sont des monomorphismes (resp. épimorphismes) admissibles. On vérifie aussitôt qu'on définit ainsi une sous-catégorie bisimpliciale $Q(\mathcal{E})$ de $X(\mathcal{E})$. Les 0-simplexes de l'ensemble simplicial $\delta^* NQ(\mathcal{E})$ sont les objets de $\mathcal{E}$, et $\delta^* NQ(\mathcal{E})$ est pointé par l'objet nul de $\mathcal{E}$. On a alors

$$\mathsf{K}_n(\mathcal{E}) = \pi_{n+1}(\delta^* NQ(\mathcal{E})) = \pi_n(\Omega\delta^* NQ(\mathcal{E})) \quad .$$

Le morphisme canonique

$$\underline{\mathsf{Hom}}(\Delta_m \times \Delta_n, \mathcal{E}) \longrightarrow \mathsf{D}^b(\underline{\mathsf{Hom}}(\Delta_m \times \Delta_n, \mathcal{E})) = \mathbb{D}_{\mathcal{E}}(\Delta_m^\circ \times \Delta_n^\circ)$$

(où $\mathbb{D}_{\mathcal{E}}$ désigne le dérivateur triangulé associé à la catégorie exacte $\mathcal{E}$ (cf. théorème 2)) induit un morphisme de catégories bisimpliciales

$$Q(\mathcal{E}) \longrightarrow Q(\mathbb{D}_{\mathcal{E}}) \quad .$$

Conjecture 1. (Comparaison). *Le morphisme ci-dessus induit une équivalence d'homotopie des espaces correspondants. En particulier, il induit pour tout $n \geq 0$, un isomorphisme $\mathsf{K}_n(\mathcal{E}) \simeq \mathsf{K}_n(\mathbb{D}_{\mathcal{E}})$.*

Une *suite exacte de dérivateurs triangulés* $\mathbb{D}' \to \mathbb{D} \to \mathbb{D}''$ de domaine $\mathcal{D}ia$ est un couple de morphismes de 2-foncteurs $i : \mathbb{D}' \to \mathbb{D}$, $p : \mathbb{D} \to \mathbb{D}''$ tel que pour tout objet A de $\mathcal{D}ia$,

$$\mathbb{D}'(A) \xrightarrow{i_A} \mathbb{D}(A) \xrightarrow{p_A} \mathbb{D}''(A)$$

soit une suite exacte de catégories triangulées. Autrement dit, on demande que le foncteur i_A identifie $\mathbb{D}'(A)$ à une sous-catégorie pleine triangulée épaisse de $\mathbb{D}(A)$, et que p_A identifie $\mathbb{D}''(A)$ au quotient de $\mathbb{D}(A)$ par cette sous-catégorie épaisse [V].

Conjecture 2. (Localisation). *Toute suite exacte de dérivateurs triangulés*

$$\mathbb{D}' \longrightarrow \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}''$$

de domaine $\mathcal{D}ia$ induit un diagramme de catégories bisimpliciales

$$Q(\mathbb{D}') \longrightarrow Q(\mathbb{D}) \longrightarrow Q(\mathbb{D}'')$$

identifiant l'espace correspondant à $Q(\mathbb{D}')$ à la fibre homotopique du morphisme $Q(\mathbb{D}) \to Q(\mathbb{D}'')$. En particulier, on a une longue suite exacte de groupes abéliens

$$\cdots \to \mathsf{K}_{n+1}(\mathbb{D}'') \to \mathsf{K}_n(\mathbb{D}') \to \mathsf{K}_n(\mathbb{D}) \to \mathsf{K}_n(\mathbb{D}'') \to \mathsf{K}_{n-1}(\mathbb{D}') \to \cdots \to \mathsf{K}_0(\mathbb{D}'') \to 0\,.$$

Soit $\mathbb{D}$ un dérivateur triangulé de domaine $\mathcal{D}ia$. On rappelle que pour tout objet I de $\mathcal{D}ia$, on définit un dérivateur triangulé

$$\begin{aligned} \mathbb{D}_I : \mathcal{D}ia^\circ &\longrightarrow \mathcal{C}at \\ J &\longmapsto \mathbb{D}(I \times J) \quad , \end{aligned}$$

appelé dérivateur induit. Pour tout morphisme $u : I' \longrightarrow I$ de $\mathcal{D}ia$, les foncteurs

$$(u \times 1_J)^* : \mathbb{D}(I \times J) \longrightarrow \mathbb{D}(I' \times J) \quad , \qquad \text{pour } J \text{ dans } \mathcal{D}ia \ ,$$

définissent un morphisme de dérivateurs (morphisme de 2-foncteurs), noté aussi, quand aucune confusion n'en résulte,

$$u^* : \mathbb{D}_I \longrightarrow \mathbb{D}_{I'} \quad .$$

On remarque que $\mathbb{D}_e \simeq \mathbb{D}$. Considérons le dérivateur induit $\mathbb{D}_\square$. Un *triangle distingué global* de $\mathbb{D}(e)$ est un objet homotopiquement bicartésien F de $\mathbb{D}(\square)$ tel que $i^*_{\square,(1,0)}(F)$ soit l'objet nul de $\mathbb{D}(e)$, autrement dit, tel que le diagramme sous-jacent à F soit de la forme

$$\mathsf{dia}(F) = \begin{tikzcd} F_{00} \arrow[r] \arrow[d] & F_{01} \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] & F_{11} \end{tikzcd} \quad .$$

Cette terminologie est justifiée par le fait qu'un tel objet détermine canoniquement un triangle distingué standard

$$F_{00} \longrightarrow F_{01} \longrightarrow F_{11} \longrightarrow S(F_{11}) \quad .$$

Plus généralement, pour tout objet J de $\mathcal{D}ia$, un *triangle distingué global* de $\mathbb{D}(J)$ est un objet F de $\mathbb{D}(\square \times J) = \mathbb{D}_\square(J)$ tel que pour tout objet j de J, l'objet $(1_\square \times i_{J,j})^*(F)$ de $\mathbb{D}(\square)$ soit un triangle distingué global de $\mathbb{D}(e)$. Notons $\mathbb{D}^{\mathrm{tr}}(J)$ la sous-catégorie pleine de $\mathbb{D}_\square(J)$ formée des triangles distingués globaux de $\mathbb{D}(J)$. On démontre que

$$\begin{aligned} \mathbb{D}^{\mathrm{tr}} : \mathcal{D}ia^\circ &\longrightarrow \mathcal{C}at \\ J &\longmapsto \mathbb{D}^{\mathrm{tr}}(J) \end{aligned}$$

est un dérivateur triangulé de domaine $\mathcal{D}ia$, appelé le *dérivateur des triangles distingués* de $\mathbb{D}$, et que les inclusions

$$\mathbb{D}^{\mathrm{tr}}(J) \hookrightarrow \mathbb{D}_\square(J) \quad , \qquad J \in \mathsf{Ob}\,\mathcal{D}ia \quad ,$$

définissent un morphisme de dérivateurs $\mathbb{D}^{\mathrm{tr}} \longrightarrow \mathbb{D}_\square$. D'autre part, les morphismes

$$i_{\square,(0,0)},\ i_{\square,(1,1)} : e \longrightarrow \square$$

de $\mathcal{D}ia$ définissent des morphismes de dérivateurs

$$i^*_{\square,(0,0)},\ i^*_{\square,(1,1)} : \mathbb{D}_\square \longrightarrow \mathbb{D}_e = \mathbb{D} \quad ,$$

et en les composant avec le morphisme $\mathbb{D}^{\mathrm{tr}} \longrightarrow \mathbb{D}_\square$, on obtient des morphismes de dérivateurs

$$s, t : \mathbb{D}^{\mathrm{tr}} \longrightarrow \mathbb{D} \quad .$$

De façon explicite, pour tout objet J de $\mathcal{D}ia$, et tout objet F de $\mathbb{D}^{\mathrm{tr}}(J)$, si

$$\mathsf{dia}_{\square,J}\, F = \begin{tikzcd} F_{00} \arrow[r] \arrow[d] & F_{01} \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] & F_{11} \end{tikzcd} \quad ,$$

alors $s_J(F) = F_{00}$ et $t_J(F) = F_{11}$. On vérifie facilement que les morphismes de dérivateurs $s, t : \mathbb{D}^{\mathrm{tr}} \to \mathbb{D}$ induisent des morphismes de catégories bisimpliciales $Q(s), Q(t) : Q(\mathbb{D}^{\mathrm{tr}}) \to Q(\mathbb{D})$.

Conjecture 3. (Additivité). *Le morphisme*

$$(Q(s), Q(t)) : Q(\mathbb{D}^{\mathrm{tr}}) \to Q(\mathbb{D}) \times Q(\mathbb{D})$$

induit une équivalence d'homotopie des espaces correspondants. En particulier, on a des isomorphismes de groupes $\mathsf{K}_n(\mathbb{D}^{\mathrm{tr}}) \simeq \mathsf{K}_n(\mathbb{D}) \times \mathsf{K}_n(\mathbb{D})$*,* $n \geq 0$*.*

Cette conjecture vient d'être démontrée par Amnon Neeman et Denis-Charles Cisinski [CN]. Elle avait été précédemment démontrée dans un cas particulier par Grigory Garkusha [G].

6. Le K_0 d'un dérivateur triangulé.

Rappels. Soit $\mathcal{T}$ une catégorie triangulée. On rappelle que le groupe de Grothendieck $\mathsf{K}_0(\mathcal{T})$ est défini par générateurs et relations comme suit :

Générateurs : $[X]\,,\ \ X \in \mathsf{Ob}(\mathcal{T})\,.$

Relations : $[X]\,[Z] = [Y]\,,\ \ X \to Y \to Z \to S(X)\,,$ triangle distingué de $\mathcal{T}$.

Le triangle distingué $0 \to 0 \to 0 \to S(0) = 0$ implique que $[\,0\,]\,[\,0\,] = [\,0\,]$, et par suite que $[\,0\,]$ est l'élément neutre du groupe. Les triangles distingués

$$X \xrightarrow{u} Y \longrightarrow 0 \longrightarrow S(X) \quad ,$$

pour u isomorphisme de $\mathcal{T}$, impliquent que si X est isomorphe à Y, on a $[Y] = [X]\,[\,0\,] = [X]$. Le triangle distingué

$$X \xrightarrow{\binom{1}{0}} X \oplus Y \xrightarrow{(0,1)} Y \xrightarrow{\ 0\ } S(X)$$

implique que $[X]\,[Y] = [X \oplus Y]$, et comme $X \oplus Y \simeq Y \oplus X$, cela montre que le groupe $\mathsf{K}_0(\mathcal{T})$ est commutatif. Ainsi ce groupe sera noté, le plus souvent, additivement. Enfin, le triangle distingué $X \to 0 \to S(X) \to S(X)$ montre que $[S(X)] = -[X]$. En particulier, on en déduit que tout élément de $\mathsf{K}_0(\mathcal{T})$ peut s'écrire sous la forme $[X_1] + [X_2] + \cdots + [X_n]$, $n \geq 1$.

Si $\mathbb{D}$ est un dérivateur triangulé, et $\mathcal{T}$ la catégorie $\mathbb{D}(e)$ munie de la structure de catégorie triangulée du théorème 1, le groupe $\mathsf{K}_0(\mathcal{T})$ peut, de façon équivalente, être défini par générateurs et relations comme suit :

Générateurs : $[X]\,,\ \ X \in \mathsf{Ob}(\mathbb{D}(e))\,.$

Relations : $a)$ $[\,0\,] = 1\,;$

$b)$ $[X] = [Y]$, pour tout couple X, Y d'objets isomorphes de $\mathbb{D}(e)\,;$

$c)$ $[X_{00}]\,[X_{10}]^{-1}[X_{11}]\,[X_{01}]^{-1} = 1$, pour tout objet cartésien X de $\mathbb{D}(\square)$ de diagramme sous-jacent

$$\mathsf{dia}(X) \;=\; \begin{array}{ccc} X_{00} & \longrightarrow & X_{01} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_{10} & \longrightarrow & X_{11} \end{array} \quad .$$

En effet, on a déjà vu que les relations (a) et (b) sont satisfaites dans $\mathsf{K}_0(\mathcal{T})$. Pour montrer la relation (c), on remarque qu'il existe un objet polycartésien X' de

$\mathbb{D}(\Delta_2^\circ \times \Delta_1^\circ)$ induisant X sur $\square = \Delta_1^\circ \times \Delta_1^\circ$, et dont la fibre en $(2,0)$ est nulle, autrement dit, un objet polycartésien X' ayant un diagramme sous-jacent isomorphe à un diagramme de $\mathbb{D}(e)$ de la forme

$$\begin{tikzcd} X_{00} \arrow[r] \arrow[d] & X_{01} \arrow[d] \\ X_{10} \arrow[r] \arrow[d] & X_{11} \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] & X_{21} \end{tikzcd} \quad .$$

(On peut prendre $X' = j_! i_*(X)$, où

$$\left\{\begin{tikzcd} (0,0) & (0,1) \arrow[l] \\ (1,0) \arrow[u] & (1,1) \arrow[l] \arrow[u] \end{tikzcd}\right\} \overset{i}{\hookrightarrow} \left\{\begin{tikzcd} (0,0) & (0,1) \arrow[l] \\ (1,0) \arrow[u] & (1,1) \arrow[l] \arrow[u] \\ (2,0) \arrow[u] & \end{tikzcd}\right\} \overset{j}{\hookrightarrow} \left\{\begin{tikzcd} (0,0) & (0,1) \arrow[l] \\ (1,0) \arrow[u] & (1,1) \arrow[l] \arrow[u] \\ (2,0) \arrow[u] & (2,1) \arrow[l] \arrow[u] \end{tikzcd}\right\}$$

désignent les inclusions évidentes.) On en déduit, par définition de la structure de catégorie triangulée de $\mathbb{D}(e)$, qu'on a des triangles distingués

$$X_{00} \longrightarrow X_{01} \longrightarrow X_{21} \longrightarrow S(X_{00})$$

$$X_{10} \longrightarrow X_{11} \longrightarrow X_{21} \longrightarrow S(X_{10}) \quad ,$$

d'où $[X_{10}]^{-1}[X_{11}] = [X_{00}]^{-1}[X_{01}]$, ce qui prouve la relation (c).

Montrons réciproquement que les relations (a), (b), (c) impliquent que pour tout triangle distingué $X \to Y \to Z \to S(X)$, on a $[X]\,[Z] = [Y]$. Par définition des triangles distingués de $\mathbb{D}(e)$, il existe un objet cartésien de $\mathbb{D}(\square)$ dont le diagramme sous-jacent soit *isomorphe* à

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] & Z \end{tikzcd} \quad .$$

Il résulte donc des relations (b) et (c) que $[X]\,[\,0\,]^{-1}[Z]\,[Y]^{-1} = 1$, et de la relation (a) que $[X]\,[Z]\,[Y]^{-1} = 1$, ce qui prouve l'assertion.

Remarque. Ce qui précède prouve en particulier que le groupe défini par les relations (a), (b), (c) est commutatif.

Dans la suite, on se fixe un dérivateur triangulé $\mathbb{D}$. *On supposera pour simplifier* (outre l'hypothèse déjà faite que pour tout I dans $\mathcal{D}ia$, $\mathbb{D}(I)$ possède un *unique* objet nul) *que le dérivateur triangulé* $\mathbb{D}$ *satisfait aux conclusions de la proposition* 5 *du paragraphe suivant, et en particulier aux propriétés* (i) *et* (ii) *de la remarque qui suit cette proposition, autrement dit, que certains isomorphismes canoniques sont en fait des égalités.* Grâce à cette proposition de "strictification" et à l'invariance de la K-théorie par équivalence de dérivateurs triangulés, cette hypothèse n'est pas restrictive.

Le groupoïde $\mathcal{K}_0(\mathbb{D})$. La description générale du groupoïde fondamental d'un ensemble simplicial, appliquée à $\delta^* NQ(\mathbb{D})$, fournit la description suivante de son groupoïde fondamental, noté $\mathcal{K}_0(\mathbb{D})$. Il est le quotient du groupoïde libre engendré par le graphe

$$\Gamma = \ \Gamma_1 \overset{s}{\underset{t}{\rightrightarrows}} \Gamma_0 \quad ,$$

où Γ_0 est l'ensemble des objets de $\mathbb{D}(e)$, Γ_1 est l'ensemble des isomorphismes entre objets cartésiens de $\mathbb{D}(\square)$, et si $f : X_0 \xrightarrow{\sim} X_1$ est un élément de Γ_1 tel que

$$
\begin{tikzcd}
\mathsf{dia}(X_0) \arrow[d, "\mathsf{dia}(f)"'] \\
\mathsf{dia}(X_1)
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
& X_{000} \arrow[rr] \arrow[dl] \arrow[dd] & & X_{001} \arrow[dl] \arrow[dd] \\
X_{010} \arrow[rr] \arrow[dd] & & X_{011} \arrow[dd] & \\
& X_{100} \arrow[rr] \arrow[dl] & & X_{101} \arrow[dl] \\
X_{110} \arrow[rr] & & X_{111} &
\end{tikzcd}
\quad ,
$$

alors $s(X_0 \to X_1) = X_{000}$ et $t(X_0 \to X_1) = X_{111}$, quotienté par les relations suivantes : pour tout couple d'isomorphismes composables entre objets polycartésiens de $\mathbb{D}(\Delta_2^\circ \times \Delta_2^\circ)$

$$X = (\ X_0 \xrightarrow{\sim} X_1 \xrightarrow{\sim} X_2\ ) \quad ,$$

on a la relation

$$d_0(X) \circ d_2(X) = d_1(X) \quad ,$$

où les d_i désignent les opérateurs face de l'ensemble simplicial $\delta^* NQ(\mathbb{D})$.

De façon imagée, si

$$
\mathsf{dia}(X) \ = \
\begin{tikzcd}
& & X_{000} \arrow[rrr] \arrow[dl] \arrow[ddd] & & & X_{001} \arrow[rrr] \arrow[dl] \arrow[ddd] & & & X_{002} \arrow[dl] \arrow[ddd] \\
& X_{010} \arrow[rrr] \arrow[dl] \arrow[ddd] & & & X_{011} \arrow[rrr] \arrow[dl] \arrow[ddd] & & & X_{012} \arrow[dl] \arrow[ddd] & \\
X_{020} \arrow[rrr] \arrow[ddd] & & & X_{021} \arrow[rrr] \arrow[ddd] & & & X_{022} \arrow[ddd] & & \\
& & X_{100} \arrow[rrr] \arrow[dl] \arrow[ddd] & & & X_{101} \arrow[rrr] \arrow[dl] \arrow[ddd] & & & X_{102} \arrow[dl] \arrow[ddd] \\
& X_{110} \arrow[rrr] \arrow[dl] \arrow[ddd] & & & X_{111} \arrow[rrr] \arrow[dl] \arrow[ddd] & & & X_{112} \arrow[dl] \arrow[ddd] & \\
X_{120} \arrow[rrr] \arrow[ddd] & & & X_{121} \arrow[rrr] \arrow[ddd] & & & X_{122} \arrow[ddd] & & \\
& & X_{200} \arrow[rrr] \arrow[dl] & & & X_{201} \arrow[rrr] \arrow[dl] & & & X_{202} \arrow[dl] \\
& X_{210} \arrow[rrr] \arrow[dl] & & & X_{211} \arrow[rrr] \arrow[dl] & & & X_{212} \arrow[dl] & \\
X_{220} \arrow[rrr] & & & X_{221} \arrow[rrr] & & & X_{222} & &
\end{tikzcd}
\quad ,
$$

alors la relation ci-dessus peut s'illustrer par la formule

$$
\begin{tikzcd}
& X_{000} \arrow[rr] \arrow[dl] \arrow[dd] & & X_{002} \arrow[dl] \arrow[dd] \\
X_{020} \arrow[rr] \arrow[dd] & & X_{022} \arrow[dd] & \\
& X_{200} \arrow[rr] \arrow[dl] & & X_{202} \arrow[dl] \\
X_{220} \arrow[rr] & & X_{222} &
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
& X_{111} \arrow[rr] \arrow[dl] \arrow[dd] & & X_{112} \arrow[dl] \arrow[dd] \\
X_{121} \arrow[rr] \arrow[dd] & & X_{122} \arrow[dd] & \\
& X_{211} \arrow[rr] \arrow[dl] & & X_{212} \arrow[dl] \\
X_{221} \arrow[rr] & & X_{222} &
\end{tikzcd}
\quad \circ \quad
\begin{tikzcd}
& X_{000} \arrow[rr] \arrow[dl] \arrow[dd] & & X_{001} \arrow[dl] \arrow[dd] \\
X_{010} \arrow[rr] \arrow[dd] & & X_{011} \arrow[dd] & \\
& X_{100} \arrow[rr] \arrow[dl] & & X_{101} \arrow[dl] \\
X_{110} \arrow[rr] & & X_{111} &
\end{tikzcd}
$$

(de façon légèrement incorrecte, puisque en réalité il s'agit d'une relation entre isomorphismes d'objets cartésiens de $\mathbb{D}(\square)$, et non pas entre leurs diagrammes). Autrement dit, on demande que le grand cube soit le composé du petit cube en haut, à gauche, à l'arrière, suivi du petit cube en bas, à droite, à l'avant.

On vérifie facilement que cette relation implique que pour tout objet X de $\mathbb{D}(e)$, l'identité de X, considéré comme objet du groupoïde $\mathcal{K}_0(\mathbb{D})$, est représentée par l'isomorphisme identique de l'objet cartésien $p_\square^*(X)$ de $\mathbb{D}(\square)$, dont le diagramme est

$$\mathsf{dia}\big(1_{p_{\square}^*(X)}\big) \;=\; \begin{tikzcd} & X \arrow[rr] \arrow[dl] \arrow[dd] & & X \arrow[dl] \arrow[dd] \\ X \arrow[rr] \arrow[dd] & & X \arrow[dd] & \\ & X \arrow[rr] \arrow[dl] & & X \arrow[dl] \\ X \arrow[rr] & & X & \end{tikzcd} \quad .$$

On notera $q : \Gamma \longrightarrow \mathcal{K}_0(\mathbb{D})$ le morphisme canonique du graphe Γ vers le graphe sous-jacent au groupoïde $\mathcal{K}_0(\mathbb{D})$. Pour tout couple d'isomorphismes composables entre objets polycartésiens de $\mathbb{D}(\Delta_2^\circ \times \Delta_2^\circ)$

$$X = (\ X_0 \xrightarrow{\sim} X_1 \xrightarrow{\sim} X_2\ ) \quad ,$$

on a donc par définition l'égalité suivante dans $\mathcal{K}_0(\mathbb{D})$.

$$(*) \qquad q(d_0(X)) \circ q(d_2(X)) = q(d_1(X))$$

En distinguant ainsi un isomorphisme entre objets cartésiens de $\mathbb{D}(\square)$, de son image dans $\mathcal{K}_0(\mathbb{D})$, on évite toute confusion entre la composition dans $\mathbb{D}(\square)$ et celle dans $\mathcal{K}_0(\mathbb{D})$, qui est différente en général (deux tels isomorphismes étant d'ailleurs rarement composables à la fois dans $\mathbb{D}(\square)$ et dans $\mathcal{K}_0(\mathbb{D})$). Les deux lemmes suivants expriment quelques compatibilités entre ces deux compositions.

Dans la suite, on notera

$$\Delta_1^\circ \xleftarrow{p_1} \Delta_1^\circ \times \Delta_1^\circ \xrightarrow{p_2} \Delta_1^\circ$$

les deux projections, et on utilisera les notations simpliciales habituelles : pour tout m, et tout k, $0 \leq k \leq m$, $\delta_k : \Delta_{m-1}^\circ \longrightarrow \Delta_m^\circ$ désignera le k-ième opérateur *face*, unique injection croissante dont l'image ne contient pas k, et $\sigma_k : \Delta_{m+1}^\circ \longrightarrow \Delta_m^\circ$ le k-ième opérateur de *dégénérescence*, unique surjection croissante telle que la préimage de k soit un ensemble à deux éléments. On identifiera Δ_0° à la catégorie ponctuelle e, de sorte que l'on ait $i_{\Delta_1^\circ,0} = \delta_1$, $i_{\Delta_1^\circ,1} = \delta_0$, et $p_{\Delta_1} = \sigma_0$.

Lemme 1. *Pour tout couple d'isomorphismes composables* $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ *de* $\mathbb{D}(\Delta_2^\circ)$,

$$\mathsf{dia}\begin{pmatrix} X \\ \big\downarrow f \\ Y \\ \big\downarrow g \\ Z \end{pmatrix} \;=\; \begin{tikzcd} X_0 \arrow[r] \arrow[d, "f_0"'] & X_1 \arrow[r] \arrow[d, "f_1"] & X_2 \arrow[d, "f_2"] \\ Y_0 \arrow[r] \arrow[d, "g_0"'] & Y_1 \arrow[r] \arrow[d, "g_1"] & Y_2 \arrow[d, "g_2"] \\ Z_0 \arrow[r] & Z_1 \arrow[r] & Z_2 \end{tikzcd} \quad ,$$

on a les égalités

$$(**) \qquad \begin{aligned} q(p_1^*\delta_1^*(gf)) &= q(p_1^*\delta_0^*(g)) \circ q(p_1^*\delta_2^*(f)) \quad , \\ q(p_2^*\delta_1^*(gf)) &= q(p_2^*\delta_0^*(g)) \circ q(p_2^*\delta_2^*(f)) \quad . \end{aligned}$$

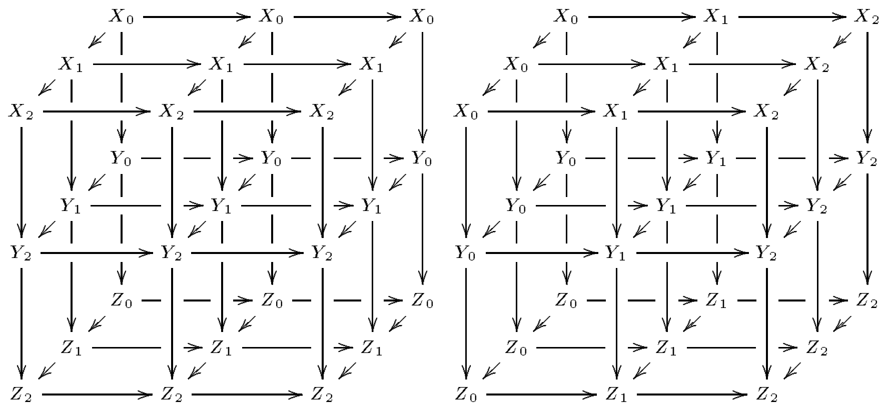
Démonstration. Ces égalités résultent de la relation $(*)$ appliquée aux couples d'isomorphismes composables d'objets polycartésiens de $\mathbb{D}(\Delta_2^\circ \times \Delta_2^\circ)$

$$pr_1^*X \xrightarrow{pr_1^*f} pr_1^*Y \xrightarrow{pr_1^*g} pr_1^*Z \quad ,$$

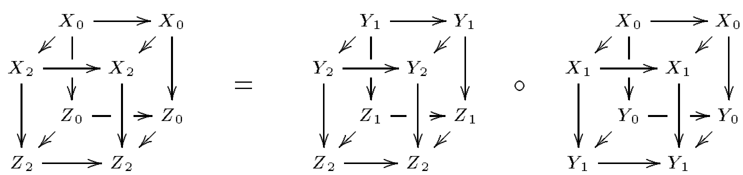
$$pr_2^*X \xrightarrow{pr_2^*f} pr_2^*Y \xrightarrow{pr_2^*g} pr_2^*Z \quad ,$$

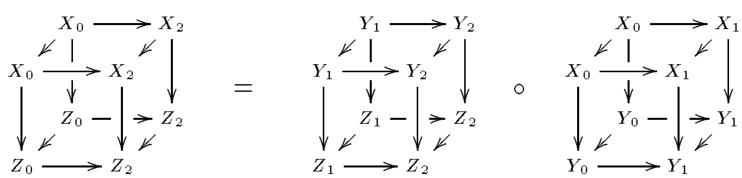
où pr_1 et pr_2 désignent les projections $\Delta_2^\circ \xleftarrow{pr_1} \Delta_2^\circ \times \Delta_2^\circ \xrightarrow{pr_2} \Delta_2^\circ$. $\square$

Cette preuve est mieux visualisée en considérant les diagrammes correspondants aux couples d'isomorphismes composables d'objets polycartésiens ci-dessus :



donnant naissance aux égalités un peu abusives





illustrant les relations $(**)$.

Notations. Soient $m, n \geq 0$, et X un objet de $\mathbb{D}(\Delta_m^\circ \times \Delta_n^\circ)$. Pour tout couple i, j, $0 \leq i \leq m$, $0 \leq j \leq n$, on note X_{ij} la fibre de X en (i,j), et $X_{i\bullet}$ (resp. $X_{\bullet j}$) l'image inverse de X dans $\mathbb{D}(\Delta_n^\circ)$ (resp. $\mathbb{D}(\Delta_m^\circ)$) par l'inclusion

$$\Delta_n^\circ \longrightarrow \Delta_m^\circ \times \Delta_n^\circ \ , \quad j \longmapsto (i,j) \qquad (\text{resp. } \ \Delta_m^\circ \longrightarrow \Delta_m^\circ \times \Delta_n^\circ \ , \quad i \longmapsto (i,j)\ ) \ .$$

On définit de façon analogue f_{ij}, $f_{i\bullet}$, $f_{\bullet j}$, pour une flèche f de $\mathbb{D}(\Delta_m^\circ \times \Delta_n^\circ)$.

Lemme 2. *Pour tout couple d'isomorphismes composables* $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ *entre objets cartésiens de* $\mathbb{D}(\square)$*, on a les égalités*

$$(***) \qquad q(p_2^*(g_{1\bullet})) \circ q(p_1^*(f_{\bullet 0})) = q(gf) = q(p_1^*(g_{\bullet 1})) \circ q(p_2^*(f_{0\bullet})) \quad .$$

Démonstration. Ces égalités résultent de la relation $(*)$ appliquée aux couples d'isomorphismes composables d'objets polycartésiens de $\mathbb{D}(\Delta_2^\circ \times \Delta_2^\circ)$

$$r_1^*X \xrightarrow{\ r_1^*f\ } r_1^*Y \xrightarrow{\ r_1^*g\ } r_1^*Z \qquad ,$$

$$r_2^*X \xrightarrow{\ r_2^*f\ } r_2^*Y \xrightarrow{\ r_2^*g\ } r_2^*Z \qquad ,$$

où $r_1, r_2 : \Delta_2^\circ \times \Delta_2^\circ \longrightarrow \Delta_1^\circ \times \Delta_1^\circ = \square$ désignent les applications $r_1 = \sigma_1 \times \sigma_0$, $r_2 = \sigma_0 \times \sigma_1$. $\square$

Cette preuve est mieux visualisée en considérant les diagrammes correspondants aux couples d'isomorphismes composables d'objets polycartésiens ci-dessus :

$$
\begin{tikzcd}[row sep=tiny, column sep=tiny]
& & X_{00} \arrow[rrr] \arrow[dl] \arrow[ddd] & & & X_{00} \arrow[rrr] \arrow[dl] \arrow[ddd] & & & X_{01} \arrow[dl] \arrow[ddd] \\
& X_{10} \arrow[rrr] \arrow[dl] \arrow[ddd] & & & X_{10} \arrow[rrr] \arrow[dl] \arrow[ddd] & & & X_{11} \arrow[dl] \arrow[ddd] & \\
X_{10} \arrow[rrr] \arrow[ddd] & & & X_{10} \arrow[rrr] \arrow[ddd] & & & X_{11} \arrow[ddd] & & \\
& & Y_{00} \arrow[rrr] \arrow[dl] \arrow[ddd] & & & Y_{00} \arrow[rrr] \arrow[dl] \arrow[ddd] & & & Y_{01} \arrow[dl] \arrow[ddd] \\
& Y_{10} \arrow[rrr] \arrow[dl] \arrow[ddd] & & & Y_{10} \arrow[rrr] \arrow[dl] \arrow[ddd] & & & Y_{11} \arrow[dl] \arrow[ddd] & \\
Y_{10} \arrow[rrr] \arrow[ddd] & & & Y_{10} \arrow[rrr] \arrow[ddd] & & & Y_{11} \arrow[ddd] & & \\
& & Z_{00} \arrow[rrr] \arrow[dl] & & & Z_{00} \arrow[rrr] \arrow[dl] & & & Z_{01} \arrow[dl] \\
& Z_{10} \arrow[rrr] \arrow[dl] & & & Z_{10} \arrow[rrr] \arrow[dl] & & & Z_{11} \arrow[dl] & \\
Z_{10} \arrow[rrr] & & & Z_{10} \arrow[rrr] & & & Z_{11} & &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}[row sep=tiny, column sep=tiny]
& & X_{00} \arrow[rrr] \arrow[dl] \arrow[ddd] & & & X_{01} \arrow[rrr] \arrow[dl] \arrow[ddd] & & & X_{01} \arrow[dl] \arrow[ddd] \\
& X_{00} \arrow[rrr] \arrow[dl] \arrow[ddd] & & & X_{01} \arrow[rrr] \arrow[dl] \arrow[ddd] & & & X_{01} \arrow[dl] \arrow[ddd] & \\
X_{10} \arrow[rrr] \arrow[ddd] & & & X_{11} \arrow[rrr] \arrow[ddd] & & & X_{11} \arrow[ddd] & & \\
& & Y_{00} \arrow[rrr] \arrow[dl] \arrow[ddd] & & & Y_{01} \arrow[rrr] \arrow[dl] \arrow[ddd] & & & Y_{01} \arrow[dl] \arrow[ddd] \\
& Y_{00} \arrow[rrr] \arrow[dl] \arrow[ddd] & & & Y_{01} \arrow[rrr] \arrow[dl] \arrow[ddd] & & & Y_{01} \arrow[dl] \arrow[ddd] & \\
Y_{10} \arrow[rrr] \arrow[ddd] & & & Y_{11} \arrow[rrr] \arrow[ddd] & & & Y_{11} \arrow[ddd] & & \\
& & Z_{00} \arrow[rrr] \arrow[dl] & & & Z_{01} \arrow[rrr] \arrow[dl] & & & Z_{01} \arrow[dl] \\
& Z_{00} \arrow[rrr] \arrow[dl] & & & Z_{01} \arrow[rrr] \arrow[dl] & & & Z_{01} \arrow[dl] & \\
Z_{10} \arrow[rrr] & & & Z_{11} \arrow[rrr] & & & Z_{11} & &
\end{tikzcd}
$$

donnant naissance aux égalités un peu abusives

$$
\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small]
& X_{00} \arrow[rr] \arrow[dl] \arrow[dd] & & X_{01} \arrow[dl] \arrow[dd] \\
X_{10} \arrow[rr] \arrow[dd] & & X_{11} \arrow[dd] & \\
& Z_{00} \arrow[rr] \arrow[dl] & & Z_{01} \arrow[dl] \\
Z_{10} \arrow[rr] & & Z_{11} &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small]
& Y_{10} \arrow[rr] \arrow[dl] \arrow[dd] & & Y_{11} \arrow[dl] \arrow[dd] \\
Y_{10} \arrow[rr] \arrow[dd] & & Y_{11} \arrow[dd] & \\
& Z_{10} \arrow[rr] \arrow[dl] & & Z_{11} \arrow[dl] \\
Z_{10} \arrow[rr] & & Z_{11} &
\end{tikzcd}
\circ
\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small]
& X_{00} \arrow[rr] \arrow[dl] \arrow[dd] & & X_{00} \arrow[dl] \arrow[dd] \\
X_{10} \arrow[rr] \arrow[dd] & & X_{10} \arrow[dd] & \\
& Y_{00} \arrow[rr] \arrow[dl] & & Y_{00} \arrow[dl] \\
Y_{10} \arrow[rr] & & Y_{10} &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small]
& X_{00} \arrow[rr] \arrow[dl] \arrow[dd] & & X_{01} \arrow[dl] \arrow[dd] \\
X_{10} \arrow[rr] \arrow[dd] & & X_{11} \arrow[dd] & \\
& Z_{00} \arrow[rr] \arrow[dl] & & Z_{01} \arrow[dl] \\
Z_{10} \arrow[rr] & & Z_{11} &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small]
& Y_{01} \arrow[rr] \arrow[dl] \arrow[dd] & & Y_{01} \arrow[dl] \arrow[dd] \\
Y_{11} \arrow[rr] \arrow[dd] & & Y_{11} \arrow[dd] & \\
& Z_{01} \arrow[rr] \arrow[dl] & & Z_{01} \arrow[dl] \\
Z_{11} \arrow[rr] & & Z_{11} &
\end{tikzcd}
\circ
\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small]
& X_{00} \arrow[rr] \arrow[dl] \arrow[dd] & & X_{01} \arrow[dl] \arrow[dd] \\
X_{00} \arrow[rr] \arrow[dd] & & X_{01} \arrow[dd] & \\
& Y_{00} \arrow[rr] \arrow[dl] & & Y_{01} \arrow[dl] \\
Y_{00} \arrow[rr] & & Y_{01} &
\end{tikzcd}
$$

illustrant les relations $(***)$.

Notations. Soit $f : X \to Y$ un isomorphisme de $\mathbb{D}(e)$. On note i_f, j_f les isomorphismes de $\mathbb{D}(\square)$ définis par

$$i_f = p_1^*\big((i_{\Delta_1^\circ,0})_*(f)\big) \quad , \qquad j_f = p_2^*\big((i_{\Delta_1^\circ,0})_*(f)\big) \quad .$$

On a

$$\mathsf{dia}\big((i_{\Delta_1^\circ,0})_*(f)\big) \;=\; \begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & 0 \arrow[d] \\ Y \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \quad ,$$

$$
\mathsf{dia}(i_f) \;=\;
\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small]
& X \arrow[rr] \arrow[dl] \arrow[dd, "f"] & & X \arrow[dl] \arrow[dd, "f"] \\
0 \arrow[rr] \arrow[dd] & & 0 \arrow[dd] & \\
& Y \arrow[rr] \arrow[dl] & & Y \arrow[dl] \\
0 \arrow[rr] & & 0 &
\end{tikzcd}
\quad , \qquad
\mathsf{dia}(j_f) \;=\;
\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small]
& X \arrow[rr] \arrow[dl] \arrow[dd, "f"] & & 0 \arrow[dl] \arrow[dd] \\
X \arrow[rr] \arrow[dd, "f"'] & & 0 \arrow[dd] & \\
& Y \arrow[rr] \arrow[dl] & & 0 \arrow[dl] \\
Y \arrow[rr] & & 0 &
\end{tikzcd}
\quad .
$$

Pour tout objet X de $\mathbb{D}(e)$, on pose $i_X = i_{1_X}$ et $j_X = j_{1_X}$. On remarque que i_0 et j_0 représentent l'identité de l'objet 0 dans $\mathcal{K}_0(\mathbb{D})$:

$$q(i_0) = 1_0 = q(j_0) \quad .$$

Lemme 3. *Pour tout isomorphisme $f : X \to Y$ de $\mathbb{D}(e)$, on a*

$$q(i_f) = q(i_X) \qquad \textit{et} \qquad q(j_f) = q(j_X) \quad .$$

Démonstration. La première (resp. deuxième) relation résulte de la première (resp. deuxième) égalité du lemme 2, appliqué au couple d'isomorphismes composables

$$\xrightarrow{\ i_f\ }\ \xrightarrow{\ i_{f^{-1}}\ } \qquad \text{(resp.} \quad \xrightarrow{\ j_f\ }\ \xrightarrow{\ j_{f^{-1}}\ } \quad)$$

de $\mathbb{D}(\Box)$. □

Lemme 4. *Pour tout isomorphisme $f : X \to Y$ de $\mathbb{D}(\Delta_1^\circ)$ tel que*

$$\mathsf{dia}(f) \;=\; \begin{tikzcd} X_0 \arrow[r] \arrow[d, "f_0"'] & X_1 \arrow[d, "f_1"] \\ Y_0 \arrow[r] & Y_1 \end{tikzcd} \quad ,$$

on a

$$q(p_1^*(f)) = q(i_{Y_1})^{-1} \circ q(i_{X_0}) \qquad \textit{et} \qquad q(p_2^*(f)) = q(j_{Y_1})^{-1} \circ q(j_{X_0}) \quad .$$

Démonstration. En appliquant le lemme 1 au couple d'isomorphismes composables

$$\delta_{2*}(X) \xrightarrow{\delta_{2*}(f)} \delta_{2*}(Y) \xrightarrow{\ =\ } \delta_{2*}(Y)$$

de $\mathbb{D}(\Delta_2^\circ)$, dont le diagramme est

$$\begin{tikzcd} X_0 \arrow[r] \arrow[d, "f_0"'] & X_1 \arrow[r] \arrow[d, "f_1"] & 0 \arrow[d] \\ Y_0 \arrow[r] \arrow[d, "1_{Y_0}"'] & Y_1 \arrow[r] \arrow[d, "1_{Y_1}"] & 0 \arrow[d] \\ Y_0 \arrow[r] & Y_1 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \quad ,$$

on obtient les relations

$$q(i_{f_0}) = q(i_{Y_1}) \circ q(p_1^*(f)) \qquad \text{et} \qquad q(j_{f_0}) = q(j_{Y_1}) \circ q(p_2^*(f)) \quad ,$$

ce qui prouve l'assertion, en vertu du lemme précédent. □

Lemme 5. *Pour tout isomorphisme $f : X \to Y$ entre objets cartésiens de $\mathbb{D}(\Box)$ tel que*

$$\mathsf{dia}(f) \;=\; \begin{tikzcd} & X_{00} \arrow[rr] \arrow[dl] \arrow[dd] & & X_{01} \arrow[dl] \arrow[dd] \\ X_{10} \arrow[rr] \arrow[dd] & & X_{11} \arrow[dd] & \\ & Y_{00} \arrow[rr] \arrow[dl] & & Y_{01} \arrow[dl] \\ Y_{10} \arrow[rr] & & Y_{11} & \end{tikzcd} \quad ,$$

on a les relations

$$q(j_{Y_{11}})^{-1} q(j_{Y_{10}})\, q(i_{Y_{10}})^{-1} q(i_{X_{00}}) = q(f) = q(i_{Y_{11}})^{-1} q(i_{Y_{01}})\, q(j_{Y_{01}})^{-1} q(j_{X_{00}}) \ ,$$

$$q(j_{Y_{11}})^{-1} q(j_{X_{10}})\, q(i_{X_{10}})^{-1} q(i_{X_{00}}) = q(f) = q(i_{Y_{11}})^{-1} q(i_{X_{01}})\, q(j_{X_{01}})^{-1} q(j_{X_{00}}) \ .$$

Démonstration. Ces égalités résultent aussitôt du lemme précédent, et du lemme 2 appliqué aux suites composables d'isomorphismes

$$X \xrightarrow{\ f\ } Y \xrightarrow{\ 1_Y\ } Y \qquad \text{et} \qquad X \xrightarrow{\ 1_X\ } X \xrightarrow{\ f\ } Y$$

de $\mathbb{D}(\Box)$. □

Remarque et notations. Ce lemme implique en particulier que les morphismes $q(i_X)$, $q(j_X)$, $X \in \mathsf{Ob}(\mathbb{D}(e))$, de $\mathcal{K}_0(\mathbb{D})$, de source X et de but 0, forment un système générateur des flèches du groupoïde $\mathcal{K}_0(\mathbb{D})$. Pour tout objet X de $\mathbb{D}(e)$, on pose

$a_X = q(i_X)$ et $b_X = q(j_X)$. En gardant les notations du lemme précédent, on a alors les égalités suivantes

$$(\#) \qquad \begin{aligned} b_{Y_{11}}^{-1} b_{Y_{10}} a_{Y_{10}}^{-1} a_{X_{00}} &= q(f) = a_{Y_{11}}^{-1} a_{Y_{01}} b_{Y_{01}}^{-1} b_{X_{00}} \quad , \\ b_{Y_{11}}^{-1} b_{X_{10}} a_{X_{10}}^{-1} a_{X_{00}} &= q(f) = a_{Y_{11}}^{-1} a_{X_{01}} b_{X_{01}}^{-1} b_{X_{00}} \quad , \end{aligned}$$

et on rappelle qu'on a

$$a_0 = q(i_0) = 1_0 \qquad \text{et} \qquad b_0 = q(j_0) = 1_0 \quad .$$

Ces générateurs et relations fournissent une nouvelle présentation du groupoïde $\mathcal{K}_0(\mathbb{D})$. De façon plus précise, on a la proposition suivante.

Proposition 3. *Le groupoïde $\mathcal{K}_0(\mathbb{D})$ est isomorphe au groupoïde $\mathcal{K}'_0(\mathbb{D})$, quotient du groupoïde libre engendré par le graphe*

$$\Gamma' = \Gamma'_1 \overset{s'}{\underset{t'}{\rightrightarrows}} \Gamma'_0 \quad ,$$

où $\Gamma'_0 = \Gamma_0 = \mathsf{Ob}(\mathbb{D}(e))$, Γ'_1 est l'ensemble des symboles α_X, β_X, $X \in \mathsf{Ob}(\mathbb{D}(e))$, $(\Gamma' \simeq \Gamma_0 \amalg \Gamma_0)$, et $s'(\alpha_X) = s'(\beta_X) = X$, $t'(\alpha_X) = t'(\beta_X) = 0$, par les relations suivantes :

0) $\alpha_0 = \beta_0 = 1_0$;

1) *pour tout isomorphisme $f : X \to Y$ entre objets cartésiens de $\mathbb{D}(\square)$ tel que*

$$\mathsf{dia}(f) \;=\; \begin{tikzcd} & X_{00} \arrow[rr] \arrow[dl] \arrow[dd] & & X_{01} \arrow[dl] \arrow[dd] \\ X_{10} \arrow[rr] \arrow[dd] & & X_{11} \arrow[dd] & \\ & Y_{00} \arrow[rr] \arrow[dl] & & Y_{01} \arrow[dl] \\ Y_{10} \arrow[rr] & & Y_{11} & \end{tikzcd} \quad ,$$

$$(\#\#) \qquad \alpha_{Y_{11}}^{-1} \alpha_{Y_{01}} \beta_{Y_{01}}^{-1} \beta_{X_{00}} = \beta_{Y_{11}}^{-1} \beta_{X_{10}} \alpha_{X_{10}}^{-1} \alpha_{X_{00}} \quad .$$

Démonstration. En vertu de la propriété universelle de $\mathcal{K}'_0(\mathbb{D})$ et des considérations de la remarque précédente, il existe un unique foncteur

$$I : \mathcal{K}'_0(\mathbb{D}) \longrightarrow \mathcal{K}_0(\mathbb{D}) \quad ,$$

induisant l'identité sur l'ensemble des objets, et tel que pour tout objet X de $\mathbb{D}(e)$, on ait

$$I(\alpha_X) = a_X \qquad \text{et} \qquad I(\beta_X) = b_X \quad .$$

De même, il existe un unique foncteur

$$J : \mathcal{K}_0(\mathbb{D}) \longrightarrow \mathcal{K}'_0(\mathbb{D}) \quad ,$$

induisant l'identité sur l'ensemble des objets, et tel que pour tout isomorphisme $f : X \to Y$ entre objets cartésiens de $\mathbb{D}(\square)$ tel que

$$\mathsf{dia}(f) \;=\; \begin{tikzcd} & X_{00} \arrow[rr] \arrow[dl] \arrow[dd] & & X_{01} \arrow[dl] \arrow[dd] \\ X_{10} \arrow[rr] \arrow[dd] & & X_{11} \arrow[dd] & \\ & Y_{00} \arrow[rr] \arrow[dl] & & Y_{01} \arrow[dl] \\ Y_{10} \arrow[rr] & & Y_{11} & \end{tikzcd} \quad ,$$

on ait

$$J(q(f)) = \alpha_{Y_{11}}^{-1} \alpha_{Y_{01}} \beta_{Y_{01}}^{-1} \beta_{X_{00}} \quad .$$

En effet, pour cela, il suffit de montrer que pour tout couple d'isomorphismes composables entre objets polycartésiens de $\mathbb{D}(\Delta_2^\circ \times \Delta_2^\circ)$,

$$X = (\ X_0 \xrightarrow[f]{\sim} X_1 \xrightarrow[g]{\sim} X_2\ ) \quad ,$$

tel que

$$
\mathsf{dia}(X) \ = \
\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small]
 & & X_{000} \arrow[rr] \arrow[dl] \arrow[ddd] & & X_{001} \arrow[rr] \arrow[dl] \arrow[ddd] & & X_{002} \arrow[dl] \arrow[ddd] \\
 & X_{010} \arrow[rr] \arrow[dl] \arrow[ddd] & & X_{011} \arrow[rr] \arrow[dl] \arrow[ddd] & & X_{012} \arrow[dl] \arrow[ddd] & \\
X_{020} \arrow[rr] \arrow[ddd] & & X_{021} \arrow[rr] \arrow[ddd] & & X_{022} \arrow[ddd] & & \\
 & & X_{100} \arrow[rr] \arrow[dl] \arrow[ddd] & & X_{101} \arrow[rr] \arrow[dl] \arrow[ddd] & & X_{102} \arrow[dl] \arrow[ddd] \\
 & X_{110} \arrow[rr] \arrow[dl] \arrow[ddd] & & X_{111} \arrow[rr] \arrow[dl] \arrow[ddd] & & X_{112} \arrow[dl] \arrow[ddd] & \\
X_{120} \arrow[rr] \arrow[ddd] & & X_{121} \arrow[rr] \arrow[ddd] & & X_{122} \arrow[ddd] & & \\
 & & X_{200} \arrow[rr] \arrow[dl] & & X_{201} \arrow[rr] \arrow[dl] & & X_{202} \arrow[dl] \\
 & X_{210} \arrow[rr] \arrow[dl] & & X_{211} \arrow[rr] \arrow[dl] & & X_{212} \arrow[dl] & \\
X_{220} \arrow[rr] & & X_{221} \arrow[rr] & & X_{222} & &
\end{tikzcd}
\quad ,
$$

on ait l'égalité

$$\alpha^{-1}_{X_{222}}\alpha_{X_{202}}\beta^{-1}_{X_{202}}\beta_{X_{000}} = \alpha^{-1}_{X_{222}}\alpha_{X_{212}}\beta^{-1}_{X_{212}}\beta_{X_{111}}\alpha^{-1}_{X_{111}}\alpha_{X_{101}}\beta^{-1}_{X_{101}}\beta_{X_{000}} \quad ,$$

ou de façon équivalente

$$\alpha^{-1}_{X_{212}}\alpha_{X_{202}}\beta^{-1}_{X_{202}}\beta_{X_{101}} = \beta^{-1}_{X_{212}}\beta_{X_{111}}\alpha^{-1}_{X_{111}}\alpha_{X_{101}} \quad ,$$

qui n'est autre que la relation (##) relative à l'isomorphisme $(\delta_2 \times \delta_0)^*(g)$, d'objets cartésiens de $\mathbb{D}(\square)$, dont le diagramme est

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small]
 & X_{101} \arrow[r] \arrow[dl] \arrow[dd] & X_{102} \arrow[dl] \arrow[dd] \\
X_{111} \arrow[r] \arrow[dd] & X_{112} \arrow[dd] & \\
 & X_{201} \arrow[r] \arrow[dl] & X_{202} \arrow[dl] \\
X_{211} \arrow[r] & X_{212} &
\end{tikzcd}
\quad ,
$$

correspondant au petit cube en bas, à droite, à l'arrière du diagramme de X.

Il reste à prouver que les deux composés IJ et JI sont des identités, et pour cela, il suffit de le vérifier sur les générateurs. En vertu de la relation (#), pour tout isomorphisme $f : X \to Y$ d'objets cartésiens de $\mathbb{D}(\square)$, on a

$$IJ(q(f)) = I(\alpha^{-1}_{Y_{11}}\alpha_{Y_{01}}\beta^{-1}_{Y_{01}}\beta_{X_{00}}) = a^{-1}_{Y_{11}}a_{Y_{01}}b^{-1}_{Y_{01}}b_{X_{00}} = q(f) \quad ,$$

et en vertu de la relation (0), on a

$$JI(\alpha_X) = J(a_X) = J(q(i_X)) = \alpha_0^{-1}\alpha_X \ \beta_X^{-1}\beta_X \ = \alpha_0^{-1}\alpha_X \ = \alpha_X \quad ,$$

$$JI(\beta_X) = J(b_X) = J(q(j_X)) = \alpha_0^{-1}\alpha_0 \ \beta_0^{-1}\beta_X \ = \beta_0^{-1}\beta_X \ = \beta_X \quad ,$$

ce qui achève la démonstration. $\square$

Lemme 6. *Soient $\mathcal{G}$ un groupoïde connexe, 0 un objet de $\mathcal{G}$, et pour tout objet X de $\mathcal{G}$, $\varepsilon_X : X \to 0$ une flèche de $\mathcal{G}$. On suppose que $\varepsilon_0 = 1_0$. Alors pour tout groupe G, l'application associant à un foncteur de source le groupoïde $\mathcal{G}$ et de but G, considéré comme groupoïde à un seul objet, sa restriction au groupe d'automorphismes $\mathsf{Aut}_{\mathcal{G}}(0)$ de l'objet 0 de $\mathcal{G}$, établit une bijection entre les morphismes de groupes de $\mathsf{Aut}_{\mathcal{G}}(0)$ vers G, et les foncteurs de $\mathcal{G}$ vers G envoyant les flèches ε_X de $\mathcal{G}$ sur l'unité de G. Le foncteur $F : \mathcal{G} \to G$, correspondant par cette bijection à un morphisme de groupes $\varphi : \mathsf{Aut}_{\mathcal{G}}(0) \to G$, est défini en posant pour toute flèche $f : X \to Y$ de $\mathcal{G}$, $F(f) = \varphi(\varepsilon_Y f \varepsilon_X^{-1})$.*

La démonstration de ce lemme est immédiate, et elle est laissée au lecteur.

Notations. Pour tout objet X de $\mathbb{D}(e)$, on note $\langle X \rangle$ la flèche $\beta_X \, \alpha_X^{-1} : 0 \to 0$ du groupoïde $\mathcal{K}'_0(\mathbb{D})$.

Proposition 4. *Les automorphismes $\langle X\rangle$, $X \in \mathsf{Ob}(\mathbb{D}(e))$, de l'objet 0 du groupoïde $\mathcal{K}'_0(\mathbb{D})$ engendrent le groupe $\mathsf{Aut}_{\mathcal{K}'_0(\mathbb{D})}(0)$, satisfont aux relations suivantes :*

a) $\langle\, 0\,\rangle = 1_0$;

b) $\langle X\rangle = \langle Y\rangle$, *pour tout couple X, Y d'objets isomorphes de $\mathbb{D}(e)$;*

c) $\langle X_{00}\rangle\,\langle X_{10}\rangle^{-1}\langle X_{11}\rangle\,\langle X_{01}\rangle^{-1} = 1_0$, *pour tout objet cartésien X de $\mathbb{D}(\square)$ de diagramme sous-jacent*

$$\mathsf{dia}(X) \;=\; \begin{tikzcd} X_{00} \arrow[r] \arrow[d] & X_{01} \arrow[d] \\ X_{10} \arrow[r] & X_{11} \end{tikzcd} \quad ;$$

et on obtient ainsi une présentation du groupe $\mathsf{Aut}_{\mathcal{K}'_0(\mathbb{D})}(0)$ par générateurs et relations.

Démonstration. Vérifions d'abord les relations (a), (b) et (c). La relation (a) résulte de la relation (0) de la proposition 3. Pour tout isomorphisme $f : X \longrightarrow Y$ de $\mathbb{D}(e)$, la relation (##) de cette même proposition, appliquée à l'isomorphisme i_f de $\mathbb{D}(\square)$, implique que

$$\alpha_0^{-1}\alpha_Y\;\beta_Y^{-1}\beta_X \;=\; \beta_0^{-1}\beta_0\,\alpha_0^{-1}\alpha_X \quad ,$$

d'où $\beta_X\;\alpha_X^{-1} = \beta_Y\;\alpha_Y^{-1}$, ce qui prouve la relation (b). La relation (c) est une reformulation de la relation (##), appliquée à $f = 1_X$, pour un objet cartésien X de $\mathbb{D}(\square)$. En vertu du lemme précédent, pour prouver que les automorphismes $\langle X\rangle$, $X \in \mathsf{Ob}(\mathbb{D}(e))$, engendrent le groupe $\mathsf{Aut}_{\mathcal{K}'_0(\mathbb{D})}(0)$, et qu'on obtient ainsi à l'aide des relations (a), (b), (c) une présentation de ce groupe, il suffit de montrer que pour tout groupe G et toute famille g_X, $X \in \mathsf{Ob}(\mathbb{D}(e))$, d'éléments de G telle que

i) $g_0 = 1$;

ii) $g_X = g_Y$, pour tout couple X, Y d'objets isomorphes de $\mathbb{D}(e)$;

iii) $g_{X_{00}}\cdot g_{X_{10}}^{-1}\cdot g_{X_{11}}\cdot g_{X_{01}}^{-1} = 1$, pour tout objet cartésien X de $\mathbb{D}(\square)$ de diagramme sous-jacent

$$\mathsf{dia}(X) \;=\; \begin{tikzcd} X_{00} \arrow[r] \arrow[d] & X_{01} \arrow[d] \\ X_{10} \arrow[r] & X_{11} \end{tikzcd} \quad ;$$

il existe un unique foncteur $F : \mathcal{K}'_0(\mathbb{D}) \longrightarrow G$, de $\mathcal{K}'_0(\mathbb{D})$ vers G, considéré comme groupoïde à un seul objet, tel que pour tout objet X de $\mathbb{D}(e)$, on ait

$$F(\langle X\rangle) = g_X \qquad \text{et} \qquad F(\alpha_X) = 1 \quad ,$$

autrement dit,

$$F(\beta_X) = g_X \qquad \text{et} \qquad F(\alpha_X) = 1 \quad .$$

Pour cela, par définition du groupoïde $\mathcal{K}'_0(\mathbb{D})$, il suffit de vérifier les relations (0) et (1) de la proposition 3. La relation (0) résulte de la relation (i) ci-dessus. Pour prouver la relation (1), on doit montrer que pour tout isomorphisme $f : X \longrightarrow Y$ entre objets cartésiens de $\mathbb{D}(\square)$ tel que

$$\mathsf{dia}(f) \;=\; \begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small] & X_{00} \arrow[rr] \arrow[dl] \arrow[dd] & & X_{01} \arrow[dl] \arrow[dd] \\ X_{10} \arrow[rr, crossing over] \arrow[dd] & & X_{11} & \\ & Y_{00} \arrow[rr] \arrow[dl] & & Y_{01} \arrow[dl] \\ Y_{10} \arrow[rr] & & Y_{11} \arrow[from=uu, crossing over] & \end{tikzcd} \quad ,$$

on a

$$1^{-1}\cdot 1\cdot g_{Y_{01}}^{-1}\cdot g_{X_{00}} = g_{Y_{11}}^{-1}\cdot g_{X_{10}}\cdot 1^{-1}\cdot 1 \quad ,$$

autrement dit en vertu de (ii), que

$$g_{X_{01}}^{-1} \cdot g_{X_{00}} = g_{X_{11}}^{-1} \cdot g_{X_{10}} \quad ,$$

qui est une réécriture de (iii), ce qui prouve la proposition. □

Remarque. La proposition 1 du paragraphe 4 est conséquence directe des propositions 3 et 4, et de la deuxième description du groupe $\mathsf{K}_0(\mathbb{D}(e))$, présentée au début du paragraphe. En particulier, cela prouve la conjecture 1, pour le cas $n = 0$, puisque le K_0 d'une catégorie exacte coïncide avec le K_0 de sa catégorie dérivée, considérée comme catégorie triangulée.

7. Un lemme de strictification.

Soient m et m' deux entiers, $0 \leq m' \leq m$. On note $i_{m,m'}$ l'inclusion canonique

$$i_{m,m'} : \Delta^{\circ}_{m'} \hookrightarrow \Delta^{\circ}_{m} \quad , \qquad k \longmapsto k \ , \quad 0 \leq k \leq m' \ ,$$

qui est une immersion fermée ($\Delta^{\circ}_{m'}$ est un cocrible de Δ°_{m}). En particulier, on a

$$i_{m,0} = i_{\Delta^{\circ}_{m},0} \quad , \qquad i_{m,m-1} = \delta_m \quad , \qquad i_{m,m} = 1_{\Delta^{\circ}_{m}} \quad .$$

Proposition 5. *Soit $\mathbb{D}$ un dérivateur triangulé de domaine $\mathcal{D}ia = \mathcal{O}rd_f$, la catégorie des ensembles ordonnés finis (considérés comme petites catégories). Quitte à remplacer $\mathbb{D}$ par un dérivateur triangulé équivalent, on peut choisir les adjoints à droite $(i_{m,m'})_* : \mathbb{D}(\Delta^{\circ}_{m'}) \longrightarrow \mathbb{D}(\Delta^{\circ}_{m})$, $0 \leq m' \leq m$, des foncteurs $i^*_{m,m'} : \mathbb{D}(\Delta^{\circ}_{m}) \longrightarrow \mathbb{D}(\Delta^{\circ}_{m'})$ de sorte que les isomorphismes canoniques suivants soient des* égalités :

1) *pour tout $m \geq 0$, $(i_{m,m})_* = 1_{\mathbb{D}(\Delta^{\circ}_{m})}$;*
2) *pour tout carré cartésien de la forme*

$$\begin{tikzcd}
\Delta^{\circ}_{n'} \arrow[r, "j'"] \arrow[d, "i_{n,n'}"'] & \Delta^{\circ}_{m'} \arrow[d, "i_{m,m'}"] \\
\Delta^{\circ}_{n} \arrow[r, "j"'] & \Delta^{\circ}_{m}
\end{tikzcd} \quad ,$$

avec j (donc aussi j') application strictement *croissante, $j^*(i_{m,m'})_* = (i_{n,n'})_* j'^*$.*

Démonstration. Soient I un ensemble ordonné fini, et $\mathcal{P}(I)$ l'ensemble ordonné par inclusion des parties de I, considéré comme sous-catégorie pleine de $\mathcal{D}ia\,/I$. On a un foncteur composé $F_I : \mathcal{P}(I)^{\circ} \longrightarrow \mathcal{C}at$,

$$\mathcal{P}(I)^{\circ} \hookrightarrow (\mathcal{D}ia\,/I)^{\circ} \xrightarrow{\text{oubli}} \mathcal{D}ia^{\circ} \xrightarrow{\mathbb{D}} \mathcal{C}at \xrightarrow{\mathcal{I}so} \mathcal{C}at \quad ,$$

associant à une partie I' de I la catégorie ayant les mêmes objet que $\mathbb{D}(I')$, et comme morphismes les isomorphismes de $\mathbb{D}(I')$. La "construction de Grothendieck" associe au foncteur F_I une catégorie fibrée sur $\mathcal{P}(I)$,

$$\mathsf{Fib}_{\mathbb{D}}(I) \xrightarrow{P_I} \mathcal{P}(I) \quad .$$

On note $\widetilde{\mathbb{D}}(I)$ la catégorie des sections du foncteur P_I, qui est une "2-limite projective" du foncteur F_I. Explicitement, les objets de $\widetilde{\mathbb{D}}(I)$ sont les couples de familles

$$\Big((X_{I'})_{I' \subset I} \ , \ (\varphi_{I'I''})_{I'' \subset I' \subset I} \Big) \quad ,$$

où pour tout $I' \subset I$, $X_{I'}$ est un objet de $\mathbb{D}(I')$, et pour tous $I'' \subset I' \subset I$, si l'on note $i : I'' \hookrightarrow I'$ le foncteur d'inclusion, $\varphi_{I'I''} : X_{I''} \longrightarrow i^*(X_{I'})$ est un isomorphisme de $\mathbb{D}(I'')$, satisfaisant aux conditions suivantes :

i) pour tout $I' \subset I$, $\varphi_{I'I'} = 1_{X_{I'}}$;

ii) pour tous $I''' \subset I'' \subset I' \subset I$, si l'on note $i : I'' \hookrightarrow I'$ et $i' : I''' \hookrightarrow I''$ les foncteurs d'inclusion, alors on a l'égalité

$$\begin{array}{ccc} X_{I'''} & \xrightarrow{\varphi_{I''I'''}} & i'^*(X_{I''}) \\ {\scriptstyle \varphi_{I'I'''}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i'^*(\varphi_{I'I''})} \\ (ii')^*(X_{I'}) & = & i'^*i^*(X_{I'}) \end{array} \qquad \varphi_{I'I'''} = i'^*(\varphi_{I'I''})\varphi_{I''I'''} \quad .$$

Un morphisme

$$\Big((X_{I'})_{I' \subset I}\ ,\ (\varphi_{I'I''})_{I'' \subset I' \subset I}\Big) \longrightarrow \Big((Y_{I'})_{I' \subset I}\ ,\ (\psi_{I'I''})_{I'' \subset I' \subset I}\Big)$$

de $\widetilde{\mathbb{D}}(I)$ est une famille $(\theta_{I'})_{I' \subset I}$, où pour tout $I' \subset I$, $\theta_{I'} : X_{I'} \to Y_{I'}$ est un morphisme de $\mathbb{D}(I')$, telle que pour tous $I'' \subset I' \subset I$, on ait l'égalité

$$\begin{array}{ccc} X_{I''} & \xrightarrow{\theta_{I''}} & Y_{I''} \\ {\scriptstyle \varphi_{I'I''}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \psi_{I'I''}} \\ i^*(X_{I'}) & \xrightarrow[i^*(\theta_{I'})]{} & i*(Y_{I'}) \end{array} \qquad \psi_{I'I''}\theta_{I''} = i^*(\theta_{I'})\varphi_{I'I''} \quad .$$

Les propriétés fonctorielles de la construction de Grothendieck permettent de vérifier facilement qu'on définit ainsi un 2-foncteur strict

$$\widetilde{\mathbb{D}} : \mathcal{D}ia^\circ \longrightarrow \mathcal{C}at \quad , \qquad I \longmapsto \widetilde{\mathbb{D}}(I) \quad .$$

Concrètement, si $u : J \to I$ est dans $\mathcal{D}ia$, on définit un foncteur $\widetilde{u}^* : \widetilde{\mathbb{D}}(I) \to \widetilde{\mathbb{D}}(J)$, en associant à un objet $\big((X_{I'}), (\varphi_{I''I'})\big)$ de $\widetilde{\mathbb{D}}(I)$ l'objet $\big((Y_{J'}), (\psi_{J''J'})\big)$ de $\widetilde{\mathbb{D}}(J)$, défini comme suit. Pour tout $J' \subset J$, on note $u_{J'} : J' \to u(J')$ la restriction de u à J', et on pose

$$\begin{aligned} Y_{J'} &= u_{J'}^*(X_{u(J')}) \quad , \qquad J' \subset J \quad , \\ \psi_{J'J''} &= u_{J''}^*(\varphi_{u(J'),u(J'')}) \quad , \qquad J'' \subset J' \subset J \quad . \end{aligned}$$

On va montrer que les 2-foncteurs $\mathbb{D}$ et $\widetilde{\mathbb{D}}$ sont équivalents. Pour cela, on définit des morphismes (non stricts) de 2-foncteurs

$$\Phi : \mathbb{D} \longrightarrow \widetilde{\mathbb{D}} \qquad \text{et} \qquad \Psi : \widetilde{\mathbb{D}} \longrightarrow \mathbb{D}$$

comme suit. Pour tout I dans $\mathcal{D}ia$, le premier associe à un objet X de $\mathbb{D}(I)$ l'objet $\big((i_{I'}^*(X))_{I' \subset I}\ ,\ (1_{i_{I''}^*(X)})_{I'' \subset I' \subset I}\big)$ de $\widetilde{\mathbb{D}}(I)$, où pour tout $I' \subset I$, $i_{I'} : I' \hookrightarrow I$ désigne le foncteur d'inclusion. Le second associe à un objet $\big((X_{I'}), (\varphi_{I'I''})\big)$ de $\widetilde{\mathbb{D}}(I)$ l'objet X_I de $\mathbb{D}(I)$. On vérifie alors facilement que Φ et Ψ sont des équivalences de 2-foncteurs quasi-inverses l'une de l'autre. L'invariance des axiomes d'un dérivateur triangulé par équivalence de 2-foncteurs prouve donc que $\widetilde{\mathbb{D}}$ est un dérivateur triangulé.

Il reste à définir, pour $m \geq m' \geq 0$, des adjoints $(\widetilde{\imath}_{m,m'})_* : \widetilde{\mathbb{D}}(\Delta_{m'}^\circ) \to \widetilde{\mathbb{D}}(\Delta_m^\circ)$ des foncteurs $\widetilde{\imath}_{m,m'}^* : \widetilde{\mathbb{D}}(\Delta_m^\circ) \to \widetilde{\mathbb{D}}(\Delta_{m'}^\circ)$, satisfaisant aux conditions de la proposition. Pour cela, on choisit des adjoints à droite $(i_{m,m'})_* : \mathbb{D}(\Delta_{m'}^\circ) \to \mathbb{D}(\Delta_m^\circ)$ des foncteurs $i_{m,m'}^* : \mathbb{D}(\Delta_m^\circ) \to \mathbb{D}(\Delta_{m'}^\circ)$, de façon arbitraire, avec la seule précaution de prendre $(i_{m,m})_* = 1_{\mathbb{D}(\Delta_m^\circ)}$, et on définit $(\widetilde{\imath}_{m,m'})_*$ comme suit. Soit

$$\Big((X_I)_{I \subset \{0,1,\dots,m'\}}\ ,\ (\varphi_{II'})_{I' \subset I \subset \{0,1,\dots,m'\}}\Big)$$

un objet de $\widetilde{\mathbb{D}}(\Delta^\circ_{m'})$. On va définir

$$(\widetilde{\imath}_{m,m'})_*\Big((X_I)\,,\ (\varphi_{II'})\Big) = \Big((Y_J)_{J\subset\{0,1,\dots,m\}}\,,\ (\psi_{JJ'})_{J'\subset J\subset\{0,1,\dots,m\}}\Big)$$

comme suit. Soit $J \subset \{0,1,\dots,m\}$. Il existe une unique injection croissante

$$j_J : \Delta^\circ_{n_J} \longrightarrow \Delta^\circ_m \qquad (\text{resp. } j'_J : \Delta^\circ_{n'_J} \longrightarrow \Delta^\circ_{m'}\ ) \quad ,$$

où $n_J = \mathsf{card}(J) - 1$ (resp. $n'_J = \mathsf{card}(J \cap \{0,1,\dots,m'\}) - 1$), d'image égale à J (resp. à $J \cap \{0,1,\dots,m'\}$). Notons

$$\bar{\jmath}_J : \Delta^\circ_{n_J} \longrightarrow J \qquad (\text{resp. } \bar{\jmath}'_J : \Delta^\circ_{n'_J} \longrightarrow J \cap \{0,1,\dots,m'\} = i^{-1}_{m,m'}(J)\ )$$

les isomorphismes correspondants. On pose

$$Y_J = (\bar{\jmath}_J^{-1})^*(i_{n_J,n'_J})_*(\bar{\jmath}'_J)^*\big(X_{i^{-1}_{m,m'}(J)}\big) \quad .$$

Pour définir $\psi_{JJ'}$, $J' \subset J \subset \Delta^\circ_m$, formons le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
\Delta^\circ_{n'_{J'}} \arrow[rr, "k'"] \arrow[dr, "\bar{\jmath}'_{J'}", "\sim"'] \arrow[dd, "i_{n_{J'},n'_{J'}}"'] & & \Delta^\circ_{n'_J} \arrow[dr, "\bar{\jmath}'_J"', "\sim"] \arrow[drr, "j'_J"] \arrow[dd, "i_{n_J,n'_J}" near start] & & \\
& i^{-1}_{m,m'}(J') \arrow[rr, "j'" near start] \arrow[dd] & & i^{-1}_{m,m'}(J) \arrow[r] \arrow[dd] & \Delta^\circ_{m'} \arrow[dd, "i_{m,m'}"] \\
\Delta^\circ_{n_{J'}} \arrow[rr, "k"' near end] \arrow[dr, "\bar{\jmath}_{J'}"', "\sim"] & & \Delta^\circ_{n_J} \arrow[dr, "\bar{\jmath}_J"', "\sim"] \arrow[drr, "j_J"] & & \\
& J' \arrow[rr, "j"'] & & J \arrow[r] & \Delta^\circ_m
\end{tikzcd}$$

dont tous les carrés sont cartésiens. On a un isomorphisme de changement de base

$$c : k^*(i_{n_J,n'_J})_* \longrightarrow (i_{n_{J'},n'_{J'}})_* k'^* \quad ,$$

correspondant à la face arrière du cube, et en posant $I = i^{-1}_{m,m'}(J)$ et $I' = i^{-1}_{m,m'}(J')$, on en déduit des morphismes

$$\psi_{JJ'} = (\bar{\jmath}_{J'}^{-1})^*\big(c^{-1}_{\bar{\jmath}'^*_J(X_I)}\big) \circ (\bar{\jmath}_{J'}^{-1})^*(i_{n_{J'},n'_{J'}})_*\bar{\jmath}'^*_{J'}(\varphi_{II'}) \quad .$$

$$\begin{tikzcd}
Y_{J'} = (\bar{\jmath}_{J'}^{-1})^*(i_{n_{J'},n'_{J'}})_*\bar{\jmath}'^*_{J'}(X_{I'}) \arrow[dr, "\psi_{JJ'}"] \arrow[dd, "(\bar{\jmath}_{J'}^{-1})^*(i_{n_{J'},n'_{J'}})_*\bar{\jmath}'^*_{J'}(\varphi_{II'})"'] & \\
& j^*(Y_J) \arrow[d, equal] \\
(\bar{\jmath}_{J'}^{-1})^*(i_{n_{J'},n'_{J'}})_*\bar{\jmath}'^*_{J'}\, j'^*(X_I) \arrow[d, equal] & j^*(\bar{\jmath}_J^{-1})^*(i_{n_J,n'_J})_*\bar{\jmath}'^*_J(X_I) \arrow[d, equal] \\
(\bar{\jmath}_{J'}^{-1})^*(i_{n_{J'},n'_{J'}})_*\, k'^*\,\bar{\jmath}'^*_J(X_I) \arrow[r, "(\bar{\jmath}_{J'}^{-1})^*(c^{-1}_{\bar{\jmath}'^*_J(X_I)})"'] & (\bar{\jmath}_{J'}^{-1})^* k^*(i_{n_J,n'_J})_*\bar{\jmath}'^*_J(X_I)
\end{tikzcd}$$

On laisse le soin au lecteur de vérifier que $\big((Y_J),\,(\psi_{JJ'})\big)$ est un objet de $\widetilde{\mathbb{D}}(\Delta^\circ_m)$, et qu'on définit ainsi des adjoints à droite $(\widetilde{\imath}_{m,m'})_* : \widetilde{\mathbb{D}}(\Delta^\circ_{m'}) \longrightarrow \widetilde{\mathbb{D}}(\Delta^\circ_m)$ des foncteurs $\widetilde{\imath}^*_{m,m'} : \widetilde{\mathbb{D}}(\Delta^\circ_m) \longrightarrow \widetilde{\mathbb{D}}(\Delta^\circ_{m'})$, satisfaisant aux conditions de la proposition. $\square$

Remarque. Si un dérivateur triangulé $\mathbb{D}$ satisfait aux conditions de la proposition ci-dessus, on a en particulier les propriétés suivantes :

i) pour tout $m \geq 1$, $\delta_m^* \delta_{m*} = 1_{\mathbb{D}(\Delta_m^\circ)}$;

ii) pour tout $m \geq 2$, et tout i, $0 \leq i < m$, on a un carré commutatif (*strictement*, et pas seulement à isomorphisme près)

$$\begin{tikzcd} \mathbb{D}(\Delta_{m-2}^\circ) \arrow[d, "(\delta_{m-1})_*"'] & \mathbb{D}(\Delta_{m-1}^\circ) \arrow[l, "\delta_i^*"'] \arrow[d, "\delta_{m*}"] \\ \mathbb{D}(\Delta_{m-1}^\circ) & \mathbb{D}(\Delta_m^\circ) \arrow[l, "\delta_i^*"] \end{tikzcd} .$$

Références

[**BBD**] A. A. Beilinson, J. Bernstein, P. Deligne, "Faisceaux pervers", Astérisque 100 (1982).

[**C**] D.-C. Cisinski, *Images directes cohomologiques dans les catégories de modèles*, Ann. Math. Blaise Pascal, Volume 10, pp. 195-244 (2003).

[**CN**] D.-C. Cisinski, A. Neeman, *Additivity for Derivator* K*-Theory*, Preprint (2005).

[**F**] J. Franke, *Uniqueness theorems for certain triangulated categories possessing an Adams spectral sequence*, preprint, K-theory Preprint Archives 139 (1996).

[**G**] G. Garkusha, *Systems of diagram categories and* K*-theory. II*, Math. Z. 249, no. 3, pp. 641-682 (2005).

[**PS**] A. Grothendieck, "Pursuing Stacks", manuscrit (1983), à paraître dans Documents Mathématiques.

[**Der**] A. Grothendieck, "Les dérivateurs", manuscrit (∼1990), édité par M. Künzer, J. Malgoire, G. Maltsiniotis, http ://www.math.jussieu.fr/~maltsin/groth/Derivateurs.html.

[**H**] A. Heller, *Homotopy theories*, Memoirs of the American Mathematical Society, Vol 71, No 383, (1988).

[**H1**] A. Heller, *Stable homotopy theories and stabilization*, J. Pure Appl. Algebra, 115, pp. 113-130, (1997).

[**H2**] A. Heller, *Homological algebra and (semi)stable homotopy*, J. Pure Appl. Algebra, 115, pp. 131-139, (1997).

[**H3**] A. Heller, *Semistability and infinite loop spaces*, J. Pure Appl. Algebra, 154, pp. 213-220, (2000).

[**J**] J. F. Jardine, *The multiple Q-construction*, Can. J. Math. Vol. XXXIX, No 5, pp. 1174-1209 (1987).

[**K**] B. Keller, *Derived categories and universal problems*, Comm. in Alg. 19(3), pp. 699-747 (1991).

[**M1**] G. Maltsiniotis, *Introduction à la théorie des dérivateurs, d'après Grothendieck*, Preprint (2001), http ://www.math.jussieu.fr/~maltsin/.

[**M2**] G. Maltsiniotis, *Structure triangulée sur les catégories des coefficients d'un dérivateur triangulé*, Exposés au groupe de travail "Algèbre et topologie homotopiques" (2001), texte en préparation.

[**N1**] A. Neeman, K*-theory for triangulated categories*, I(A), I(B), II, III(A), III(B), Asian J. Math. Vol. 1 No 2, pp. 330-417 (1997), Vol. 1 No 3, pp. 435-529 (1997), Vol. 2 No 1, pp. 1-125 (1998), Vol 2 No 3, pp. 495-589 (1998), Vol. 3 No 3, pp. 557-608 (1999).

[**N2**] A. Neeman, K*-theory for triangulated categories*, $3\frac{1}{2}$(A), $3\frac{1}{2}$(B), $3\frac{3}{4}$, K-Theory, Vol. 20, pp. 97-174 (2000), Vol. 20, pp. 243-298 (2000), Vol. 22 pp. 1-144 (2001).

[**N3**] A. Neeman, *The* K*-theory of triangulated categories*, Handbook on K-Theory, Vol. 2, pp. 1011-1078, Springer-Verlag (2005).

[**Q**] D. Quillen, *Higher algebraic* K*-theory : I*, dans "Algebraic K-theory I" (H. Bass éd.), Lecture Notes in Mathematics 341, pp. 85-147, Springer-Verlag (1973).

[**R**] O. Renaudin, *Théories homotopiques de Quillen combinatoires et dérivateurs de Grothendieck*, Preprint (2005).

[**S**] M. Schlichting, *A note on* K*-theory and triangulated categories*, Invent. Math. 150, 1, pp. 111-116 (2002).

[Th] R. W. Thomason, T. F. Trobaugh, *Higher algebraic* K*-theory of schemes and of derived categories*, in The Grothendieck Festschrift, Vol. III, pp. 247–435, Progr. Math., 88, Birkhäuser (1990).

[V1] A. Vaknin, *Virtual triangles*, K-Theory, Vol. 22, pp. 161-198 (2001).

[V2] A. Vaknin, K_1 *for triangulated categories*, K-Theory, Vol. 24, pp. 1-56 (2001).

[V3] A. Vaknin, *Determinants in triangulated categories*, K-Theory, Vol. 24, pp. 57-68 (2001).

[V] J.-L. Verdier, "Des catégories dérivées des catégories abéliennes", édité par G. Maltsiniotis, Astérisque 239 (1996).

[W] F. Waldhausen, *Algebraic* K*-Theory of spaces*, in Algebraic Geometric Topology Proceedings, Rutgers 1983, Lecture Notes in Mathematics 1126, pp. 318-419, Springer-Verlag (1985).

Georges Maltsiniotis, CNRS, Université Paris 7, UFR de Mathématiques, Case 7012, 2, place Jussieu, 75251 Paris Cedex 05, France
maltsin@math.jussieu.fr
www.math.jussieu.fr/~maltsin

APPENDICE

LE DÉRIVATEUR TRIANGULÉ ASSOCIÉ À UNE CATÉGORIE EXACTE

BERNHARD KELLER

Résumé. Nous esquissons une démonstration du fait que la catégorie dérivée d'une catégorie exacte est la catégorie fondamentale d'un dérivateur triangulé.

1. La catégorie dérivée

Soit $\mathcal{E}$ une catégorie exacte au sens de Quillen [2]. Suivant la terminologie de Gabriel [1], nous appelons *conflations* ses suites exactes admissibles, *inflations* ses monomorphismes admissibles et *déflations* ses épimorphismes admissibles. Un complexe

$$\ldots \longrightarrow M^p \xrightarrow{d^p} M^{p+1} \longrightarrow \ldots\,,\ p \in \mathbb{Z}\,,\ d^2 = 0\,,$$

sur $\mathcal{E}$ est *borné* si M^p s'annule pour tout $|p| \gg 0$. On note $\mathsf{C}^b\mathcal{E}$ *la catégorie des complexes bornés* sur $\mathcal{E}$ et $\mathsf{H}^b\mathcal{E}$ *la catégorie quotient* de $\mathsf{C}^b\mathcal{E}$ par l'idéal des morphismes homotopes à zéro. Rappelons que la catégorie $\mathsf{H}^b\mathcal{E}$ est triangulée au sens de Verdier [3].

Un complexe M est *contractile* s'il est isomorphe au complexe nul dans $\mathsf{H}^b\mathcal{E}$. Il est *acyclique* s'il existe des conflations

$$Z^p \xrightarrow{i^p} M^p \xrightarrow{q^p} Z^{p+1}\ ,\ p \in \mathbb{Z}\,,$$

telles que $d^p = i^{p+1}q^p$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$. Si $\mathcal{E}$ est *karoubienne* (c'est-à-dire que tout endomorphisme idempotent d'un objet de $\mathcal{E}$ admet un noyau), alors tout complexe contractile est acyclique. On note $\mathcal{N} = \mathcal{N}_{\mathcal{E}}$ la sous-catégorie pleine de $\mathsf{H}^b\mathcal{E}$ dont les objets sont les complexes qui, dans $\mathsf{H}^b\mathcal{E}$, sont isomorphes à des complexes acycliques.

Voici une autre description de $\mathcal{N}$: soit $\mathcal{E} \to \widetilde{\mathcal{E}}$ le foncteur additif universel de $\mathcal{E}$ vers une catégorie additive karoubienne. La catégorie $\widetilde{\mathcal{E}}$ devient exacte si on la munit des suites qui sont des facteurs directs d'images de conflations de $\mathcal{E}$. On montre alors qu'un complexe sur $\mathcal{E}$ appartient à $\mathcal{N}$ si et seulement si son image dans $\mathsf{H}^b\widetilde{\mathcal{E}}$ est acyclique. La catégorie $\mathcal{N}_{\widetilde{\mathcal{E}}}$ est une sous-catégorie triangulée épaisse de $\mathsf{H}^b\widetilde{\mathcal{E}}$. On en déduit que $\mathcal{N}$ est une sous-catégorie triangulée épaisse de $\mathsf{H}^b\mathcal{E}$. On note Σ le système multiplicatif associé à $\mathcal{N}$ et on appelle *quasi-isomorphismes* les éléments de Σ. Un morphisme s de $\mathsf{H}^b\mathcal{E}$ est donc un quasi-isomorphisme si et seulement si dans tout triangle

$$L \xrightarrow{s} M \to N \to L[1] \,,$$

le complexe N appartient à $\mathcal{N}$. La *catégorie dérivée* $\mathsf{D}^b\mathcal{E}$ est la localisée de $\mathsf{H}^b\mathcal{E}$ par rapport à Σ. Il en résulte que $\mathsf{D}^b\mathcal{E}$ est une catégorie triangulée, 2-fonctorielle en la catégorie exacte $\mathcal{E}$.

2. Le dérivateur triangulé

Soit $\mathcal{E}$ une catégorie exacte. Soit A une petite catégorie. La catégorie des préfaisceaux

$$\mathcal{E}(A) = \underline{\mathsf{Hom}}(A^\circ, \mathcal{E})$$

devient une catégorie exacte si on la munit des suites qui sont des conflations argument par argument. Nous avons un isomorphisme de catégories exactes

$$\widetilde{\mathcal{E}(A)} \xrightarrow{\sim} \widetilde{\mathcal{E}}(A).$$

On en déduit qu'un morphisme s de $\mathsf{H}^b(\mathcal{E}(A))$ appartient à $\Sigma_{\mathcal{E}(A)}$ si et seulement si $s(a)$ appartient à $\Sigma_{\mathcal{E}}$ pour tout objet a de A. On pose

$$\mathbb{D}(A) = \mathbb{D}_{\mathcal{E}}(A) = \mathsf{D}^b(\mathcal{E}(A)).$$

On obtient ainsi un 2-foncteur $\mathbb{D} : \mathcal{C}at^\circ \to \mathcal{C}at$ défini sur la 2-catégorie des petites catégories. On montre que $\mathbb{D}$ satisfait aux axiomes **Der 1** et **Der 2** d'un dérivateur.

Dorénavant nous considérons la restriction de $\mathbb{D}$ à la 2-catégorie des catégories directes finies. Nous la notons encore $\mathbb{D}$. Nous allons esquisser une démonstration du fait qu'elle est un dérivateur triangulé.

Soit A une catégorie directe finie et a un objet de A. Notons $i_{A,a} : e \to A$ le foncteur déterminé par a. Le foncteur d'évaluation

$$i_{A,a}^* : \mathcal{E}(A) \to \mathcal{E}(e) \,,\ F \mapsto F(a)$$

admet un adjoint à droite $i_{A,a\,*}$ qui envoie un objet M de $\mathcal{E}$ sur le préfaisceau

$$b \mapsto \prod_{\mathsf{Hom}_A(a,b)} M.$$

Les foncteurs $i_{A,a}^*$ et $i_{A,a\,*}$ sont exacts. Ils induisent donc un couple de foncteurs adjoints, désignés par les mêmes symboles, entre $\mathbb{D}(A)$ et $\mathbb{D}(e)$.

Lemme 1. *La catégorie triangulée $\mathbb{D}(A)$ est engendrée par les objets $i_{A,a\,*}M$, où a parcourt les objets de A et M ceux de $\mathcal{E}$.*

Démonstration. Comme $\mathbb{D}(A)$ est engendrée par $\mathcal{E}(A)$, il suffit de montrer que tout objet de $\mathcal{E}(A)$ appartient à la sous-catégorie triangulée de $\mathbb{D}(A)$ engendrée par les $i_{A,a\,*}M$. Soit F un objet de $\mathcal{E}(A)$. Considérons le morphisme

$$F \xrightarrow{\varphi F} \prod_{a \in \mathsf{Ob}(A)} i_{A,a\,*}(F(a))$$

dont les composantes sont les morphismes d'adjonction. Pour tout objet a de A, le morphisme $(\varphi F)(a)$ admet une rétraction. Donc φF est une inflation de $\mathcal{E}(A)$.

Notons IF son but et CF son conoyau. Nous obtenons un complexe acyclique naturel

$$0 \to F \to IF \to ICF \to \dots \to IC^pF \to \dots ,$$

d'où un quasi-isomorphisme entre F et ce complexe amputé de F. On vérifie que C^pF s'annule dès que p excède la longueur maximale d'une chaîne

$$a_0 \to a_1 \to \dots \to a_n$$

de morphismes non identiques de A. L'affirmation en découle. $\surd$

Lemme 2. *Soient $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$ des catégories triangulées. Supposons que $\mathcal{T}$ est engendrée, en tant que catégorie triangulée, par une classe d'objets $\mathcal{X}$.*

a) *Un foncteur triangulé $F : \mathcal{S} \to \mathcal{T}$ admet un adjoint à droite si (et seulement si) pour tout objet $X \in \mathcal{X}$, le foncteur*

$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(F(\,?\,), X) : \mathcal{S}^{\circ} \to \mathsf{A}b$$

est représentable. Dans ce cas, cet adjoint se complète de manière canonique en un foncteur triangulé.

b) *Soient $G, G' : \mathcal{T} \to \mathcal{S}$ deux foncteurs triangulés et $\varphi : F \to G$ un morphisme de foncteurs triangulés. Le morphisme φ est inversible si (et seulement si) φX est inversible pour tout objet $X \in \mathcal{X}$.*

$\surd$

Soit $u : A \to B$ un foncteur entre catégories directes finies. Pour montrer l'existence de l'adjoint à droite u_*, affirmée par l'axiome **Der 3**, vérifions la condition du point a) du lemme 2. Soient a un objet de A, M un objet de $\mathcal{E}$ et F un objet de $\mathbb{D}(B)$. Alors nous avons des bijections, fonctorielles en F,

$$\mathsf{Hom}_{\mathbb{D}(A)}(u^*F, i_{A,a\,*}M) \xrightarrow{\sim} \mathsf{Hom}_{\mathbb{D}(e)}(F(u(a)), M) \xrightarrow{\sim} \mathsf{Hom}_{\mathbb{D}(B)}(F, i_{B,u(a)\,*}M) \ .$$

Le foncteur $\mathsf{Hom}_{\mathbb{D}(A)}(u^*(\,?\,), i_{A,a\,*}M)$ est donc bien représentable et u^* admet un adjoint à droite.

A l'aide du point b) du lemme 2, on vérifie facilement la partie de l'axiome **Der 4** relative à u_*. En effet, par le lemme, il suffit de vérifier l'affirmation pour $F = i_{A,a*}(M)$, où M est un objet de $\mathcal{E}$ et a un objet de A. Avec ces notations, nous avons

$$u_*(F) = u_* i_{A,a*}(M) = i_{B,u(a)*}(M)$$

et cet objet est le préfaisceau

$$b \mapsto \prod_{\mathsf{Hom}_B(u(a),b)} M.$$

Ainsi, pour un object b de B, nous avons

$$(u_*(F))_b = \prod_{\mathsf{Hom}_B(u(a),b)} M.$$

De l'autre côté, l'objet $F \mid A/b$ est le préfaisceau qui envoie un couple $(a', u(a') \to b)$ sur

$$\prod_{\mathsf{Hom}_A(a,a')} M.$$

Pour chaque $(a', g : u(a') \to b)$, l'ensemble $\mathsf{Hom}_A(a, a')$ est la réunion disjointe des ensembles de morphismes d'un $(a, f : u(a) \to b)$ vers $(a', g : u(a') \to b)$. Ainsi, le préfaisceau $F \mid A/b$ est le produit des préfaisceaux

$$(i_{A/b,(a,f)})_*(M) \ ,$$

où f parcourt les fléches $f : u(a) \to b$ de B. On a

$$\underleftarrow{\mathrm{holim}}(i_{A/b,(a,f)})_*(M) = (p_{A/b})_*(i_{A/b,(a,f)})_*(M) = (1_e)_*(M) = M$$

et donc

$$\underleftarrow{\mathrm{holim}}\, F \mid A/b = \prod_{f:u(a) \to b} M\ ,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Considérons l'axiome **Der 6**. Si u est pleinement fidèle on montre que u_* l'est aussi, c'est-à-dire que le morphisme d'adjonction $u^* u_* \to \mathbf{1}_{\mathbb{D}(A)}$ est inversible (on utilise le point b) du lemme 2). Si u est un cocrible, on se sert du point a) du lemme 2, pour montrer l'existence de l'adjoint à droite de u_*.

Les assertions des axiomes **Der 3**, **Der 4** et **Der 6** relatives à l'existence et les propriétés de l'adjoint à gauche $u_!$ découlent de ce qui précède appliqué à la catégorie exacte $\mathcal{E}^\circ$ grâce à l'isomorphisme entre $\mathbb{D}_{\mathcal{E}^\circ}$ et le 2-foncteur

$$A \mapsto (\mathbb{D}_{\mathcal{E}}(A^\circ))^\circ.$$

Considérons l'axiome **Der 7**. L'inclusion

$$i_{\lrcorner} : \lrcorner \to \square \quad (\text{resp. } i_{\ulcorner} : \ulcorner \to \square)$$

est un crible (resp. un cocrible). Donc les foncteurs $i_{\lrcorner *}$ et $i_{\ulcorner !}$ sont pleinement fidèles. Il s'agit de vérifier que les images essentielles de ces deux foncteurs coïncident. Pour cela, il suffit de prouver que l'image essentielle de $i_{\lrcorner *}$ est formée d'objets cocartésiens et celle de $i_{\ulcorner !}$ d'objets cartésiens. Pour montrer la première de ces assertions, il suffit de vérifier que les images par $i_{\lrcorner *}$ des générateurs $i_{\lrcorner, a\, *} M$, $a \in \mathsf{Ob}(\lrcorner)$, $M \in \mathsf{Ob}(\mathcal{E})$, sont cocartésiennes. Or ces images ne sont autres que $i_{\square, a\, *} M$, $a \in \mathsf{Ob}(\lrcorner)$, et la vérification est facile. La deuxième assertion se déduit de la première appliquée à la catégorie exacte opposée $\mathcal{E}^\circ$.

Considérons l'axiome **Der 5**. Il suffit de montrer que le foncteur canonique

$$\mathsf{D}^b(\underline{\mathsf{Hom}}(\Delta_1^\circ, \mathcal{E})) \to \underline{\mathsf{Hom}}(\Delta_1^\circ, \mathsf{D}^b\mathcal{E})$$

est plein et essentiellement surjectif. À l'aide du calcul des fractions pour la classe $\Sigma_{\mathcal{E}}$ de $\mathsf{H}^b\mathcal{E}$, on montre aisément qu'il est essentiellement surjectif. Soient maintenant L et M deux objets de $\mathsf{D}^b(\underline{\mathsf{Hom}}(\Delta_1^\circ, \mathcal{E}))$. On note $L_1 \to L_0$ l'image de L dans $\underline{\mathsf{Hom}}(\Delta_1^\circ, \mathsf{D}^b\mathcal{E})$. Soit

$$\begin{tikzcd} L_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d] & M_1 \arrow[d] \\ L_0 \arrow[r, "f_0"'] & M_0 \end{tikzcd}$$

un morphisme de $\underline{\mathsf{Hom}}(\Delta_1^\circ, \mathsf{D}^b\mathcal{E})$. À l'aide du calcul des fractions, on montre qu'il existe un objet M' de $\mathsf{D}^b(\underline{\mathsf{Hom}}(\Delta_1^\circ, \mathcal{E}))$ et un diagramme commutatif dans $\mathsf{H}^b\mathcal{E}$

$$\begin{tikzcd} L_1 \arrow[r, "g_1"] \arrow[d] & M_1' \arrow[d] & M_1 \arrow[l, "s_1"'] \arrow[d] \\ L_0 \arrow[r, "g_0"'] & M_0' & M_0 \arrow[l, "s_0"] \end{tikzcd} ,$$

où s_1 et s_0 sont des quasi-isomorphismes tels que $s_1^{-1}g_1 = f_1$ et $s_0^{-1}g_0 = f_0$ dans $\mathsf{D}^b\mathcal{E}$. Ainsi, il reste à montrer que tout carré commutatif

$$\begin{tikzcd} U_1 \arrow[r, "\overline{w_1}"] \arrow[d, "\overline{u}"'] & V_1 \arrow[d, "\overline{v}"] \\ U_0 \arrow[r, "\overline{w_0}"'] & V_0 \end{tikzcd}$$

de $\mathsf{H}^b\mathcal{E}$ se relève en un morphisme de $\mathsf{D}^b(\mathcal{E}(\Delta_1))$. Ici, nous notons $\overline{f}$ la classe d'homotopie d'un morphisme de complexes f. Choisissons une factorisation

$$vw_1 - w_0u = hk$$

à travers un complexe contractile I. Considérons le diagramme commutatif de $\mathsf{C}^b\mathcal{E}$

$$\begin{tikzcd} U_1 \arrow[d, "u"'] & U_1 \arrow[l, "\mathbf{1}"'] \arrow[r, "w_1"] \arrow[d, "\begin{bmatrix} u \\ k \end{bmatrix}"] & V_1 \arrow[d, "v"] \\ U_0 & U_0 \oplus I \arrow[l, "{[\mathbf{1}\ 0]}"] \arrow[r, "{[w_0\ h]}"'] & V_0 \end{tikzcd}$$

Clairement, il fournit un morphisme de $\mathsf{D}^b(\mathcal{E}(\Delta_1))$ qui relève le morphisme donné $(\overline{w_0}, \overline{w_1})$.

Références

[1] B. Keller, *Chain complexes and stable categories*, Manus. Math. **67** (1990), 379–417.

[2] D. Quillen, *Higher Algebraic K-theory I*, Springer LNM **341** (1973), 85–147.

[3] J.-L. Verdier, *Des catégories dérivées des catégories abéliennes*, édité par G. Maltsiniotis, Astérisque **239** (1996).

Bernhard Keller, UFR de Mathématiques, UMR 7586 du CNRS, Université Paris 7,
Case 7012, 2, place Jussieu, 75251 Paris Cedex 05, France
keller@math.jussieu.fr
www.math.jussieu.fr/~keller