Théories homotopiques de champs quantiques, espaces classifiants et champs en groupoïdes

Tim Porter
School of Informatics,
University of Wales Bangor,
Bangor,
R.U.

(partiellement avec V. Turaev et J. Faria Martins.)

Plan.

1. Rappels sur les module croisés.
2. Théories topologiques de champs quantiques (TTCQs = TQFTs);
3. Théories homotopiques de champs quantiques (THCQs = HQFTs);
4. Résultats de Classification: (i) $B = K(\pi, 1)$, (ii) $B = K(A, 2)$;
5. Applications formelles et HQFTs formelles : résultats généraux;
6. $\mathcal{C}$-algebras croisés;
7. Complexes croisés, groupes simpliciaux et espaces classifiants;
8. $\mathcal{C}$-fonctions formelles simpliciales et $\mathbf{FHCobord}(d, \mathcal{C})$;
9. $\mathcal{C}$-fibrés combinatoires : allant vers les Gerbes.

1. Modules croisés, etc

Définition

Un *module croisé* $\mathcal{C} = (C, P, \partial)$, est la donnée d'un morphisme de groupes

$$\partial : C \to P$$

et d'une action (à gauche) du groupe P sur le groupe C, qui vérifie

MC1 $\quad \partial({}^{p}c) = p \cdot \partial c \cdot p^{-1} \qquad$ pour tout $p \in P$, $c \in C$;

et

MC2 $\quad {}^{\partial c}c' = c \cdot c' \cdot c^{-1} \qquad$ pour tout $c, c' \in C$.

Exemples

- Si N est un sous-groupe distingué d'un groupe P, P agit à gauche par conjugaison sur N , ${}^{p}n = pnp^{-1}$, et l'inclusion $\iota : N \to P$ est un module croisé.
- Si M est un P-module à gauche et on définit un morphisme $0 : M \to P$ par $0(m) = 1_P$ pour tout $m \in M$, $(M, P, 0)$ est un module croisé.
- Si G est un groupe, et $\alpha : G \to Aut(G)$ est l'homomorphisme de groupes, qui envoie $g \in G$ vers l'automorphisme intérieur $\alpha(g)(g_1) = gg_1g^{-1}$, $\mathfrak{Aut}(G) = (G, Aut(G), \alpha)$ est un module croisé, pour l'action évidente de $Aut(G)$ sur G.

Aussi pour un algèbre, L, $\mathfrak{Aut}(L) = (U(L), Aut(L), \delta)$ est un module croisé, où $U(L)$ est le groupe des unités de L et δ envoie une unité, e, vers l'automorphisme donné par conjugaison avec e.

Plus d'exemples

- Si $1 \to A \to E \xrightarrow{\partial} P \to 1$ est une extension centrale des groupes, $E \xrightarrow{\partial} P$ est un module croisé.
- Si
$$F \to E \to B$$
est un espace fibré des espaces pointus, $\pi_1(F) \to \pi_1(E)$ est un module croisé.
- En particulier: si (X, A) est un couple d'espaces pointus, $\pi_2(X, A) \to \pi_1(A)$ est un module croisé.
- Cas extra spécial: X, CW-complexe, $A = X_1$, le 1-squelette de X,
$$\pi_2(X, X_1) \xrightarrow{\partial} \pi_1(X_1)$$
détermine le 2-type de X.
NB. ker$\partial = \pi_2(X)$, coker$\partial = \pi_1(X)$.

2. Théories topologiques de champs quantiques (TQFTs) sur $\mathbb{C}$).

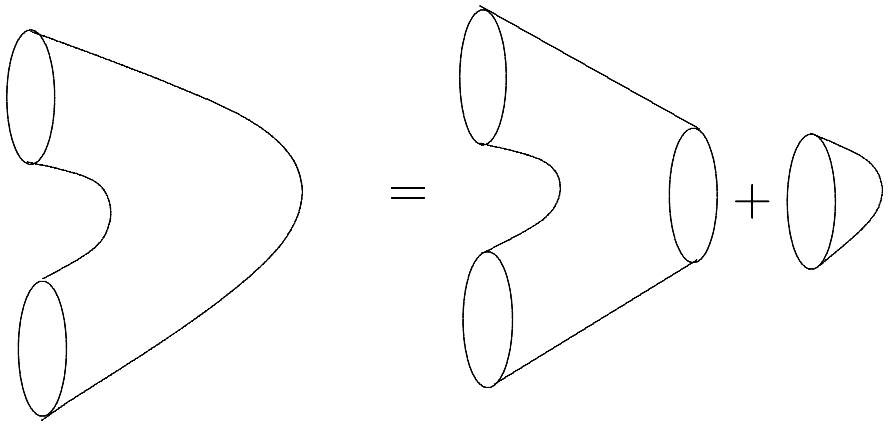
$\{d$-variétés orientées, $X\}$$\to$$\{$ espaces vectoriels complexes, $T(X)\}$

$\{$cobordismes, $M : X \to Y\} \to \{$trans. lin., $T(M) : T(X) \to T(Y)\}$

'tensor' des variétés = coproduit, $X \sqcup Y$

$\to$ tensor des espaces vectoriels, $T(X) \otimes T(Y)$

Composition des cobordismes : dessins usuels avec les commentaires usuels au sujet de l'associativité, etc.



Une TQFT est simplement un foncteur monoïdal:

$$\begin{array}{c}(d-\text{cobord},\sqcup)\\ \Big\downarrow{\scriptstyle T}\\ (\text{Vect},\otimes)\end{array}$$

NB. Parce que $\emptyset$ est une d-variété, une $d+1$-variété fermée, M, est une cobordisme de $\emptyset$ vers $\emptyset$ et T nous donne $T(M) : T(\emptyset) \to T(\emptyset)$. $\emptyset$ est l'objet, 'unité', de la structure monoïdale sur d-cobord, et le corps, $\mathbb{C}$, est celui de Vect. T étant monoïdal, $T(\emptyset) \cong \mathbb{C}$. Nous trouvons que $T(M)$ est une fonction linéaire de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}$, et nous donne un nombre complexe, une invariante numérique de M.

3. HQFTs

Problème : Ce serait bien d'avoir une théorie pour les variétés qui ont **plus de structure**, e.g. une G-structure, une métrique, une connection, etc.

Idée de Turaev (1999): Remplacer X, si possible, par *une fonction caractéristique* de cette structure, $g : X \to B$, où B est un espace classifiant pour la structure, par exemple, $B = BG$, l'espace classifiant d'un groupe G. (On dit que B est le fond ou base de la 'structure'.)

Pour les cobordismes, on veut une fonction $F : M \to B$ qui coïncide avec les fonctions caractéristiques sur les deux bouts, mais F serait spécifiée, seulement, à une homotopie rélative près', c'est-à-dire, l'homotopie serait fixée sur les deux bouts.

Çà nous donne une catégorie monoïdale, $d-$Hocobord(B) : (Rodrigues, 2000)

Définition: **Une HQFT est un foncteur monoïdal**

$$\begin{array}{c}(d\!-\!\textsf{Hocobord}(B),\sqcup)\\ \big\downarrow{\scriptstyle \tau}\\ (\textsf{Vect},\otimes)\end{array}$$

4. Classifications pour les cas: (i) $B = K(\pi, 1)$, et (ii) $B = K(A, 2)$.

Résultat général (Rodrigues) :

Une HQFT d-dimensionale sur B ne dépend que du $(d+1)$-type de B, et donc on peut imposer la condition que les $\pi_n(B)$ soient triviaux pour tout $n > d+1$.

Les résultats les plus clairs sont en dimensions $d = 1$ et $d = 2$. (Nous allons examiner $d = 1$ seulement.)

- d-variété = coproduit des cercles orientés,
- cobordisme = surface orientée (peut-etre avec bord),
- on peut, sans problème, se limiter au cas où B est un 2-type.

Les cas suivants sont connus:

(a) $B = K(\pi, 1)$, donc $\pi_1(B) = \pi$, $\pi_i(B) = 1$ si $i > 1$, et la ‘structure en plus’ = ‘classe d’isomorphisme de π-torsors’.

(Turaev, 1999)

HQFTs sur $K(\pi, 1)$ $\quad \longleftrightarrow$

algèbres π-graduées ayant ‘structure additionnelle’

= π-algèbres croisées.

π-algèbres croisées.

$$L = \bigoplus_{g\in\pi} L_g, \text{ une algèbre } \pi-\text{graduée}$$

- si ℓ_1 est de degré $g \in \pi$, et ℓ_2 est de dégré h, $\ell_1\ell_2$ est de degré gh;
- L a un élément neutre, $1 = 1_L \in L_1$ où le dégré, 1, est l'élément neutre de π;
- il y a une forme symétrique K-bilinéaire

$$\rho : L \otimes L \to K$$

telles que

(i) $\rho(L_g \otimes L_h) = 0$ si $h \neq g^{-1}$;

(ii) la restriction de ρ à $L_g \otimes L_{g^{-1}}$ est non-dégénérée pour chaque $g \in \pi$, (donc $L_{g^{-1}} \cong L_g^*$, le dual de L_g);

et

(iii) $\rho(ab, c) = \rho(a, bc)$ pour tout $a, b, c \in L$.

• il y a un homomorphisme de groupes

$$\phi : \pi \to Aut(L)$$

tel que:

(i) si $g \in \pi$ et on écrit $\phi_g = \phi(g)$ pour l'automorphisme de L, ϕ_g est compatible avec ρ, (c-à-d. $\rho(\phi_g a, \phi_g b) = \rho(a, b)$) et

$$\phi_g(L_h) \subseteq L_{ghg^{-1}}$$

pour tout $h \in \pi$;

(ii) $\phi_g|_{L_g} = id$ pour tout $g \in \pi$;

(iii) pour chaque $g, h \in \pi$, $a \in L_g$, $b \in L_h$, $\phi_h(a)b = ba$;

(iv) pour chaque $g, h \in \pi$ et $c \in L_{ghg^{-1}h^{-1}}$,

$$Tr(c\phi_h : L_g \to L_g) = Tr(\phi_{g^{-1}}c : L_h \to L_h),$$

où Tr est la K-trace de l'endomorphisme.

(Brightwell et Turner, 2000) Soit A, un groupe abèlien.

HQFTs sur $K(A, 2)$ $\quad\longleftrightarrow$

algèbres de Frobenius munies d'une action de A

En geńéral, (V.Turaev et TP, 2003-2005), un 2-type B est donné par un module croisé, $\mathcal{C} = (C, P, \partial)$. Est-ce qu'on peut trouver des algèbres correspondants et des méthodes de les analyser pour trouver un théorème de classification pour les HQFTs sur $B\mathcal{C}$?

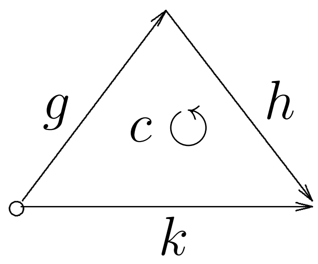
Étapes vers une classification: (i) La définition d'une théorie homotopique formelle de champs quantiques ou *HQFT formelle*, basée sur un modèle combinatoire des 'fonctions caractéristiques'.

(ii) Les $\mathcal{C}$-algèbres croisées nous donnent un théorème de classification pour cette théorie formelle.

5. Applications formelles et HQFTs formelles : résultats généraux;

Une $\mathcal{C}$-fonction formelle sur une variété M est une liste:

1. la décomposition cellulaire de la variété M, e.g. par une triangulation.
2. le marquage des arêtes par des éléments de P;
3. le marquage des faces par des éléments de C;
4. compatibilité avec la condition du bord:



   où $g, h, k \in P$ et $c \in C$, et $\partial c = kh^{-1}g^{-1}$; et finalement,

5. une condition de cocycle pour chaque 3-simplexe.

Une telle donnée combinatoire correspond à une fonction caractéristique $g : M \to B\mathcal{C}$.

Une *HQFT formelle* avec base $\mathcal{C}$ nous donne

- à chaque $\mathcal{C}$-circuit formel, $\mathbf{g} = (g_1, \ldots, g_n)$, un K-espace vectoriel $\tau(\mathbf{g})$, et par extension, à chaque $\mathcal{C}$-fonction formelle sur un 1-variété S, spécifiée par une liste, $\mathbf{g} = \{\mathbf{g}_i \mid i = 1, 2, \ldots, m\}$ des $\mathcal{C}$-circuits formels, un espace vectoriel $\tau(\mathbf{g})$ et un isomorphisme,

$$\tau(\mathbf{g}) = \bigotimes_{i=1,\ldots,m} \tau(\mathbf{g}_i),$$

  qui décompose $\tau(\mathbf{g})$ comme produit tensoriel;

- à chaque $\mathcal{C}$-cobordisme formel, $(M, \mathbf{F})$ entre $(S_0, \mathbf{g}_0)$ et $(S_1, \mathbf{g}_1)$, une transformation K-linéaire

$$\tau(\mathbf{F}) : \tau(\mathbf{g}_0) \to \tau(\mathbf{g}_1).$$

Ces données satisfont aux conditions suivantes:

(i) Un coproduit des $\mathcal{C}$-fonctions formelles correspond à un produit tensoriel:

$$\tau(\mathbf{g} \sqcup \mathbf{h}) \xrightarrow{\cong} \tau(\mathbf{g}) \otimes \tau(\mathbf{h}), \qquad \tau(\emptyset) \xrightarrow{\cong} \mathbb{C}.$$

(ii) Étant donné deux $\mathcal{C}$-cobordismes

$$\mathbf{F} : \mathbf{g}_0 \to \mathbf{g}_1, \quad \mathbf{G} : \mathbf{g}_1 \to \mathbf{g}_2$$

avec composé $\mathbf{F}\#_{\mathbf{g}_1}\mathbf{G}$, nous avons

$$\tau(\mathbf{F}\#_{\mathbf{g}_1}\mathbf{G}) = \tau(\mathbf{G})\tau(\mathbf{F}) : \tau(\mathbf{g}_0) \to \tau(\mathbf{g}_2).$$

(iii) Si 1_g est le $\mathcal{C}$-cobordisme formel identique de g sur g

$$\tau(1_{\mathbf{g}}) = 1_{\tau(\mathbf{g})}.$$

(iv) L'interaction entre les cobordismes et les coproduits est transofrmée 'comme il faut' par τ.

Définition

Soit $\mathcal{C} = (C, P, \partial)$ un module croisé. Une $\mathcal{C}$-algèbre croisée consiste en la donnée d'une P-algèbre croisée, $L = \bigoplus_{g \in P} L_g$, munie des éléments $\tilde{c} \in L_{\partial c}$, pour $c \in C$, tels que

(a) $\tilde{1} = 1 \in L_1$;

(b) pour $c, c' \in C$, $\widetilde{(c'c)} = \tilde{c'} \cdot \tilde{c}$;

(c) pour chaque $h \in P$, $\phi_h(\tilde{c}) = \widetilde{{}^h c}$.

Note: les conditions (a) et (b) nous donnent que 'tildérisation' est un homomorphisme de groupes $(\tilde{\ }) : C \to U(L)$, où $U(L)$ est le groupe des unités de L.

En effet, supposons que L est une $\mathcal{C}$-algèbre croisée. Le diagramme:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\tilde{(\,)}"] \arrow[d, "\partial"'] & U(L) \arrow[d, "\delta"] \\ P \arrow[r, "\phi"'] & Aut(L) \end{tikzcd} \qquad (1)$$

nous donne un morphisme de modules croisés de $\mathcal{C}$ vers $\mathfrak{Aut}(L)$.

Et en conclusion, et en guise de classification des HQFTs:

Théorème de classiciation des (1+1) FHQFTs (VT and TP, 2003-2005)

Les HQFTs formelles sur $\mathcal{C}$, à un isomorphisme près, sont en correspondance bijective avec les classes d'isomorphisme des $\mathcal{C}$-algèbres croisées.

5. Complexes croisés, groupes simpliciaux et espaces classifiants.

Critique:

- Ces $\mathcal{C}$-fonctions formelles utilisent un 2-type comme ‘fond’, mais, selon le théorème de Rodrigues, si nous voulons étudier les d-variétés pour $d \geq 2$, nous aurons besoin de modèles algébriques des $(d+1)$-types, mais quels modèles?
- Les groupes simpliciaux tronqués: c.-à-d: G ayant un complexe de Moore de longueur fini. Mais ils sont trop compliqués pour l’instant et nous allons nous limiter aux
- Complexes croisés tronqués = modules croisés + complexe de chaînes de longueur finie (comme queue!).

Complexes croisés

Un *complexe croisé* $\mathcal{C}$ (en groupoïdes) est une suite de morphismes de groupoïdes ayant le même ensemble d'objets, noté C_0,

$$\cdots \longrightarrow C_n \xrightarrow{\delta_n} C_{n-1} \xrightarrow{\delta_{n-1}} \cdots \longrightarrow C_2 \xrightarrow{\delta_2} C_1 \underset{\delta^0}{\overset{\delta^1}{\rightrightarrows}} C_0 \,.$$

Ces données satisfont à :

i. $\delta_2 : C_2 \to C_1$ est un module croisé;

ii. C_n est un C_1-module pour chaque $n \geq 3$;

iii. $\delta_n : C_n \to C_{n-1}$ est un morphisme C_1-équivariant pour $n \geq 3$;

iv. $\delta\delta : C_n \to C_{n-2}$ est trivial pour $n \geq 3$;

v. l'action de $\delta_2 C_2$ sur C_n est triviale pour $n \geq 3$.

Soit

$$\mathbf{X}_* : X_0 \subseteq X_1 \subseteq X_2 \subseteq \cdots \subseteq X_n \subseteq \cdots \subseteq X_\infty$$

un espace filtré. Nous avons des groupes d'homotopie relatifs, $\pi_n(X_n, X_{n-1}, x)$ pour $x \in X_0$. Si $n > 1$, nous avons une famille de groupes indexée par les pointes de base, $x \in X_0$. Pour $n = 1$, la même idée nous donne le groupoïde fondamental, $\pi_1(X_1 X_0)$, de X_1 relatif à X_0. Ce groupoïde agit sur tous les autres par changement de pointe de base. Il y un homomorphisme

$$\pi_n(X_n, X_{n-1}, x) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(X_{n-1}, X_{n-2}, x),$$

qui est $\pi_1(X_1 X_0)$-équivariant. Cette structure est un complexe croisé, noté $\pi(\mathbf{X})$.

Nerfs et espaces classifiants des complexes croisés

Notation:

$\pi(n) = \pi(\mathbf{\Delta}^n)$.

$\pi(K) = \pi(|K|)$, où $|K|$ est filtré par squelettes.

Nerf simplicial de $\mathcal{C}$: $Ner(\mathcal{C})_n = \mathbf{Crs}(\pi(n), \mathcal{C})$.

Espace classifiant de $\mathcal{C}$: $B\mathcal{C} = |Ner(\mathcal{C})|$.

Mais ça classifie quoi un tel espace classifiant?

Pour répondre, au moins partiellement, à cette question, nous allons examiner les liens entre les complexes croisés et les groupoïdes simplicialement enrichis.

Complexes croisés et groupoïdes $\mathcal{S}$-enrichis.

- Dwyer-Kan (Joyal - Tierney) Il existe un foncteur

$$\mathcal{G} : \mathcal{S} \to \mathcal{S} - \mathsf{Grpds}$$

qui possède un adjoint à gauche $\overline{W}$ – le foncteur 'espace classifiant'.

- il y a une sous-categorie réflective de $\mathcal{S} - \mathsf{Grpds}$ équivalente à Crs d'une telle manière que $\pi(K) =$ la réflection de $\mathcal{G}(K)$ dans Crs, et que
- $Ner(\mathcal{C}) = \overline{W}(\mathcal{C})$, où on considere $\mathcal{C}$ comme groupoïde simplicialement enrichi.

6. $\mathcal{C}$-fonctions formelles et $\mathbf{FHCobord}(d, \mathcal{C})$.

- Si $\mathcal{C}$ est un module croisé, on a

$$\mathcal{C}\text{-fonction formelle} \quad \leftrightarrow \quad \lambda : K \to Ner(\mathcal{C})$$

  et, par extension,

- si $\mathcal{C}$ est un complexe croisé réduit, une fonction simpliciale $\lambda : K \to Ner(\mathcal{C})$ serait appelée une $\mathcal{C}$-fonction formelle simpliciale.

- icelle correspond, par l'adjonction, à $\overline{\lambda} : \pi(K) \to \mathcal{C}$, et puis,

- par la réflection vers Crs, nous donne $\overline{\lambda} : \mathcal{G}(K) \to \mathcal{C}$, où, maintentant, $\mathcal{C}$ est le groupoïde simplicialement enrichi correspondant.

$\mathcal{C}$-fonctions formelles cellulaires

On veut appliquer ces concepts aux variétés, et on peut utiliser soit les triangulations ou décompositions cellulaires qui sont ‘plus petites.

Si X est un CW-complexe régulier, on dira qu’un morphisme $\overline{\lambda} : \pi(\mathbf{X}) \to \mathcal{C}$ est une $\mathcal{C}$-fonction formelle (cellulaire), et on peut définir,aussi, les cobordismes correspondants.

Ces données nous donnent une catégorie monoïdale $\mathsf{FHCobord}(d, \mathcal{C})$ des $\mathcal{C}$-fonctions formelles (cellulaires) d-dimensionnelles et entre eux les $\mathcal{C}$-cobordismes correspondants.

Une HQFT formelle $d+1$-dimensionnelle, τ, est une représentation monoïdale de cette catégorie vers Vect.

Pour une $\mathcal{C}$-fonction formelle d-dimensionelle λ, l’espace vectoriel $\tau(\lambda)$ ne dépend pas à un isomorphisme près de la triangulation ou décomposition cellulaire utilisée.

7.Les $\mathcal{C}$-fibrés : vers les Gerbes.

- Soit $\mathcal{C}$ un module croisé, on peut comparer les $\mathcal{C}$-fonctions formelles aux gerbes combinatoires non-abéliennes de Attal, ou les Baez's fibrés en 2-groupes de Baez – ils semblent être presque identiques!
- Comment ça? Où est la connection?
- On a mis de côté la question:

  ça classifie quoi un tel espace classifiant?

La réponse est

de l'histoire ancienne!

(travail de Barratt, Guggenheim et Moore, 1959).

La Théorie des fibrés simpliciaux.

- Si G est un groupe simplicial, il y a, non seulement un espace classifiant $\overline{W}(G)$, mais aussi un fibré universel:

$$p : W(G) \to \overline{W}(G),$$

  (et les G-fibrés principaux $p : E \to K$ sur K correspondent aux classes d'homotopie de fonctions simpliciales, $f : K \to \overline{W}(G)$).

- Une telle $f : K \to \overline{W}(G)$ correspond à une fonction 'tordante' $t : K \to G$ telle que E est le *produit cartésien tordu* $G \times_t K$.

- Il y a une fonction tordante naturelle $t : \overline{W}(G) \to G$, et $W(G) \cong G \times_t \overline{W}(G)$.

- De $f : K \to \overline{W}(G)$, on trouve la fonction tordante pour le fibré correspondant par composition

Soit $\mathcal{C}$ un complexe croisé et X une variété, soit triangulée par un complexe simpliciale T soit avec un recouvrement ouvert donné, $\mathcal{U}$.

Une $\mathcal{C}$-fonction formelle sur X relative à T (ou à $\mathcal{U}$) est une $\mathcal{C}$-fonction formelle $\mathcal{C}$-map $\lambda : T \to \overline{W}(\mathcal{C})$ (ou $\lambda : N(\mathcal{U}) \to \overline{W}(\mathcal{C})$ où $N(\mathcal{U})$ est le nerf du recouvrement $\mathcal{U}$).

En plus, on peut définir un $\mathcal{C}$-fibré combinatoire sur X relatif à une triangulation, T, ou à un recouvrement ouvert $\mathcal{U}$, comme étant un $\mathcal{C}$-fibré principal sur T ou sur $N(\mathcal{U})$.

Proposition

Une $\mathcal{C}$-fonction formelle sur une variété X (relative à une T ou un $\mathcal{U}$) correspond à un $\mathcal{C}$-fibré combinatoire sur X (rel. à T ou à $\mathcal{U}$).

On va écrire $G(\mathcal{C})$ pour le 2-groupe stricte associé à $\mathcal{C}$. On a

Proposition

Chaque $\mathcal{C}$-fonction formelle sur X rel. à un bon recouvrement ouvert $\mathcal{U}$ correspond à un $G(\mathcal{C})$-fibré principal (au sens de Baez) trivialisé sur le recouvrement ouvert $\mathcal{U}$, (et donc à une gerbe sur X).

Ça suggère que les HQFTs sont semblables à la K-théorie topologique équivariante, donnant une structure qui classifie les gerbes non-abèliennes à une équivalence près.

Ça me fait penser à la *Poursuite des champs* de Grothendieck, et on n'est pas très loin de là.

Le futur?

i. Examiner en détail le changement des algèbres croisées le long des morphismes et surtout le long des équivalences faibles.

ii. Les $\mathcal{C}$-fonctions formelles spécifient des $\mathcal{C}$-fibrés principaux - il faut fouiller plus...les gerbes sont liées aux faisceux de modules croises, mais nous n'avons consideré que des faisceaux constants!

iii. Dans le cas où $B = K(G, 1)$ HQFTs ouvertes-fermées (Moore-Segal) correspondent aux invariantes K-théoriques des algèbres croisés . Il faut généraliser.

iv. Prolonger la théorie détaillée à 2+1 dimensions et puis remplacer un 2-type par un modèle d'un 3-type.

v. ...... et beaucoup plus!