Catégories triangulées supérieures

Georges MALTSINIOTIS

Février 2006

Le but de ce texte est de décrire la structure définie sur la catégorie dérivée d'une catégorie abélienne (ou d'une catégorie exacte) par les diagrammes considérés dans la remarque 1.1.14 de [BBD]. Une approche similaire a été développée par Matthias Künzer dans un travail non publié [K1]. Un point de vue légèrement différent est exposé par le même auteur dans [K2]. Le présent travail a pu être influencé de façon subliminale par des exposés d'Alexei Bondal, au Séminaire d'Analyse Algébrique en 2002 [B].

On introduit une notion de catégorie *n-triangulée* (avec eventuellement $n = \infty$, dans quel cas on dit qu'elle est *fortement triangulée*). On montre qu'une catégorie n-triangulée (pour $n \geq 2$) est triangulée au sens classique, et que la catégorie dérivée d'une catégorie exacte (ou plus généralement toute catégorie de coefficients d'un dérivateur triangulé [M]) est canoniquement munie d'une structure de catégorie fortement triangulée. On introduit la K-théorie d'une catégorie fortement triangulée. Un théorème de Neeman [N] implique que la K-théorie d'une catégorie abélienne est isomorphe à la K-théorie de sa catégorie dérivée, considérée comme catégorie fortement triangulée, et on conjecture qu'il en est de même pour une catégorie exacte. On conjecture également que la K-théorie d'un dérivateur triangulé [M] est isomorphe à la K-théorie de sa catégorie fondamentale, considérée comme catégorie fortement triangulée.

1.1. Tout ensemble ordonné sera identifié à la catégorie correspondante, autrement dit, la catégorie ayant comme objets les éléments de cet ensemble, l'ensemble des flèches de i vers j étant réduit à un élément ou vide, selon que $i \leq j$ ou $i \nleq j$. Soit n un entier, $n \geq 0$. On note Δ_n l'ensemble ordonné

$$\Delta_n = \{0 \leq 1 \leq \cdots \leq n\} \quad ,$$

et $\mathbf{\Delta}$ la sous-catégorie pleine de la catégorie des ensembles ordonnés formée des Δ_n, $n \geq 0$. La catégorie $\mathbf{\Delta}$ s'appelle la *catégorie des simplexes*, et s'identifie à une sous-catégorie pleine de la catégorie $\mathcal{C}at$ des petites catégories. Un *ensemble simplicial* est un préfaisceau sur $\mathbf{\Delta}$. On note $\widehat{\mathbf{\Delta}}$ la catégorie des ensembles simpliciaux

$$\widehat{\mathbf{\Delta}} = \underline{\mathsf{Hom}}(\mathbf{\Delta}^\circ, \mathcal{E}ns) \quad ,$$

catégorie des foncteurs contravariants de $\mathbf{\Delta}$ vers la catégorie $\mathcal{E}ns$ des ensembles.

1.2. Soit n un entier, $n \geq 0$. On considère les parties suivantes de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}
D_n &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x_1 \leq x_2 \leq x_1 + n + 1\} \quad , \\
\mathring{D}_n &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x_1 < x_2 < x_1 + n + 1\} \quad , \\
\partial^0 D_n &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x_1 = x_2\} \quad , \\
\partial^1 D_n &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x_2 = x_1 + n + 1\} \quad ,
\end{aligned}$$

munies de la relation d'ordre induite par l'ordre produit sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. On remarque que les ensembles $\mathring{D}_n$, $\partial^0 D_n$ et $\partial^1 D_n$ sont deux à deux disjoints, et que D_n est la réunion de ces trois ensembles. On pose

$$\partial D_n = \partial^0 D_n \cup \partial^1 D_n \quad .$$

Pour toute application croissante $\varphi : \Delta_m \to \Delta_n$, on définit une application croissante $\overline{\varphi} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ par

$$\overline{\varphi}(k) = (n+1)q + \varphi(r) \quad ,$$

où q et r sont respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de k par $m+1$, autrement dit, (q, r) est l'unique couple d'entiers relatifs tel que

$$k = (m+1)q + r \quad , \qquad 0 \leq r \leq m \quad .$$

On remarque qu'on a l'implication

$$x_1 \leq x_2 \leq x_1 + m + 1 \quad \Longrightarrow \quad \overline{\varphi}(x_1) \leq \overline{\varphi}(x_2) \leq \overline{\varphi}(x_1) + n + 1 \quad ,$$

et par suite, on peut définir une application (croissante)

$$\varphi_* = D_\varphi : D_m \longrightarrow D_n \quad , \qquad (x_1, x_2) \longmapsto (\overline{\varphi}(x_1), \overline{\varphi}(x_2)) \quad .$$

On remarque qu'on a

$$\varphi_*(\partial^0 D_m) \subset \partial^0 D_n \qquad \text{et} \qquad \varphi_*(\partial^1 D_m) \subset \partial^1 D_n \quad ,$$

et que

$$m \longmapsto D_m \quad , \qquad \varphi \longmapsto \varphi_*$$

définit un ensemble ordonné cosimplicial (foncteur (covariant) de $\mathbf{\Delta}$ vers la sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}at$ formée des ensembles ordonnés). Soient

$$I_n, J_n : D_n \longrightarrow D_n$$

les bijections croissantes définies par

$$I_n(x_1, x_2) = (x_2, x_1 + n + 1) \quad , \qquad J_n(x_1, x_2) = (x_1 + 1, x_2 + 1) \quad .$$

On vérifie aussitôt qu'on a les relations

$$I_n J_n = J_n I_n \qquad \text{et} \qquad I_n^2 = J_n^{n+1} \quad ,$$

ainsi que les égalités

$$\begin{aligned} I_n(\mathring{D}_n) = \mathring{D}_n \quad , \qquad I_n(\partial^0 D_n) = \partial^1 D_n \quad , \qquad I_n(\partial^1 D_n) = \partial^0 D_n \quad , \\ J_n(\mathring{D}_n) = \mathring{D}_n \quad , \qquad J_n(\partial^0 D_n) = \partial^0 D_n \quad , \qquad J_n(\partial^1 D_n) = \partial^1 D_n \quad . \end{aligned}$$

De plus, on vérifie facilement que pour toute application croissante $\varphi : \Delta_m \to \Delta_n$, on a la relation

$$\varphi_* I_m = I_n \varphi_* \quad .$$

On définit la catégorie $\mathbf{D}$ dont les objets sont les ensembles ordonnés D_n, $n \geq 0$, et dont les morphismes sont engendrés par les applications croissantes φ_*, $I_n^{\pm 1}$, $J_n^{\pm 1}$. Il résulte de ce qui précède que pour tout morphisme $f : D_m \to D_n$, on a la relation

$$f I_m = I_n f$$

(autrement dit, $n \mapsto I_n$ est un automorphisme fonctoriel du foncteur identique de $\mathbf{D}$). On a un foncteur

$$\mathbf{\Delta} \longrightarrow \mathbf{D} \quad , \qquad \Delta_n \longmapsto D_n \quad , \qquad \varphi \longmapsto \varphi_* \quad ,$$

qui est fidèle (mais *pas* pleinement fidèle), et bijectif sur les ensembles des objets. D'autre part, on vérifie facilement que pour toute flèche $f : D_m \to D_n$, il existe un unique ε_f tel que $f(\partial^0 D_m) \subset \partial^{\varepsilon_f} D_n$. On en déduit un foncteur

$$\varepsilon : \mathbf{D} \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \quad , \qquad D_n \longmapsto * \quad , \qquad f \longmapsto \varepsilon_f \quad ,$$

où $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ désigne la catégorie à un seul objet $*$, associée au groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Dans la suite, on se fixe une catégorie additive $\mathcal{T}$, munie d'une auto-équivalence

$$S : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T} \quad , \qquad T \longmapsto S(T) = T[1] \quad .$$

1.3. Soit n un entier, $n \geq 0$. Un *n-triangle* est un couple (F, φ)

$$F : D_n \longrightarrow \mathcal{T} \quad , \qquad \varphi : F \circ I_n \xrightarrow{\sim} S \circ F \quad ,$$

où F est un foncteur, et φ un isomorphisme de foncteurs, tel que $F|\partial D_n \simeq 0$. (Il suffit de supposer que $F \mid \partial^0 D_n \simeq 0$.) En particulier, si $n = 0$, alors $F \simeq 0$.

Un *morphisme de n-triangles* d'un n-triangle (F, φ) vers un n-triangle (F', φ') est un morphisme de foncteurs $\theta : F \to F'$ tel que le carré

$$\begin{tikzcd}
F \circ I_n \arrow[r, "\varphi", "\sim"'] \arrow[d, "\theta * I_n"'] & S \circ F \arrow[d, "S * \theta"] \\
F' \circ I_n \arrow[r, "\sim", "\varphi'"'] & S \circ F'
\end{tikzcd}$$

soit commutatif.

Si (F, φ) est un n-triangle, et $f : D_m \to D_n$ un morphisme de $\mathbf{D}$, on définit un m-triangle $f^*(F, \varphi)$, appelé *image inverse* du n-triangle (F, φ) par le morphisme f, en posant

$$f^*(F, \varphi) = (F \circ f,\, (-1)^{\varepsilon_f} \varphi * f) \quad ,$$

$$F \circ f : D_m \longrightarrow \mathcal{T} \quad , \qquad (-1)^{\varepsilon_f} \varphi * f : F f I_m = F I_n f \longrightarrow S F f \quad .$$

De même pour tout morphisme de n-triangles $\theta : (F, \varphi) \to (F', \varphi')$, le morphisme de foncteurs

$$\theta * f : F \circ f \longrightarrow F' \circ f$$

définit un morphisme de n-triangles, *image inverse* de θ par f,

$$f^*(\theta) = \theta * f : f^*(F, \varphi) \longrightarrow f^*(F', \varphi') \quad .$$

À un n-triangle (F, φ), on associe la suite de $n - 1$ morphismes composables de $\mathcal{T}$

$$F(0,1) \longrightarrow F(0,2) \longrightarrow \cdots \longrightarrow F(0,n) \quad ,$$

qu'on appelle la *base* du n-triangle (F, φ). Par convention, si $n = 0$, la base de (F, φ) est la suite vide, unique foncteur de la catégorie vide vers la catégorie $\mathcal{T}$. Si $n = 1$, la base de (F, φ) s'identifie à l'objet $F(0,1)$ de $\mathcal{T}$, et si $n = 2$, elle s'identifie au morphisme $F(0,1) \to F(0,2)$. Un morphisme de n-triangles

$\theta : (F,\varphi) \to (F',\varphi')$ définit un morphisme de la base de (F,φ) vers celle de (F',φ')

$$\begin{tikzcd} F(0,1) \arrow[r] \arrow[d, "\theta_{(0,1)}"'] & F(0,2) \arrow[r] \arrow[d, "\theta_{(0,2)}"] & \cdots \arrow[r] & F(0,n) \arrow[d, "\theta_{(0,n)}"] \\ F'(0,1) \arrow[r] & F'(0,2) \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & F'(0,n) \end{tikzcd} ,$$

qu'on appelle la *base* du morphisme θ.

1.4. Une *catégorie ∞-triangulée* ou *fortement triangulée* (resp. *catégorie N-prétriangulée*, pour un entier $N \geq 1$) est une catégorie additive $\mathcal{T}$ munie d'une auto-équivalence S, et pour tout entier n, $n \geq 0$ (resp. $N \geq n \geq 0$), d'une classe de n-triangles, appelés *n-triangles distingués*, satisfaisant aux axiomes suivants.

FTR0) Pour tout $n \geq 0$ (resp. $N \geq n \geq 0$), un n-triangle isomorphe à un n-triangle distingué est un n-triangle distingué.

FTRI) Pour tout $n \geq 0$ (resp. $N \geq n \geq 0$), toute suite de $n-1$ morphismes composables est la base d'un n-triangle distingué.

FTRII) Pour tout $n \geq 0$ (resp. $N \geq n \geq 0$), tout morphisme de la base d'un n-triangle distingué vers celle d'un autre est la base d'un morphisme de n-triangles : si (F,φ) et (F',φ') sont des n-triangles distingués, tout morphisme de la base de (F,φ) vers celle de (F',φ') est la base d'un morphisme de n-triangles de (F,φ) vers (F',φ').

FTRIII) Pour tout couple d'entiers $m,n \geq 0$ (resp. $N \geq m,n \geq 0$), toute flèche $f : D_m \to D_n$ de $\mathbf{D}$, et tout n-triangle distingué (F,φ), le m-triangle image inverse $f^*(F,\varphi) = (F \circ f, (-1)^{\varepsilon_f}\varphi * f)$ est distingué.

Dans une catégorie N-prétriangulée, on dispose donc par définition, de classes de n-triangles distingués pour tout n, $0 \leq n \leq N$. Pour tout entier $n \geq 0$, et tout N', $0 \leq N' \leq N$, on dit qu'un n-triangle (F,φ) est N'-distingué si pour tout n', $0 \leq n' \leq N'$, et toute flèche $f : D_{n'} \to D_n$ de $\mathbf{D}$, le n'-triangle $f^*(F,\varphi)$ est distingué. On remarque qu'en vertu de FTRIII, si $n \leq N'$, le triangle (F,φ) est N'-distingué si et seulement s'il est distingué. Une *catégorie N-triangulée* est une catégorie N-prétriangulée, où l'axiome FRTI est renforcé en demandant de plus que toute suite de N morphismes est la base d'un $(N+1)$-triangle N-distingué.

Il résulte aussitôt des définitions que pour tout entier $N \geq 1$, une catégorie fortement triangulée est une catégorie N-triangulée (obtenue en "oubliant" les n-triangles distingués, pour $n > N$), et une catégorie N-triangulée est une catégorie N-prétriangulée. Pour tout couple d'entiers $N' > N \geq 1$, une catégorie N'-prétriangulée est une catégorie N-triangulée. Une catégorie

1-triangulée ou 1-prétriangulée est simplement une catégorie additive munie d'une auto-équivalence. Par convention, une catégorie 0-triangulée ou 0-prétriangulée est une catégorie additive sans aucune autre structure.

1.5. Soient $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ deux catégories additives, munies d'auto-équivalences S et S' respectivement, $G : \mathcal{T} \to \mathcal{T}'$ un foncteur additif, et $\tau : GS \to S'G$ un isomorphisme de foncteurs. Si (F,φ) est un n-triangle de $\mathcal{T}$, $n \geq 0$, on définit un n-triangle (F',φ') de $\mathcal{T}'$ en posant $F' = GF$ et $\varphi' = (\tau \star F)(G \star \varphi)$

$$F'I_n = GFI_n \xrightarrow{G\star\varphi} GSF \xrightarrow{\tau\star F} S'GF = S'F' \quad ,$$

qu'on appelle *image de* (F,φ) *par* G (à l'aide de τ). Si $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ sont des catégories fortement triangulées (resp. N-prétriangulées ou N-triangulées, pour un entier $N \geq 1$) un *foncteur exact* de $\mathcal{T}$ vers $\mathcal{T}'$ est un couple (G,τ) formé d'un foncteur additif $G : \mathcal{T} \to \mathcal{T}'$ et d'un isomorphisme de foncteurs $\tau : GS \to S'G$ tel que pour tout $n \geq 0$ (resp. $N \geq n \geq 0$), l'image de tout n-triangle distingué de $\mathcal{T}$ soit un n-triangle distingué de $\mathcal{T}'$.

1.6. Dans une catégorie additive munie d'une auto-équivalence $S : X \mapsto X[1]$, on associe à tout 2-triangle (F,φ), un triangle (au sens ordinaire) :

$$F(0,1) \longrightarrow F(0,2) \longrightarrow F(1,2) \longrightarrow F(0,1)[1] \quad ,$$

les deux premiers morphismes étant définis par le foncteur F, le troisième étant le composé

$$F(1,2) \longrightarrow F(1,3) = FI_2(0,1) \xrightarrow{\varphi(0,1)} SF(0,1) = F(0,1)[1] \quad .$$

Théorème 1. *Une catégorie fortement triangulée munie de la classe des triangles associés aux* 2*-triangles distingués est une catégorie triangulée.*

Esquisse de démonstration. En vertu de FTR0, un triangle isomorphe à un triangle distingué est distingué. Le fait que

$$X \longrightarrow X \longrightarrow 0 \longrightarrow X[1]$$

est un triangle distingué résulte de FTRI, pour $n = 1$, et de FTRIII, appliqué à $f = \sigma_* : D_2 \to D_1$, où σ désigne l'opérateur de dégénérescence

$$\sigma : \Delta_2 \longrightarrow \Delta_1 \quad , \qquad 0 \mapsto 0 \ , \quad 1 \mapsto 1 \ , \quad 2 \mapsto 1 \quad .$$

Tout morphisme s'insère dans un triangle distingué en vertu de FTRI, pour $n = 2$. L'axiome TRII (tourner les triangles) résulte de FTRIII, appliqué à $f = J_2^{-1}I_2$. Tout morphisme entre les premières flèches de deux triangles se prolonge en un morphisme de triangles en vertu de FTRII, pour $n = 2$. L'axiome de l'octaèdre résulte de FTRI, pour $n = 3$, et de FTRIII, appliqué à $f = \delta^i_* : D_2 \to D_3$, pour $i = 0, 1, 2, 3$, où $\delta^i : \Delta_2 \to \Delta_3$ désigne l'i-ème opérateur face, unique injection croissante de Δ_2 vers Δ_3 dont l'image ne contient pas i.

Le théorème 1 peut se préciser en remarquant que les catégories triangulées sont exactement les catégories 2-triangulées, les catégorie prétriangulées (mêmes axiomes que les catégories triangulées sans l'axiome de l'octaèdre) étant exactement les catégories 2-prétriangulées.

Les n-triangles distingués d'une catégorie fortement triangulée, $n \geq 0$, sont des diagrammes du type considéré dans la remarque 1.1.14 de [BBD], pour la structure de catégorie triangulée du théorème 1, la réciproque n'étant pas vraie en général. En fait, les diagrammes considérés dans *loc. cit.* sont exactement les n-triangles 2-distingués.

1.7. Soit Dia une sous-2-catégorie 2-pleine de la 2-catégorie $\mathcal{C}at$ des petites catégories, "admissible" comme domaine de définition d'un dérivateur triangulé (par exemple $\mathsf{Dia} = \mathcal{C}at$, ou Dia formée des catégories directes finies).

Théorème 2. *Pour tout dérivateur triangulé $\mathbb{D}$ de domaine Dia, et tout I dans Dia, la catégorie $\mathbb{D}(I)$ est canoniquement munie d'une structure de catégorie fortement triangulée, et pour toute flèche $u : I \to J$ dans Dia, le foncteur $u^* : \mathbb{D}(J) \to \mathbb{D}(I)$ est (canoniquement muni d'une structure de foncteur) exact.*

On se bornera ici à décrire les n-triangles distingués de $\mathbb{D}(e)$, où e désigne la catégorie ponctuelle, dans le cas où les ensembles ordonnés infinis D_n appartiennent à Dia. (Dans le cas contraire, on doit être plus soigneux, et choisir une partie finie de D_n, suffisante pour determiner, à isomorphisme près, un n-triangle distingué.)

On rappelle (voir [M]) qu'on note $\square$ la catégorie opposée à la catégorie

$$\begin{tikzcd} (0,0) \arrow[r] \arrow[d] & (0,1) \arrow[d] \\ (1,0) \arrow[r] & (1,1) \end{tikzcd}$$

et $\ulcorner$, $\lrcorner$ les catégories opposées aux sous-catégories

$$\begin{tikzcd} (0,0) \arrow[r] \arrow[d] & (0,1) \\ (1,0) & \end{tikzcd} \quad , \quad \begin{tikzcd} & (0,1) \arrow[d] \\ (1,0) \arrow[r] & (1,1) \end{tikzcd}$$

de $\square^\circ$, et $i_\ulcorner : \ulcorner \to \square$, $i_\lrcorner : \lrcorner \to \square$ les foncteurs d'inclusion. On dit qu'un objet X de $\mathbb{D}(\square)$ est *homotopiquement cartésien* (resp. *homotopiquement cocartésien*) si le morphisme d'adjonction

$$X \longrightarrow i_{\lrcorner *} i_\lrcorner^* X \qquad (\text{resp. } i_{\ulcorner !} i_\ulcorner^* X \to X)$$

est un isomorphisme, le dernier axiome des dérivateurs triangulés assurant qu'un objet de $\mathbb{D}(\square)$ est homotopiquement cartésien si et seulement s'il est homotopiquement cocartésien.

Notons

$$i_0 : e \longrightarrow \ulcorner \quad , \qquad i_1 : e \longrightarrow \square$$

les foncteurs définis par les objets $(0,0)$ et $(1,1)$ de $\ulcorner$ et $\square$ respectivement. Le foncteur de *suspension* $S : \mathbb{D}(e) \to \mathbb{D}(e)$, défini par $S = i_1^* i_{\ulcorner !} i_{0*}$, est une auto-équivalence de la catégorie additive $\mathbb{D}(e)$, et pour tout objet X de $\mathbb{D}(e)$, le diagramme sous-jacent à l'objet $i_{\ulcorner !} i_{0*} X$ de $\mathbb{D}(\square)$ est

$$\mathsf{dia}(i_{\ulcorner !} i_{0*} X) \simeq \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & S(X) \end{array} \quad .$$

Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{Z}^2$ muni de la relation d'ordre induit par l'ordre produit sur $\mathbb{Z}^2$. On dit qu'un objet X de $\mathbb{D}(E)$ est *homotopiquement polycartésien* si pour tous entiers k_0, k_1, l_0, l_1, $k_0 < k_1$, $l_0 < l_1$, tels que $(k_\varepsilon, l_\eta) \in E$, pour ε, $\eta = 0$, 1, si l'on note $i : \square \to E$ le foncteur défini par

$$i(\varepsilon, \eta) = (k_\varepsilon, l_\eta) \quad , \qquad \varepsilon, \eta = 0, 1 \ ,$$

l'objet $i^* X$ de $\mathbb{D}(\square)$ est homotopiquement cartésien.

Soit n un entier, $n \geq 0$. Pour tout $(x_1, x_2) \in D_n$, on note aussi par abus $(x_1, x_2) : e \to D_n^\circ$ le foncteur de la catégorie ponctuelle vers la catégorie opposé de D_n défini par l'objet (x_1, x_2), et pour tout objet X de $\mathbb{D}(D_n^\circ)$ on désigne par $X_{(x_1,x_2)}$ la fibre $(x_1,x_2)^*(X)$ de X en (x_1,x_2), et par F_X le diagramme sous-jacent à X

$$F_X = \mathsf{dia}(X) : D_n \longrightarrow \mathbb{D}(e) \quad , \qquad F_X(x_1,x_2) = X_{(x_1,x_2)} \ , \quad (x_1,x_2) \in D_n \quad .$$

Soit X un objet homotopiquement polycartésien de $\mathbb{D}(D_n^\circ)$ tel que pour tout entier $x \in \mathbb{Z}$, $F_X(x,x) = X_{(x,x)}$ et $F_X(x, x+n+1) = X_{(x,x+n+1)}$ soient des objets nuls de $\mathbb{D}(e)$. On va définir un isomorphisme fonctoriel

$\varphi_X : F_X \circ I_n \xrightarrow{\sim} S \circ F_X$ comme suit. Soit (x_1, x_2) dans D_n, de sorte que l'on ait $x_1 \leq x_2 \leq x_1 + n + 1$. On en déduit un diagramme dans D_n

$$\begin{array}{ccc} (x_1, x_2) & \longrightarrow & (x_1, x_1 + n + 1) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (x_2, x_2) & \longrightarrow & (x_2, x_1 + n + 1) \end{array} \quad ,$$

d'où un foncteur $i : \square \to D_n^\circ$

$$(0,0) \longmapsto (x_1, x_2) \quad , \qquad (0,1) \longmapsto (x_1, x_1 + n + 1) \quad ,$$
$$(1,0) \longmapsto (x_2, x_2) \quad , \qquad (1,1) \longmapsto (x_2, x_1 + n + 1) \quad .$$

Comme $\big(i^*(X)\big)_{(1,0)} = X_{(x_2,x_2)}$ et $\big(i^*(X)\big)_{(0,1)} = X_{(x_1,x_1+n+1)}$ sont par hypothèse des objets nuls de $\mathbb{D}(e)$, et comme $\big(i^*(X)\big)_{(0,0)} = X_{(x_1,x_2)} = F(x_1, x_2)$ et $\big(i^*(X)\big)_{(1,1)} = X_{(x_2,x_1+n+1)} = F(x_2, x_1 + n + 1)$, on en déduit un isomorphisme canonique $F(x_2, x_1 + n + 1) \xrightarrow{\sim} F(x_1, x_2)[1]$, qui est par définition la valeur de φ_X en (x_1, x_2). On vérifie alors facilement que (F_X, φ_X) est un n-triangle, et on appellera un tel triangle n-triangle distingué standard. Par définition, un n-triangle distingué sera un n-triangle isomorphe à un n-triangle distingué standard.

Corollaire. *Pour toute catégorie exacte $\mathcal{E}$, la catégorie dérivée bornée $\mathsf{D}^b(\mathcal{E})$ de $\mathcal{E}$ est canoniquement munie d'une structure de catégorie fortement triangulée.*

Le corollaire est un cas particulier du théorème 2, en vertu d'un résultat de Bernhard Keller [K], affirmant l'existence d'un dérivateur triangulé $\mathbb{D}_{\mathcal{E}}$ tel que $\mathsf{D}^b(\mathcal{E}) = \mathbb{D}_{\mathcal{E}}(e)$.

1.8. Il semblerait que les constructions de Franke dans [F] fourniraient, pour tout entier $n \geq 0$, des exemples de catégories fortement triangulées non équivalentes (comme catégories fortement triangulées) dont les catégories n-triangulées sous-jacentes seraient équivalentes (comme catégories n-triangulées).

1.9. Soit $\mathcal{T}$ une petite catégorie fortement triangulée. En vertu de l'axiome FTRIII, l'application

$$D_n \longmapsto \text{ensemble des } n\text{-triangles distingués}$$

définit un foncteur $\mathbf{D}^\circ \to \mathcal{E}ns$, et en composant avec l'inclusion $\mathbf{\Delta} \to \mathbf{D}$, on en déduit un ensemble simplicial noté $Q(\mathcal{T})$. Cet ensemble simplicial est pointé par le 0-triangle nul (défini par le choix d'un objet nul de $\mathcal{T}$). L'espace de la K-théorie de $\mathcal{T}$ est défini comme étant l'espace des lacets de la réalisation topologique de cet ensemble simplicial pointé. En particulier, les groupes de K-théorie de $\mathcal{T}$ sont définis par

$$\mathsf{K}_n(\mathcal{T}) = \pi_{n+1}(|Q(\mathcal{T})|) \quad , \qquad n \geq 0 \quad .$$

Théorème 3 (Neeman). *Si A est une petite catégorie abélienne, l'espace de K-théorie de A est canoniquement isomorphe à l'espace de K-théorie de sa catégorie dérivée bornée, munie de sa structure canonique de catégorie fortement triangulée* (cf. corollaire du théorème 2).

Ce théorème est conséquence directe de la version de la théorie de Neeman developpée dans [N] (voir aussi [N1] et [N2]).

Conjecture 1. *Ce théorème reste vrai pour une catégorie exacte.*

Dans [M], on a introduit un espace de K-théorie pour un dérivateur triangulé $\mathbb{D}$.

Conjecture 2. *Si $\mathbb{D}$ est un dérivateur triangulé, l'espace de K-théorie de $\mathbb{D}$ est canoniquement isomorphe à l'espace de K-théorie de la catégorie $\mathbb{D}(e)$, munie de sa structure canonique de catégorie fortement triangulée* (cf. théorème 2).

La conjonction des conjectures 1 et 2 implique la conjecture de comparaison de [M]. La conjecture 2 ci-dessus semble néanmoins plus accessible, et elle implique, en vertu du théorème 3, la conjecture de comparaison, pour une catégorie abélienne.

Références

[**BBD**] A. A. Beilinson, J. Bernstein, P. Deligne, "Faisceaux pervers", Astérisque 100 (1982).

[**B**] A. Bondal, Exposés au Séminaire d'Analyse Algébrique (2002)..

[**F**] J. Franke, *Uniqueness theorems for certain triangulated categories possessing an Adams spectral sequence*, preprint, K-theory Preprint Archives 139 (1996).

[**K**] B. Keller, *Le dérivateur triangulé associé à une catégorie exacte*, appendice à [M] (2001).

[**K1**] M. Künzer, *On derived categories*, thèse de diplôme (1996).

[**K2**] M. Künzer, *Heller triangulated categories*, preprint, arXiv:math.CT/0508565 v2 (2005).

[**M**] G. Maltsiniotis, *La* K-*théorie d'un dérivateur triangulé*, preprint, (2005).

[**N1**] A. Neeman, K-*theory for triangulated categories*, I(A), I(B), II, III(A), III(B), Asian J. Math. Vol. 1 No 2, pp. 330-417 (1997), Vol. 1 No 3, pp. 435-529 (1997), Vol. 2 No 1, pp. 1-125 (1998), Vol 2 No 3, pp. 495-589 (1998), Vol. 3 No 3, pp. 557-608 (1999).

[**N2**] A. Neeman, K-*theory for triangulated categories*, $3\frac{1}{2}$(A), $3\frac{1}{2}$(B), $3\frac{3}{4}$, K-Theory, Vol. 20, pp. 97-174 (2000), Vol. 20, pp. 243-298 (2000), Vol. 22 pp. 1-144 (2001).

[**N**] A. Neeman, *The* K*-theory of triangulated categories*, Handbook on K-Theory, Vol. 2, pp. 1011-1078, Springer-Verlag (2005).

Georges Maltsiniotis, CNRS, Université Paris 7, UFR de Mathématiques, Case 7012, 2, place Jussieu, 75251 Paris Cedex 05, France
maltsin@math.jussieu.fr
www.math.jussieu.fr/~maltsin