1 Le théorème de bicommutant de von Neumann

1.1 Rappels sur les espaces hilbertiens

1.1.1 Produits scalaires

Soient E et F des espaces vectoriels complexes. Une application $f : E \to F$ est dite *antilinéaire* si, pour tout $x, y \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{C}$, on a $f(x+y) = f(x) + f(y)$ et $f(\lambda x) = \overline{\lambda} f(x)$.

1.1 Définition. Soit E un espace vectoriel complexe. On appelle *forme sesquilinéaire* sur E une application $B : E \times E \to \mathbb{C}$ telle que, pour tout $x \in E$, l'application $y \mapsto B(x, y)$ soit linéaire et l'application $y \mapsto B(y, x)$ antilinéaire (de E dans $\mathbb{C}$).

Rappelons qu'une forme bilinéaire B sur un espace vectoriel réel E est dite *symétrique* si, pour tout $x, y \in E$, on a $B(y, x) = B(x, y)$.

1.2 Proposition : Identité de polarisation. *a) Soient E un espace vectoriel complexe et B une forme sesquilinéaire sur E. Pour tout $x, y \in E$ on a*
$4B(x, y) = B(x+y, x+y) - B(x-y, x-y) - iB(x+iy, x+iy) + iB(x-iy, x-iy).$

b) Soient E un espace vectoriel réel et B une forme bilinéaire symétrique sur E. Pour tout $x, y \in E$ on a $4B(x, y) = B(x+y, x+y) - B(x-y, x-y)$.

Démonstration. On a $B(x+y, x+y) - B(x-y, x-y) = 2(B(x, y) + B(y, x))$. Remplaçant y par iy, on trouve : $B(x+iy, x+iy) - B(x-iy, x-iy) = 2(B(x, iy) + B(iy, x)) = 2i(B(x, y) - B(y, x))$; a) en résulte. b) est laissé en exercice. □

En particulier, pour connaitre une forme sesquilinéaire ou une forme bilinéaire symétrique B, il suffit de connaitre $B(x, x)$ pour tout x.

1.3 Corollaire. *Soient E un espace vectoriel complexe et B une forme sesquilinéaire sur E. Les conditions suivantes sont équivalentes :*
(i) Pour tout $x, y \in E$ on a $B(y, x) = \overline{B(x, y)}$.
(ii) Pour tout $x \in E$, $B(x, x) \in \mathbb{R}$.

Démonstration. Posons $S(x, y) = B(x, y) - \overline{B(y, x)}$. C'est une forme sesquilinéaire. Par l'identité de polarisation, S est nulle si et seulement si, pour tout $x \in E$, $S(x, x) = 0$. □

Soit E un espace vectoriel complexe. On appelle *forme hermitienne* sur E une forme sesquilinéaire vérifiant les conditions équivalentes de 1.3. Une forme hermitienne sur E est dite *positive* si, pour tout $x \in E$, $B(x, x) \in \mathbb{R}_+$.

Rappelons qu'une forme bilinéaire symétrique B sur un espace vectoriel réel E est dite *positive* si, pour tout $x \in E$, $B(x, x) \in \mathbb{R}_+$.

Convenons d'appeler *produit scalaire* une forme symétrique positive sur un espace réel ou une forme hermitienne positive sur un espace complexe. Le plus souvent, nous noterons les produits scalaires $(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$.

On appelle *espace préhilbertien* (réel ou complexe) un espace vectoriel (réel ou complexe) muni d'un produit scalaire.

1.4 Inégalité de Cauchy-Schwarz. *Soit E un espace préhilbertien. Pour tout $x, y \in E$ on a $|\langle x, y\rangle|^2 \leqslant \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle$.*

Démonstration. Soit $u \in \mathbb{K}$ de module 1 tel que $\langle x, y\rangle = u|\langle x, y\rangle|$. Pour $t \in \mathbf{R}$, $\langle ux + ty, ux + ty\rangle$ est positif. Or

$$\langle ux + ty, ux + ty\rangle = \langle ux, ux\rangle + t\langle ux, y\rangle + t\overline{\langle ux, y\rangle} + t^2\langle y, y\rangle = \langle x, x\rangle + 2t|\langle x, y\rangle| + t^2\langle y, y\rangle.$$

Ce polynôme du deuxième degré en t est positif en tout t, donc son discriminant est négatif ou nul. Cela donne $|\langle x, y\rangle|^2 - \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle \leqslant 0$. □

1.5 Corollaire. *Soit E un espace préhilbertien. L'application $x \mapsto \langle x, x\rangle^{1/2}$ est une semi-norme sur E.*

Démonstration. Pour $x, y \in E$, on a $\langle x + y, x + y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle + \langle x, y\rangle + \overline{\langle x, y\rangle} \leqslant \langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle + 2|\langle x, y\rangle| \leqslant (\langle x, x\rangle^{1/2} + \langle y, y\rangle^{1/2})^2$ par l'inégalité de Cauchy-Schwarz. □

Tout espace préhilbertien sera considéré comme muni de la semi-norme ci-dessus.

1.6 Proposition. *Soit E un espace préhilbertien. Pour $x \in E$ la forme linéaire $f_x : y \mapsto \langle x, y\rangle$ est continue. L'application $x \mapsto f_x$ est antilinéaire et isométrique de E dans E'.*

Démonstration. Notons p la seminorme de E. Pour $y \in E$ on a $|f_x(y)| \leqslant p(x)p(y)$ par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, donc $f_x \in E'$ et $\|f_x\| \leqslant p(x)$. Or $p(x)^2 = f_x(x) \leqslant \|f_x\|p(x)$, d'où l'on déduit que $p(x) \leqslant \|f_x\|$.

On vérifie sans peine que l'application $x \mapsto f_x$ est antilinéaire. □

1.7 Définition. Soit E un espace préhilbertien. On dit que les éléments x et y de E sont orthogonaux si $\langle x, y\rangle = 0$. On dit que des parties A et B sont orthogonales si tout élément de A est orthogonal à tout élément de B. Soit A une partie de E. On appelle orthogonal de A l'ensemble $A^\perp$ des éléments de E orthogonaux à A.

Il est clair que $A^\perp = \bigcap_{x\in A} \ker f_x$. Donc $A^\perp$ est un sous espace fermé de E.

1.1.2 Espaces hilbertiens

1.8 Définition. Un *espace hilbertien* est un espace préhilbertien séparé et complet.

Soit (E, p) un espace semi-normé. On dira que p est issu d'un produit scalaire, s'il existe un produit scalaire $\langle\, ,\rangle$ sur E tel que, pour tout $x \in E$ on ait $p(x) = \langle x, x\rangle^{1/2}$. Si un tel produit scalaire existe, il est unique, par l'identité de polarisation (1.2). On dira que (E, p) est un espace préhilbertien, si p est issu d'un produit scalaire. On dira que (E, p) est un espace hilbertien, s'il est préhilbertien séparé et complet.

1 Exercice. Soit E un espace préhilbertien. Démontrer que le séparé-complété de E est un espace hilbertien.

1.1.3 Le théorème de projection

1.9 Théorème de projection. *Soient H un espace hilbertien et C une partie convexe fermée non vide de H. Pour tout $x \in H$, il existe un et un seul point y_0 de C en lequel la fonction $y \mapsto \|y - x\|$ atteint son minimum. Pour tout $y \in C$, la partie réelle de $\langle x - y_0, y - y_0 \rangle$ est négative.*

Démonstration. Notons $d = \inf\{\|x - y\|,\ y \in C\}$ la distance de x à C. Soient $y, z \in C$. Posons $b = x - \dfrac{1}{2}(y + z)$ et $c = \dfrac{1}{2}(y - z)$; alors $\|b\| \geqslant d$ vu que $\dfrac{1}{2}(y + z) \in C$; comme $x - y = b - c$ et $x - z = b + c$, on a

$$\|x - y\|^2 + \|x - z\|^2 = 2(\|b\|^2 + \|c\|^2) \geqslant 2d^2 + \frac{1}{2}\|y - z\|^2;$$

donc $\|y - z\|^2 \leqslant 2(\|x - y\|^2 - d^2) + 2(\|x - z\|^2 - d^2)$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $C_n = \{y \in C;\ \|x - y\|^2 \leqslant d^2 + 1/n\}$. C'est une partie fermée non vide de H ; par ce qui précède le diamètre de C_n est inférieur ou égal à $2/\sqrt{n}$, donc tend vers 0. Comme H est complet, l'intersection des fermés emboités C_n qui est égale à $\{y \in C,\ \|x - y\| = d\}$, contient un et un seul point y_0.

Soit $y \in C$; pour $t \in [0, 1]$, on a $y_0 + t(y - y_0) \in C$, donc $\|y_0 + t(y - y_0) - x\| \geqslant \|y_0 - x\|$. Posons $\varphi(t) = \|y_0 + t(y - y_0) - x\|^2 = \|y_0 - x\|^2 + 2t\mathrm{Re}(\langle y_0 - x, y - y_0 \rangle) + t^2\|y - y_0\|^2$. Comme $\varphi(0) \leqslant \varphi(t)$ pour $t \in [0, 1]$, la dérivée de φ en 0 est positive ou nulle, donc $\mathrm{Re}(\langle y_0 - x, y - y_0 \rangle) \geqslant 0$. $\square$

1.10 Proposition. *Soient H un espace hilbertien et E un sous-espace vectoriel fermé de H. On a $E \oplus E^\perp = H$.*

Démonstration. Si $x \in E \cap E^\perp$ alors $\langle x, x \rangle = 0$ donc $x = 0$. Soit $x \in H$ et notons $y_0 \in E$ le point en lequel la fonction $y \mapsto \|y - x\|$ atteint son minimum. Soit $y \in E$. Soit $u \in \mathbb{K}$. Alors $y_0 + uy \in E$, donc la partie réelle de $\langle y_0 - x, uy \rangle$ est négative ou nulle. Prenant $u = \langle y, y_0 - x \rangle$, on trouve $\overline{u}u \leqslant 0$, donc $u = 0$. Il s'ensuit que $x - y_0 \in E^\perp$, donc $x = y_0 + x - y_0 \in E \oplus E^\perp$. $\square$

Si E est un sous-espace vectoriel fermé d'un espace hilbertien H on appelle *projecteur orthogonal* sur E l'opérateur $P : H \to H$ tel que $P(x + y) = x$ pour tout $x \in E$ et $y \in E^\perp$. Pour tout $x \in E$ et $y \in E^\perp$ on a $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \geqslant \|x\|^2 = \|P(x + y)\|^2$, donc $P \in \mathcal{L}(H, H)$ et $\|P\| \leqslant 1$.

1.11 Corollaire. *a) Soient H un espace hilbertien et A une partie de H ; alors $(A^\perp)^\perp$ est le plus petit sous-espace fermé de H contenant A.*
b) Si F est un sous espace de H, $(F^\perp)^\perp = \overline{F}$.

Démonstration. a) Notons E le plus petit sous-espace fermé de H contenant A. Tout élément de A est orthogonal à $A^\perp$, donc $A \subset (A^\perp)^\perp$. Comme $(A^\perp)^\perp$ est un sous-espace fermé de H contenant A, on a $E \subset (A^\perp)^\perp$.

Soit $x \in (A^\perp)^\perp$. Ecrivons $x = y + z$ avec $y \in E$ et $z \in E^\perp$. Comme $E \subset (A^\perp)^\perp$, $z = x - y \in (A^\perp)^\perp$; comme $A \subset E$, on a $E^\perp \subset A^\perp$; comme $z \in (A^\perp)^\perp \cap A^\perp$, il s'ensuit que $\langle z, z \rangle = 0$, donc $z = 0$. On en déduit que $x = y \in E$.

b) découle de a), puisque le plus petit sous-espace fermé de H contenant F est $\overline{F}$. $\square$

1.12 Proposition. *Soit H un espace hilbertien. L'application isométrique antilinéaire $x \mapsto f_x$ de la prop. 1.6 est une bijection de H sur H'.*

Démonstration. Soit $f \in H'$; notons E son noyau. Si $f \neq 0$, $E \neq H$ et $E^\perp$ n'est pas réduit à 0 par la prop. 1.10. Soit alors x un vecteur non nul de $E^\perp$. Comme $x \in E^\perp$, la forme f_x est nulle sur E. Comme $f_x(x) \neq 0$, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f(x) = \lambda f_x(x)$. Comme E est un hyperplan et $x \notin E$, on a $H = E \oplus \mathbb{K}x$. Donc f et λf_x qui coïncident sur E et en x sont égales. Donc $f = f_{\overline{\lambda}x}$. □

1.13 Corollaire. *Tout espace hilbertien est réflexif.*

Démonstration. Soient H un espace hilbertien et $\ell \in H''$. L'application $x \mapsto \overline{\ell(f_x)}$ est une forme linéaire et continue sur H. Par la prop. 1.12, il existe $y \in H$ tel que, pour tout $x \in H$ on ait $\ell(f_x) = \overline{f_y(x)} = \langle y, x\rangle = f_x(y)$. Il résulte alors de la prop. 1.12 que, pour tout $f \in H'$, on a $\ell(f) = f(y)$, c'est à dire que ℓ est l'image de y par l'application canonique de H dans H''. □

1.1.4 Adjoint d'une application linéaire continue

1.14 Proposition. *Soient E et F des espaces hilbertiens et $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Il existe un unique $T^* \in \mathcal{L}(F, E)$ tel que pour tout $x \in E$ et tout $y \in F$ on ait $\langle T(x), y\rangle = \langle x, T^*(y)\rangle$.*

Démonstration. Pour tout $y \in F$, l'application $x \mapsto \langle y, T(x)\rangle$ est linéaire et continue. Il existe donc un unique élément $T^*(y) \in E$ tel que pour tout $x \in E$ on ait $\langle y, T(x)\rangle = \langle T^*(y), x\rangle$. Pour tout $x \in E$, l'application $y \mapsto \langle x, T^*(y)\rangle = \langle T(x), y\rangle$ est linéaire d'où l'on déduit que T^* est linéaire.

Pour tout $x \in E$ et tout $y \in F$ on a $|\langle x, T^*(y)\rangle| = \langle T(x), y\rangle| \leqslant \|T(x)\|\|y\| \leqslant \|T\|\|x\|\|y\|$; or, pour $y \in F$ on a (par la prop. 1.6) $\|T^*(y)\| = \sup\{\langle x, T^*(y)\rangle,\ x \in E,\ \|x\| \leqslant 1\}$; donc $\|T^*(y)\| \leqslant \|T\|\|y\|$. Donc T^* est continue et $\|T^*\| \leqslant \|T\|$. □

1.15 Définition. Soient E et F des espaces hilbertiens et $T \in \mathcal{L}(E, F)$. L'unique $T^* \in \mathcal{L}(E, F)$ tel que pour tout $x \in E$ et tout $y \in F$ on ait $\langle T(x), y\rangle = \langle x, T^*(y)\rangle$ est appelé *adjoint* de T.

Regroupons dans la proposition suivante quelques propriétés des adjoints :

1.16 Proposition. *Soient E et F des espaces hilbertiens. L'application $T \mapsto T^*$ est antilinéaire et isométrique de $\mathcal{L}(E, F)$ sur $\mathcal{L}(F, E)$; pour tout $T \in \mathcal{L}(E, F)$ on a $(T^*)^* = T$ et $\|T^* \circ T\| = \|T\|^2$. Pour tout espace hilbertien H tout $S \in \mathcal{L}(E, F)$ et tout $T \in \mathcal{L}(F, H)$ on a $(T \circ S)^* = S^* \circ T^*)$.*

Démonstration. Montrons que $\|T^* \circ T\| = \|T\|^2$. On a $\|T^* \circ T\| \leqslant \|T^*\|\|T\| \leqslant \|T\|^2$. De plus, pour tout $x \in E$, $\|x\| \leqslant 1$ on a $\|T(x)\|^2 = \langle T(x), T(x)\rangle = \langle x, T^* \circ T(x)\rangle \leqslant \|T^* \circ T\|$ grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Donc $\|T\|^2 = \sup\{\|T(x)\|^2,\ x \in H,\ \|x\| \leqslant 1\} \leqslant \|T^* \circ T\|$.

Les autres propriétés sont laissées en exercice. □

1.17 Proposition. *Soient E et F des espaces hilbertiens et $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors* $\ker T^* = (T(E))^\perp$ *et l'adhérence de $T^*(F)$ est* $(\ker T)^\perp$.

Démonstration. Soit $y \in F$; alors $y \in \ker T^* \iff \forall x \in E,\ \langle T^*(y), x\rangle = 0 \iff y \in (T(E))^\perp$, d'où la première assertion. Il en résulte (par le cor. 1.11) que $\overline{T(E)} = (\ker T^*)^\perp$, d'où la deuxième assertion en remplaçant T par son adjoint. □

1.18 Définition. Soient E et F des espaces hilbertiens. Un élément $U \in \mathcal{L}(E, F)$ est appelé *unitaire* si $U^* \circ U = \mathrm{id}_E$ et $U \circ U^* = \mathrm{id}_F$. Un élément $T \in \mathcal{L}(E, E)$ est appelé *normal* si $T^* \circ T = T \circ T^*$, *autoadjoint* si $T = T^*$ et *positif* s'il est autoadjoint et, pour tout $x \in E$ on a $\langle T(x), x\rangle \in \mathbb{R}_+$.

Soient H un espace hilbertien, $P \in \mathcal{L}(H)$ un projecteur orthogonal ; notons E son image. Pour $x, x' \in E$ et $y, y' \in E^\perp$ on a $\langle P(x+y), x'+y'\rangle = \langle x, x'\rangle = \langle x+y, P(x'+y')\rangle$; donc $P = P^*$. De plus, $\langle P(x+y), x+y\rangle = \langle x, x\rangle \in \mathbb{R}_+$, donc P est positif.

1.19 Proposition. *Soient E et F des espaces hilbertiens et $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*
(i) T est unitaire.
(ii) T est surjectif et $T^* \circ T = id_E$.
(iii) T est une isométrie de E sur F.

Démonstration. Si T est unitaire, comme $T \circ T^* = \mathrm{id}_F$, il est surjectif, donc (i)⇒(ii).

Si $T^* \circ T = \mathrm{id}_E$, alors pour tout $x \in E$ on a $\|T(x)\|^2 = \langle T(x), T(x)\rangle = \langle x, T^*(T(x))\rangle = \|x\|^2$; donc (ii)⇒(iii).

Enfin, supposons que T est une isométrie de E sur F ; comme $(x, y) \mapsto \langle x, T^*(T(y))\rangle = \langle Tx, Ty\rangle$ est un produit scalaire sur E, il résulte de l'identité de polarisation (1.2) que, pour tout $x, y \in E$, on a $\langle x, T^*(T(y))\rangle = \langle x, y\rangle$. Donc $T^*(T(y)) - y \in E^\perp = \{0\}$. Donc $T^* \circ T = \mathrm{id}_E$. Comme par l'hypothèse (iii) T est bijective, $T^* = T^{-1}$, d'où (i). □

1.2 Théorème du bicommutant

1.2.1 Commutants, bicommutants

Soit H un espace hilbertien. Pour toute partie B de $\mathcal{L}(H)$ le *commutant* de B dans H est $B' = \{\, T \in \mathcal{L}(H)\,,\ \forall S \in B,\ ST = TS \,\}$; le *bicommutant* de B dans H est $B'' = (B')'$.

1.20 Propriétés. Soient A, B des parties de $\mathcal{L}(H)$. On a

a) L'ensemble A' est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(H)$. Si A est stable par $x \mapsto x^*$, il en va de même pour A'.

b) On suppose que A est stable par $x \mapsto x^*$ et soit E un sous-espace fermé de H. Notons P_E la projection orthogonale sur E. Alors $P_E \in A'$ si et seulement si E est stable par tout élément $a \in A$.

c) $A \subset B' \iff B \subset A'$.

d) $A \subset B \Rightarrow B' \subset A'$.

e) $A \subset A''$.

f) $A''' = A'$.

g) Pour $m \in \mathbb{N}^*$, on identifie $\mathcal{L}(H^m)$ avec $M_m(\mathcal{L}(H))$. Notons $d_m : \mathcal{L}(H) \to M_m(\mathcal{L}(H))$ l'application $a \mapsto \begin{pmatrix} a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a \end{pmatrix}$. Le commutant de $d_m(A)$ est $M_m(A')$ et, si $1 \in A$, le commutant de $M_m(A)$ est $d_m(A')$.

1.2.2 Topologies sur $\mathcal{L}(H)$

Soient X un ensemble, et $(E_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques. Donnons-nous pour tout $i \in I$ une application $f_i : X \to E_i$. On peut munir alors X d'une topologie qui est la plus faible parmi celles rendant continues les applications f_i. Une partie V de X est un voisinage de $x \in X$ pour cette topologie si et seulement s'il existe une partie finie J de I et, pour tout $j \in J$ un voisinage U_j de $f_j(x)$ dans E_j tels que $\displaystyle\bigcap_{j\in J} f_j^{-1}(U_j) \subset V$.

Soit H un espace hilbertien.

Sur H, en plus de la topologie normique, on utilisera la topologie *faible* qui est la topologie la plus faible rendant continues les applications $f_y : x \mapsto \langle y, x\rangle$ (pour fout $y \in H$).

Dans le cas hilbertien, le théorème de projection implique le résultat suivant ([1]).

1.21 Proposition. *Toute partie convexe fermée de H est faiblement fermée.*

Démonstration. Soit C une partie convexe fermée non vide de H. Pour $x \in H$, notons $p_C(x)$ le point de C tel que $\|x - p_C(x)\| = \inf\{\|x - y\|;\ y \in C\}$. Alors, il résulte du théorème de projection que l'on a $C = \{y \in H;\ \forall x \in H,\ \mathrm{Re}\langle y - p_C(x), (x - p_C(x)\rangle \leqslant 0\}$; donc C est faiblement fermé. □

Sur $\mathcal{L}(H)$ en plus de la topologie normique, on utilisera les topologies suivantes.

— La topologie *forte*, qui est la topologie la plus faible rendant continues les applications $T \mapsto T(x)$ de $\mathcal{L}(H)$ dans H muni de la topologie normique (pour $x \in H$).

— La topologie *faible*, qui est la topologie la plus faible rendant continues les applications $T \mapsto T(x)$ de $\mathcal{L}(H)$ dans H muni de la topologie faible (pour $x \in H$). C'est la topologie la plus faible rendant continues les applications $T \mapsto \langle x, T(y)\rangle$ pour $x, y \in H$.

— La topologie $*$-*forte*, qui est la topologie la plus faible rendant continues les applications $T \mapsto T(x)$ et $T \mapsto T^*(x)$ de $\mathcal{L}(H)$ dans H muni de la topologie normique (pour $x \in H$).

1.2.3 Le théorème du bicommutant

1.22 Théorème. *Soient H un espace hilbertien et A une sous-algèbre involutive de $\mathcal{L}(H)$ (contenant 1). Soit $T \in \mathcal{L}(H)$.*

Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $T \in A''$.

(ii) *T est faiblement adhérent à A.*

(iii) *T est fortement adhérent à A.*

(iv) *T est $*$-fortement adhérent à A.*

Démonstration. (iv)⇒(iii) et (iii)⇒(ii) sont clairs.

On a $A'' = \{T \in \mathcal{L}^(H);\ \forall x, y \in H;\ \forall S \in A';\ \langle S^*(x), T(y)\rangle = \langle x, T(S(y))\rangle\}$, donc est faiblement fermé. On en déduit immédiatement que (iii)⇒(i).

Démontrons que (i)⇒(iii). Supposons que $T \in A''$.

Soit $m \in \mathbb{N}$ et $x_1, \ldots, x_m$ des éléments de H. Notons $d_m : \mathcal{L}(H) \to \mathcal{L}(H^m) = M_m(\mathcal{L}(H))$ l'application naturelle (*cf.* propriété 1.20.g).

1. Ce résultat est vrai dans un espace normé quelconque - c'est une conséquence du théorème de séparation de Hahn-Banach

Posons $w = (x_1, \dots, x_m) \in H^m$.

Soit P le projecteur orthogonal sur l'adhérence K de $d_m(A)w = \{(a(x_1), \dots a(x_m));\ a \in A\}$. Comme $d_m(A)w$ est invariant par $d_m(A)$, on en déduit que K est invariant par $d_m(A)$ donc $P \in d_m(A)'$ (propriété 1.20.b). Par la propriété 1.20.g), $d_m(T) \in (d_m(A))''$, donc $TP = PT$. Or, puisque $1 \in A$, on a $w \in K$ donc $d_m(T)w \in K$. Ceci ayant lieu pour toute partie finie $\{x_1, \dots, x_m\}$ de H, on en déduit que T est fortement adhérent à A.

Démontrons enfin que (iii)⇒(iv). Supposons que T vérifie (iii).

— Traitons d'abord le cas $T = T^*$. Remarquons que $S \mapsto S^*$ est un homéomorphisme de $\mathcal{L}(H)$ munie la topologie faible dans lui même. On en déduit que l'application $T \mapsto \dfrac{1}{2}(T + T^*)$ est continue pour cette topologie, donc T est faiblement adhérent à $A_h = \{a \in A;\ a = a^*\}$. Fixons $m \in \mathbb{N}$ et $(x_1, \dots, x_m) \in H^m$. Alors $(T(x_1), \dots, T(x_m))$ est adhérent à l'ensemble convexe $\{(a(x_1), \dots, a(x_m));\ a \in A_h\}$ pour le topologie faible, donc pour la topologie normique d'après la prop. 1.21.

— Dans le cas général, $\dfrac{1}{2}(T+T^*)$ et $\dfrac{1}{2i}(T-T^*)$ sont fortement - donc $*$-fortement adhérents à A_h, donc $T = \dfrac{1}{2}(T+T^*) + i\,\dfrac{1}{2i}(T-T^*)$ est $*$-fortement adhérent à A □

On en déduit immédiatement

1.23 Théorème. *Soient H un espace hilbertien et A une sous-algèbre involutive de $\mathcal{L}(H)$ contenant* 1*. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $A = A''$.

(ii) *A est faiblement fermée dans $\mathcal{L}(H)$.*

(iii) *A est fortement fermée dans $\mathcal{L}(H)$.*

(iv) *A est $*$-fortement fermée dans $\mathcal{L}(H)$.*

1.24 Corollaire. *Les adhérences forte et faible et le bicommutant de toute sous-algèbre involutive de $\mathcal{L}(H)$ contenant* 1 *coïncident.* □

1.25 Définition. Une sous-algèbre involutive non dégénérée de $\mathcal{L}(H)$ satisfaisant les conditions du théorème 1 est appelée *algèbre de von Neumann.*

2 C*-algèbres et calcul fonctionnel continu

2.1 Spectre

2.1.1 Préliminaires algébriques

Soit K un corps algébriquement clos.

2.1 Définition. Soit A une K-algèbre unifère. Notons 1 l'élément unité de A. Pour $\lambda \in K$ nous noterons encore λ l'élément $\lambda 1$ de A. On note A^{-1} l'ensemble des éléments inversibles de A. Soit x un élément de A. On appelle *spectre* de x dans A le sous-ensemble $\mathrm{Sp}_A x = \{\, \lambda \in K\,,\ (x-\lambda) \notin A^{-1}\}$ de K.

Si l'algèbre A n'est pas unifère, on peut la plonger dans une algèbre unifère $\tilde{A}$ qui comme K-espace vectoriel est isomorphe à $A \times K$ et dont la loi de produit est définie par : $(a,\lambda)(b,\mu) = (ab+\lambda b+\mu a, \lambda\mu)$ (pour tout $a,b \in A, \lambda,\mu \in K$). L'élément $(0,1)$ est l'élément unité de $\tilde{A}$. La formule $i(a) = (a,0)$ définit un homomorphisme de A dans $\tilde{A}$. On identifie alors A avec son image dans $\tilde{A}$ de sorte que l'élément (a,λ) s'écrit $a+\lambda$. Enfin, on pose $\mathrm{Sp}'_A a = \mathrm{Sp}_{\tilde{A}} a$ pour tout élément a de A. Dans la suite on écrira souvent $\mathrm{Sp}_A a$ au lieu de $\mathrm{Sp}'_A a$.

Remarquons que, pour tout $a \in A\,,\ 0 \in \mathrm{Sp}'_A a$.

2.2 Remarque. Si l'algèbre A possède déjà un élément unité noté e, en posant $\pi(a,\lambda) = (a+\lambda e, \lambda)$ on obtient un isomorphisme π de $\tilde{A}$ sur l'algèbre produit $A \times K$. Pour $a \in A$ on a $\mathrm{Sp}'_A a = \mathrm{Sp}_A a \cup \{0\}$.

2.3 Proposition. *Soit $\pi : A \to B$ un morphisme d'algèbres unifères. Pour tout $x \in A$ on a $\mathrm{Sp}_B \pi(x) \subset \mathrm{Sp}_A x$.* □

2.4 Remarques. a) Soient $a,b \in A$ tels que $ab = ba$. Alors ab est inversible si et seulement si a et b le sont.

b) Si $P \in K[X]$, écrivant P comme produit de monômes, on en déduit que $P(a)$ est inversible si et seulement si P ne s'annule pas sur le spectre de A.

2.5 Exemple. Notons $K(X)$ le corps des fractions rationnelles sur K. Pour $R \in K(X)$, notons $p(R)$ le sous-ensemble de K formé des pôles de R. Soit S une partie de K et posons $K(X)_S = \{\, R \in K(X)\,,\ p(R) \cap S = \emptyset\}$. Alors il est clair que $\mathrm{Sp}_{K(X)_S} X = S$.

Revenons au cas général. Soient $x \in A$ et $R \in K(X)$ sans pôles dans $\mathrm{Sp}_A x$; écrivons $R = P/Q$ où P et Q sont deux polynômes premiers entre eux. Alors $Q(x)$ est inversible et on peut former $R(x) = P(x)Q(x)^{-1}$. On a clairement (on utilise la remarque ci-dessus pour b) :

2.6 Proposition. *a) L'application $R \mapsto R(x)$ est l'unique homomorphisme φ d'algèbres unifères de $K(X)_{\mathrm{Sp}_A x}$ dans A tel que $\varphi(X) = x$.*

b) Pour tout $P \in K(X)_{\mathrm{Sp}_A x}$, on a $\mathrm{Sp}_A P(x) = P(\mathrm{Sp}_A x)$. □

2.7 Lemme. *Soit A une anneau unifère et notons 1 son élément unité. Soient $x,y \in A$. Alors $1-xy$ est inversible si et seulement si $1-yx$ l'est.*

Démonstration. Si $1-yx$ est inversible, $1+x((1-yx)^{-1})y$ est l'inverse de $1-xy$. □

2.8 Proposition. *Pour tout couple (x,y) d'éléments de l'algèbre A on a $\mathrm{Sp}'_A xy = \mathrm{Sp}'_A yx$.* □

2.9 Remarque. Supposons que le corps K n'est pas algébriquement clos et soit k une clôture algébrique de K. Soit A une K-algèbre. En "étendant les scalaires" on définit une k-algèbre $A_k = A \otimes_K k$ dans laquelle A est naturellement plongée (par l'application $a \mapsto a \otimes 1$). Le spectre d'un élément x de A est alors par définition $\mathrm{Sp}_{A_k}(x \otimes 1)$.

2.1.2 Spectre d'un élément d'une algèbre de Banach

Soient E et F deux espaces normés. On note $\mathcal{L}(E,F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues de E dans F. La norme d'opérateur de $T \in \mathcal{L}(E,F)$ est $\|T\| = \sup\{\,\|Tx\|\,,\ x \in E\,,\ \|x\| \leqslant 1\,\}$. Rappelons que l'espace des applications linéaires continues d'un espace vectoriel normé E dans un espace de Banach F est un espace de Banach.

Une algèbre de Banach (complexe) est un espace de Banach muni d'un produit $(x,y) \mapsto xy$ qui en fait une algèbre complexe et tel que, pour tout $x, y \in A$ on ait $\|xy\| \leqslant \|x\|\,\|y\|$ (où $\|\ \|$ désigne la norme de A). Si A est unifère on suppose de plus que $\|1\| = 1$. Soit E un espace de Banach. L'algèbre $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E,E)$ munie de la norme des opérateurs est une algèbre de Banach.

Si l'algèbre A n'est pas unifère, l'algèbre unifère $\tilde{A}$ (*cf.* §2.1.1) admet une structure d'algèbre de Banach dont la norme est définie par : $\|(a,\lambda)\| = \|a\| + |\lambda|$ (pour $a \in A\,,\ \lambda \in \mathbf{C}$).

Soit A un espace de Banach muni d'un produit continu qui en fait une algèbre complexe unifère. On peut remplacer la norme de A par une norme équivalente de manière à avoir $\|xy\| \leqslant \|x\|\,\|y\|$ et $\|1\| = 1$. En effet, pour $a \in A$ définissons $L_a \in \mathcal{L}(A)$ par la formule $L_a(x) = ax$. L'application $a \mapsto L_a$ est un morphisme continu d'algèbres. La norme d'opérateur de L_a est supérieure ou égale à $\dfrac{\|a\|}{\|1\|}$. Donc l'application qui à $a \in A$ associe la norme d'opérateur de L_a est une norme équivalente à $\|\ \|$.

Nous utiliserons le lemme suivant :

2.10 Lemme. *Soient A une algèbre de Banach unifère.*

a) Soit a de A tel que $\|a\| < 1$. Alors $1-a$ est inversible et son inverse est limite de la série $\sum_{n\in\mathbf{N}} a^n$.

b) Pour tout $x \in A$ et tout $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $\|x\| < |\lambda|$, on a $\lambda \notin \mathrm{Sp}_A x$ et $\lim_{\lambda\to\infty} \|\lambda(\lambda - x)^{-1} - 1\| = 0$.

Démonstration. a) Comme $\|a^n\| \leqslant \|a\|^n$ la série $\sum_{n\in\mathbf{N}} a^n$ converge. On a

$$a\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a^n\right) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a^n\right) a = \sum_{n=1}^{+\infty} a^n,$$

d'où a).

b) Posons $a = x\lambda^{-1}$. Par a) $1-a$ est inversible, donc $\lambda - x$ est inversible et $\lambda(\lambda-x)^{-1} = (1-a)^{-1}$; or $\|(1-a)^{-1} - 1\| = \left\|\sum_{n=1}^{+\infty} a^n\right\| \leqslant \dfrac{\|a\|}{1-\|a\|}$ d'où b). □

Il résulte de ce lemme :

2.11 Proposition. *L'ensemble des éléments inversibles A^{-1} d'une algèbre de Banach unifère A est ouvert et l'application $\varphi : x \mapsto x^{-1}$ est continument différentiable sur A^{-1} ; sa différentielle en $x \in A^{-1}$ est $(D\varphi)_x : h \mapsto -x^{-1}hx^{-1}$.*

Démonstration. Soient $x \in A^{-1}$ et $h \in A$ tels que $\|h\| < \|x^{-1}\|^{-1}$. Posons $a = -hx^{-1}$; alors $1-a$ est inversible par le lemme 2.10.a), donc $x + h = (1-a)x$ est inversible et $(x+h)^{-1} = x^{-1}(1-a)^{-1} = x^{-1}\sum_{n\in\mathbf{N}} a^n$ donc

$$\|(x+h)^{-1} - x^{-1} + x^{-1}hx^{-1}\| = \left\|x^{-1}\sum_{n=2}^{+\infty} a^n\right\| \leqslant \frac{\|x^{-1}\|^3\|h\|^2}{1-\|x^{-1}\|\|h\|}$$

d'où le résultat. $\square$

2.12 Proposition. *Soit A une algèbre de Banach unifère non nulle. Le spectre de tout élément x de A est une partie compacte non vide de $\mathbf{C}$ et l'application $z \mapsto (x-z)^{-1}$ est holomorphe de $\mathbf{C} - \mathrm{Sp}_A x$ dans A.*

Démonstration. L'application $\lambda \mapsto (\lambda - x)$ est continue donc l'image inverse de A^{-1} est ouverte (prop 2.11). Donc $\mathrm{Sp}_A x$ est fermé dans $\mathbf{C}$. Comme $\mathrm{Sp}_A x$ est borné (lemme 2.10.b), c'est un compact de $\mathbf{C}$. Posons $U = \mathbf{C} - \mathrm{Sp}_A x$.

Par la prop. 2.11, pour toute forme linéaire continue ℓ sur A, l'application $z \mapsto \ell((x-z)^{-1})$ est une fonction holomorphe dans U. Si $\mathrm{Sp}_A x$ était vide, cette fonction serait entière ; or quand $z \to \infty$, $\ell((x-z)^{-1})$ tend vers 0 (lemme 2.10.b). Par le théorème de Liouville on aurait $\ell((x-z)^{-1}) = 0$ pour tout z ; ceci ayant lieu pour tout ℓ, on aurait $(x-z)^{-1} = 0$, ce qui est absurde, d'où la proposition. $\square$

Une conséquence directe de cette proposition est :

2.13 Corollaire. *(théorème de Gel'fand-Mazur) : Soit A une algèbre de Banach. Si A est un corps alors $A = \mathbf{C}$.*

Démonstration. Montrons que l'application $i : \mathbf{C} \to A$ telle que $i(\lambda) = \lambda 1$ est surjective. Soit $x \in A$; comme $\mathrm{Sp}_A x$ n'est pas vide il existe $\lambda \in \mathbf{C}$ tel que $i(\lambda) - x$ ne soit pas inversible ; si A est un corps on a alors $i(\lambda) = x$. $\square$

2.14 Proposition. *Soit x un élément d'une algèbre de Banach A. La suite $(\|x^n\|^{1/n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et sa limite est égale à* $\sup\{\,|\lambda|\,,\ \lambda \in \mathrm{Sp}_A x\,\}$.

La première assertion résulte du lemme élémentaire suivant (en posant $u_n = \log(\|x^n\|^{1/n})$) :

2.15 Lemme. *Soit (u_n) une suite de nombres dans $\mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ telle que pour tout n et p on ait $(n+p)u_{n+p} \leqslant nu_n + pu_p$. Alors la suite (u_n) converge vers* $\inf\{\,u_n\,,\ n \geqslant 1\,\}$.

Démonstration. Soit $m \geqslant 1$. Par recurrence sur $k \geqslant 1$ on a $u_{km} \leqslant u_m$. Pour $n = km + r$ avec $0 \leqslant r < m$ on a $u_n \leqslant n^{-1}(kmu_m + ru_1) = u_m + r/n(u_1 - u_m)$ donc $\limsup u_n \leqslant u_m$. $\square$

Fin de la démonstration de la proposition 2.14. Posons $r = \sup\{\,|\lambda|\,,\ \lambda \in \mathrm{Sp}_A x\,\}$ et $\rho = \lim(\|x^n\|^{1/n})$. Pour $|\lambda| > \rho$ la série $\sum (x/\lambda)^n$ converge donc $x - \lambda$ est inversible d'inverse

$$-\lambda^{-1}(1-\lambda^{-1}x)^{-1} = -\sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^{-k-1}x^k \tag{2.1}$$

En particulier $r \leqslant \rho$.

Posons $U_r = \{\lambda \in \mathbb{C};\ |\lambda| > r\}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, et $\lambda \in U_r$ posons

$$a_n(\lambda) = (2i\pi)^{-1}\int_0^{2\pi} (\lambda e^{it})^{n+1}(\lambda e^{it} - a)^{-1} dt$$

L'application a_n est holomorphe sur U_r et, pour $|\lambda| > \rho$ on trouve, d'après la convergence normale dans le formule (2.1), $a_n(\lambda) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} (\lambda e^{it})^{n-k}x^k\, dt = x^n$. On en déduit que a_n est constante.

Donc pour R un nombre réel tel que $R > r$, il vient $x^n = a_n(R)$, donc $\|x^n\| \leqslant R^n M_R$ où $M_R = R\sup\{\|(\lambda - x)^{-1}\|;\ |\lambda = R\}$, donc $\rho \leqslant R$; il vient $\rho \leqslant r$. $\square$

2.16 Définition. Pour $x \in A$ on pose $\rho(x) = \sup\{\,|\lambda|\,,\ \lambda \in \mathrm{Sp}_A x\,\}$. Ce nombre s'appelle le *rayon spectral* de x.

2.1.3 Transformation de Gel'fand

2.17 Définition. Soit A une algèbre de Banach. On appelle *caractère* de A tout homomorphisme d'algèbres continu et non nul de A dans $\mathbf{C}$.

Rappelons qu'un idéal à gauche (resp. à droite, bilatère) I d'un anneau A est dit *maximal* si $I \neq A$ et si les seuls idéaux à gauche (resp. à droite, bilatères) de A contenant I sont A et I.

2.18 Lemme. *Tout idéal maximal d'une algèbre de Banach unifère est fermé.*

Démonstration. Soit I un idéal de l'algèbre de Banach A, distinct de A et notons $\overline{I}$ son adhérence. Comme $I \cap A^{-1} = \emptyset$ et que A^{-1} est ouvert, on a $\overline{I} \cap A^{-1} = \emptyset$ et $\overline{I} \neq A$. Si I est maximal, comme $I \subset \overline{I}$, on a nécessairement $I = \overline{I}$ et I est fermé. □

Rappelons qu'un idéal I d'un anneau commutatif A est maximal si et seulement si l'anneau A/I est un corps. D'après le lemme précédent et le théorème de Gel'fand-Mazur, il y a correspondance bijective entre idéaux maximaux d'une algèbre de Banach commutative et caractères : le noyau d'un caractère est un idéal maximal ; le quotient de A par un idéal maximal est une algèbre de Banach (lemme 2.18) et un corps donc est canoniquement isomorphe à $\mathbf{C}$.

2.19 Définition. On appelle *spectre* d'une algèbre de Banach commutative A et on note $\operatorname{Sp} A$ l'ensemble de ses caractères. On munit $\operatorname{Sp} A$ de la topologie de le convergence simple.

Autrement dit la topologie de $\operatorname{Sp} A$ est la topologie la moins fine pour laquelle les applications $\chi \mapsto \chi(x)$ de $\operatorname{Sp} A$ dans $\mathbf{C}$ sont continues (pour tout $x \in A$).

Si A est une algèbre de Banach commutative et non unifère, le spectre de A est la partie du spectre de $\tilde{A}$ formée des caractères qui ne sont pas nuls sur A.

2.20 Proposition. *Soit A une algèbre de Banach commutative et unifère.*

a) Pour $x \in A$ on a : $\operatorname{Sp}_A x = \{\, \chi(x) ;\ \chi \in \operatorname{Sp} A \,\}$.

b) Le spectre de A est compact.

c) Pour $x \in A$ et $\chi \in \operatorname{Sp} A$ on pose $G(x)(\chi) = \chi(x)$. L'application G est un morphisme continu d'algèbres de A dans $C(\operatorname{Sp} A)$.

Démonstration. a) Soit $x \in A$. Pour tout $\chi \in \operatorname{Sp} A$, $x - \chi(x)$ appartient au noyau du caractère χ et donc n'est pas inversible. Il s'ensuit que $\chi(x) \in \operatorname{Sp}_A x$. Réciproquement, soit $\lambda \in \operatorname{Sp}_A x$. L'idéal $(x-\lambda)A$ est alors distinct de A. Soit J un idéal maximal contenant $(x-\lambda)A$ (lemme de Zorn) et χ le caractère de noyau J. On a $\chi(x-\lambda) = 0$ donc $\chi(x) = \lambda$.

b) Il résulte de a) et du lemme 2.10.b) que pour tout $\chi \in \operatorname{Sp} A$ et $x \in A$ on a $|\chi(x)| \leqslant \|x\|$. Il s'ensuit que $\operatorname{Sp} A$ est inclus dans la boule unité de l'espace de Banach A' dual (topologique) de A. Or la boule unité du dual d'un espace de Banach E est compacte pour la topologie de la convergence simple $\sigma(E', E)$. Comme $\operatorname{Sp} A$ est l'intersection des parties fermées $B_{x,y} = \{\, \ell \in A' ,\ \ell(xy) = \ell(x)\ell(y) \,\}$ pour x et y parcourant A et de $\{\, \ell \in A' ,\ \ell(1) = 1 \,\}$, $\operatorname{Sp} A$ est compact.

c) Par définition de la topologie de $\operatorname{Sp} A$ les applications $G(x)$ sont continues. De plus, pour tout $x, y \in A$ et tout $\chi \in \operatorname{Sp} A$ on a $G(xy)(\chi) = \chi(xy) = \chi(x)\chi(y) = (G(x)G(y))(\chi)$ donc $G(xy) = G(x)G(y)$; de même $G(x+y) = G(x) + G(y)$, d'où la proposition. □

2.21 Définition. L'application $G : A \to C(\operatorname{Sp} A)$ décrite dans la proposition 2.20.c) s'appelle la *transformation de Gel'fand* de A.

2.22 Remarque. Soit A une algèbre de Banach non unifère et $\chi : A \to \mathbf{C}$ un morphisme d'algèbres. On peut bien étendre χ à un morphisme d'algèbres $\tilde{\chi} : \tilde{A} \to \mathbf{C}$ en posant $\tilde{\chi}(x + \lambda) = \chi(x) + \lambda$ (pour tout $x \in A$, $\lambda \in \mathbb{C}$) donc χ est continu.

2.2 C*-algèbres

2.2.1 Définitions

2.23 Définition. Une *involution* d'une algèbre de Banach A est une application $x \mapsto x^*$ de A dans A involutive, antilinéaire, antimultiplicative et isométrique. Autrement dit, pour tout $x, y \in A$ et tout $\lambda \in \mathbf{C}$, on a : $(x^*)^* = x$; $(x+y)^* = x^* + y^*$, $(\lambda x)^* = \overline{\lambda} x^*$; $(xy)^* = y^* x^*$ et $\|x^*\| = \|x\|$. On dit qu'une algèbre de Banach est *involutive* si elle est munie d'une involution. Une *C^*-algèbre* est une algèbre de Banach involutive A telle que pour tout $x \in A$ on ait $\|x^* x\| = \|x\|^2$.

2.24 Remarque. Si une application involutive $x \mapsto x^*$ de l'algèbre normée A dans A vérifie $\|x^* x\| \geqslant \|x\|^2$ pour tout x, comme $\|x^* x\| \leqslant \|x^*\| \|x\|$ on a $\|x\| \leqslant \|x^*\|$; donc $\|x^*\| \leqslant \|(x^*)^*\|$; enfin $\|x\| = \|x^*\|$ et $\|x^* x\| = \|x\|^2$.

Voyons deux exemples fondamentaux de C^*-algèbres :

La C^*-algèbre $C(X)$: Soit X un espace topologique compact. On note $C(X)$ l'algèbre des fonctions continues à valeurs complexes sur X. Munissons $C(X)$ de la norme de la convergence uniforme $\|f\| = \sup\{\, |f(t)|\,,\ t \in X \,\}$ et de l'involution donnée par $f^*(t) = \overline{f(t)}$ (pour tout $t \in X$).

On a évidemment :

2.25 Proposition. *Munie de la norme de la convergence uniforme et de l'involution ci-dessus, $C(X)$ est une C^*-algèbre commutative et unifère.* □

Quand on parlera de la C^*-algèbre $C(X)$ ce sera toujours l'algèbre $C(X)$ munie de la norme de la convergence uniforme et de l'involution ci-dessus.

La C^*-algèbre $\mathcal{L}(H)$

2.26 Proposition. *Soit H un espace hilbertien. L'algèbre de Banach $\mathcal{L}(H)$ munie de l'involution $T \mapsto T^*$ est une C^*-algèbre.*

Démonstration. Pour tout $T \in \mathcal{L}(H)$ et tout $x \in H$, $\|x\| \leqslant 1$ on a $\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx \rangle = \langle x, T^*Tx \rangle \leqslant \|T^*T\|$ grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Donc $\|T\|^2 = \sup\{\, \|Tx\|^2\,,\ x \in H\,,\ \|x\| \leqslant 1 \,\} \leqslant \|T^*T\|$ et la prop. résulte de la remarque 2.24. □

2.27 Définition. Soit A une C^*-algèbre. Un élément h de A est dit *autoadjoint* ou *hermitien* si $h^* = h$; un élément a de A est dit *normal* si $a^* a = a a^*$; si A est unifère, un élément u de A est dit *unitaire* si on a $u^* u = u u^* = 1$.

Les éléments autoadjoints et unitaires sont normaux. Si x est un élément quelconque de A les éléments $x^* x$, $x x^*$, $x + x^*$ et $i(x - x^*)$ sont autoadjoints. En particulier tout élément x de A se décompose de façon unique sous la forme $x = h + ik$ avec h et k autoadjoints.

2.28 Proposition. *Soit A une C^*-algèbre unifère.*

a) Le spectre de tout élément unitaire de A est inclus dans $\mathbb{U}(1) = \{\, z \in \mathbf{C}\,,\ |z| = 1 \,\}$.

b) Le spectre de tout élément autoadjoint de A est inclus dans $\mathbb{R}$.

c) Pour tout $x \in A$ on a $\mathrm{Sp}_A x^* = \{\, \overline{\lambda}\,,\ \lambda \in \mathrm{Sp}_A x \,\}$.

Démonstration. a) Soient u un élément unitaire et $\lambda \in \mathrm{Sp}_A u$. Comme $\|u\| = 1$ on a $|\lambda| \leqslant 1$ et comme $\|u^{-1}\| = 1$ on a $|\lambda^{-1}| \leqslant 1$.

b) Soit h un élément autoadjoint. Pour $t \in \mathbb{R}$, $t > \|h\|$, $h+it$ est inversible et $(h-it)(h+it)^{-1}$ est unitaire ; donc $\mathrm{Sp}_A h$ est inclus (par a et la prop. 4.5.a) dans $\{ z \in \mathbf{C},\ |(z-it)(z+it)^{-1}| = 1 \} = \mathbb{R}$.

c) Enfin, si $y = x - \lambda$ est inversible, on a $(y^{-1})^* y^* = y^*(y^{-1})^* = 1$ donc y^* est inversible et $(y^*)^{-1} = (y^{-1})^*$, d'où c). □

2.29 Proposition. *Soient A une C^*-algèbre unifère et B une sous-algèbre involutive fermée de A contenant l'élément unité 1 de A. Pour tout élément x de B on a $\mathrm{Sp}_A x = \mathrm{Sp}_B x$.*

Démonstration. Soit $\lambda \in \mathbf{C} - \mathrm{Sp}_A x$; posons $y = (x-\lambda)^*(x-\lambda)$. Alors $\mathrm{Sp}_B y - \mathrm{Sp}_A y = \{ \mu \in \mathbf{C} - \mathrm{Sp}_A y,\ (y-\mu)^{-1} \in A - B \}$ est une partie ouverte de $\mathbf{C}$, contenue dans $\mathbb{R}$ donc $\mathrm{Sp}_B y = \mathrm{Sp}_A y$. Or y est inversible dans A (prop. 2.28.c) donc dans B et $(x-\lambda)^{-1} = y^{-1}(x-\lambda)^* \in B$. □

2.30 Remarque. Cette proposition n'est pas vraie pour des algèbres de Banach générales. Cependant, si B est une sous-algèbre fermée de l'algèbre de Banach A et $x \in B$, $\mathrm{Sp}_B x - \mathrm{Sp}_A x = \{ \lambda \in \mathbf{C} - \mathrm{Sp}_A x,\ (x-\lambda)^{-1} \in A - B \}$ est une partie ouverte de $\mathbf{C}$, autrement dit la frontière de $\mathrm{Sp}_B x$ est incluse dans $\mathrm{Sp}_A x$. Ici, on a appliqué ce résultat à y.

2.31 Proposition. *Le rayon spectral de tout élément normal d'une C^*-algèbre est égal à sa norme.*

Démonstration. Soit h un élément autoadjoint. On a, par récurrence sur n, $\|h^{2^n}\| = \|h\|^{2^n}$, donc $\rho(h) = \|h\|$. Soit x un élément normal de la C^*-algèbre A. On a $(x^*x)^n = (x^*)^n x^n$ donc $\|(x^*x)^n\| = \|x^n\|^2$ et $\rho(x^*x) = \rho(x)^2$. Or x^*x est autoadjoint, donc $\rho(x)^2 = \rho(x^*x) = \|x^*x\| = \|x\|^2$. □

En particulier, la norme d'un élément x d'une C^*-algèbre A, ne dépend que de la structure d'algèbre et de l'involution de A, vu que $\|x\|^2 = \sup\{ |\lambda|,\ \lambda \in \mathbf{C},\ (x^*x - \lambda) \notin A^{-1} \}$.

Nous sommes en mesure à présent de démontrer le théorème de Gel'fand :

2.32 Théorème. *La transformation de Gel'fand $G : A \to C(\mathrm{Sp}\, A)$ d'une C^*-algèbre commutative et unifère A est un isomorphisme de C^*-algèbres.*

Démonstration. Montrons que G préserve l'involution. Il suffit pour cela de démontrer que pour tout élément autoadjoint h de A on a $G(h)^* = G(h)$. Or, pour tout $\chi \in \mathrm{Sp}\, A$, $G(h)(\chi) = \chi(h)$ est réel par la prop. 2.28.a).

Montrons que G est isométrique. Tout élément x de A est normal, donc $\|x\| = \rho(x) = \sup\{ |\chi(x)|, \chi \in \mathrm{Sp}\, A \}$ (3.4.a).

En particulier, la sous-algèbre $G(A)$ de $C(\mathrm{Sp}\, A)$ est stable par conjugaison complexe et fermée dans $C(\mathrm{Sp}\, A)$. Comme de plus elle sépare les points de $\mathrm{Sp}\, A$ (deux caractères égaux sur A sont égaux !), $G(A) = C(\mathrm{Sp}\, A)$ par le théorème de Stone-Weierstrass *i.e.* G est surjective. □

2.33 Corollaire. *Soit x un élément normal d'une C^*-algèbre unifère A. Il existe un unique homomorphisme unital de C^*-algèbres $\Phi_x : C(\mathrm{Sp}_A x) \to A$ tel que $\Phi_x(z) = x$ où $z \in C(\mathrm{Sp}_A x)$ désigne l'inclusion de $\mathrm{Sp}_A x$ dans $\mathbf{C}$. De plus, l'homomorphisme Φ_x est isométrique. Si $\mathrm{Sp}_A x \subset \mathbb{R}$ alors $x = x^*$.*

Démonstration. Soit B l'adhérence dans A de l'ensemble $\{ P(x, x^*),\ P \in \mathbf{C}[X,Y] \}$. C'est une sous-algèbre commutative involutive fermée de A. Tout caractère χ de B étant autoadjoint, on a $\chi(x^*) = \overline{\chi(x)}$, et $\chi(P(x,x^*)) = P(\chi(x), \overline{\chi(x)})$. Donc $\chi \mapsto \chi(x)$ est un homéomorphisme de $\mathrm{Sp}\, B$ sur $\mathrm{Sp}_B x$ (prop. 3.4.a) qui est égal à $\mathrm{Sp}_A x$ (prop. 2.29). Identifions $\mathrm{Sp}\, B$ à $\mathrm{Sp}_A x$ à l'aide de cet homéomorphisme. La transformation de Gel'fand B est un isomorphisme isométrique $G : B \to C(\mathrm{Sp}_A x)$ et fait correspondre à x la fonction z. Il suffit donc de poser $\Phi_x(f) = G^{-1}(f)$.

Par ailleurs, $\{\, P(z,\overline{z}))\,,\ P \in \mathbf{C}[X,Y]\,\}$ est dense dans $C(\mathrm{Sp}_A x)$ (théorème de Stone-Weierstrass) ; tout homomorphisme unital de C^*-algèbres $\Phi : C(\mathrm{Sp}_A x) \to A$, vérifie $\Phi(P(z,\overline{z})) = P(\Phi(z), \Phi(z)^*)$ donc est déterminé par $\Phi(z)$, d'où l'unicité de Φ_x.

Enfin, si $\mathrm{Sp}_A x \subset \mathbb{R}$, $z = \overline{z}$ donc $x = \Phi_x(z) = x^*$. □

2.34 Définition. Soient x un élément normal d'une C^*-algèbre unifère A et f une fonction continue sur $\mathrm{Sp}_A x$. L'élément $\Phi_x(f)$ de A est noté $f(x)$.

2.35 Proposition. *a) Soient x un élément normal d'une C^*-algèbre unifère A et f une fonction continue sur $\mathrm{Sp}_A x$. On a $\mathrm{Sp}_A f(x) = f(\mathrm{Sp}_A x)$, l'élément $f(x)$ de A est normal et pour toute fonction $g \in C(\mathrm{Sp}_A f(x))$ on a $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.*

b) Soient $\pi : A \to B$ un homomorphisme involutif unital de C^*-algèbres (unifères), $x \in A$ un élément normal de A et f une fonction continue sur $\mathrm{Sp}_A x$. Alors $f(\pi(x)) = \pi(f(x))$.

Démonstration. a) L'élément $f - \lambda$ de $C(\mathrm{Sp}_A x)$ est inversible si et seulement si $f - \lambda$ ne s'annule pas dans $\mathrm{Sp}_A x$ *i.e.* si et seulement si $\lambda \notin f(\mathrm{Sp}_A x)$. L'application $f \mapsto f(x)$ est un isomorphisme de la C^*-algèbre $B = C(\mathrm{Sp}_A x)$ sur une sous-algèbre involutive fermée A' de A . On a alors $\mathrm{Sp}_A f(x) = \mathrm{Sp}_{A'} f(x) = \mathrm{Sp}_B f = f(\mathrm{Sp}_A x)$. Comme $f(x)$ appartient à la C^*-algèbre commutative A', il est normal. De plus, l'application $g \mapsto (g \circ f)(x)$ est un homomorphisme de $C(\mathrm{Sp}_A f(x))$ dans A et coïncide avec $g \mapsto g(f(x))$ par le corollaire 2.33.

b) Les homomorphismes $f \mapsto \pi(f(x))$ et $f \mapsto f(\pi(x))$ de $C(\mathrm{Sp}_A x)$ dans B coïncident sur la fonction z donc sont égaux. □

2.36 Proposition. *a) Tout homomorphisme involutif d'une algèbre de Banach involutive dans une C^*-algèbre est contractant.*

b) Tout homomorphisme involutif injectif entre C^*-algèbres unifères est isométrique.

Démonstration. Soient A une algèbre de Banach involutive, B une C^*-algèbre et $\pi : A \to B$ un homomorphisme involutif.

a) Soit $x \in A$. Alors $\mathrm{Sp}_B \pi(x^*x) \subset \mathrm{Sp}_A x^*x$. Par la prop. 2.31, on a

$$\|x\|^2 \geqslant \|x^*x\| \geqslant \rho(x^*x) \geqslant \rho(\pi(x^*x)) = \|\pi(x^*x)\| = \|\pi(x)\|^2$$

où ρ désigne le rayon spectral.

b) Supposons que A est une C^*-algèbre. Pour $t \in \mathbf{R}_+$ notons $f_t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application telle que $s \mapsto \sup(|s| - t, 0)$. Pour un élément autoadjoint h d'une C^*-algèbre C on a $f_t(h) = 0 \iff \|h\| \leqslant t$. Soit $x \in A$, et posons $t = \|\pi(x^*x)\|$; alors $\pi(f_t(x^*x)) = f_t(\pi(x^*x)) = 0$; si π est injectif $f_t(x^*x) = 0$ et $\|x^*x\| \leqslant t$.

□

Remarquons qu'on n'a pas à supposer a priori l'homomorphisme π continu.

2.2.2 Éléments positifs d'une C*-algèbre

2.37 Théorème. *Soit A une C^*-algèbre.*

a) Pour un élément autoadjoint de h de A les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $\mathrm{Sp}_A h \subset \mathbb{R}_+$;

(ii) Il existe $k \in A$ tel que $k = k^*$ et $k^2 = h$.

(iii) Il existe $x \in A$ tel que $x^* x = h$.

b) Les éléments autoadjoints de A vérifiant ces conditions forment un cône convexe saillant de A.

Démonstration. Soit $\tilde{A}$ la C^*-algèbre obtenue à partir de A par adjonction d'un élément unité. Il est clair que l'ensemble des éléments de A vérifiant (i) (resp. (ii), (iii)), est l'intersection de A avec l'ensemble des éléments de $\tilde{A}$ vérifiant (i) (resp. (ii), (iii)). On peut donc supposer que l'algèbre A est unifère.

Il est clair que (ii) $\Rightarrow$ (iii).

Soit f l'application $t \mapsto t^2$ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbb{R}$. On a $\mathrm{Sp}_A f(k) = f(\mathrm{Sp}_A k) \subset \mathbb{R}_+$. Donc (ii) $\Rightarrow$ (i).

Soit g l'application $t \mapsto \sqrt{t}$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$. Si $\mathrm{Sp}_A h \subset \mathbf{R}_+$, alors $h = g(h)^2$. Donc (i) $\Rightarrow$ (ii).

Montrons à présent que les éléments de A satisfaisant à (i) forment un cône convexe saillant. Nous utiliserons un lemme :

2.38 Lemme. *a) La condition (i) est équivalente à :*

(iv) Il existe $t \in \mathbb{R}_+$ tel que $\|t - h\| \leqslant t$.

b) L'ensemble A_+ des éléments autoadjoints de A vérifiant (iv) est un cône convexe saillant.

Démonstration. a) Le spectre d'un élément autoadjoint h est une partie X de $\mathbb{R}$, incluse dans $[-\|h\|, \|h\|]$. Pour $t \in \mathbb{R}_+$ on a $\{ s \in \mathbb{R} ,\ |t - s| \leqslant t \} = [0, 2t]$, donc $\|t - h\| \leqslant t$ si et seulement si X est inclus dans $[0, 2t]$; donc (iv) implique (i). Si (i) est vraie on a $X \subset [0, \|h\|]$ et (iv) est vraie (en posant $t = \|h\|/2$).

b) Si $\|t - h\| \leqslant t$ et $s \in \mathbb{R}_+$ on a $\|st - sh\| \leqslant st$ donc $sh \in A_+$. Autrement dit A_+ est un cône.
Si $\|s - h\| \leqslant s$ et $\|t - k\| \leqslant t$ on a $\|s + t - (h + k)\| \leqslant s + t$ donc $h + k \in A_+$. Il en résulte que le cône A_+ est convexe.
Enfin, si $h \in A_+$ et $-h \in A_+$ alors $\mathrm{Sp}_A h = \{0\}$ et $\|h\| = \rho(h) = 0$. Donc le cône A_+ est saillant. □

Fin de la démonstration du théorème 2.37 : Soit $x \in A$. Soit f l'application $t \mapsto \inf(t, 0)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbf{R}$ et posons $y = xf(x^*x)$. On a $y^*y = f(x^*x)x^*xf(x^*x) = f(x^*x)^3$, car pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $tf(t)^2 = f(t)^3$. Comme pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t)^3 \leqslant 0$, on a $-y^*y \in A_+$. Par la prop. 1.7, $\mathrm{Sp}_A(y^*y) \cup \{0\} = \mathrm{Sp}_A(yy^*) \cup \{0\}$ donc $-yy^* \in A_+$. Ecrivons $y = h + ik$ avec h et k autoadjoints ; on a $yy^* + y^*y = h^2 + k^2$ donc $y^*y = h^2 + k^2 - yy^* \in A_+$. Donc $y^*y = 0$ car le cône A_+ est saillant. Enfin, $f(x^*x) = 0$ *i.e.* $\mathrm{Sp}_A x \subset \mathbb{R}_+$. □

2.39 Définition. Un élément autoadjoint h satisfaisant aux conditions équivalentes du théorème est dit *positif*. Le cône des éléments positifs de la C^*-algèbre A est noté A_+. Pour $a, b \in A$, la relation d'ordre $a - b \in A_+$ est notée $a \geqslant b$ ou encore $b \leqslant a$.

2.40 Proposition. *Soit A une C^*-algèbre unifère. Pour tout $a \in A_+$ il existe un unique élément $b \in A_+$ tel que $b^2 = a$.*

Démonstration. Soient f l'application $t \mapsto t^2$ et g l'application $t \mapsto \sqrt{t}$ de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$. Par la prop. 2.35.a), pour $a, b \in A_+$, la condition $a = f(b)$ équivaut à $b = g(a)$. □

Soit A une C^*-algèbre. Comme A_+ est un cône convexe saillant dans A il existe une unique relation d'ordre dans A compatible avec la structure d'espace vectoriel de A pour laquelle A_+ est l'ensemble des éléments supérieurs à 0. Si a et b sont deux éléments de A, la relation $a \leqslant b$ équivaut à $b - a \in A_+$.

2.41 Lemme. *Soient A une C^*-algèbre unifère a un élément hermitien de A et $t \in \mathbb{R}_+$. Les relations $-t \leqslant a \leqslant t$ et $\|a\| \leqslant t$ sont équivalentes.*

Démonstration. Par définition, la relation $-t \leqslant a \leqslant t$ signifie que l'on a $\mathrm{Sp}(t+a) \subset \mathbb{R}_+$ et $\mathrm{Sp}(t-a) \subset \mathbb{R}_+$, c'est à dire $\mathrm{Sp}\, a \subset [-t, t]$. Le lemme en résulte vu que $\|a\| = \sup\{\, |s|\,,\ s \in \mathrm{Sp}\, a\,\}$. □

2.42 Proposition. *Soit A une C^*-algèbre et a, b, x des éléments de A.*

a) Si $0 \leqslant a \leqslant b$ on a $\|a\| \leqslant \|b\|$.

b) Si $a \leqslant b$ alors $x^*ax \leqslant x^*bx$.

Démonstration. Comme $A_+ = A \cap \tilde{A}_+$, on peut supposer que A est unifère.

a) Si $0 \leqslant a \leqslant b$, les éléments a et b sont hermitiens et l'on a $-\|b\| \leqslant 0 \leqslant a \leqslant b \leqslant \|b\|$ (lemme 2.41), donc $\|a\| \leqslant \|b\|$ (*loc. cit.*).

b) Si $b - a = y^*y$, alors $x^*bx - x^*ax = x^*(b-a)x = (yx)^*yx \in A_+$. □

2.2.3 Opérateurs positifs dans un espace hilbertien et décomposition polaire.

2.43 Proposition. *Soit H un espace hilbertien et $T \in \mathcal{L}(H)$.*

a) $T = T^*$ si et seulement si pour tout $x \in H$, $\langle x, Tx\rangle \in \mathbb{R}$.

b) $T \in \mathcal{L}(H)_+$ si et seulement si pour tout $x \in H$, $\langle x, Tx\rangle \in \mathbb{R}_+$.

Démonstration. a) Si $T = T^*$, $\overline{\langle x, Tx\rangle} = \langle Tx, x\rangle = \langle x, T^*x\rangle = \langle x, Tx\rangle$, donc $\langle x, Tx\rangle$ est réel. Supposons inversement que pour tout $x \in H$, $\langle x, Tx\rangle \in \mathbb{R}$; alors, pour tout $x, y \in H$ on a $\langle x, Ty\rangle + \langle y, Tx\rangle = \langle x+y, T(x+y)\rangle - \langle x, Tx\rangle - \langle y, Ty\rangle$ est réel et $\langle x, Ty\rangle - \langle y, Tx\rangle = i(\langle x - iy, T(x-iy)\rangle - \langle x, Tx\rangle - \langle y, Ty\rangle)$ est imaginaire pur donc $\langle x, Ty\rangle = \overline{\langle y, Tx\rangle} = \langle Tx, y\rangle$ donc T est auto-adjoint.

b) Si $T = S^*S$, alors, pour tout $x \in H$ on a $\langle x, Tx\rangle = \langle Sx, Sx\rangle \in \mathbb{R}_+$. Supposons inversement que pour tout $x \in H$, $\langle x, Tx\rangle \in \mathbb{R}_+$ et montrons que $T + \lambda$ est inversible pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Pour $x \in H$, tel que $\|x\| = 1$ on a $(\|(T+\lambda)x\| \geqslant \langle x, (T+\lambda)x\rangle \geqslant \lambda$. Ceci prouve que $T + \lambda$ est bijective et bicontinue de H sur $(T+\lambda)H$. En particulier, $(T+\lambda)H$ est complet donc fermé dans H. Si $x \in ((T+\lambda)H)^\perp$, alors $0 = \langle x, (T+\lambda)x\rangle \geqslant \lambda\|x\|^2$ et $x = 0$ donc $T + \lambda$ est surjectif. □

2.44 Définition. Soient E et F des espaces hilbertiens. On appelle *module* de $T \in \mathcal{L}(E, F)$ l'opérateur $|T| \in \mathcal{L}(E)_+$ tel que $|T|^2 = T^*T$.

2.45 Proposition. *Soient E et F deux espaces hilbertiens et $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Il existe un unique opérateur $u \in \mathcal{L}(E, F)$ nul sur* ker T *et tel que $T = u|T|$.*

Démonstration. Notons E_1 l'adhérence dans E de l'image de $|T|$. Pour tout $x \in E$ on a $\|Tx\|^2 = \langle x, T^*Tx\rangle = \|\,|T|x\,\|^2$. Donc $\ker |T| = \ker T$ et il existe une unique application linéaire isométrique $U : E_1 \to F$ telle que, pour $x \in E$ on ait $Tx = U|T|x$. La proposition résulte de ce que $E_1^\perp = \ker |T|$ (prop. 5.9). □

2.46 Définition. La décomposition $T = u|T|$ de la prop. 2.45 s'appelle la *décomposition polaire* de T.

Donnons sans démonstration quelques propriétés simples de la décomposition polaire :

2.47 Proposition. *Soient E et F deux espaces hilbertiens et $T \in \mathcal{L}(E, F)$; notons $T = u|T|$ sa décomposition polaire.*

a) *uu^* est le projecteur orthogonal sur l'adhérence de l'image de T et u^*u est le projecteur orthogonal sur l'orthogonal du noyau de T.*

b) *On a $|T^*| = u|T|u^*$ et la décomposition polaire de T^* est $T^* = u^*|T^*|$;*

c) *On a $|T| = u^*T = T^*u$ et $T^* = |T|u^* = u^*Tu^*$;*

d) *Les opérateurs T et $|T|$ ont même noyau ; les opérateurs T^* et $|T|$ ont même image.*

e) *L'opérateur u est limite forte de la suite $(T(1/n + |T|)^{-1})$.*

□

2.2.4 Formes linéaires positives et construction GNS

Soit A une C^*-algèbre (unifère).

Une forme linéaire $f : A \to \mathbb{C}$ est dite hermitienne si $f(x^*) = \overline{f(x)}$ pour tout $x \in A$. Une forme linéaire $f : A \to \mathbb{C}$ est dite positive si $f(x) \in \mathbb{R}_+$ pour tout $x \in A_+$. Comme $A_h = \{x - y; x, y \in A_+\}$ toute forme hermitienne est positive.

2.48 Lemme. *Si f est une forme linéaire positive, l'application $(x, y) \mapsto f(x^*y)$ est une forme sesquilinéaire positive sur A.*

2.49 Proposition. *a) Toute forme linéaire positive f sur A est continue et $\|f\| = f(1)$.*

b) Inversement, s'il existe $x \in A_+$ non nul tel que $\|f\|\|x\| = f(x)$, alors f est positive.

Démonstration. a) Soit f une forme linéaire positive sur A et soit $x \in A$ avec $\|x\| \leqslant 1$. Alors x^*x et $1 - x^*x$ sont des éléments positifs de A, donc $0 \leqslant f(x^*x) \leqslant f(1)$. Appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il vient $|f(x)|^2 \leqslant f(1)f(x^*x) \leqslant f(1)^2$.

b) Quitte à diviser x et f par leur norme, supposons que $\|x\| = 1$ et $\|f\| = 1$. Posons $y = 1 - 2x$; alors y est hermitien et son spectre est contenu dans $[-1, 1]$, donc $\|y\| \leqslant 1$. Il vient $|f(1) - 2| = |f(1) - 2f(x)| \leqslant 1$, et puisque $|f(1)| \leqslant 1 = \|f\|$ il vient $f(1) = 1$.
Soit alors $h \in A_+$ avec $\|h\| = 1$. Remarquons que, pour $t \in \mathbb{R}$, d'après l'égalité du rayon spectral appliquée à l'élément normal $ith + 1$, on a $\|ith + 1\|^2 = t^2 + 1$. On en déduit que la dérivée en 0 de $t \mapsto |itf(h) + 1|$ est nulle, donc $f(h) \in \mathbb{R}$. De plus $\|1 - h\| \leqslant 1$, donc $|1 - f(h)| \leqslant 1$, donc $f(h) \geqslant 0$. □

2.50 Théorème : Construction GNS. *Soit $\varphi : A \to \mathbb{C}$ une forme linéaire positive. Il existe un espace de Hilbert H_φ, une représentation involutive $\pi_\varphi : A \to \mathcal{L}(H_\varphi)$ et un vecteur ξ_φ tels que $\varphi(a) = \langle \xi_\varphi, \pi_\varphi(a)\xi_\varphi \rangle$ pour tout $a \in A$.*

Démonstration. On munit A de la forme sesquilinéaire positive $(x, y) \mapsto \varphi(x^*y)$ et on note H_φ le séparé complété de A pour la semi-norme associée. Notons $\eta_\varphi : A \to H_\varphi$ le plongement de A dans son-séparé-complété. Pour $x, y \in A$, on a $y^*x^*xy \leqslant \|x\|^2 y^*y$ (prop. 2.42), donc $\varphi(y^*x^*xy) \leqslant \|x\|^2 \varphi(y^*y)$, soit $\|\eta_\varphi(xy)\|^2 \leqslant \|x\|\|\eta_\varphi(y)\|^2$. Il existe donc une application linéaire continue $\pi_\varphi(x) \in \mathcal{L}(H_\varphi)$ « prolongeant l'application $y \mapsto yx$ de A dans A, *i.e.* telle que $\pi_\varphi(x)\eta_\varphi(y) = \eta_\varphi(xy)$. Il est clair que π_φ est un homomorphisme involutif.

On pose enfin $\xi_\varphi = \eta_\varphi(1)$. □

Le triplet $(H_\varphi, \pi_\varphi, \xi_\varphi)$ décrit par ce théorème s'appelle la construction de Gelfand-Naimark-Segal (GNS) associée à φ.

On appelle état sur A une forme linéaire positive sur A de norme 1, *i.e.* telle que $\varphi(1) = 1$. L'ensemble des états de A est un convexe faiblement compact $E(A)$ du dual topologique A^* de A.

2.51 Proposition. *Pour tout $x \in A$, il existe une $\varphi \in E(A)$ tel que $\|\pi_\varphi(x)\| = \|x\|$.*

Démonstration. Par Hahn Banach une forme linéaire φ de norme 1 telle que $\varphi(x^*x) = \|x^*x\|$; d'après la proposition 2.49, $\varphi \in E(A)$; on a $\|\pi_\varphi(x)\xi_\varphi\| = \|x\|$, donc $\|\pi_\varphi(x)\| \geqslant \|x\|$. □

Un état φ sur A est dit *fidèle* si pour tout $x \neq 0$ on a $\varphi(x^*x) > 0$.

2.52 Proposition. *Si φ est fidèle, alors π_φ est fidèle (injective) donc isométrique.*

Démonstration. Si φ est fidèle, alors pour tout $x \in A$, on a $\|\pi_\varphi(x)\xi_\varphi\|^2 = \varphi(x^*x) \neq 0$ donc π_φ est fidèle. □

2.53 Proposition. *Si A est séparable, il existe un état fidèle.*

Démonstration. Soit (x_n) une suite dense dans A. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\varphi_n \in E(A)$ avec $\varphi(x_n^*x_n) = \|x_n\|^2$. Pour $x \in A$ non nul, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\|x - x_k\| < \|x_k\|$. De l'inégalité

$$\|x_k\| = \|\pi_{\varphi_k}(x_k)\xi_{\varphi_k}\| \leqslant \|\pi_{\varphi_k}(x_k - x)\xi_k\| + \|\pi_{\varphi_k}(x)\xi_k\|$$

on déduit que $\varphi_k(x^*x) = \|\pi_{\varphi_k}(x)\xi_k\|^2 > 0$. On pose alors $\varphi = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} 2^{-k-1}\varphi_k$. □

3 Exemples d'algèbres de von Neumann

3.1 Théorème de densité de Kaplansky

3.1 Théorème de densité de Kaplansky. *Soient H un espace hilbertien, A une sous-algèbre involutive de $\mathcal{L}(H)$ avec $1 \in A$ et $T \in A''$.*

a) Si $\|T\| \leqslant 1$, alors T est fortement adhérent à $\{ S \in A ,\ \|S\| \leqslant 1 \}$.

b) Si $T = T^*$ et $\|T\| \leqslant 1$, alors T est fortement adhérent à $\{ S \in A ,\ S = S^* ,\ \|S\| \leqslant 1 \}$.

Démonstration. Quitte à remplacer A par son adhérence normique on peut supposer que A est une sous- C^*-algèbre de $\mathcal{L}(H)$.

b) Notons f la fonction $t \mapsto 2t(1+t^2)^{-1}$ définie sur R. Par restriction f définit un homéomorphisme de $[-1,1]$ sur lui-même. Soit g l'homéomorphisme réciproque. Soient a et b deux éléments hermitiens de $\mathcal{L}(H)$. On a

$$\begin{aligned} f(a) - f(b) \qquad &= 2(1+a^2)^{-1}(a(1+b^2) - (1+a^2)b)(1+b^2)^{-1} \\ &= 2(1+a^2)^{-1}(a-b)(1+b^2)^{-1} + 1/2 f(a)(b-a)f(b) \end{aligned}$$

En particulier, pour tout $x \in H$, $\|f(a)x - f(b)x)\| \leqslant 2\|(a-b)(1+b^2)^{-1}x\| + 1/2\|(b-a)f(b)x\|$. On en déduit que l'application $a \mapsto f(a)$ est continue de l'espace des opérateurs hermitiens de H muni de la topologie forte dans lui même. Comme $g(T)$ est fortement adhérent à $\{ S \in A ,\ S = S^* \}$, $T = f(g(T))$ est fortement adhérent à $\{ f(S) ,\ S \in A ,\ S = S^* \} = \{ S \in A ,\ S = S^* ,\ \|S\| \leqslant 1 \}$.

a) Considérons $M_2(A)$ plongé dans $M_2(\mathcal{L}(H)) = \mathcal{L}(H \oplus H)$. Alors $T' = \begin{pmatrix} 0 & T \\ T^* & 0 \end{pmatrix}$ est dans le bicommutant de $M_2(A)$ donc d'après d) dans l'adhérence de $\{ S \in M_2(A) ,\ S = S^* ,\ \|S\| \leqslant 1 \}$. Comme l'application $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto b$ est continue de $M_2(\mathcal{L}(H)) = \mathcal{L}(H \oplus H)$ muni de la topologie forte dans $\mathcal{L}(H)$ muni de la topologie forte, c) en résulte. □

On se place dans un espace hilbertien séparable.

La boule unité de $\mathcal{L}(H)$ est un espace compact métrisable.

Une algèbre de von Neumann contenue dans $\mathcal{L}(H)$ a donc une suite dense : elle contient une C^*-sous-algèbre normiquement séparable fortement dense. On utilise par la suite une telle sous-algèbre auxiliaire dans des constructions d'algèbres de von Neumann. Le plongement de cette sous-algèbre dans $\mathcal{L}(H)$ est alors une représentation de notre C^*-algèbre.

3.2 Langage des représentations

Nous introduisons ici un peu de vocabulaire lié aux représentations des C^*-algèbres. Fixons une C^*-algèbre A.

Représentation. On appelle *représentation* de A dans un espace hilbertien H un morphisme de C^*-algèbres de A dans la C^*-algèbre $\mathcal{L}(H)$ des opérateurs continus sur H. L'espace hilbertien H s'appelle *l'espace de la représentation* π et se note H_π.

Somme de représentations. Soit $(\pi_i)_{i\in I}$ une famille de représentations de A. Rappelons que l'espace hilbertien $H = \bigoplus_{i\in I} H_{\pi_i}$ est formé des familles $(x_i)_{i\in I}$ telles que $x_i \in H_{\pi_i}$ et que la somme $\sum_{i\in I}\langle x_i, x_i\rangle$ soit finie. Pour $a \in A$ et $(x_i)_{i\in I} \in H$, on a $\|\pi_i(a)\| \leqslant \|a\|$ (prop. 2.36.a) donc $\|\pi_i(a)x_i\| \leqslant \|a\|\|x_i\|$ et $\sum_{i\in I}\langle \pi_i(a)x_i, \pi_i(a)x_i\rangle$ est majorée par $\|a\|^2\sum_{i\in I}\langle x_i, x_i\rangle$ donc est finie. Il existe donc une représentation π de A dans H telle que, pour $a \in A$ et $(x_i)_{i\in I} \in H$, on ait $\pi(a)(x_i)_{i\in I} = (\pi_i(a)x_i)_{i\in I}$. Cette représentation s'appelle *somme directe* de la famille π_i et se note $\bigoplus_{i\in I}\pi_i$.

Opérateurs d'entrelacement. Soient π et π' deux représentations de A. Un opértaeur $T \in \mathcal{L}(H_\pi, H_{\pi'})$ s'appelle un *opérateur d'entrelacement* de π à π' si pour tout $a \in A$ on a $T\pi(a) = \pi'(a)T$. On note $Hom(\pi, \pi')$ l'espace vectoriel des opérateurs d'entrelacement de π à π'. Si $S \in \mathrm{Hom}(\pi, \pi')$ et $T \in Hom(\pi', \pi'')$ alors $TS \in Hom(\pi, \pi'')$ et $S^* \in Hom(\pi', \pi)$. La C^*-algèbre $End(\pi) = Hom(\pi, \pi)$ est le commutant commutant $\pi(A)'$.

Représentations équivalentes, disjointes. On dit que les représentations π et π' sont *équivalentes* s'il existe un opérateur unitaire les entrelaçant ; on dit qu'elles sont *disjointes* si $Hom(\pi, \pi') = \{0\}$.

Partie totalisatrice. Soient π une représentation de A et X une partie de H_π. Remarquons que le sous-espace fermé E_X de H_π engendré par $\{\,\pi(a)x,\ a \in A,\ x \in X\,\}$ est invariant et que, $x \in E_X^\perp$ si et seulement si pour tout $a \in A$ on a $\pi(a)x \in X^\perp$. On dit que X est une partie *totalisatrice* pour π si $E_X = H_\pi$. La représentation π est dite *non dégénérée* si elle admet une partie totalisatrice *i.e.* si H_π est totalisatrice. Dans ce cas, toute partie totale est totalisatrice. Si A est unifère, une représentation π est non dégénérée si et seulement si $\pi(1) = 1$. Le vecteur $x \in H_\pi$ est dit *totalisateur* pour π si la partie $\{x\}$ est totalisatrice *i.e.* si $\overline{\pi(A)x} = H_\pi$. La représentation π est dite *cyclique* si elle admet un vecteur totalisateur. Une représentation cyclique est non dégénérée.

3.2 Proposition. *Toute représentation non dégénérée est somme de représentations cycliques.*

Démonstration. Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des parties T de $H_\pi - \{0\}$ telles que si x, y sont deux éléments distincts de T les sous-espaces $\pi(A)x$ et $\pi(A)y$ de H_π sont orthogonaux. Il est clair que $\mathcal{F}$ est inductif pour l'inclusion. Soit alors T un élément maximal de $\mathcal{F}$. Notons E le sous-espace fermé de H_π engendré par $\{\,\pi(a)x,\ a \in A,\ x \in T\,\}$. Si $y \in E^\perp$, pour tout $x \in T$ et tout $a, b \in A$ on a $\langle \pi(a)y, \pi(b)x\rangle = \langle y, \pi(a^*b)x\rangle = 0$. Comme T est maximal, $T \cup \{y\} \notin \mathcal{F}$ donc $y = 0$. On en déduit que $E = H_\pi$. Donc π est somme de ses restrictions à $\overline{\pi(A)x}$ pour $x \in T$ qui sont cycliques. □

3.3 Algèbres de von Neumann commutatives

Soit $A \subset \mathcal{L}(H)$ une algèbre de von Neumann commutative. En particulier, A est une C^*-algèbre donc d la forme $C(Y)$ où Y est un gros espace compact. Ce n'est en fait pas en général la bonne façon de comprendre A. Pour mieux comprendre les algèbres de von Neumann commutatives, on commence par choisir une sous-C^*-algèbre séparable B dense dans A. On écrit alors $B = C(X)$.

3.3 Remarque. Remarquons que $C(X)$ est séparable si et seulement s'il existe une suite f_n de fonctions positives sur X avec $\|f_n\|_\infty \leqslant 1$ engendrant $C(X)$ comme C^*-algèbre, *i.e.* qui séparent les points de X (d'après le théorème de Stone-Weierstrass). Cela a lieu si et seulement si X est homéomorphe à une partie fermée du compact $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ - soit si et seulement si X est métrisable.

On fixe donc un compact métrisable X.

On appelle *mesure de Radon* sur X une mesure positive borelienne finie (si X est localement compact, une mesure de Radon sur X une mesure borelienne finie sur ls compacts).

Soit μ une mesure de Radon sur X. L'application $f \mapsto \int_X f(x)d\mu(x) = \mu(f)$ est une forme linéaire positive sur X. Dans un sens, μ prolonge aux fonctions boréliennes cette forme linéaire.

Rappelons le théorème essentiel suivant :

3.4 Théorème (mesures de Radon)**.** *Pour toute forme linéaire positive sur $C(X)$ il existe une et une seule mesure (borélienne finie) qui la prolonge.* □

Soit μ une mesure de Radon (positive) sur X. On note $L^2(X,\mu)$ l'espace hilbertien des fonctions de carré intégrable sur X pour la mesure μ (modulo les fonctions μ-négligeables). Le produit scalaire sur $L^2(X,\mu)$ est donné par la formule $\langle \xi, \eta\rangle = \int_X \overline{\xi(t)}\eta(t)\, dt$.

Rappelons que l'image de $C(X)$ dans l'space $L^2(X,\mu)$ est un sous-espace dense de $L^2(X,\mu)$, de sorte que $L^2(X,\mu)$ s'identifie au séparé-complété de $C(X)$ muni du produit scalaire $(f,g) \mapsto \mu(\overline{f}\, g)$.

3.5 Proposition. *Soit μ une mesure de Radon sur X. Pour $f \in C(X)$ l'application $\xi \mapsto f\xi$ est un opérateur M_f sur $L^2(X,\mu)$.*

a) L'application $f \mapsto M_f$ est une représentation de $C(X)$ dans $L^2(X,\mu)$

b) L'action de $C(X)$ par multiplication dans $L^2(X,\mu)$ est une représentation que l'on notera M_μ.

□

3.6 Proposition. *Soient π une représentation de $C(X)$ dans un espace de Hilbert H et $\xi \in H$ un vecteur cyclique.*

— *L'application $f \mapsto \langle \xi, \pi(f)\xi\rangle$ est une mesure de Radon μ sur X.*
— *La représentation π est équivalente à M_μ.*

Démonstration. La première assertion est claire.

L'application $(f,g) \mapsto \int_X \overline{f(t)}g(t)\, dt$ est un produit scalaire. Notons E l'espace préhilbertien $C(X)$ muni de ce produit scalaire. L'application $f \mapsto \pi(f)\xi$ est une isométrie de E dans H_π ; elle définit un opérateur unitaire U du séparé complété $L^2(X,\mu)$ de E sur l'adhérence H de $\pi(C(X))\xi$. Pour $f, g \in C(X)$ on a $U(fg) = \pi(fg)\xi = \pi(f)\pi(g)\xi = \pi(f)Ug$, d'où il résulte que U est un opérateur d'entrelacement. □

Calcul de $M_\mu(A)' = End(M_\mu)$

3.7 Proposition. *a) Soit $\varphi \in L^\infty(X,\mu)$. Il existe $\widetilde{M}_\mu(\varphi) \in End(M_\mu)$ telle que pour tout $\xi \in L^2(X,\mu)$ on ait $\widetilde{M}_\mu(\varphi)\xi = \varphi\xi$. De plus $\|\widetilde{M}_\mu(\varphi)\|$ est le sup essentiel $\|\varphi\|_\infty$ de φ pour la mesure μ.*

b) Inversement, pour tout $T \in End(M_\mu)$, il existe un unique $\varphi \in L^\infty(X,\mu)$ tel que $T = \widetilde{M}_\mu(\varphi)$.

Démonstration. a) Comme $|\varphi|$ est presque partout majoré par $\|\varphi\|_\infty$, on a $|\varphi\xi| \leqslant \|\varphi\|_\infty|\xi|$ presque partout, donc $\|\varphi\xi\|_2 \leqslant \|\varphi\|_\infty\|\xi\|_2$. On en déduit qu'il existe $\widetilde{M}_\mu(\varphi) \in \mathcal{L}(L^2(X,\mu))$ telle que $\widetilde{M}_\mu(\varphi)\xi = \varphi\xi$ et $\|\widetilde{M}_\mu(\varphi)\| \leqslant \|\varphi\|_\infty$.

Si $0 \leqslant t < \|\varphi\|_\infty$, posons ξ_t le fonction caractéristique de $\{x \in X;\ |\varphi(x)| \geqslant t\}$. Alors $\|\xi_t\|_2 \neq 0$ et $\|\varphi\xi_t\|_2 \geqslant t\|\xi_t\|_2$. On en déduit que $\|\widetilde{M}_\mu(\varphi)\| = \|\varphi\|_\infty$.

Enfin, il est clair que $\widetilde{M}_\mu(\varphi)$ entrelace M_μ.

b) Notons $1_\mu \in L^2(S,\mu)$ la classe de la fonction 1 et posons $\varphi = T1_\mu \in L^2(X,\mu)$.
Pour tout $f \in C(X)$, on a $T(f1_\mu) = fT(1_\mu) = f\varphi$, donc $\|f\varphi\|^2 \leqslant \|T\|^2\|f1_\mu\|^2$, de sorte que la mesure $(\|T\|^2 - |\varphi|^2)\mu$ est positive. On en déduit que $\varphi \in L^\infty(X,\mu)$ et $\|\varphi\|_\infty \leqslant \|T\|$. Par densité de $C(X)1_\mu$ dans $L^2(X,\mu)$ on en déduit que $T = \widetilde{M}_\mu(\varphi)$. □

3.8 Corollaire. *On a* $M_\mu(A)' = M_\mu(A)'' = \widetilde{M}_\mu(L^\infty(X,\mu))$.

Démonstration. Il résulte de la proposition 3.7 que $M_\mu(A)'' = \widetilde{M}_\mu(L^\infty(X,\mu))$.

Comme $M_\mu(A)$ est commutative, on a $M_\mu(A) \subset M_\mu(A)'$, donc $M_\mu(A)'' \subset M_\mu(A)'$; comme $M_\mu(A)'$ est commutative, on a $M_\mu(A)' \subset M_\mu(A)''$. □

Rappel sur la dérivée de Radon-Nikodym. Soient μ_1 et μ_2 deux mesures positives finies sur X. Posons $\mu = \mu_1 + \mu_2$. Toute fonction f sur X mesurable pour μ est mesurable μ_1 et l'on a $\displaystyle\int |f|^2\,d\mu_1 \leqslant \int |f|^2\,d\mu$. Donc il existe une application linéaire continue $T :\in \mathcal{L}(L^2(X,\mu)) \to \mathcal{L}(L^2(X,\mu_1))$ qui à la classe dans $\mathcal{L}(L^2(X,\mu))$ d'une fonction sur X mesurable pour μ de carré intégrable pour μ, associe sa classe dans $L^2(X,\nu)$. Il est clair que $T \in Hom(M_\mu, M_{\mu_1})$ et $\|T\| \leqslant 1$. Posons $\rho = T^*1_{\mu_1} = T^*T1_\mu$.

Par la proposition précédente, on a $\rho \in L^\infty(X,\mu)$ et $T^*T = \widetilde{M}_\mu(\rho)$. En particulier, ρ est (presque partout) positive et, pour $f, g \in L^2(X,\mu)$, on a

$$\int \overline{f}\,g\,d\mu_1 = \langle Tf|Tg\rangle_{\mu_1} = \langle f|T^*Tg\rangle_\mu = \int \overline{f}\,g\,\rho\,d\mu.$$

Si $h \in L^1(X,\mu)$, on peut écrire $h = \overline{f}\,g$ avec $f, g \in L^2(X,\mu)$ et l'on a donc $\displaystyle\int h\,d\mu_1 = \int h\rho\,d\mu$, soit $\mu_1 = \rho\mu$.

Notons alors ρ_1'' la fonction caractéristique de $\{x \in X;\ \rho(x) = 1\}$ et ρ_2'' la fonction caractéristique de $\{x \in X;\ \rho(x) = 0\}$. On note $\rho_1' = \rho - \rho_1$" et enfin $\rho_2' = 1 - \rho - \rho_2''$.

On pose alors $\mu_j' = \rho_j'\mu$ et $\mu_j'' = \rho_j''\mu'$. On a $\mu_j = \mu_j' + \mu_j''$. Les mesures μ_1' et μ_2' sont équivalentes : on a $\mu_2' = \delta\mu_1'$, où $\delta(x) = (1-\rho(x))/\rho(x)$ pour $x \neq 0$ est μ_1'-presque partout non nulle ; les mesures μ_1', μ_1'' et μ_2'' sont étrangères.

Pour les représentations, on a :

a) Si μ_1 et μ_2 sont équivalentes, écrivant $\mu_2 = \delta\mu_1$, les représentationsM_{μ_1} et M_{μ_2} sont équivalentes : l'application $\xi \mapsto \delta^{-1/2}\xi$ est un isomorphisme de $L^2(X,\mu_1)$ sur $L^2(X,\mu_2)$ qui les entrelace.

b) Si μ_1 et μ_2 sont étrangères, alors $M_{\mu_1+\mu_2} = M_{\mu_1} \oplus M_{\mu_2}$. Tout $T \in Hom(M_{\mu_1}, M_{\mu_2})$ définit un élément de la forme $(1-p)Sp$ de $End(M_{\mu_1+\mu_2})$ où p est le projecteur sur $L^2(X,\mu_1)$. Comme $End(M_{\mu_1+\mu_2})$ est commutatif et $p(1-p) = 0$, il vient $T = 0$.

c) Dans le cas général, et avec les notations ci-dessus, il vient :
— On a $M_{\mu_i} \simeq M_{\mu_i'} \oplus M_{\mu_i''}$.
— Les représentations $M_{\mu_1'}, M_{\mu_1''}$ et $M_{\mu_2''}$ sont deux à deux inéquivalentes
— On a $Hom(M_{\mu_1}, M_{\mu_2}) \simeq Hom(M_{\mu_1'}, M_{\mu_2'}) \simeq L^\infty(X,\mu_1')$.

Plus précisément

3.9 Proposition. *Soient μ_1 et μ_2 deux mesures positives finies sur X . Notons $\delta = d\mu_2/d\mu_1$ la dérivée de Radon-Nikodym de μ_1' par rapport à μ_2, de sorte que $\mu_1' = \delta\mu_2$.*

a) Soit $\varphi \in L^\infty(X,\mu_1)$. Pour tout $\xi \in L^2(X,\mu)$, $\delta^{1/2}\varphi\xi \in L^2(X,\mu_2)$ et $\widetilde{M}(\varphi) \in Hom(M_{\mu_1}, M_{\mu_2})$ où $\widetilde{M}(\varphi) : L^2(X,\mu_1) \to L^2(X,\mu_2)$ désigne l'application $\xi \mapsto \rho^{1/2}\varphi\xi$. De plus $\|M_\varphi\|$ est le sup essentiel de φ pour la mesure μ_1' .

b) Pour tout $T \in Hom(M_{\mu_1}, M_{\mu_2})$ il existe un unique $\varphi \in L^\infty(X,\mu_1)$ tel que $|\varphi|\mu_1$ soit absolument continue par rapport à μ_2 et $T = M_\varphi$. ☐

3.10 Corollaire. *Soit π une représentation non dégénérée de A .*

a) Il existe une famille $(\mu_k)_{k\in N}$ de mesures sur X telle que la représentation π soit équivalente à $\bigoplus_{k\in\mathbb{N}} \pi_{\mu_k}$.

b) Il existe un espace localement compact Y , une mesure de Radon μ_Y sur Y et une application continue $p : Y \to X$ tels que la représentation π soit équivalente à la représentation $M_{\mu_Y,p}$ définie par $M_{\mu_Y,p}(f)\xi = (f\circ p)\xi$ pour tout $f \in C_0(X)$ et tout $\xi \in L^2(Y,\mu)$.

Démonstration. a) Résulte des propositions 3.2 et 3.6.

b) en résulte en posant $Y = X \times \mathbb{N}$, où l'on a muni I de la topologie discrète, et notant $p : Y \to X$ la projection et μ_Y la mesure dont la restriction à $X \times \{i\}$ soit μ_i . ☐

3.11 Proposition. *Soit π une représentation non dégénérée de A . Pour tout $\xi \in H_\pi$ notons μ_ξ la mesure $f \mapsto \langle\xi, \pi(f)\xi\rangle$ sur X . On suppose que l'espace hilbertien H_π est séparable. Il existe $\xi \in H_\pi$ tel que μ_η soit absolument continue par rapport à μ_ξ pour tout $\eta \in H_\pi$.*

Démonstration. Par le corollaire 3.10, on peut supposer que π est une somme $\bigoplus_{k\in\mathbb{N}} M_{\mu_k}$. Quitte à multiplier les μ_k par des constantes convenables, on peut supposer que $\sum_{k\in\mathbb{N}} \mu_k$ est une mesure finie μ sur X. Soit $\eta \in H_\pi$ et $f_i \in L^2(X,\mu_i)$ sa composante. Alors $\mu_y = \sum_{i\in I} |f_i|^2\mu_i$ et, comme chacune des μ_i est absolument continue par rapport à μ , μ_η est absolument continue par rapport à μ . Notons enfin $\xi \in H_\pi$ l'élément dont la composante dans $L^2(\mu_i)$ est la classe de 1. Alors $\mu_\xi = \mu$. ☐

3.12 Définition. Soit π une représentation non dégénérée de A dans un espace hilbertien séparable. On appelle *mesure spectrale* de π la classe de la mesure $f \mapsto \langle\xi, \pi(f)\xi\rangle$ associée à tout vecteur $\xi \in H_\pi$ tel que tel que μ_η soit absolument continue par rapport à μ_ξ pour tout $\eta \in H_\pi$.

On note $\mathcal{B}(X)$ la C^*-algèbre des fonctions complexes boréliennes bornées sur X.

3.13 Proposition. *Soit π une représentation non dégénérée de $C(X)$.*

a) Il existe une unique extension $\tilde\pi$ de π à $\mathcal{B}(X)$ telle que pour toute suite bornée $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de $\mathcal{B}(X)$ convergeant simplement vers $f \in \mathcal{B}(X)$, $\tilde\pi(f_n)$ converge fortement vers $\tilde\pi(f)$.

b) Pour $f \in \mathcal{B}(X)$, la norme $\|\tilde\pi(f)\|$ de $\tilde\pi(f)$ est le « sup essentiel » $\|f\|_{\infty,\mu}$ de f pour la mesure spectrale μ de π.

c) On a $\tilde\pi(\mathcal{B}(X)) = \pi(C(X))''$.

Démonstration. a) On peut supposer que π est la représentation $M_{\mu_Y,p}$ du corollaire 3.10. Pour $f \in \mathcal{B}(X)$ et $\xi \in L^2(Y,\mu)$ posons $\widetilde{M_{\mu_Y,p}}(f)\xi = (f \circ p)\xi$. On obtient ainsi une représentation de $\mathcal{B}(X)$ qui étend $M_{\mu_Y,p}$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite bornée d'éléments de $\mathcal{B}(X)$ convergent simplement vers 0 ; pour tout $\xi \in L^2(Y,\mu)$, $\|(f_n \circ p)\xi\|$ converge vers 0 par le théorème de convergence dominée de Lebesgue. Soit π' une autre extension de π, pour tout $\xi \in L^2(Y,\mu)$, les applications $f \mapsto \langle \xi, \pi'(f)\xi\rangle$ et $f \mapsto \langle \xi, \tilde{\pi}(f)\xi\rangle$ sont, par hypothèse des mesures positives finies sur X qui coïncident sur $C(X)$ donc sur $\mathcal{B}(X)$ et $\pi' = \tilde{\pi}$.

b) Il est clair que $\|M_{\mu_Y,p}(f)\| = \|f \circ p\|_{\infty,\mu_Y} = \|f\|_{\infty,\mu}$.

c) Soit u un élément unitaire de $End(\pi)$; posons $\pi'(f) = u^*\tilde{\pi}(f)u$. Il résulte de l'unicité de $\tilde{\pi}$ que u commute à $\tilde{\pi}(f)$ pour tout f . Soit $h \in End(\pi)$ un élément hermitien. Alors pour tout $f \in \mathcal{B}(X)$, $\tilde{\pi}(f)$ commute à $u = (h-i)^{-1}(h+i)$, donc à $h = i(u+1)(u-1)^{-1}$. On en déduit que $\tilde{\pi}(\mathcal{B}(X))$ est inclus dans le commutant $\pi(C(X))''$ de $End(\pi)$. Cela prouve que $\tilde{\pi}(\mathcal{B}(X)) \subset \pi(C(X))''$.

`La réciproque, sera rédigée plus tard...` □

Appendice : **Multiplicité d'une représentation**

Soit π une représentation non dégénérée de A dans un espace hilbertien séparable. Pour $\xi \in H_\pi$, notons E_ξ l'adhérence de $\pi(A)\xi$ et μ_ξ la mesure $f \mapsto \langle \xi, \pi(f)\xi\rangle$.

3.14 Lemme. *Soit μ une mesure de Radon sur X. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ notons M_μ^n la somme de n copies de la représentation M_μ. L'espace $Hom(M_\mu^k, M_\mu^\ell)$ est formée des opérateurs de multiplication par les éléments de $L^\infty(X,\mu; M_{\ell,k}(\mathbb{C})) = M_{\ell,k}(L^\infty(X,\mu))$.*

Démonstration. Une application linéaire continue $T \in \mathcal{L}(L^2(X,\mu)^k, L^2(X,\mu)^\ell)$ est donnée par une matrice $(a_{i,j}) \in M_{\ell,k}(\mathcal{L}(L^2(X,\mu)))$: pour $\xi = (\xi_1,\dots,\xi_k) \in L^2(X,\mu)$, on écrit $T\xi = (\eta_1,\dots,\eta_\ell)$ avec $\eta_i = \sum_{j=1}^{k} a_{i,j}\xi_j$. Il est clair que $T \in Hom(M_\mu^k, M_\mu^\ell)$ si et seulement si $a_{i,j} \in End(M)$ pour tout i,j. □

Soit μ une mesure de Radon sur X et n une application μ-mesurable de X dans l'espace discret $\mathbf{N} - \{0\} \cup \{+\infty\}$. Notons ε la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$ ($\varepsilon(\{k\}) = 1$ pour tout k) et $M_{\mu,\infty}$ la représentation de $C(X)$ dans $L^2(X,\mu;\ell^2(\mathbf{N})) = L^2(X \times \mathbb{N}; \mu \times m\}$ par opérateurs de multiplication. Posons $Y = \{\,(x,k) \in X \times \mathbf{N}\,,\ k < n(x)\,\}$ et notons $\pi_{\mu,n}$ la restriction de π à $H_{\mu,n} = L^2(Y, \mu \times \varepsilon)$.

3.15 Théorème. *Soient π une représentation de $A = C(X)$ dans un espace hilbertien séparable et μ une mesure dans la classe spectrale de π . Il existe une application μ-mesurable $n : X \to \mathbf{N} - \{0\} \cup \{+\infty\}$, unique modulo μ telle que π soit équivalente à la représentation $\pi_{\mu,n}$.*

Démonstration. Montrons l'existence de n. Écrivons $\pi \simeq \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} M_{\mu_k}$. Les μ_k sont toutes absolument continues par rapport à la mesure spectrale μ. Écrivons $\mu_k = \rho_k\mu$ où ρ_k est une fonction borélienne intégrable. Posons $Y_k = \{x \in X;\ \rho_k(x) \neq 0\}$ et notons $\chi_k : X \to \{0,1\}$ la fonction caractéristique de Y_k.

Posons alors $n = \sum \chi_K : X \to \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. Comme μ est la mesure spectrale, l'ensemble $\{x \in X;\ n(x) = 0\}$ est μ-négligeable.

Poons $Z = \{(x,k) \in X \times \mathbb{N};\ x \in Y_k\}$ et $Y = \{\,(x,k) \in X \times \mathbf{N}\,,\ k < n(x)\,\}$. L'application $(x,k) \mapsto (x, \sum_{j=0}^{k-1} \chi_j(x)$ est une bijection d'espaces boréliens de Z sur Y et induit un isomorphisme $U \in \mathcal{L}(L^2(Z, \mu \times \varepsilon), L^2(Y, \mu \times \varepsilon))$ qui entrelace π et $M_{\mu,n}$.

Établissons l'unicité de n. Soient n et m deux applications μ-mesurables de X dans $\mathbf{N} - \{0\} \cup \{+\infty\}$. Supposons que les représentations $M_{\mu,n}$ et $M_{\mu,m}$ sont équivalentes et soit $u \in Hom(M_{\mu,n}, M_{\mu,m})$ un opérateur unitaire. Alors u entrelace les extensions $\widetilde{M}_{\mu,n}$ et $\widetilde{M}_{\mu,m}$ de $M_{\mu,n}$ et $M_{\mu,m}$ à $\mathcal{B}(X)$ (prop. 3.13). Fixons $k, \ell \in \mathbf{N} - \{0\} \cup \{+\infty\}$ tels que $k > \ell$, posons $B = \{ t \in X \, , \; n(x) = k \, , \; m(x) = \ell \}$, notons χ sa fonction caractéristique et posons $\nu = \chi\mu$. Notons k et ℓ les fonctions sur X constantes égales à k et ℓ respectivement. La restriction de $M_{\mu,n}$ à $M_{\mu,n}(\chi)H_{\pi_{\mu,n}}$ s'identifie à $M_{\nu,k}$; celle de $M_{\mu,m}$ à $M_{\mu,m}(\chi)H_{\pi_{\mu,n}}$ s'identifie à $\pi_{\nu,\ell}$. La restriction de u définit un opérateur unitaire $v \in Hom(M_{\nu,k}, M_{\nu,\ell})$. Par le lemme 3.14, il existe une application $x \mapsto v_x$ de X dans $M_{\ell,k}(\mathbb{C})$ telle que, pour tout $\xi \in L^2(X, n)^n$ et presque tout $t \in X$ on ait $(v\xi)(x) = v_x\xi(x)$. Comme $v^*v = 1$, on a $v_x^*v_x = 1$; or $w^*w \neq 1$ pour tout $w \in M_{\ell,k}(\mathbb{C})$. Il en résulte que $\nu = 0$. Ainsi $m = n$ modulo μ. □

La fonction n du théorème 3.15 s'appelle *multiplicité* de la représentation π.

Il résulte de ce théorème que deux représentations de $C_0(X)$ possédant un ensemble totalisateur dénombrable sont équivalentes si et seulement si elles ont même mesure spectrale et même multiplicité.

3.4 Calcul fonctionnel pour les opérateurs normaux

Soit T un opérateur normal agissant dans l'espace hilbertien H et notons S son spectre. L'application $f \mapsto f(T)$ est une représentation de la C^*-algèbre $C(\operatorname{Sp} T)$ dans H. Les résultats ci-dessus se traduisent donc par :

3.16 Proposition. *Il existe un espace localement compact Y, une application continue $f : Y \to \mathbf{C}$, une mesure μ sur Y et un opérateur unitaire $U \in \mathcal{L}(H, L^2(Y, \mu))$ tels que $f(Y) = S$ et, pour tout $\xi \in L^2(Y, \mu)$ on a $UTU^*\xi = f\xi$.*

Démonstration. Résulte immédiatement du corolaire 3.10.b). □

3.17 Théorème. *Soit T un opérateur normal agissant dans l'espace hilbertien H. Il existe une unique représentation unifère π_T de $\mathcal{B}(\operatorname{Sp} T)$ dans H satisfaisant*

a) $\pi_T(z) = T$ où z est la fonction $\lambda \mapsto \lambda$ sur $\operatorname{Sp} T$.

b) Pour toute suite bornée $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ d'éléments de $\mathcal{B}(\operatorname{Sp} T)$ convergeant simplement vers $f \in \mathcal{B}(\operatorname{Sp} T)$, $\pi_T(f_n)$ converge fortement vers $\pi_T(f)$.

Démonstration. Le théorème résulte donc de la prop. 3.13. □

3.18 Définition. Si T est un opérateur normal agissant dans l'espace hilbertien H et si $f \in \mathcal{B}(\operatorname{Sp} T)$ l'élément $\pi_T(f)$ du théorème 3.17 se note $f(T)$.

Si f est une fonction sur $\mathbf{C}$ dont la restriction f' à $\operatorname{Sp} T$ est borélienne et bornée, on note $f(T)$ l'opérateur $f'(T)$.

3.19 Corollaire. *Soit T un opérateur normal agissant dans l'espace hilbertien H.*

a) Si $f \in C(\operatorname{Sp} T)$ les définitions de $f(T)$ données ci-dessus et dans dans la déf. 6.12 coïncident.

b) Pour tout $f \in \mathcal{B}(\operatorname{Sp} T)$, $f(T)$ est un opérateur normal et commute avec tout opérateur du commutant de $\{ T \, , T^* \}$.

c) Pour tout $f, g \in \mathcal{B}(\mathbf{C})$ on a $g \circ f(T) = g(f(T))$.

Démonstration. a) résulte de l'unicité du corollaire 2.33. Comme $f(T)$, $f \in \mathcal{B}(\mathrm{Sp}\,T)$ est une C^*-algèbre commutative, $f(T)$ est normal pour tout $f \in \mathcal{B}(\mathrm{Sp}\,T)$. La deuxième assertion de b) résulte de la prop. 3.13.c). Enfin c) résulte de l'unicité dans le théorème 3.17. □

Notons ε la mesure sur $\mathbf{N}$ telle que $\varepsilon(\{k\}) = 1$ pour tout $k \in \mathbf{N}$.

3.20 Théorème. *Soit T un opérateur normal de l'espace hilbertien H séparable. Alors il existe une mesure μ sur $\mathrm{Sp}\,T$, unique à équivalence de mesures près, une application μ-mesurable $n : \mathrm{Sp}\,T \to \mathbf{N} - \{0\} \cup \{+\infty\}$, unique modulo μ et un isomorphisme $U : H \to L^2(S_n, \mu \times \varepsilon)$ où $S_n = \{\,(z,k) \in \mathrm{Sp}\,T \times \mathbf{N}\,,\ k < n(t)\,\}$ tels que $T = U^*T_0U$ où T_0 est l'opérateur de $L^2(S_n, \mu\times\varepsilon)$ donné par $(T_0f)(z,k) = zf(z,k)$ pour tout $f \in L^2(S_n, \mu \times \varepsilon)$ et tout $(z,k) \in S_n$.*

Démonstration. Résulte aussitôt du théorème 3.15. □

La classe de la mesure μ et la fonction n données par le théorème 3.20 s'appellent respectivement *mesure spectrale* et *fonction multiplicité* de T .

3.21 Corollaire. *Pour que deux opérateurs normaux T et S de l'espace hilbertien H de type dénombrable soient unitairement équivalents, il faut et il suffit qu'ils aient même spectre, même mesure spectrale et que leurs fonctions multiplicité soient égales presque partout.* □

3.22 Remarque. Soient T un opérateur normal agissant sur l'espace hilbertien H et $\lambda \in \mathbf{C}$. Notons χ_λ la fonction caractéristique de $\{\lambda\}$ et E_λ l'espace propre $E_\lambda = \ker(T - \lambda)$. Pour $x \in E_\lambda$ on a $f(T)x = f(\lambda)x$ pour toute fonction continue f donc pour tout $f \in \mathcal{B}(\mathbf{C})$; comme $(z - \lambda)\chi_\lambda = 0$ où z est la fonction $t \mapsto t$ sur $\mathrm{Sp}\,T$, $(T - \lambda)\chi_\lambda(T) = 0$. Donc $\mathcal{P}_{\{\lambda\}} = \chi_\lambda(T)$ est le projecteur sur E_λ .

3.5 Algèbres de groupes

Le centre d'une algèbre de von Neumann est une algèbre de von Neumann - donc un $L^\infty(X,\mu)$.

3.23 Définition. On appelle *facteur* une algèbre de von Neumann dont le centre est réduit aux scalaires.

Soit Γ un groupe dénombrable. Soit $\ell^2(\Gamma)$ l'espace hilbertien avec une base hilbertienne $(e_g)_{g\in\Gamma}$ indexée par Γ.

Pour $g \in \Gamma$, il existe un opérateur unitaire λ_g (*resp.* ρ_g) agissant sur $\ell^2(\Gamma)$ tel que l'on ait $\lambda_g e_h = e_{gh}$ (*resp.* $\rho_g e_h = e_{hg^{-1}}$) - pour tout $h \in \Gamma$.

Pour $g, h \in \Gamma$, on a $\lambda_{gh} = \lambda_g\lambda_h$ et $\lambda_g^* = \lambda_g^{-1} = \lambda_{g^{-1}}$ (*resp.* $\rho_{gh} = \rho_g\rho_h$ et $\rho_g^* = \rho_g^{-1} = \rho_{g^{-1}}$).

3.24 Définition. L'algèbre du groupe Γ est $L\Gamma = \{\lambda_g;\ g \in \Gamma\}''$.

On note aussi $C_r^*(\Gamma)$ l'adhérence du sous-espace vectoriel de $L\Gamma$ engendré par les λ_g pour $g \in \Gamma$.

3.25 Groupes commutatifs. L'algèbre d'un groupe est commutative si et seulement si le groupe est commutatif.

Dans ce cas, un caractère sur $C_r^*(\Gamma)$ est déterminé par ses valeurs en les éléments λ_g. Il détermine donc un morphisme de groupe $\Gamma \to \mathbb{U}(1) = \{z \in \mathbf{C}\,,\ |z| = 1\}$.

On identifie alors :

— $\operatorname{Sp} C_r^*(\Gamma)$ avec le groupe dual $\widehat{\Gamma}$ de Γ (*i.e.* le groupe compact des homomorphismes $\Gamma \to \mathbb{U}(1)$) ; donc $C_r^*(\Gamma) \simeq C(\widehat{\Gamma})$.

— A travers l'isomorphisme de $\ell^2(\Gamma) \simeq L^2(\Gamma, dh)$ (où dh est la mesure de Haar de $\widehat{\Gamma}$ on identifie $C_r^*(\Gamma)$ avec l'action de $C(\widehat{\Gamma})$ par opérateurs de multiplication et $L\Gamma$ avec $L^\infty(\Gamma, dh)$.

Revenons au cas général. Déterminons le commutant $\{\lambda_g;\ g \in \Gamma\}'$ et le bicommutant $\{\lambda_g;\ g \in \Gamma\}''$.

3.26 Convolution. a) Pour $\xi, \eta \in \ell^2(\gamma)$ et $g \in \Gamma$, posons $\xi * \eta(g) = \sum_{h \in \Gamma} \xi(g)\eta(g^{-1}h)$. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, cette somme est bien définie et l'on a $|\xi * \eta(g)| \leqslant \|\xi\|_2 \|\eta\|_2$

b) On a ainsi une application bilinéaire continue $(\xi, \eta) \mapsto \xi * \eta$ de $\ell^2(\Gamma) \times \ell^2(\Gamma)$ dans $\ell^\infty(\Gamma)$. Bien sûr $e_g * e_h = e_{gh}$. Pour $\xi, \eta \in \mathbb{C}\Gamma$ (combinaison linéaire finie de e_g), on a $\xi * \eta \in \mathbb{C}\Gamma$. Par densité de $\mathbb{C}\Gamma$ dans $\ell^2(\Gamma)$, on en déduit que $\xi * \eta$ est dans l'adhérence $c_0(\Gamma)$ de $\mathbb{C}\Gamma$ pour le norme $\| \ \|_\infty$.

c) Posons $\mathcal{A} = \{\xi \in \ell^2(\Gamma);\ \forall \eta \in \ell^2(\Gamma),\ \xi * \eta \in \ell^2(\Gamma)\}$. Remarquons que pour $\xi \in \mathcal{A}$, le graphe de l'application $\lambda(\xi) : \eta \mapsto \xi * \eta$ de $\ell^2(\Gamma)$ dans $\ell^2(\Gamma)$ est $\{(\alpha, \beta) \in \ell^2(\Gamma)^2;\ \xi * \alpha = j(\beta)\}$ où j est l'inclusion de $\ell^2(\Gamma)$ dans $c_0(\Gamma)$. Comme cette inclusion est continue, ce graphe est fermé, donc $\lambda(\xi)$ est continue.

d) On vérifie sans peine que, pour $\xi \in \mathcal{A}$, on a $\lambda(\xi)^* = \lambda(J\xi)$, où $J : \ell^2(\Gamma) \to \ell^2(\Gamma)$ est l'application définie par $(J\xi)(g) = \overline{\xi(g^{-1})}$. En particulier, $J\xi \in \mathcal{A}$.

e) Remarquons que, pour $\xi, \eta \in \ell^2$, on a $(J\xi) * (J\eta) = J(\eta * \xi)$. On en déduit que l'on a $\xi \in A$, si et seulement si pour tout $\eta \in \ell^2(\Gamma)$, on a $\eta * \xi \in \ell^2(\Gamma)$. L'application $\rho(\tilde{\xi}) : \eta \mapsto \eta * \xi$ est alors continue et l'on a $\|\rho(\tilde{\xi})\| = \|\lambda(\xi)\|$.

3.27 Proposition. *a) Soit $T \in \{\lambda_g;\ g \in \Gamma\}'$ et posons $\xi = Te_1$. On a $\xi \in \mathcal{A}$ et $T = \rho(\widetilde{\xi})$.*

b) Pour $\xi \in \mathcal{A}$, on a $\rho(\widetilde{\xi}) \in \{\lambda_g;\ g \in \Gamma\}'$.

c) De même, $\{\rho_g;\ g \in \Gamma\}' = \{\lambda(\xi);\ \xi \in \mathcal{A}\}$.

On en déduit que, pour $\xi, \eta \in \mathcal{A}$, l'opérateur $\lambda(\xi)\lambda(\eta)$ est dans $\lambda(A)$. On vérifie que $\lambda(\xi)\lambda(\eta) = \lambda(\xi * \eta)$. En particulier, le produit $*$ est associatif sur $\mathcal{A}$. Comme $\mathcal{A}$ contient $\mathbb{C}\Gamma$, elle est dense dans $\ell^2(\Gamma)$. On en déduit que $\lambda(\xi)$ et $\rho(\eta)$ commutent.

On a démontré :

3.28 Proposition. $\{\rho_g;\ g \in \Gamma\}' = \{\lambda_g;\ g \in \Gamma\}''$ *et* $\{\lambda_g;\ g \in \Gamma\}' = \{\rho_g;\ g \in \Gamma\}''$.

Démonstration. Si A et B commutent, alors $A \subset A'' \subset B'$.

Comme $\{\lambda_g;\ g \in \Gamma\}$ et $\{\rho_g;\ g \in \Gamma\}$ commutent, on a $\{\lambda_g;\ g \in \Gamma\}'' \subset \{\rho_g;\ g \in \Gamma\}'$.

Comme $\{\rho_g;\ g \in \Gamma\}'$ et $\{\lambda_g;\ g \in \Gamma\}'$ commutent, $\{\rho_g;\ g \in \Gamma\}' \subset \{\lambda_g;\ g \in \Gamma\}''$. □

3.29 Le centre de $L\Gamma$. Soit $\xi \in \mathcal{A}$. Alors $\lambda(\xi)$ est dans le centre de $L(\Gamma)$ si et seulement si $\lambda_g\lambda(\xi) = \lambda(\xi)\lambda_g$ pour tout $g \in \Gamma$. Or $\lambda_g\lambda(\xi)\lambda_g^{-1} = \lambda(\xi')$ où $\xi'(h) = \xi(g^{-1}hg)$. Donc $\lambda(\xi)$ est dans le centre de $L(\Gamma)$ si et seulement si ξ est constant sur les classes de conjugaison de Γ. On en déduit :

3.30 Proposition. *L'algèbre $L\Gamma$ est un facteur si et seulement si les classes de conjugaison de Γ distinctes de $\{1\}$ sont infinies. On dit que Γ est ICC.*

Citons quelques exemples de groupes ICC :

a) Le groupe $PGL_n(\mathbb{Z})$ est ICC. En effet, soit $a \in GL_n(\mathbb{Z})$ dont le classe de conjugaison dans $GL_n(\mathbb{Z})$ est finie. Notons Z_a son centralisateur, qui est d'indice fini dans $GL_n(\mathbb{Z})$. Soient $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ avec $i \neq j$, et, pour $s \in \mathbb{C}$, notons $t_{i,j}(s) = I_n + sE_{i,j}$ la transvection correspondante. Comme Z_a est d'indice fini, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $t_{i,j}(k) \in Z_a$. On en déduit que $aE_{i,j} = E_{i,j}a$. Enfin, a est dans le centre de $M_n(\mathbb{C})$ puisque l'algèbre engendrée par les $E_{i,j}$ est $M_n(\mathbb{C})$.

b) Le groupe des matrices 2×2 de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec a de la forme 2^k avec $k \in Z$ et b de la forme $p2^{-q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}$. En effet, le centralisateur de tout élément distinct de I_2 est commutatif, donc d'indice infini.

c) Groupe libre : Les sous groupes $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2k \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ k \in \mathbb{Z} \right\}$ et $K = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2k & 1 \end{pmatrix},\ k \in \mathbb{Z} \right\}$ sont libres dans $SL_2(\mathbb{R})$.
Pour cela, on utilise le :
3.31 Lemme du ping-pong. *Soit G un groupe, et soient H et K deux sous-groupes de G, tels que H a au moins 3 éléments. On suppose que G agit sur un ensemble X ayant deux parties non vides disjointes Y et Z telles que :*
— Pour tout $h \in H \setminus \{1\}$, on a $hY \subset Z$.
— Pour tout $k \in K \setminus \{1\}$, on a $kZ \subset Y$.
Alors H et K sont libres dans G.

Démonstration. On veut montrer que tout mot réduit est différent de l'identité.
Soit donc m un tel mot réduit. Il y a 4 cas possibles (avec $h_i \in H \setminus \{1\}$ et $k_i \in K \setminus \{1\}$) :

1. $m = h_1k_1h_2k_2 ... k_{n-1}h_n$ avec $n \geqslant 1$: on a $mY \subset Z$, donc $m \neq 1$.
2. $m = k_1h_2k_2 ... h_nk_n$ avec $n \geqslant 2$. Alors $mZ \subset Y$, donc $m \neq 1$.
3. $m = h_1k_1h_2k_2 ... h_nk_n$. Soit alors $h \in H$, avec $h \neq 1$, et $h \neq h_1^{-1}$ (rappelons que H a au moins 3 éléments). Alors, par le premier cas, $hmh^{-1} \neq 1$.
4. $m = k_1h_2k_2 ... h_n$. Par le cas 3, $m^{-1} \neq 1$, donc $m \neq 1$. □

Pour appliquer le lemme du ping-pong, on fait agir $SL_2(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}^2$ et l'on pose $Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; |x| < |y|\}$ et $Z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; |x| > |y|\}$.

d) Permutations infinies. Notons $\mathfrak{S}_\infty$ le groupe des permutations d'un ensemble infini dénombrable ayant un support fini. Ce groupe est ICC. En effet, la classe de conjugaison de tout élément est l'ensemble (infini !) des permutations ayant la même décomposition en cycles.

3.6 Quelques mots sur les produits croisés

Soient H un espace hilbertien, Γ un groupe, $A \subset \mathcal{L}(H)$ une algèbre de von Neumann et $(u_g)_{g \in \Gamma}$ un homomorphisme de Γ dans le groupe des unitaires de H. On suppose que, pour $g \in \Gamma$ et $a \in A$, on a $u_g a u_g^{-1} \in A$. On pose $\alpha_g(a) = u_g a u_g^{-1}$. L'application $\alpha_g : A \to A$ est continue lorsqu'on munit A d'une de ses topologies : normique, forte, *-forte, faible, ultrafaible...

Posons $\mathcal{H} = \ell^2(\Gamma; H)$. Pour $a \in A$, $g, h \in \Gamma$ et $\xi \in \mathcal{H}$, on pose :

$$(\pi(a)\xi)(g) = a(\xi(g)) \quad \text{et} \quad (V_g\xi)(h) = u_g\xi(g^{-1}h).$$

Pour $a \in A$, $g, h \in \Gamma$, V_g est unitaire, on a $V_gV_h = V_{gh}$ et $V_g\pi(a) = \pi(\alpha_g(a))V_g$.

L'algèbre de von Neumann $\Big(\pi(A)\cup\{V_g;\ g\in\Gamma\}\Big)''$ se note $A\rtimes_\alpha\Gamma$.

On peut en fait décrire des éléments du commutant de $A\rtimes_\alpha\Gamma$.

Pour $g\in\Gamma$, notons W_g l'unitaire de $\mathcal{H}$ donné par $(W_g\xi)(h)=\xi(hg)$. Pour $T\in A'$, notons $\varpi(T)\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$ donné par $(\varpi(T)\xi)(g)=u_gTu_g^*\xi(g)$.

On vérifie que $[V_g,W_h]=[\pi(a),W_h]=[V_g,\varpi(T)]=[\pi(a),\varpi(T)]=0$. On peut démontrer que $\Big(\pi(A)\cup\{V_g;\ g\in\Gamma\}\Big)'=\Big(\varpi(A')\cup\{W_g;\ g\in\Gamma\}\Big)''$.

Supposons que A est commutative. On peut choisir dans A sous-C^*-algèbre séparable faiblement dense $C(X)$ invariante par l'action de Γ. Donc Γ opère par difféomorphismes de X, et $A=L^\infty(X,\mu)$ où μ est une mesure finie sur X. On va supposer que l'action de Γ est (essentiellement) libre dans X, *i.e.* que pour $g\neq 1$, l'ensemble $\{x\in X;\ gx=x\}$ est μ-négligeable.

Pour qu'on ait une action de Γ sur $A=L^\infty(X,\mu)$ agissant sur $H=L^2(X,\mu)$, on suppose que la mesure $g.\mu$ est équivalente à μ pour tout $g\in\Gamma$. On a donc $g.\mu=\delta_g\mu$ où $\delta_g\in\mathcal{L}^1(X,\mu)$, avec $\delta_g(x)\in\mathbb{R}_+^*$ presque partout. On a donc, pour toute fonction borélienne bornée (*resp.* borélienne positive) sur X

$$\int_X f(gx)d\mu(x)=\int_X \delta_g(x)f(x)\,d\mu(x).$$

Pour $\xi\in H=L^2(X,\mu)$ et $g\in\Gamma$, notons $u_g\xi$ la classe de la fonction définie par $(u_g\xi)(x)=\delta_g^{1/2}(x)\xi(g^{-1}x)$.

Alors u_g est unitaire, et $u_{gh}=u_gu_h$.

On fait agir $A=L^\infty(X,\mu)$ sur $L^2(X,\mu)$ par multiplication. Pour $g\in\Gamma$ et $f\in L^\infty(X,\mu)$, on a $u_gfu_g^*=\alpha_g(f)$, où $\alpha_g(f)(x)=f(g^{-1}x)$.

L'espace hilbertien $\mathcal{H}=\ell^2(\Gamma;H)$ s'identifie à $L^2(\Gamma\times X;\varepsilon\otimes\mu)$ où ε est la mesure de comptage sur Γ.

Dans ce cas le représentations définies ci dessus, s'expriment pour $f\in A=A'$, $g\in\Gamma$, $\xi\in L^2(\Gamma\times X;\varepsilon\otimes\mu)$ et $(h,x)\in\Gamma\times X$ par :

- $(\pi(f)\xi)(h,x)=f(x)\xi(h,x)$,
- $(V_g\xi)(h,x)=\delta_g^{1/2}\xi(g^{-1}h,g^{-1}x)$
- $(W_g\xi)(h,x)=\xi(hg,x)$
- $(\varpi(f)\xi)(h,x)=f(h^{-1}x)\xi(h,x)$.

Un éliment du centre de $L^\infty(X,\mu)\rtimes_\alpha\Gamma$ doit commuter à tous ces opérateurs.

Remarquons que par π et ϖ donnent deux représentations de $C(X)$ qui commutent entre elles. On en déduit une représentation de $C(X\times X)$ dans $\mathcal{H}$ donnée par $(\sigma(f)\xi))(g,x)=f(x,g^{-1}x)\xi(x)$. En fait σ est somme pour $g\in\Gamma$ des représentations $M_{\tilde\mu_g}$ où $\tilde\mu_g$ est la mesure sur $X\times X$ donnée par $\tilde\mu_g(f)=\displaystyle\int_X f(x,g^{-1}x)d\mu(x)$. Lorsque l'action de Γ sur X est (essentiellement) libre, ces mesures sont étrangères 2 à 2, donc σ est équivalente à une mesure M_ν où $\nu=\displaystyle\sum_{g\in\Gamma}t_g\mu_g$ pour tout choix de nombres réels strictement positifs $(t_g)_{g\in\Gamma}$ satisfaisant $\displaystyle\sum_{g\in\Gamma}t_g<+\infty$.

Alors le commutant de $C(X\times X)$ est $L^\infty(X\times X,\mu)=L^\infty(\Gamma\times X;\varepsilon\otimes\mu)$ (opérant dans L^2 par multiplication).

Enfin, pour $f\in L^\infty(\Gamma\times X;\varepsilon\otimes\mu)$ et $g\in\Gamma$, on a $V_gfV_g^*\in L^\infty(\Gamma\times X;\varepsilon\otimes\mu)$ et $W_gfW_g^*\in L^\infty(\Gamma\times X;\varepsilon\otimes\mu)$ et l'on a $(V_gfV_g^*)(h,x)=f(g^{-1}h,g^{-1}x)$ et $W_gfW_g^*(h,x)=f(hg,x)$.

On en déduit :

3.32 Proposition. *Si l'action de* Γ *est libre, le centre de* $L^\infty(X,\mu) \rtimes_\alpha \Gamma$ *est* $L^\infty(X,\mu)^\Gamma$*.* $\square$

3.33 Définition. Soit Γ un groupe agissant sur un espace mesuré (X,μ) en préservant la classe de mesure. On dit que l'action est *ergodique* si toute partie mesurable Γ invariante de X est de mesure nulle ou son complémentaire est de mesure nulle.

3.34 Corollaire. *Si l'action de* Γ *est libre,* $L^\infty(X,\mu) \rtimes_\alpha \Gamma$ *est un facteur si et seulement si l'action est ergodique.* $\square$

4 Classification des facteurs en types

Dans ce paragraphe, nous présentons la classification (par Murray et von Neumann) des facteurs en types I, II et III.

4.1 Le treillis des projecteurs

Soient H un espace de Hilbert séparable. On appelle *projecteur* un projecteur orthogonal. En d'autres termes un projecteur est idempotent et autoadjoint, *i.e.* un élément $p \in \mathcal{L}(H)$ tel que $p^2 = p^* = p$.

Remarquons que si p, q sont des projecteurs, on a l'équivalence entre :
(i) $p \leqslant q$; (ii) $(1-q) \leqslant (1-p)$; (iii) $pH \subset qH$; (iv) $pq = qp = p$.

L'ensemble ordonné des projecteurs est un *treillis complet* : tout ensemble $\mathcal{P}$ de projecteurs admet une borne inférieure $\bigwedge_{p\in\mathcal{P}} p$ (la projection sur $\bigcap_{p\in\mathcal{P}} pH$) et une borne supérieure $\bigvee_{p\in\mathcal{P}} p$ (la projection sur $\overline{\sum_{p\in\mathcal{P}} pH}$).

Soient $p, q \in M$ deux projecteurs. Le projecteur $p \wedge q$ sur $pH \cap qH$ et le projecteur $p \vee q$ sur l'adhérence de $pH + qH$ qui est l'mage de $p+q$ s'écrivent $p \wedge q = \chi(p+q)$ et $p \vee q = \chi'(p+q)$ où $\chi, \chi' : [0,2] \to \{0,1\}$ sont les fonctions boréliennes définies par $\chi(t) = 1 \iff t = 2$ et $\chi'(t) = 1 \iff t \neq 0$.

Plus généralement, si $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de projecteurs, le projecteur $\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} p_n$ sur $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} p_n H$ et $\bigvee_{n\in\mathbb{N}} p_n$ sur $\overline{\sum_{n\in\mathbb{N}} p_n H}$ sont $\chi(x)$ et $\chi'(x)$ où $x = \sum_{k=0}^{+\infty} 2^{-k} p_k$.

Enfin, si $\mathcal{P}$ est un ensemble quelconque de projecteurs de H, il existe une partie dénombrable $D_1 \subset \bigcup_{p\in\mathcal{P}} pH$ et une partie dénombrable $D_2 \subset \bigcup_{p\in\mathcal{P}} (1-p)H$ telles que

$$\overline{\mathrm{Vect} D_1} = \overline{\sum_{p\in\mathcal{P}} pH} \quad \text{et} \quad \overline{\mathrm{Vect} D_2} = \overline{\sum_{p\in\mathcal{P}} (1-p)H}.$$

Choisissant pour chaque $x \in D_1$ (*resp.* $x \in D_2$) un projecteur $p \in \mathcal{P}$ tel que $x \in pH$ (*resp.* $x \in (1-p)H$), on construit une suite (p_n) dans $\mathcal{P}$ telle que $\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} p_n = \bigwedge_{p\in\mathcal{P}} p$ et $\bigvee_{n\in\mathbb{N}} p_n = \bigvee_{p\in\mathcal{P}} p$.

On en déduit immédiatement :

4.1 Proposition. *L'ensemble des projecteurs d'une algèbre de von Neumann est stable par* $\bigwedge$ *et* $\bigvee$.

4.2 Isométries partielles

Soit H un espace hilbertien.

Pour $u \in \mathcal{L}(H)$. Les conditions suivantes sont équivalentes : Les conditions suivantes sont équivalentes :
(i) $u = uu^*u$; (ii) $u^* = u^*uu^*$; (iii) $u^*u = (u^*u)^2$; (iv) $uu^* = (uu^*)^2$.

En effet, (i) et (ii) se déduisent l'un de l'autre par passage aux adjoints.
(i) $\Rightarrow$ (iii) est clair. Si (iii) est satisfait $T = u(1 - u^*u)$ vérifie $u^*T = 0$ donc $T^*T = 0$ et $T = 0$, d'où (i). Enfin, remplaçant u par u^* dans (i) $\iff$ (iii), on en déduit que (ii) $\iff$ (iv).

Un opérateur qui vérifie les conditions équivalentes ci-dessus est appelé une *isométrie partielle.* Soit $u \in \mathcal{L}(H)$ une isométrie partielle. De la condition (ii) (*resp.* (i)) il résulte que u^* et u^*u (*resp.* u et uu^*) ont même image. On appelle support initial (*resp.* final) de l'isométrie partielle $u \in \mathcal{L}(H)$ le sous-espace u^*H (*resp.* uH) de H.

Si u est une isométrie partielle, posons $\Gamma_u = \{(\xi, u\xi),\ \xi \in u^*H\}$. C'est un sous-espace fermé de $H \times H$. Remarquons que si $(\xi, \eta) \in \Gamma_u$, alors $\|\xi\| = \|\eta\|$. De plus, si $(\xi, \eta) \in H^2$ sont tels que $\eta = u\xi$ et $\|\xi\| \leqslant \|\eta\|$ alors $(\xi, \eta) \in \Gamma_u$. Le projecteur orthogonal sur Γ_u est $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} u^*u & u^* \\ u & uu^* \end{pmatrix}$.

4.2 Remarque. Tout sous espace fermé $E \subset H^2$ tel que l'on ait $\|\xi\| = \|\eta\|$ pour tout $(\xi, \eta) \in E$ est de la forme Γ_u où u est une isométrie partielle.

4.3 Lemme. *Soient $u, v \in \mathcal{L}(H)$ des isométries partielles. Les conditions suivantes sont équivalentes : (i) $uu^* = vu^*$; (ii) $u^*u = u^*v$; (iii) $u = vu^*u$; (iv) $u = uu^*v$. (v) $\Gamma_u \subset \Gamma_v$.*

Démonstration. En effet, on passe de (i) à (iii) en multipliant à droite par u et de (iii) à (i) en multipliant à droite par u^*, d'où (i) $\iff$ (iii). De même, en multipliant à gauche par u et u^*, on voit que (ii) $\iff$ (iv).

Si l'assertion (iii) est satisfaite, pour fout $(\xi, \eta) \in \Gamma_u$, on a $\xi = u^*u\xi$, donc $v\xi = \eta$. Puisque $\|\xi\| = \|\eta\|$, il vient $(\xi, \eta) \in \Gamma_v$, donc (v).

Si (v) est satisfaite, pour tout $\xi \in H$, on a $(u^*\xi, uu^*\xi) \in \Gamma_u \subset \Gamma_v$, donc $uu^*\xi = vu^*\xi$, d'où (i).

On a (iv) $\iff$ $u^*u = v^*u$ et, par (iii) $\iff$ (v) appliqué à u^* et v^*, on trouve que (iv) est équivalent à $\Gamma_{u^*} \subset \Gamma_{v^*}$ - qui lui même est équivalent à (v) (*via* la symétrie $(\xi, \eta) \mapsto (\eta, \xi)$). ☐

Si ces conditions sont satisfaites, on dit que v prolonge u et on écrit $u \prec v$. La relation $\prec$ est une relation d'ordre sur l'ensemble des isométries partielles de E dans F.

Si $u \prec v$, alors $(v-u)^*u$ et $u(v-u)^*$ sont nuls d'où il ressort que $(v-u)(v-u)^*(v-u) = vv^*v - vu^*v = v-u$; donc $v-u$ est une isométrie partielle et il est clair que ses supports initial et final sont orthogonaux à ceux de u. Réciproquement, si w est une isométrie partielle de supports initial et final orthogonaux à ceux de u, alors $u+w$ est une isométrie partielle et $u \prec u+w$. En d'autres termes, l'application qui à v associe $v-u$ est une bijection de l'ensemble des isométries partielles v prolongeant u dans l'ensemble des isométries partielles $w \in \mathcal{L}(H)$ de domaine initial et final respectivement inclus dans $\ker u$ et dans $\ker u^*$.

4.3 Comparaison des projecteurs d'un algèbre de von Neumann

Soit H un espace de Hilbert séparable. On fixe dans ce paragraphe une algèbre de von Neumann M et on note $Proj(M) = \{p \in M;\ p^* = p^2 = p\}$ l'ensemble de ses projecteurs..

4.4 Définition. Soient $p, q \in M$ deux projecteurs.

a) On dit que p et q sont *équivalents* et on écrit $p \sim q$ s'il existe $u \in M$ tel que $u^*u = p$ et $uu^* = q$.

b) On écrit $p \prec q$ s'il existe $u \in M$ tel que $u^*u = p$ et $uu^* \leqslant q$.

On a évidemment :

4.5 Proposition. *L'équivalence des projecteurs est une relation d'équivalence. La relation $\prec$ est une relation de préordre (réflexive et transitive)*

Démonstration. On a $p \sim p$ (prendre $u = p$) ; il est clair que $\sim$ est symétrique (on remplace u par u^*). Si $p = u^*u$, $q = v^*v = uu^*$ (*resp.* $uu^* \leqslant q = v^*v$) et $r = vv^*$ (*resp.* $vv^* \leqslant r$), on a $(vu)^*vu = u^*(v^*v)u = (u^*u)^2 = p$ et de même $(vu)(vu)^* = r$ (*resp.* $vu(vu)^* = v(uu^*)v^* \leqslant (vv^*)^2 = vv^* \leqslant r$). □

À l'aide de considérations *alla* Cantor-Bernstein on a :

4.6 Proposition. *Si $p \prec q$ et $q \prec p$ alors $p \sim q$.*

Démonstration. Soient u, v avec $u^*u = p \geqslant vv^*$ et $v^*v = q \geqslant uu^*$. Posons $e_0 = p - vv^*$ et $f_0 = q - uu^*$ et pour $k \in \mathbb{N}$, $e_{2k} = (vu)^k e_0((vu)^k)^*$, $f_{2k} = (uv)^k e_0((uv)^k)^*$, $e_{2k+1} = vf_{2k}v^*$ et $f_{2k+1} = ue_{2k}u^*$. Enfin, posons $P = \sum_{k=0}^{+\infty} e_{2k+1}$ et $U = u(p - P) + v^*P$. On a $U^*U = p$ et $UU^* = q$. □

Donc l'ensemble $Dim(M) = Proj(M)/\sim$ des classes d'équivalence de projecteurs de M est un ensemble ordonné.

4.4 Cas des facteurs

Nous allons à présent démontrer que, si M est un facteur, il y a peu de choix possibles pour cet ensemble ordonné.

Démontrons d'abord que cet ordre est total.

4.7 Lemme. *Soit $p \in M$ un projecteur non nul. Le sous-espace $E = \{\xi \in H;\ \forall a \in M,\ pa\xi = 0\}$ est stable par M et par M'. Il est nul.*

Démonstration. Si $b \in M$ et $\xi \in E$, alors pour tout $a \in M$, on a $ab \in M$, donc $pab\xi = 0$. Cela prouve que $b\xi \in E$.

Si $b \in M'$ et $\xi \in E$, alors pour tout $a \in M$, on a $pab\xi = bpa\xi = 0$. Cela prouve que $b\xi \in E$.

Ces deux assertions prouvent que le projecteur orthogonal p_E sur E est dans M' et dans M. Il est scalaire. Comme $p \neq 0$, il vient $p_E = 0$. □

4.8 Lemme. *Si p, q sont deux projecteurs non nuls de M, il existe une isométrie partielle $u \in M$ non nulle avec $u^*u \leqslant p$ et $uu^* \leqslant q$.*

Démonstration. Soit $\xi \in pH$ non nul. D'après le lemme 4.7, il existe $a \in M$ tel que $qa\xi \neq 0$. Alors $b = qap$, n'est pas nul. Si $b = u|b|$ est sa décomposition polaire, alors $uu^* \leqslant q$ et $u^*u \leqslant p$ (l'image de u (*resp.* de u^*) est l'adhérence de celle de b (*resp.* de u^*). Elle est incluse dans qH (*resp.* pH). □

4.9 Proposition. *Si p, q sont deux projecteurs de M, alors $p \prec q$, ou $q \prec p$.*

Démonstration. Munissons l'ensemble $V_{q,p}$ des isométries partielles $u \in qMp$ de l'ordre $u \prec v$ (voir lemme 4.3).

Démontrons que cet ordre est inductif. Soit $\mathcal{F} \subset V_{q,p}$ est une partie totalement ordonnée non vide. Posons $E = \overline{\bigcup_{u \in \mathcal{F}} \Gamma_u}$. Comme $\mathcal{F}$ est totalement ordonné et non vide, c'est un sous-espace vectoriel de H^2. Pour $(\xi, \eta) \in E$ on a $p\xi = \xi$, $q\eta = \eta$ et $\|\xi\| = \|eta$. Donc il existe $v \in \mathcal{L}(H)$ une isométrie partielle telle que $v = qvp$ et $E = \Gamma_v$. Enfin, comme pour tout $u \in \mathcal{F}$, le projecteur $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} u^*u & u^* \\ u & uu^* \end{pmatrix}$ sur Γ_u est dans l'algèbre de von Neumann $M_2(M)$, il en va de même pour leur sup, le projecteur sur Γ_v. Donc $v \in M$.

Enfin, soit u un élément de $V_{q,p}$. Si $q \neq uu^*$ et $p \neq u^*u$, il existe d'après le lemme 4.8 une isométrie partielle w non nulle telle que $w^*w \leqslant p - u^*u$ et $ww^* \leqslant q - uu^*$. Alors $u \prec u+w$ et u n'est pas maximal. Si u est maximal, on a donc $u^*u = p$ ou $uu^* = q$. □

La classification en trois types est basée sur la notion suivante :

4.10 Définition. Soit $p \in M$ un projecteur.

a) On dit que p est *minimal* si $p \neq 0$ et pour tout projecteur q tel que $0 \leqslant q \leqslant p$ on a $q = 0$ ou $q = p$.

b) On dit que p est *infini* s'il existe un projecteur q tel que $0 \leqslant q \leqslant p$ distinct de p et équivalent à p.

c) On dit que p est fini s'il n'est pas infini.

4.11 Proposition. *a) Si p est un projecteur minimal, alors $p \prec q$ pour tout projecteur q non nul.*

b) Si p est un projecteur infini, alors $q \prec p$ pour tout projecteur q.

c) Deux projecteurs minimaux (resp. infinis) sont équivalents

Démonstration. a) est évident.

b) Si p est infini, alors écrivons $p = u^*u \geqslant uu^*$. Pour $k \geqslant 1$, posons $P_0 = p$ et pour $k \geqslant 1$, $P_k = u^k(u^*)^k$ et pour $k \in \mathbb{N}$ posons $p_k = P_k - P_{k+1}$. On a $p_k = u^k p_0 (u^*) k$ donc les p_k sont des projecteurs équivalents. Les p_k sont deux à deux orthogonaux et l'on a $\sum_{k=0}^{+\infty} p_k \leqslant P$.

Soit (a_k) une suite fortement dense dans la boule unité M. D'après le lemme 4.7, pour fout $\xi \in H$ il existe k tel que $p_0 a_k \xi \neq 0$. On en déduit que $T = \sum_{k \in \mathbb{N}} 2^{-k} u^k p_0 a_k$ est injectif. La décomposition polaire $T = v|T|$ donne une isométrie telle que $v^*v = 1$ et $vv^* \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} p_k \leqslant P$.

c) résulte de a) (*resp.* b) et de la proposition 4.6. □

4.5 Définition des types

4.12 Définition. Un facteur M est dit de

Type I s'il existe un projecteur minimal dans M.

Type II s'il n'y a pas de projecteur minimal, mais il y a des projecteurs finis non nuls ;
— si tous les projecteurs sont finis, M est de type II_1 ;
— s'il y a aussi des projecteurs infinis, M est de type II_∞.

Type III si tous les projecteurs non nuls sont infinis.

4.13 Proposition. *Si M est de type I, alors $M \simeq M_n(\mathbb{C})$ (type I_n) ou $M \simeq \mathcal{L}(H)$ (type I_∞).*

Démonstration. Soit p_1 un projecteur minimal. Alors $p_1 M p_1 = \mathbb{C} p_1$.

Si $M = \mathbb{C}$ on a fini, sinon, $p_1 \prec (1 - p_1)$ et on construit p_2 orthogonal à p_1 et équivalent à p_1. On continue ainsi jusqu'à ce que cela s'arrête, ou indéfiniment...

Dans le cas ou cela s'arrête on a des projecteurs $p_1, \dots, p_n$ minimaux, donc equivalents tels que $\sum_{j=1}^{n} p_j = 1$. On écrit u_j avec $u_j^* u_j = p_j$ et $u_j u_j^* = p_1$ avec $u_1 = p_1$ et l'on pose $e_{i,j} = u_i^* u_j$. On a ainsi $e_{i,j} e_{k,\ell} = \delta_{j,k} e_{i,\ell}$ et un morphisme de $M_n(\mathbb{C})$ dans M. Enfin $p_i M p_j$ est de dimension 1.

Si cela ne s'arrête pas on obtient juste des p_j pour tout j. On pose $p = \sum_{j=1}^{+\infty} p_j$ Alors p est infini donc équivalent à 1. Quitte à remplacer p_j par $u p_j u^*$, où $uu^* = 1$ et $u^* u = p$, on peut supposer $\sum_{j=1}^{\infty} p_j = 1$. On conclut comme dans le cas fini. □

4.6 Comparaison des projecteurs dans le cas de type II$_1$

Dans ce paragraphe, on suppose que M est de type II$_1$ (c'est à dire fini et de dimension infinie). Le but est de calculer l'ensemble totalement ordonnée $Dim(M) = Proj(M)/\sim$.

4.14 Lemme. *Soient $p, q \in Proj(M)$.*

a) Si $p \prec q$ et $1 - p \prec 1 - q$ alors $p \sim q$ et $(1 - p) \sim (1 - q)$.

b) Si $p \sim q$ alors $1 - p \sim 1 - q$ et il existe un unitaire $U \in M$ qui conjugue p et q.

c) On a $p \prec q$ si et seulement si $1 - q \prec 1 - p$.

Démonstration. a) Supposons que $p \prec q$ et $1-p \prec 1-q$. Soient $u, v \in M$ tels que $u^* u = p$, $uu^* \leqslant q$ et $v^* v = (1 - p)$, $vv^* \leqslant (1 - q)$. Alors $(u + v)^*(u + v) = 1$ et comme $(u + v)(u + v)^* \leqslant 1$ et 1 est fini, $(u + v)(u + v)^* = 1$, donc $uu^* = q$ et $vv^* = 1 - q$, soit $p \sim q$ et $(1 - p) \sim (1 - q)$

b) Quitte à les échanger, on peut supposer que $1 - p \prec 1 - q$. Alors d'après a), $1 - p \prec 1 - q$ et l'unitaire $u + v$ construit dans a) conjugue p et q.

c) Si $p \sim q$ alors $(1 - p) \sim (1 - q)$ donc $(1 - q) \prec (1 - p)$. Si $p \prec q$ et p n'est pas équivalent à q, on ne peut avoir $1 - p \prec 1 - q$ d'après a), donc nécessairement $1 - q \prec 1 - p$.
La réciproque s'en déduit en remplaçant p et q par $(1 - q)$ et $(1 - p)$ respectivement. □

Pour $p \in Proj(M)$, on note $[p]$ sa classe dans $Dim(M) = Proj(M)/\sim$.

4.15 Addition partielle. D'après le lemme 4.14.b), la classe $[1 - p]$ ne dépend que de $[p]$ on la note $1 - [p]$.

Soient p, q deux projecteurs. Alors d'après le lemme 4.14.c) on a $p \prec 1 - q \iff q \leqslant 1 - p$. Soit $u \in M$ tel que $u^* u = p$ et $uu^* \leqslant (1 - q)$. On va poser $[p] + [q] = [q + uu^*]$.

En d'autres termes, si $x, y \in Dim(M)$, on a $x \leqslant (1 - y)$ si et seulement si $y \leqslant (1 - x)$ et on peut dans ce cas définir une classe $x + y \in Dim(M)$.

L'addition partielle ainsi définie est commutative et associative :

Si $x, y, z \in Dim(M)$ sont tels que $x \leqslant 1 - y$ et $x + y \leqslant 1 - z$ alors $y \leqslant (1 - z)$ et $x \leqslant 1 - (y + z)$ et l'on a $x + (y + z) = (x + y) + z$.

Convenons ici de dire que la famille $(x_0, \dots x_{n-1})$ et plus généralement $(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$ est sommable ≫ s'il existe des projecteurs p_j de classe x_j deux à deux orthogonaux. Dans ce cas, la somme $\sum x_j = \left[\sum p_j\right]$ est bien définie.

4.16 Propriétés de l'addition. **Simplifiabilité.** Si $x+y=x+z$ alors $y=z$. Cela permet de définir $x-y$ si $x \geqslant y$.

Propriété d'Archimède. Si $x \neq 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que x soit n fois ajoutante à lui-même, mais pas $n+1$ fois (sinon 1 serait infini). On a alors $nx \leqslant 1$ mais $x \geqslant 1-nx$.

Limite nulle. Nous dirons que (x_n) tend vers 0 si pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe n_0 tel que pour $n \geqslant n_0$ on ait $kx_n \leqslant 1$. De plus, il existe une suite strictement décroissante (comme il n'y a pas de projecteurs minimaux) qui tend vers 0 (à chaque n, choisir un projecteur $p_{n+1} \leqslant p_n$ distinct de 0 et de p_n et tel que $p_{n+1} \prec p_n - p_{n+1}$ - quitte à remplacer p_{n+1} par $p_n - p_{n+1}$).

Suites adjacentes. Si x_n est croissante, y_n est décroissante et $y_n - x_n \to 0$, alors il existe un et un seul $x \in Dim(M)$ avec $x_n \leqslant x \leqslant y_n$.

4.17 Lemme. *a) Si p_n est une suite croissante de projecteurs et $p = \lim p_n$ (limite forte), alors $[p]$ est la borne sup des $[p_n]$.*

b) Si p_n est une suite décroissante de projecteurs de limite forte nulle, alors $[p_n] \to 0$.

Démonstration. On doit démontrer que, si q est un projecteur tel que $p_n \prec q$ pour tout n, alors $p \prec q$. On construit par récurrence une suite u_n croissante d'isométries partielles telles que $u_n^* u_n = p_n$ et $u_n u_n^* \leqslant q$. Si u_n est construit, on a $p_{n+1} - p_n \prec q - u_n u_n^*$. On prolonge donc u_n par une isométrie de support initial $p_{n+1} - p_n$ et support final $\leqslant q - u_n u_n^*$. Puis on prend le sup des u_n.

Dans ce cas $1 - p_n \to 1$ donc $\sup(1-[p_n]) = 1$ et $\inf[p_n] = 0$. □

On en déduit qu'il existe un unique isomorphisme d'ensembles ordonnés compatible avec l'addition partielle entre $Dim(M)$ et $[0,1]$.

Pour cela, on démontre :

4.18 Lemme. *Pour tout $x \in Dim(M)$, il existe un et un seul $y \in Dim(M)$ avec $x = 2y$.*

On définit ainsi $x/2^n$ et enfin $2^{-n} = 1/2^n$.

Puis on démontre :

Soit $x \in Dim(M)$. Il existe une unique suite $(\varepsilon_k) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ telle que l'on ait $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k 2^{-k} \leqslant x < \sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k 2^{-k}$.

Pour finir cette partie, on a :

4.19 Proposition. *Soit p_n une suite de projecteurs dans M. Si $[p_n] \to 0$ alors p_n tend vers 0 fortement.*

Démonstration. Sinon, il existe $\xi \in H$, $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et une partie infinie D de $\mathbb{N}$ telle que $\|p_n \xi\| \geqslant \alpha$. Quitte à remplacer D par un sous-ensemble infini, on peut supposer que la famille $([p_n])_{n \in D}$ est sommable (dans $Dim(M)$). Pour $m \in D$, posons $q_m = \displaystyle\bigvee_{n \in D,\ n \geqslant m} p_n$. Remarquons que l'on a $[q_m] \leqslant \displaystyle\sum_{n \in D,\ n \geqslant m} [p_n]$. Donc $[q_m]$ décroit vers 0. Mais q_m est une suite décroissante de projecteurs. Il vient $q_n \to 0$ fortement. □

4.7 Fonction dimension

4.20 Théorème. *Soit M un facteur dans un espace de Hilbert séparable. Il existe une fonction dimension $D : Proj(M) \to [0, +\infty]$, unique modulo la multiplication par un scalaire près telle que l'on ait $p \sim q \iff D(p) = D(q)$ et si $pq = 0$ alors $D(p+q) = D(p) + D(q)$ (avec la convention $a + (+\infty) = +\infty$.)*

Dans le cas de type I on normalise cette dimension en posant $D(p) = 1$ pour p minimal et l'on a $D(M) = \{0, \ldots, n\}$ pour un $n \in \mathbb{N}$ (type I_n) ou $D(M) = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ (type I_∞).

Dans le cas de type II_1 on normalise en posant $D(1) = 1$ et l'on a $D(M) = [0, 1]$.

Dans le cas de type II_∞ on a $D(M) = [0, +\infty]$.

Dans le cas de type III, $D(M) = \{0, +\infty\}$.

On connait déjà ce théorème dans les cas de type I, II_1 et III. Pour bien comprendre le cas de type II_∞, il faut démontrer que la somme de deux projecteurs finis est finie. Cela résulte de l'« additivité de la trace ».

5 Additivité de la trace

Le but de ce chapitre est de démontrer que tout facteur de type II_1 admet une (unique) trace : une application $\tau : M \to \mathbb{C}$ ultrafaiblement continue, positive, telle que $\tau(xy) = \tau(yx)$ pour tous $x, y \in M$, ou, ce qui revient au même, $\tau(uxu^*) = \tau(x)$ pour tout $x \in M$ et tout unitaire $u \in M$.

5.1 Théorème de Ryll-Nardzewski

Nous utilisons le théorème de point fixe de Ryll-Nardzewski que nous commençons par énoncer.

Soient E un espace vectoriel normé, $K \subset E$ une partie convexe non vide, compacte pour la topologie faible $\sigma(E, E^*)$.

5.1 Théorème de Ryll-Nardzewski. *Tout groupe d'isométries affines de K admet au moins un point fixe.*

Rappelons qu'un point x d'un convexe C est dit *extremal* si pour tous $y, z \in C$ tels que $x = \dfrac{1}{2}(y+z)$, on a $x = y = z$. Il revient aussi au même de dire que si $x = \sum_{i=1}^{n} t_i y_i$ avec $y_i \in C$ et $t_i \in \mathbb{R}_+^n$ avec $\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$, alors $x = y_i$ pour tout i tel que $t_i \neq 0$.

Avant de commencer la démonstration du théorème de Ryll-Nardzewski, démontrons le :

5.2 Théorème de Krein-Milman. *L'enveloppe convexe des points extrémaux de K est dense dans K.*

Démonstration. Une partie F de K est dite *extrémale* si $\forall y, z \in K$, $\dfrac{1}{2}(y+z) \in F \to y \in F$ et $z \in F$. Bien sûr, K est extrémale... et si $(F_i)_{i\in I}$ est une famille totalement ordonnée par l'inclusion de parties extrémales, faiblement fermées, non vides de K, alors $\bigcap_{i\in I} F_i$ est extrémale, faiblement fermée, non vide.

Il existe donc - d'après le lemme de Zorn - une partie extrémale, faiblement fermée, non vide minimale. Or si F est une partie extrémale, faiblement fermée, contenant deux points x et y il existe une forme linéaire $\ell : F \to \mathbb{R}$ qui les sépare, *i.e.* telle que $\ell(x) < \ell(y)$, et $\{z \in F;\ \ell(z) \leqslant \ell(x)\}$ est extrémale, faiblement fermée, non vide et strictement contenue dans F. Toute partie extrémale, faiblement fermée, non vide minimale est donc réduite à un point extrémal.

Remarquons enfin que si $C \subset K$ est une partie convexe fermée, non vide distincte de K, il existe $x \in K \setminus C$ et une forme linéaire ℓ telle que $\ell(y) > \ell(x)$ pour tout $y \in C$. Alors $\{z \in K;\ \ell(z) \leqslant \ell(x)\}$ est extrémale, faiblement fermée, non vide, donc contient une partie extrémale, faiblement fermée, non vide minimale : un point extrémal. On en déduit que C n'est pas l'enveloppe convexe des points extrémaux de K. $\square$

Nous utiliserons aussi le résultat simple suivant :

5.3 Proposition. *Si K est l'enveloppe convexe fermée d'un ensemble C, alors tout point extrémal de K est contenu dans l'adhérence faible de C.*

Démonstration. Soit $x \in K$ un point extrémal. Soit H un demi-espace ouvert contenant x. Alors

$$K = \{(sy + (1-s)z);\ y \in \overline{co}(C \cap H); y \in \overline{co}(C \setminus H); s \in [0,1]\}.$$

Comme x est extrémal, $x \in \overline{co}(C \cap H)$ - et c'est un point extrémal de ce convexe.

A l'aide d'une récurrence immédiate, on en déduit que x est contenu dans l'adhérence de l'enveloppe convexe de $C \cap H_1 \cap \ldots \cap H_k$ pour tout ensemble fini de sous-espaces ouverts contenant x. En particulier, $C \cap H_1 \cap \ldots \cap H_k$ n'est pas vide : tout voisinage de x rencontre C. $\square$

Démonstration du théorème de Ryll-Nardzewski. Pour toute isométrie T de K, notons K^T l'ensemble de ses points fixes. Il s'agit de démontrer que l'ensemble $\bigcap_T K^T$ n'est pas vide. Comme ces ensembles sont fermés, par compacité de K il suffit de démontrer qu'une intersection finie n'est pas vide.

On peut donc se restreindre à un ensemble fini d'isométries de K, qui engendre un (semi-)groupe dénombrable $\mathcal{S}$ d'isométries de K.

D'après le lemme de Zorn, il existe une partie convexe, compacte, non vide de K stable par $\mathcal{S}$ et minimale pour l'inclusion. Quitte à remplacer K par cette partie, on peut supposer que K elle-même est minimale.

Dans ce cas, pour tout $x \in K$, K est égale contenue dans l'enveloppe convexe fermée de $\{Tx;\ T \in \mathcal{S}\}$ et, comme $\mathcal{S}$ est dénombrable, K est séparable (normiquement).

Soit aussi $X \subset K$ une partie non vide, faiblement fermée, stable par $\mathcal{S}$ et minimale pour l'inclusion. Démontrons que X est réduite à un point. Nous commençons par montrer que les topologies normique et faible coïncident sur X. Cela résulte immédiatement du lemme suivant :

5.4 Lemme. *Pour tout $\varepsilon > 0$, tout $x \in X$, admet un voisinage dans X de diamètre $\leqslant \varepsilon$.*

Démonstration. Comme X est (normiquement) séparable, il existe donc un ensemble dénombrable $D \subset X$ tel que $X = \bigcup_{d \in D} (B_d \cap X)$ où l'on a posé $B_d = \{y \in E;\ \|y - d\| \leqslant \varepsilon/2\}$. Les boules fermées B_d étant convexes et normiquement fermés elles sont faiblement fermées. Le théorème de Baire (appliqué au compact X) implique alors qu'il existe $d \in D$ et un ouvert faible W de X non vide tel que $W \subset B_d$. Pour tout $x \in X$, l'adhérence faible de $\{Tx;\ T \in \mathcal{S}\}$ est stable par $\mathcal{S}$, donc c'est X. Il existe donc $T \in \mathcal{S}$ tel que $Tx \in U$. Alors, $T^{-1}W$ est le voisinage cherché. $\square$

Fin de la démonstration du théorème de Ryll-Nardzewski. Comme les topologies faible et normique coïncident sur X, X est normiquement compact. Notons $p : X \times X$ dans K l'application $(x,y) \mapsto \dfrac{x+y}{2}$. Pour tout $\alpha > 0$, l'ensemble $Y_\alpha = \{(x,y) \in X \times X;\ \|x - y\| \geqslant \alpha\}$ est compact, donc l'ensemble $p(Y_\alpha)$ est une partie compact stable par $\mathcal{S}$ de K. Elle ne contient aucun point extremal de K donc son enveloppe convexe fermée non plus (d'après la prop. 5.3). Elle est donc vide par minimalité de K. Donc $Y_\alpha = \emptyset$ et X est donc réduit à un point. $\square$

5.2 Formes ultrafaiblement continues

Le but de cette section est de caractériser les formes positives ultrafaiblement continues dans le cas de type II_1.

5.5 Proposition. *Soit φ une forme positive sur M de type II_1. Alors on a l'équivalence entre :*

(i) φ est ultrafaiblement continue.

(ii) φ *est normale : si* (p_n) *est une famille de projecteurs 2 à deux orthogonaux de* M*, alors* $\varphi(\sum p_n) = \sum(\varphi(p_n))$.

(iii) Si p_n *une suite de projecteurs tels que* $[p_n]$ *tende vers* 0*, alors* $\varphi(p_n) \to 0$.

Démonstration. **(i)⇒ (iii)** est immédiat, puisque $p_n \to 0$ (ultra)fortement !

(ii)⇒ (i) a été vu avec Pierre.

(iii)⇒(ii) résulte du lemme 4.17 : Si $\sum p_k = p$ alors $[\sum_{k=n}^{\infty} p_k] \to 0$.

□

5.3 La trace

5.6 Théorème. *Il existe une unique trace* τ *positive sur* M *telle que* $\tau(1)$*. Elle est ultrafaiblement continue.*

Démonstration. Soit φ un état vectoriel. Pour tout $\mathbb{N}$, notons $E_n = \{p \in Proj(M);\ n[p] \leqslant 1\}$ et posons $\alpha_n = \sup_{E_n} \varphi(p)$. Alors $\alpha_n \to 0$ d'après la prop. 4.19. Pour $U \in \mathcal{U}(M)$, posons $\varphi_U(x) = \varphi(UxU^*)$ et $K = \overline{co}(\{\varphi_U;\ U \in \mathcal{U}(M)\}$. Démontrons que K est une partie faiblement compacte de M_*. Il suffit de démontrer que son adhérence dans M^* pour la topologie de dualité avec M (qui est compacte car fermée dans la boule unité de M^*) est contenue dans M_*.

Soit $p \in E_n$. Alors pour tout $U \in \mathcal{U}(M)$, on a $[UpU^*] = [p]$, donc $\varphi(UxU^*) \leqslant \alpha_n$. Donc X est contenu dans l'ensemble $K_\alpha = \{\psi \in M_+^*,\ \psi(1) = 1,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall p \in E_n;\ \psi(p) \leqslant \alpha_n\}$.

Alors K possède un point fixe qui est donc une trace.

S'unicité est facile : si τ est une trace, elle est imposée sur les projecteurs : elle est connue partout par linéarité et densité de l'espace vectoriel engendré par $Proj(M)$. □