Théorie spectrale

Thèmes prévus

0 Espaces de Banach : « rappels » et notations

1. Spectre et résolvante
2. Calcul fonctionnel
3. Applications linéaires compactes
4. Décomposition spectrale des opérateurs autoadjoints et unitaires
5. Décomposition spectrale d'un opérateur autoadjoint (non borné)

0 Espaces de Banach : « rappels » et notations

0.1 Espaces vectoriels normés, espaces de Banach

Espace vectoriel normé sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Espace de Banach=Espace vectoriel normé complet.

0.2 Applications linéaires continues

Soient E, F des espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Pour une application linéaire $f : E \to F$, équivalence entre :

(i) f est continue.

(ii) f est continue en 0.

(iii) il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $x \in E$ on ait $\|f(x)\| \leqslant k \|x\|$.

Si E, F sont des espaces vectoriels normés, on note $\mathcal{L}(E, F)$ l'espace vectoriel normé des applications linéaires continues de E dans F. On note et $\mathcal{L}(E)$ l'espace vectoriel normé $\mathcal{L}(E, E)$ des applications linéaires continues de E dans lui même.

Norme : meilleure constante dans (iii). On a :

a) $\forall x \in E$, $\|f(x)\| \leqslant \|f\| \|x\|$

b) si $\forall x \in E$, $\|f(x)\| \leqslant k \|x\|$ alors f est continue et $\|f\| \leqslant k$.

En particulier $\|g \circ f\| \leqslant \|g\| \|f\|$.

Si F est complet, $\mathcal{L}(E, F)$ est complet.

Dual : $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$. Transposée ${}^tT(\ell) = \ell \circ T$.

Pour $T \in \mathcal{L}(E)$ et $n \in \mathbb{N}$, on définit T^n en posant $T^0 = \mathrm{id}_E$ et $T^{n+1} = TT^n = T^nT$.

0.3 Théorèmes que l'on va utiliser

1 Complété. *Si E est un espace vectoriel normé, il existe un espace de Banach B et un plongement $i : E \to B$ isométrique d'image dense unique à isomorphisme unique près... Si F est un espace de Banach, $\mathcal{L}(E, F) = \mathcal{L}(B, F)$.*

2 Théorème de Banach. *La réciproque d'une application linéaire continue entre espaces de Banach est continue.*

3 Théorème de prolongement de Hahn-Banach. *Si F est un sous-espace vectoriel de E, tout $\ell \in F'$ se prolonge en $f \in E'$ avec la même norme.*

4 Corollaire. *a) Si $x \in E$, non nul il existe $\ell \in E'$ avec $\|\ell\| = 1$ et $\ell(x) = \|x\|$.*

b) Si F est fermé et $x \notin F$, il existe $\ell \in E'$ avec $\|\ell\| = 1$ et $\ell(x) = d(x, F)$.

0.4 Dérivation, intégration vectorielle

Dérivée d'une fonction vectorielle. On a $f'(x) = df_x(1)$. Si $g : E \to F$ différentiable et $f : I \to E$ dérivable, alors $(g \circ f)'(x) = dg_{f(x)}(f'(x))$.

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et E un espace de Banach et soit $f : I \to E$ une application continue. Alors f admet une primitive unique à l'addition d'une fonction constante près.

Si $g \in \mathcal{L}(E, F)$, alors $g\Big(\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt\Big) = \displaystyle\int_a^b g \circ f(t)\,dt$.

0.5 Fonctions vectorielles

5 Dérivée. Une fonction f de $U \subset \mathbb{K}$ dans un espace de Banach E est dite dérivable en un point $a \in U$ si la fonction $u \mapsto \dfrac{1}{u-a}(f(u) - f(a))$ a une limite $f'(a) \in E$ quand u tend vers a. Cela signifie que f est différentiable en a et $df_a(\lambda) = \lambda f'(a)$ (pour $\lambda \in \mathbb{K}$).

6 Inégalité des accroissements finis. Si f est une fonction continue de $[a, b]$ dans un espace de Banach E et dérivable sur $]a, b[$ et si $M \in \mathbb{R}_+$ majore $\{\|f'(t)\|;\ t \in]a, b[\}$, on a $\|f(b) - f(a)\| \leqslant (b-a)M$.

7 Primitive. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle. Toute fonction continue f de I dans un espace de Banach E admet une primitive, c'est-à-dire une application $g : I \to E$ dérivable et telle que $g' = f$. Deux telles primitives diffèrent d'une constante. Pour $a, b \in I$, on pose $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = g(b) - g(a)$.

8 Fonctions analytiques. Une fonction f de $U \subset \mathbb{K}$ dans un espace de Banach E est dite analytique si $\forall u_0 \in U$, il existe une suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E (nécessairement unique) et $\alpha > 0$ tels que, pour $u \in U$ satisfaisant $|u - u_0| < \alpha$, la série $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k f(u-u_0)^k$ converge et on a $f(u) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k f(u-u_0)^k$.

9 Rappel. *a) Toute fonction analytique est continue.*

b) Si f est analytique, l'ensemble des $x \in U$ au voisinage desquels f est nulle est ouvert et fermé.

1 Spectre et résolvante

Dans la suite, on se placera (presque(?)) exclusivement dans le cas complexe.

1.1 Définitions

Soient E et F des espaces de Banach. Une application linéaire continue T de E dans F est dite *inversible* s'il existe $S \in \mathcal{L}(F,E)$ telle que $S \circ T = \mathrm{id}_E$ et $T \circ S = \mathrm{id}_F$. Cela signifie que l'application T est bijective et que T^{-1} est continue. Remarquons en fait que, par le théorème de l'application ouverte, si T est bijective, T^{-1} est automatiquement continue. En d'autres termes, T est inversible si et seulement si elle est bijective.

1.1 Lemme. *Soient E un espace de Banach et $R \in \mathcal{L}(E)$, $\|R\| < 1$. Alors, $\mathrm{id}_E - R$ est inversible. La série de terme général (R^n) converge. Sa somme est $(\mathrm{id}_E - R)^{-1}$. On a $\|(\mathrm{id}_E - R)^{-1}\| \leqslant (1 - \|R\|)^{-1}$, $\|(\mathrm{id}_E - R)^{-1} - \mathrm{id}_E\| \leqslant \|R\|(1-\|R\|)^{-1}$ et $\|(\mathrm{id}_E - R)^{-1} - \mathrm{id}_E - R\| \leqslant \|R\|^2(1-\|R\|)^{-1}$.*

Démonstration. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $S_n = \sum_{k=0}^{n} R^k$. Comme $\|R^n\| \leqslant \|R\|^n$, pour $p, q \in \mathbb{N}$, $p < q$, on trouve $\|S_q - S_p\| = \|\sum_{k=p+1}^{q} R^k\| \leqslant \|R\|^{p+1}(1-\|R\|)^{-1}$, d'où il ressort que la suite S_n est de Cauchy, donc convergente, puisque $\mathcal{L}(E)$ est complet. Donc la série de terme général (R^n) converge. Notons S sa somme.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $S_{n+1} = \mathrm{id}_E + RS_n = \mathrm{id}_E + S_n R$. Passant à la limite, on trouve $S = \mathrm{id}_E + RS = \mathrm{id}_E + SR$, donc $(\mathrm{id}_E - R)S = S(\mathrm{id}_E - R) = \mathrm{id}_E$. Donc $\mathrm{id}_E - R$ est inversible et $S = (\mathrm{id}_E - R)^{-1}$.

On a $\|S\| \leqslant \sum_{k \in \mathbb{N}} \|R\|^k = (1-\|R\|)^{-1}$; de plus, $S - \mathrm{id}_E = RS$, donc $\|\mathrm{id}_E - S\| \leqslant \|R\|\|S\|$ et $S - \mathrm{id}_E - R = R^2 S$, donc $\|S - \mathrm{id}_E - R\| \leqslant \|R\|^2\|S\|$. □

1.2 Proposition. *Soient E, F des espaces de Banach. L'ensemble $U \subset \mathcal{L}(E,F)$ des applications linéaires continues inversibles est ouvert dans $\mathcal{L}(E,F)$. L'application $\varphi : T \mapsto T^{-1}$ est continue et différentiable de U dans $\mathcal{L}(F,E)$; sa différentielle en $A \in U$ est $(d\varphi)_A : R \mapsto -A^{-1}RA^{-1}$.*

Démonstration. Notons $V \subset \mathcal{L}(E)$ l'ensemble des applications linéaires continues inversibles. Par le lemme 1.1, V est un voisinage de id_E, l'application $\psi : T \mapsto T^{-1}$ (de V dans $\mathcal{L}(E)$) est continue et différentiable en id_E et sa différentielle en id_E est $R \mapsto -R$.

Venons-en au cas général. Soit $A \in U$. Remarquons que $T \in \mathcal{L}(E,F)$ est inversible si et seulement si $A^{-1}T$ est inversible. Dans ce cas, $T^{-1} = (A^{-1}T)^{-1}A^{-1}$. En d'autres termes, notons $f : \mathcal{L}(E,F) \to \mathcal{L}(E)$ l'application $T \mapsto A^{-1}T$ et $g : \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(F,E)$ l'application $S \mapsto SA^{-1}$. On a $U = f^{-1}(V)$ et, pour $S \in U$, $\varphi(S) = g(\psi(f(S)))$. Il s'ensuit que U est un voisinage de A et, comme f et g sont linéaires et continues, φ est différentiable en A et $(d\varphi)_A = g \circ (d\psi)_{\mathrm{id}_E} \circ f$, c'est à dire $d\varphi(R) = -A^{-1}RA^{-1}$. □

1.3 Définition. Soient E un espace de Banach et $T \in \mathcal{L}(E)$. On appelle *spectre* de T et l'on note $\mathrm{Sp}\, T$ l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $T - \lambda \mathrm{id}_E$ ne soit pas inversible. On appelle *résolvante* de T l'application qui à $\lambda \in \mathbb{C} - \mathrm{Sp}\, T$ associe $(\lambda \mathrm{id}_E - T)^{-1}$ noté aussi $R_\lambda(T)$.

1.4 Définition (Fonctions analytique)**.** Une fonction f de $U \subset \mathbb{K}$ dans un espace de Banach E est dite analytique si $\forall u_0 \in U$, il existe $\alpha > 0$ et une suite $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E, telle que, pour $u \in U$ tel que $|u - u_0| < \alpha$, la série $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k (u-u_0)^k$ converge et on a $f(u) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (u-u_0)^k$.

1.5 Rappel. *a) Toute fonction analytique est continue.*

b) Si f est analytique, l'ensemble des $x \in U$ au voisinage desquels f est nulle est ouvert et fermé.

1.6 Théorème. *Soient E un espace de Banach non nul et $T \in \mathcal{L}(E)$. Le spectre de T est une partie compacte non vide de $\mathbb{C}$, et l'application $\varphi : \lambda \mapsto R_\lambda(T)$ est analytique sur $\mathbb{C} - \operatorname{Sp} T$.*

Démonstration. Si $\lambda \notin \mathbb{C} \setminus \operatorname{Sp} T$, et $|\mu - \lambda| \|R_\lambda(T)\| < 1$, alors on écrit

$$\mu \operatorname{id}_E - T = (\lambda \operatorname{id}_E - T)(\operatorname{id}_E - (\lambda - \mu)R_\lambda(T)),$$

donc $\mu \operatorname{id}_E - T$ est inversible et

$$R_\mu(T) = \sum_{k=0}^{+\infty} (\lambda - \mu)^k R_\lambda(T)^{k+1}. \tag{1}$$

On en déduit que $\operatorname{Sp} T$ est fermé et que φ est analytique.

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| > \|T\|$. On écrit $\lambda \operatorname{id}_E - T = \lambda(\operatorname{id}_E - \lambda^{-1}T)$. Par le lemme 1.1, $\operatorname{id}_E - \lambda^{-1}T$ est inversible, donc $\lambda \operatorname{id}_E - T$ est inversible et

$$R_\lambda(T) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^{-k-1} T^k. \tag{2}$$

En particulier, $\operatorname{Sp} T$ est borné ; c'est donc un compact de $\mathbb{C}$.

Il reste à montrer que $\operatorname{Sp} T \neq \emptyset$.

Nous allons démontrer mieux... □

1.7 Exercice. Trouver le spectre du décalage $S : c_0(\mathbb{N}) \to c_0(\mathbb{N})$, $S((x_n)) = (y_n)$ avec $y_n = x_{n+1}$ (*i.e.* $S(x_0, \ldots, x_n, \ldots) = (x_1, \ldots, x_n, \ldots)$).

Réponse : Tout λ avec $|\lambda| < 1$ est valeur propre (avec vecteur propre la suite $(\lambda^n)_{n \in \mathbb{N}}$. Comme $\|S\| \leqslant 1$, il vient $\{\lambda \in \mathbb{C};\ |\lambda| < 1\} \subset \operatorname{Sp} S \subset \{\lambda \in \mathbb{C};\ |\lambda| \leqslant 1\}$. Enfin, comme le spectre est fermé dans $\mathbb{C}$, on a $\operatorname{Sp} S = \{\lambda \in \mathbb{C};\ |\lambda| \leqslant 1\}$

1.8 Exercice. Trouver le spectre du décalage dans l'autre sens $T : c_0(\mathbb{N}) \to c_0(\mathbb{N})$, $T((x_n)) = (y_n)$ avec $y_0 = 0$ et $y_n = x_{n-1}$ (*i.e.* $T(x_0, \ldots, x_n, \ldots) = (0, x_0, \ldots, x_n, \ldots)$).

Réponse : Démontrons que pour $\lambda \in \mathbb{C}$ avec $|\lambda| < 1$ l'application $T - \lambda \mathrm{id}$ n'est pas surjective.

On a $ST = \mathrm{id}$, donc $T - \lambda \mathrm{id} = (\mathrm{id} - \lambda S)T$. On en déduit que $\operatorname{im}(T - \lambda \mathrm{id})$ est l'image par $\mathrm{id} - \lambda S$ de $\operatorname{im} T = \{((x_n)) \in c_0(\mathbb{N});\ x_0 = 0\}$. Or $\mathrm{id} - \lambda S$ est bijective d'inverse $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n S^n$. Pour $((x_n)) \in c_0(\mathbb{N})$, on a donc

$$((x_n)) \in \operatorname{im}(T - \lambda \mathrm{id}) \iff (\mathrm{id} - \lambda S)^{-1}((x_n)) \in \operatorname{im} T \iff \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n x_n = 0.$$

Comme $\|T\| \leqslant 1$, il vient $\{\lambda \in \mathbb{C};\ |\lambda| < 1\} \subset \operatorname{Sp} T \subset \{\lambda \in \mathbb{C};\ |\lambda| \leqslant 1\}$ et comme le spectre est fermé dans $\mathbb{C}$, on a $\operatorname{Sp} T = \{\lambda \in \mathbb{C};\ |\lambda| \leqslant 1\}$.

1.2 Rayon spectral

1.9 Théorème. *Soient E un espace de Banach complexe non nul et T une application linéaire continue de E dans E.*

a) La suite $(\|T^n\|^{1/n})$ est convergente.

b) Le spectre de T n'est pas vide et l'on a

$$\lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n} = \sup\{|\lambda|,\ \lambda \in \operatorname{Sp} T\}.$$

La convergence de la suite $(\|T^n\|^{1/n})$ résulte immédiatement du lemme suivant.

1.10 Lemme. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de nombres réels positifs ou nuls telle que, pour tout $p, q \in \mathbb{N}-\{0\}$ on ait $(u_{p+q})^{p+q} \leqslant u_p^p u_q^q$. Alors*

a) Pour tout $p, k \in \mathbb{N} - \{0\}$, on a $u_{pk} \leqslant u_k$;

b) La suite (u_n) converge vers $\inf\{u_n,\ n \in \mathbb{N} - \{0\}\}$.

Démonstration. a) Démontrons cela par récurrence sur p ; c'est clair pour $p = 1$; si on connait cette inégalité pour $p \in \mathbb{N} - \{0\}$, alors $(u_{(p+1)k})^{(p+1)k} \leqslant u_{kp}^{kp} u_k^k \leqslant u_k^{kp} u_k^k = u_k^{(p+1)k}$.

b) Notons $m = \inf\{u_n,\ n \in \mathbb{N} - \{0\}\}$. S'il existe $k \in \mathbb{N} - \{0\}$ tel que $u_k = 0$, alors $m = 0$ et, pour tout $p \in \mathbb{N} - \{0\}$, on a $u_{k+p} = 0$, donc (u_n) converge vers $m = 0$.

Supposons désormais que, pour tout $k \in \mathbb{N} - \{0\}$, $u_k \neq 0$. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Comme m est le plus grand des minorants de $\{u_n,\ n \in \mathbb{N} - \{0\}\}$, il existe $k \in \mathbb{N} - \{0\}$ tel que $u_k < m + \varepsilon$. Soit $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ et écrivons $n = kp + r$ avec $p, r \in \mathbb{N}$, $r < k$. Alors, par a), $u_n^n \leqslant u_{kp}^{kp} u_r^r \leqslant u_k^{kp} u_1^r$. Donc

$$u_n \leqslant u_k^{kp/n} u_1^{r/n} = u_k \left(\frac{u_1}{u_k}\right)^{r/n} \leqslant u_k \left(\frac{u_1}{u_k}\right)^{(k-1)/n}.$$

La suite $\left(u_k \left(\frac{u_1}{u_k}\right)^{(k-1)/n}\right)_n$ converge vers u_k, donc, pour n assez grand, $u_k \left(\frac{u_1}{u_k}\right)^{(k-1)/n} < m+\varepsilon$. On a alors $m \leqslant u_n < m + \varepsilon$. □

Démonstration du théorème 1.9.

a) Pour $p, q \in \mathbb{N} - \{0\}$, on a $\|T^{p+q}\| = \|T^p T^q\| \leqslant \|T^p\|\|T^q\|$, donc par le lemme 1.10.b), la suite $(\|T^n\|^{1/n})$ converge.

b) Posons $r = r(T) = \lim(\|T^n\|^{1/n})$, et posons $\rho = \sup\{|\lambda|,\ \lambda \in \operatorname{Sp} T\}$ (si $\operatorname{Sp} T \neq \emptyset$ et $\rho = 0$ si $\operatorname{Sp} T = \emptyset$).

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| > r$. Alors la série de terme général $\lambda^{-n}T^n$ est convergente (sa norme est majorée, pour n assez grand, par k^n pour tout $k \in]0, 1[$ tel que $k|\lambda| > r$). Il en résulte (comme au lemme 1.1) que $\mathrm{id}_E - \lambda^{-1}T$ est inversible et $R_\lambda(T) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^{-k-1}T^k$. Donc $\operatorname{Sp} T$ est inclus dans la boule de centre 0 et de rayon r *i.e.* $\rho \leqslant r$.

Remarquons que, si T est inversible, alors $\|T^n\|^{1/n}\|(T^{-1})^n\|^{1/n}$ (puisque $T^n(T^{-1})^n = \mathrm{id}_E$). On en déduit que $r(T)r(T^{-1}) \geqslant 1$. En particulier, $r(T) > 0$. Donc si $r(T) = 0$, $\operatorname{Sp} T = \{0\}$.

Démontrons l'inégalité $\rho \geqslant r$. Cela prouvera que en particulier que $\operatorname{Sp} T$ n'est jamais vide. Nous utiliserons le lemme suivant :

1.11 Lemme. *Pour $t \in \mathbb{R}$ avec $t > \rho$, et $n \in \mathbb{Z}$, on a*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{in\theta} R_{te^{i\theta}}(T)\, d\theta = \begin{cases} 0 & si\ \ n \leqslant 0 \\ t^{-n}T^{n-1} & si\ \ n \geqslant 1\,. \end{cases}$$

Démonstration. Si $t \in \mathbb{R}_+$ et $\theta \in [0, 2\pi]$ tels que $te^{i\theta} \notin \mathrm{Sp}T$. Pour $t > \rho$ et $n \in \mathbb{Z}$, posons

$$a_n(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{in\theta} R_{te^{i\theta}}(T)\, d\theta.$$

Pour $t > \rho$, posons $M_t = \sup\{\|R_\lambda(T)\|; |\lambda| = t\}$.

D'après la formule (1), on a $R_{ue^{i\theta}}(T) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}(t-u)^k e^{ik\theta} R_{te^{i\theta}}(T)^{k+1}$ pour $\theta \in [0, 2\pi]$ et $t, u \in]\rho, +\infty[$ tels que $|t-u|M_t < 1$.

On en déduit, en intervertissant $\sum$ et $\int$, que

$$a_n(u) = \sum_{k=0}^{+\infty}(t-u)^k \Big(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(n+k)\theta} R_{te^{i\theta}}(T)^{k+1}\, d\theta\Big)\,,$$

donc a_n est analytique sur $]\rho, +\infty[$.

Pour $t > r$, on a $R_{te^{i\theta}}(T) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-i(k+1)\theta} t^{-k-1} T^k$, donc $a_n(t) = t^{-n}T^{n-1}$ si $n \geqslant 1$, et $a_n(t) = 0$ si $n \leqslant 0$. Par analyticité, cette égalité reste vraie pour tout $t > \rho$. □

Démonstration du théorème 1.9. D'après le lemme 1.11, pour $t > \rho$, on a $t^{-n}\|T^{n-1}\| \leqslant M_t$. On a donc $\|T^n\|^{1/n} \leqslant (t^{n+1}M_t)^{1/n} = t\big(tM_t\big)^{1/n}$, donc $r \leqslant t$. □

1.3 Spectre et dualité

Rappel

1.12 Proposition. *Soient E, F des espaces de Banach et $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) T est injective d'image fermée.

(ii) Il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $x \in E$ on ait $k\|T(x)\| \geqslant \|x\|$.

(iii) Pour toute suite (x_n) dans E, si $(\|T(x_n)\|) \to 0$ alors $(\|x_n\|) \to 0$.

Démonstration. Si (i) est satisfaite, T détermine une application continue bijective T_1 de E sur l'espace de Banach $\mathrm{im}\,T$. Par le théorème de Banach (th. 2), T_1 est un homéomorphisme ; si (x_n) est une suite de E telle que $T(x_n) = T_1(x_n)$ tende vers 0, alors x_n tend vers 0, d'où (iii).

Montrons que (iii)⇒(ii) : Si (ii) n'est pas satisfaite, pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $y_n \in E$ tel que $\|y_n\| > n\|T(y_n)\|$; posons $x_n = \|y_n\|^{-1}y_n$; alors, $\|x_n\| = 1$ et $\|T(x_n)\| < 1/n$, donc (iii) n'est pas satisfaite.

Si (ii) est satisfaite, pour tout $x \in E$ tel que $T(x) = 0$, on a $\|x\| \leqslant k\|T(x)\| = 0$; donc T est injective. Si (y_n) est une suite de Cauchy dans $\mathrm{im}\,T$, écrivons $y_n = T(x_n)$ avec $x_n \in E$; on a $\|x_n - x_m\| \leqslant k\|y_n - y_m\|$, donc la suite (x_n) est de Cauchy, donc convergente, vu que E est complet ; soit x sa limite ; alors la suite $y_n = T(x_n)$ converge vers $T(x)$ vu que T est continue ; on a montré que $\mathrm{im}\,T$ est complet, donc fermé dans F. □

1.13 Proposition. *Soient E, F espaces de Banach et $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors ${}^tT \in \mathcal{L}(F', E')$ est inversible si et seulement T est inversible.*

Démonstration. Si T est inversible, comme $T^{-1}T = \mathrm{id}_E$ et $TT^{-1} = \mathrm{id}_F$, on trouve ${}^tT\,{}^t(T^{-1}) = \mathrm{id}_{E'}$ et ${}^t(T^{-1}){}^tT = \mathrm{id}_{F'}$. Donc ${}^tT$ est inversible et $({}^tT)^{-1} = {}^t(T^{-1})$.

Supposons inversement que ${}^tT$ soit inversible.

Par le théorème de Hahn-Banach (cor. 4.a), pour tout $x \in E$, il existe $\ell \in E'$, tel que $\|\ell\| \leqslant 1$ et $\ell(x) = \|x\|$. Posons $f = ({}^tT)^{-1}(\ell)$. On a $\ell = {}^tT(f) = f \circ T$ et $\|f\| \leqslant k\|\ell\| \leqslant k$, où l'on a posé $k = \|({}^tT)^{-1}\|$. On en déduit que $\|x\| = f(T(x)) \leqslant k\|T(x)\|$. Par la prop. 1.12, T est injective et son image est fermée dans F.

Par le théorème de Hahn-Banach (cor. 4.b), il existe alors $A \subset F'$ tel que $\operatorname{im} T = \displaystyle\bigcap_{\ell \in A} \ker \ell$. Soit $\ell \in A$; alors ℓ est nulle sur $\operatorname{im} T$. Alors ${}^tT(\ell) = \ell \circ T$ est nulle ; comme ${}^tT$ est injective, $\ell = 0$. On en déduit que $A \subset \{0\}$, donc $\operatorname{im} T = F$. □

On en déduit immédiatement :

1.14 Corollaire. *Soient E un espace de Banach et $T \in \mathcal{L}(E)$. On a $\operatorname{Sp} T = \operatorname{Sp} {}^tT$.* □

1.4 Décomposition du spectre

Soient E un espace de Banach, $T \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \operatorname{Sp} T$. Nous distinguerons 3 cas :

a) λ est une valeur propre de T, autrement dit $T - \lambda\mathrm{id}_E$ n'est pas injectif.

b) λ est une valeur propre de ${}^tT$, mais n'est pas une valeur propre de T ; autrement dit $T - \lambda\mathrm{id}_E$ est injectif et il existe une forme non nulle $\ell \in E'$ telle que $({}^tT - \lambda\mathrm{id}_{E'})(\ell) = 0$; on a alors $\ell \circ (T - \lambda\mathrm{id}_E) = 0$, donc $\operatorname{im}(T - \lambda\mathrm{id}_E) \subset \ker \ell$. Comme $\ker \ell$ est fermé et distinct de E, alors $\operatorname{im}(T - \lambda\mathrm{id}_E)$ n'est pas dense dans E.

   Inversement, si $\operatorname{im}(T - \lambda\mathrm{id}_E)$ n'est pas dense, il existe par le théorème de Hahn-Banach (cor. 4.b) une forme non nulle $\ell \in E'$ telle que $\overline{\operatorname{im}(T - \lambda\mathrm{id}_E)} \subset \ker \ell$. On en déduit que λ est une valeur propre de ${}^tT$.

c) λ n'est une valeur propre ni de T, ni de ${}^tT$, mais λ est quand même dans le spectre de T. Alors, $T - \lambda\mathrm{id}_E$ est injectif, son image est dense mais n'est pas fermée.

1.15 Définition. Soient E un espace de Banach et $T \in \mathcal{L}(E)$.

- On appelle *spectre ponctuel* de T l'ensemble $\operatorname{Sp}_p T$ des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $T - \lambda\mathrm{id}_E$ ne soit pas injectif.
- On appelle *spectre résiduel* de T l'ensemble $\operatorname{Sp}_r T$ des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $T - \lambda\mathrm{id}_E$ soit injectif, mais son image ne soit pas dense.
- On appelle *spectre continu* de T l'ensemble $\operatorname{Sp}_c T$ des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $T - \lambda\mathrm{id}_E$ soit injectif, à image dense mais pas fermée.

1.16 Exercice. Soit E un espace de banach et soient $S, T \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que

$$\|S\| = \|T\| = 1\,, \quad ST = \mathrm{id}_E \ \text{ et } \ TS \neq \mathrm{id}_E$$

Démontrer que :

1. TS est idempotent ; $\mathrm{id}_E - TS$ est idempotent ;

2. $\ker S = \operatorname{im}(\mathrm{id}_E - TS)$ (en particulier S n'est pas injectif) et $\operatorname{im} T = \ker(\mathrm{id}_E - TS)$ (donc T n'est pas surjectif) ;
3. pour $\lambda \in \mathbb{C}$, avec $|\lambda| < 1$, on a
   a) $S - \lambda \mathrm{id}_E$ est surjectif et n'est pas injectif ; son noyau est $\operatorname{im}(\mathrm{id}_E - \lambda T)^{-1}(\mathrm{id}_E - TS)$
   b) $T - \lambda \mathrm{id}_E$ est injectif et n'est pas surjectif son image est $\ker(\mathrm{id}_E - TS)(\mathrm{id}_E - \lambda S)^{-1}$ (elle est donc fermée).
   c) $\mathrm{Sp} T = \mathrm{Sp} S = \{\lambda \in \mathbb{C};\ |\lambda| \leqslant 1\}$.

1.17 Proposition. *Soient E un espace de Banach et $T \in \mathcal{L}(E)$.*

a) On a $\mathrm{Sp}_r\, T = \mathrm{Sp}_p\, {}^tT - \mathrm{Sp}_p\, T$ et $\mathrm{Sp}_c\, {}^tT \subset \mathrm{Sp}_c\, T$.

b) Si E est réflexif, $\mathrm{Sp}_c\, {}^tT = \mathrm{Sp}_c\, T$.

Démonstration. a) On a vu que λ est dans le spectre résiduel de T, si et seulement si λ est une valeur propre de ${}^tT$, mais n'est pas une valeur propre de T, d'où la première assertion.

Si $\lambda \in \mathrm{Sp}_p\, T$, alors il existe $x \in E$ non nul tel que $T(x) = \lambda x$, donc pour tout $\ell \in E'$, on a $(({}^tT - \lambda \mathrm{id}_{E'})(\ell))(x) = 0$. L'ensemble des $f \in E'$ tels que $f(x) = 0$ est un sous-espace fermé de E', distinct de E' (par le théorème de Hahn-Banach - cor. 4.a), qui contient l'image de ${}^tT - \lambda \mathrm{id}_{E'}$; cette image n'est donc pas dense, donc $\lambda \notin \mathrm{Sp}_c\, {}^tT$.

Comme $\mathrm{Sp}_r\, T \subset \mathrm{Sp}_p\, {}^tT$, $\mathrm{Sp}_c\, {}^tT$ est contenu dans $\mathrm{Sp}\, T$ (par le cor. 1.14) et ne rencontre ni $\mathrm{Sp}_p\, T$, ni $\mathrm{Sp}_r\, T$. Donc $\mathrm{Sp}_c\, {}^tT \subset \mathrm{Sp}_c\, T$.

b) Supposons enfin que E soit réflexif. Si $\lambda \in \mathrm{Sp}_r\, {}^tT$, alors l'image de ${}^tT - \lambda \mathrm{id}_{E'}$ n'est pas dense. Par le théorème de Hahn-Banach (cor. 4.b), il existe une forme linéaire non nulle $h \in E''$ nulle sur l'adhérence de $\operatorname{im}({}^tT - \lambda \mathrm{id}_{E'})$. Comme E est réflexif, il existe $x \in E$ tel que $h = I(x)$, où I désigne l'application canonique de E dans son bidual. Donc, pour tout $\ell \in E'$ on a $0 = h(({}^tT - \lambda \mathrm{id}_{E'})(\ell)) = h(\ell \circ T - \lambda \ell) = (\ell \circ T - \lambda \ell)(x) = \ell(T(x) - \lambda x)$. Comme cela est vrai pour tout $\ell \in E'$, il en résulte (par le théorème de Hahn-Banach - (cor. 4.a)) que $T(x) - \lambda x = 0$. Or $x \neq 0$, puisque $I(x) = h$. On a montré que $\mathrm{Sp}_r\, {}^tT \subset \mathrm{Sp}_p\, T$. Alors, $\mathrm{Sp}_c\, T$ ne rencontre ni $\mathrm{Sp}_p\, {}^tT$, ni $\mathrm{Sp}_r\, {}^tT$. On a donc $\mathrm{Sp}_c\, {}^tT = \mathrm{Sp}_c\, T$. □

2 Calcul fonctionnel

2.1 Calcul fonctionnel rationnel

2.1 Proposition. *Soient E un espace de Banach et $T \in \mathcal{L}(E)$. Notons $A \subset \mathbb{C}(X)$ l'ensemble des fractions rationnelles sans pôles dans $\operatorname{Sp} T$. Il existe un unique homomorphisme d'algèbres $\Phi : A \to \mathcal{L}(E)$ tel que $\Phi(1) = \mathrm{id}_E$ et $\Phi(X) = T$.*

Démonstration. Montrons d'abord l'existence. Pour un polynôme $P = \sum a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$, on pose $\Phi(P) = \sum a_k T^k$ $(\in \mathcal{L}(E))$. Il est clair que Φ est linéaire et que, pour $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ on a $\Phi(PQ) = \Phi(P)\Phi(Q)$.

Soit P un polynôme non nul ; supposons que les racines de P ne sont pas dans $\operatorname{Sp} T$. Ecrivons $P = a_n(X - r_1)...(X - r_n)$, où les r_k sont les racines de P comptées avec leur multiplicité. Alors $\Phi(P) = a_n(T - r_1\mathrm{id}_E)...(T - r_n\mathrm{id}_E)$; comme les r_k ne sont pas dans le spectre de T, tous les $T - r_k\mathrm{id}_E$ sont inversibles, donc $\Phi(P)$ est inversible.

Soit $f \in A$. Il existe $P, Q \in \mathbb{C}[X]$, avec $f = P/Q$ et tels que Q n'ait pas de racines dans $\operatorname{Sp} T$. Si P_1, Q_1 sont d'autres polynômes tels que $f = P_1/Q_1$ et tels que Q_1 n'ait pas de racines dans $\operatorname{Sp} T$, alors $PQ_1 = QP_1$, donc $\Phi(P)\Phi(Q_1) = \Phi(Q)\Phi(P_1)$; multipliant à gauche par $\Phi(Q)^{-1}$ et à droite par $\Phi(Q_1)^{-1}$, on trouve $\Phi(Q)^{-1}\Phi(P) = \Phi(P_1)\Phi(Q_1)^{-1}$. On en déduit que $\Phi(Q)^{-1}\Phi(P) = \Phi(P)\Phi(Q)^{-1}$ (en prenant $P_1 = P$ et $Q_1 = Q$), puis que $\Phi(P)\Phi(Q)^{-1}$ ne dépend pas du couple $P, Q \in \mathbb{C}[X]$, avec $f = P/Q$ et tels que Q n'a pas de racines dans $\operatorname{Sp} T$. On pose $\Phi(f) = \Phi(P)\Phi(Q)^{-1}$.

Soient $f, g \in A$; choisissons des polynômes P, Q et R tels que $f = P/R$, $g = Q/R$ et tels que R n'ait pas de racines dans $\operatorname{Sp} T$. Pour $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, on a $\Phi(\lambda f + \mu g) = \Phi(\lambda P + \mu Q)\Phi(R)^{-1} = \lambda\Phi(f) + \mu\Phi(g)$ et $\Phi(f)\Phi(g) = \Phi(P)\Phi(R)^{-1}\Phi(Q)\Phi(R)^{-1} = \Phi(P)\Phi(Q)\Phi(R)^{-2} = \Phi(fg)$.

Si $\Psi : A \to \mathcal{L}(E)$ est une application vérifiant les mêmes conditions, on montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $\Psi(X^n) = T^n$; par linéarité, Ψ et Φ coïncident sur $\mathbb{C}[X]$. Soit $f = P/Q \in A$ (où Q est un polynôme sans pôles dans $\operatorname{Sp} T$). Alors $fQ = P$; donc $\Psi(f)\Psi(Q) = \Psi(P)$, donc $\Psi(f)\Phi(Q) = \Phi(P) = \Phi(f)\Phi(Q)$; comme $\Phi(Q)$ est inversible, il vient $\Psi(f) = \Phi(f)$. $\square$

Soient E un espace de Banach, $T \in \mathcal{L}(E)$ et f une fraction rationnelle sans pôles dans $\operatorname{Sp} T$. L'élément $\Phi(f)$ défini dans la prop.2.1 se note $f(T)$.

2.2 Proposition. *Soient E un espace de Banach, $T \in \mathcal{L}(E)$ et $f \in \mathbb{C}(X)$ une fraction rationnelle sans pôles dans $\operatorname{Sp} T$. Alors on a $\operatorname{Sp} f(T) = f(\operatorname{Sp} T)$ et, pour toute fraction rationnelle $g \in \mathbb{C}(X)$ sans pôles dans $f(\operatorname{Sp} T)$, on a $g(f(T)) = (g \circ f)(T)$.*

Démonstration. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Si $f - \lambda$ ne s'annule pas sur le spectre de T, la fraction rationnelle $h = (f - \lambda)^{-1}$ n'a pas de pôles dans $\operatorname{Sp} T$; or $(f - \lambda)h = 1$, donc $(f - \lambda)(T)h(T) = \mathrm{id}_E$, de même, $h(T)(f - \lambda)(T) = \mathrm{id}_E$. Donc $f(T) - \lambda\mathrm{id}_E = (f - \lambda)(T)$ est inversible. On a montré que $\operatorname{Sp} f(T) \subset f(\operatorname{Sp} T)$.

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ qui ne soit pas un pôle de f ; alors, il existe une fraction rationnelle h sans pôles dans $\operatorname{Sp} T$ telle que $f - f(\lambda) = (X - \lambda)h$. Alors $f(T) - f(\lambda)\mathrm{id}_E = (T - \lambda\mathrm{id}_E)h(T) = h(T)(T - \lambda\mathrm{id}_E)$; si $f(T) - f(\lambda)\mathrm{id}_E$ est inversible d'inverse S, alors $(T - \lambda\mathrm{id}_E)h(T)S = \mathrm{id}_E = Sh(T)(T - \lambda\mathrm{id}_E)$; alors $T - \lambda\mathrm{id}_E$ est inversible à gauche et à droite donc il est inversible, *i.e.* $\lambda \notin \operatorname{Sp} T$. Donc si $\lambda \in \operatorname{Sp} T$, alors $f(\lambda) \in \operatorname{Sp} f(T)$. On a montré que $f(\operatorname{Sp} T) \subset \operatorname{Sp} f(T)$.

Notons $A \subset \mathbb{C}(X)$ l'ensemble des fractions rationnelles sans pôles dans $\operatorname{Sp} f(T)$. Les applications $A \to \mathcal{L}(E)$ définies par $g \mapsto (g \circ f)(T)$ et $g \mapsto g(f(T))$ vérifient les conditions de la prop. 2.1 (relativement à $f(T)$) ; donc elles coïncident. $\square$

2.2 Rappels sur les espaces hilbertiens

2.3 Définitions. a) Produit scalaire : Un produit scalaire sur un espace vectoriel complexe E est une forme sesquilinéaire, hermitienne, positive, non dégénérée.

b) Norme : Si $\langle \ | \ \rangle$ est un produit scalaire sur E, l'application $x \mapsto \sqrt{\langle x|x\rangle}$ est une norme sur E, appelée norme associée à $\langle \ | \ \rangle$.

c) Espace préhilbertien (complexe) : un espace préhilbertien est un espace vecoriel complexe muni d'un produit scalaire.

d) Espace hilbertien (complexe) : un espace hilbertien est un espace préhilbertien complet (pour la norme associée).

Le fait que $x \mapsto \sqrt{\langle x|x\rangle}$ est une norme, utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

2.4 Inégalité de Cauchy-Schwarz. *Soit E un espace préhilbertien. Pour tout $x, y \in E$ on a $|\langle x|y\rangle|^2 \leqslant \langle x|x\rangle\langle y|y\rangle$.*

2.5 Complété. *Le complété d'un espace préhilbertien est un espace hilbertien.*

Dans la suite on fixe un espace hilbertien H.

2.6 Orthogonalité. Deux vecteure sont dits orthogonaux si $\langle x|y\rangle = 0$. L'orthogonal d'une partie $A \subset H = \{x \in ;\ \forall y \in A,\ \langle x|y\rangle = 0\}$. C'est un sous-espace vectoriel de H.

2.7 Théorème de projection. *Soit C une partie convexe fermée non vide de H. Pour tout $x \in H$, il existe un et un seul point y_0 de C en lequel la fonction $y \mapsto \|y - x\|$ atteint son minimum. Pour tout $y \in C$, la partie réelle de $\langle x - y_0|y - y_0\rangle$ est négative.*

2.8 Proposition. *Soit E un sous-espace vectoriel fermé de H. On a $E \oplus E^\perp = H$.*

Pour $x \in H$, on note $\ell_x : H \to \mathbb{C}$ l'application $y \mapsto \langle x|y\rangle$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, ℓ_x est une forme linéaire continue et $\|\ell_x\| \leqslant x$. Égalité puisque $\ell_x(x) = \|x\|^2$.

2.9 Dual. *L'application $x \mapsto \ell_x$ est un isomorphisme antilinéaire de H dans H.*

Formes sesquilinéaires

2.10 Proposition. *Soit E un espace vectoriel normé. Pour une forme sesquilinéaire (ou bilinéaire) $B : E \times E$, les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) *L'application B est continue.*

(ii) *L'application B est continue en $(0, 0)$.*

(iii) *Il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $(x, y) \in E \times E$ on ait $|B(x, y)| \leqslant k\|x\|\|y\|$.*

Démonstration. **(i)⇒(ii)** est clair.

(ii)⇒(iii) : si *(ii)* est satisfait, il existe $\alpha > 0$ tel que, pour $x, y \in E$, on ait $\|x\| \leqslant \alpha$ et $\|y\| \leqslant \alpha$ impliquent $|B(x, y)| \leqslant 1$.

Soient alors $x, y \in E$ non nuls. Posons $x_1 = \dfrac{\alpha}{\|x\|}x$ et $y_1 = \dfrac{\alpha}{\|y\|}y$. Puisque $\|x_1\| = \alpha$ et $\|y_1\| = \alpha$, il vient $|B(x_1, y_1)| \leqslant 1$, soit $|B(x, y)| \leqslant \dfrac{1}{\alpha^2}\|x\|\|y\|$.

(iii)⇒(i) : supposons que (iii) soit satisfait. Soit $(x_0, y_0) \in E \times E$ et $\varepsilon > 0$. Soit $(x, y) \in E \times E$. Posons $\alpha = \dfrac{\varepsilon}{k(\|x_0\| + \|y_0\| + 1) + \varepsilon}$. Supposons que $\|x - x_0\| < \alpha$ et $\|x - x_0\| < \alpha$. Comme $B(x, y) - B(x_0, y_0) = B(x - x_0, y) + B(x_0, y - y_0)$, il vient

$$|B(x, y) - B(x_0, y_0)| \leqslant k(\|x - x_0\|\|y\| + \|x_0\|\|y - y_0\|) \leqslant k\alpha(\|y\| + \|x_0\|).$$

Or $\|y\| \leqslant \|y-y_0\|+\|y_0\| \leqslant \alpha+\|y_0\| \leqslant 1+\|y_0\|$. Donc $|B(x, y)-B(x_0, y_0)| \leqslant k\alpha(1+\|y_0\|+\|x_0\|) < \varepsilon$. ☐

Si B est une forme sesquilinéaire continue, on pose $\|B\| = \sup\{|B(x, y)|;\ (x, y) \in H^2,\ \|x\| \leqslant 1,\ \|y\| \leqslant 1\}$.

2.11 Proposition. *Soit H un espace hilbertien. Pour toute forme sesquilinéaire continue $B : H \times H \to \mathbb{C}$ il existe une unique application linéaire continue $T \in \mathcal{L}(H)$ telle que pour $x, y \in H$ on ait $B(x, y) = \langle x|Ty\rangle$. On a $\|T\| = \|B\|$.*

Démonstration. Pour $T \in \mathcal{L}(H)$, notons B_T la forme sesquilinéaire $(x, y) \mapsto \langle x|Ty\rangle$.

Pour tout $(x, y) \in H^2$, on a $|B_T(x, y)| \leqslant \|Ty\|\|x\| \leqslant \|T\|\|x\|\|y\|$, donc B_T est continue et $\|B_T\| \leqslant \|T\|$.

De plus, pour tout $y \in H$, on a $\|Ty\|^2 = B_T(Ty, y) \leqslant \|B_T\|\|Ty\|y\|$, donc, pour tout $y \in H$, on a $\|Ty\| \leqslant \|B_T\|\|y\|$. Il vient $\|T\| \leqslant \|B_T$, donc $\|B_T\| = \|T\|$.

Soit $B : H \times H \to \mathbb{C}$ une forme sesquilinéaire continue. Pour $y \in H$, notons f_y la forme linéaire $x \mapsto \overline{B(x, y)}$. D'après le théorème 2.9, il existe un unique vecteur $T(y) \in H$ tel que l'on ait $f_y(x) = \langle T(y)|x\rangle$, soit $B(x, y) = \langle x|T(y)\rangle$.

On a alors pour tout $y_1, y_2, x \in H \times H$ et tout $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}^2$, $B(x, (\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)) = \lambda_1 B(x, y_1) + \lambda_2 B(x, y_2)$ soit $\langle x|\lambda_1 T(y_1) + \lambda_2 T(y_2) - T(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)\rangle = 0$, donc T est linéaire.

Enfin, par définition $\|T(y)\| = \|f_y\| = \sup\{|B(x, y)|;\ x \in H,\ \|x\| \leqslant 1\} \leqslant \|B\|\|y\|$, donc T est continue. ☐

2.12 Adjoint. *Pour tout $T \in \mathcal{L}(H)$, il existe un unique $T^* \in \mathcal{L}(H)$ tel que, pour tous $x, y \in H$ on ait $\langle Tx|y\rangle = \langle x|T^*y\rangle$.*

2.13 Propriétés de l'adjoint. *Pour $S, T \in \mathcal{L}(H)$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, on a :*

a) $(T^*)^* = T$;

b) $(S + T)^* = S^* + T^*$;

c) $(\lambda S)^* = \overline{\lambda} S^*$;

d) $(TS)^* = S^*T^*$;

e) $\|T\| = \|T^*\|$;

f) $\|T^*T\| = \|T\|^2$.

g) On a $\ker T^* = (\operatorname{im} T)^\perp$.

2.14 Définition. Un élément $T \in \mathcal{L}(H)$ est appelé

a) *unitaire* si $T^*T = \mathrm{id}_H = T \circ T^*$.

b) *autoadjoint* si $T = T^*$

c) *normal* si $T^* \circ T = T \circ T^*$

d) *positif* s'il est autoadjoint et, pour tout $x \in H$ on a $\langle T(x)|x\rangle \in \mathbb{R}_+$.

2.3 Propriétés du spectre dans un espace hilbertien

2.15 Théorème de Lax-Milgram. *Soit E un espace hilbertien et soit T une application linéaire continue de E dans E. On suppose qu'il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $x \in E$, on ait $\big|\langle T(x)|x\rangle\big| \geqslant \alpha\|x\|^2$. Alors T est bijective et $\|T^{-1}\| \leqslant \alpha$.*

Démonstration. On a $\|x\| \leqslant \alpha\|Tx\|$ donc T est injective et son image est complète, donc fermée. Si $x \in (\mathrm{im}T)^\perp$ alors $\big|\langle T(x)|x\rangle = 0$, donc $\|x\|^2 = 0$. □

2.16 Théorème. *Soit H un espace hilbertien.*

a) Le spectre de tout élément unitaire de $\mathcal{L}(H)$ est inclus dans $U(1) = \{z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\}$.

b) Le spectre de tout élément autoadjoint de $\mathcal{L}(H)$ est inclus dans $\mathbb{R}$.

c) Le spectre de tout élément positif de $\mathcal{L}(H)$ est inclus dans $\mathbb{R}_+$.

d) Si $T \in \mathcal{L}(H)$ est normal, alors $\|T\| = \rho(T)$.

Démonstration. a) Soient $U \in \mathcal{L}(H)$ un élément unitaire et $\lambda \in \mathrm{Sp}\,U$. Comme $\|U\| \leqslant 1$, le rayon spectral de U est inférieur ou égal à 1, donc $|\lambda| \leqslant 1$; de plus, comme U est bijectif, $\lambda \neq 0$ et par la prop. 2.2, $\lambda^{-1} \in \mathrm{Sp}\,U^{-1}$; or $U^{-1} = U^*$, donc $\|U^{-1}\| \leqslant 1$; il en résulte que $|\lambda^{-1}| \leqslant 1$.

b) Soit T un élément autoadjoint. Pour $\lambda \notin \mathbb{R}$, $\lambda = a + ib$, et $x \in H$, on a $\langle (T - \lambda\,\mathrm{id})(x)|x\rangle = \langle (T - a\,\mathrm{id})(x)|x\rangle - ib\|x\|^2$. Or $\langle (T - a\mathrm{id})(x)|x\rangle$ est réel, donc $\big|\langle (T - \lambda\,\mathrm{id})(x)|x\rangle\big| \geqslant |b|\|x\|^2$. Alors $T - \lambda\,\mathrm{id}$ est inversible d'après le théorème de Lax-Milgram.

c) Soit T un élément positif. Par b), le spectre de T est contenu dans $\mathbb{R}$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $x \in H$, on a $\langle x|(T + \lambda\mathrm{id}_H)x\rangle \geqslant \lambda\langle x|x\rangle$, donc $(T + \lambda\mathrm{id}_H)$ est inversible d'après le théorème de Lax-Milgram, donc $-\lambda \notin \mathrm{Sp}\,T$.

d) Soit S un élément autoadjoint. Alors $S = S^*$, donc $\|S^2\| = \|S^*S\| = \|S\|^2$ (prop. 2.13.f). Comme S^k est autoadjoint, on en déduit par récurrence sur n l'égalité, on a $\|S^{2^n}\| = \|S\|^{2^n}$.

Soit $T \in \mathcal{L}(H)$. Alors T^*T est autoadjoint. Par le calcul ci dessus, $\|(T^*T)^{2^n}\| = \|T^*T\|^{2^n} = \|T\|^{2^{n+1}}$. Si T est normal, on a $(T^*T)^{2^n} = (T^{2^n})^*T^{2^n}$. Il vient $\|T^{2^n}\|^2 = \|T\|^{2^{n+1}}$, soit $\|T^{2^n}\|^{2^{-n}} = \|T\|$. Passant à la limite, il vient $\rho(T) = \|T\|$. □

2.17 Remarque. Si $T \in \mathcal{L}(H)$ est normal, alors $\mathrm{Sp}_r\,T = \emptyset$. En effet, pour tout $x \in T$, on a $\|Tx\| = \|T^*x\|$. Si T^* est non injectif, alors il en va de même pour T.

2.18 Proposition. *Soient H un espace hilbertien, $T \in \mathcal{L}(H)$ et $f \in \mathbb{C}(X)$, sans pôle dans* $\mathrm{Sp}\,T$. *Notons $\tilde{f} \in \mathbb{C}(X)$ la fraction rationnelle telle que, pour $\lambda \in \mathbb{C}$ qui ne soit pas un pôle de f on ait $\overline{f(\lambda)} = \tilde{f}(\overline{\lambda})$. On a $f(T)^* = \tilde{f}(T^*)$.*

Démonstration. Notons $A \subset \mathbb{C}(X)$ l'ensemble des fractions rationnelles sans pôles dans $\mathrm{Sp}\,T$. L'application $A \to \mathcal{L}(E)$ définie par $f \mapsto \tilde{f}(T^*)^*$ vérifie les conditions de la prop. 2.1 ; donc elle coïncide avec $f \mapsto f(T)$. □

2.19 Proposition. *Soient H un espace hilbertien, $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur normal et $f \in \mathbb{C}(X)$, sans pôle dans* $\mathrm{Sp}\,T$. *Alors $f(T)$ est normal.*

Démonstration. Pour toute partie $Y \subset \mathcal{L}(H)$, on appelle *commutant* de Y et on note Y' l'ensemble $Y' = \{S \in \mathcal{L}(H),\ \forall T \in Y,\ ST = TS\}$.

Il est clair que, pour toute parte X de $\mathcal{L}(H)$, l'ensemble X' est une sous-algèbre (fermée) de $\mathcal{L}(H)$.

Soient X et Y sont des parties de $\mathcal{L}(H)$. On a :

a) $X \subset Y' \iff Y \subset X'$.

b) $X \subset Y \Rightarrow Y' \subset X'$.

c) Si $S \in X'$ et S est inversible, alors, pour tout $T \in X$ on a $S^{-1}T = S^{-1}TSS^{-1} = S^{-1}STS^{-1} = TS^{-1}$; donc $S^{-1} \in X'$. Il s'ensuit que si $S \in X'$ et $f \in \mathbb{C}(X)$, sans pôle dans $\operatorname{Sp} S$, alors $f(S) \in X'$.

Prenons $Y = \{T, T^*\}$ et $B = Y'$.

Comme $TT^* = T^*T$, on a $Y \subset B$, donc $B' \subset Y' = B$: si $a, b \in B'$, alors $a \in B'$ et $b \in B$ donc $ab = ba$: l'algèbre B' est commutative (d'après a).

Comme $B \subset Y'(= B)$, il vient $Y \subset B'$ (d'après b).

On a $f(T), \tilde{f}(T^*) \in B'$ (d'après c).

Donc $f(T)$ est normal. □

2.4 Calcul fonctionnel continu

Si K est un espace compact, on note $C(K)$ l'espace de Banach des fonctions continues de K dans $\mathbb{C}$ muni de la norme $f \mapsto \|f\|_\infty = \sup\{|f(x)|,\ x \in K\}$. Si $f \in C(K)$, on note $\overline{f}$ l'application $x \mapsto \overline{f(x)}$.

Si K est une partie compacte de $\mathbb{C}$, on note $z \in C(K)$ l'application $\lambda \mapsto \lambda$. Si f est une fonction rationnelle sans pôles dans K, on note $f(z)$ l'application $\lambda \mapsto f(\lambda)$.

Rappels :

2.20 Théorèmes de Stone-Weierstrass. *a) Soit K une partie compacte de $\mathbb{R}$. Toute fonction continue de $K \to \mathbb{C}$ est limite uniforme de polynômes.*

b) Soit K une partie compacte de $\mathbb{U}(1)$. Toute fonction continue de $K \to \mathbb{C}$ est limite uniforme de polynômes trigonométriques.

Nous utiliserons le résultat suivant :

2.21 Lemme. *Soient E un espace normé et F un espace de Banach. Soit $\mathcal{E} \subset E$ un sous-espace dense. Pour tout $f \in \mathcal{L}(\mathcal{E}, F)$, il existe une unique $g \in \mathcal{L}(E, F)$ qui prolonge g. On a $\|f\| = \|g\|$.*

2.22 Théorème. *Soient H un espace hilbertien et $T \in \mathcal{L}(H)$ autoadjoint ou unitaire.*

a) Il existe une et une seule application linéaire continue $\Phi : C(\operatorname{Sp} T) \to \mathcal{L}(H)$ telle que $\Phi(1) = \mathrm{id}_H$, $\Phi(z) = T$ et, pour tout $f, g \in C(\operatorname{Sp} T)$, on ait $\Phi(fg) = \Phi(f)\Phi(g)$.

b) Pour toute fraction rationnelle f sans pôle dans $\operatorname{Sp} T$, on a $\Phi(f) = f(T)$.

c) De plus, Φ est isométrique et, pour tout $f \in C(\operatorname{Sp} T)$, on a $\Phi(f)^* = \Phi(\overline{f})$.

Démonstration. Notons $A \subset \mathbb{C}(X)$ l'ensemble des fractions rationnelles sans pôle dans $\operatorname{Sp} T$. Notons $\phi : A \to C(\operatorname{Sp} T)$ l'application $f \mapsto f(z)$, et $\Psi : A \to \mathcal{L}(H)$ l'application $f \mapsto f(T)$.

- Si T est autoadjoint, $\operatorname{Sp} T$ est une partie compacte de $\mathbb{R}$ et $\varphi(A)$ contient les polynômes.
- Si T est unitaire, $\operatorname{Sp} T \subset \mathbb{U}(1)$, et comme pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\varphi(z^n) \in \varphi(A)$, $\varphi(A)$ contient les polynômes trigonométriques.

Dans les deux cas $\varphi(A)$ est dense dans $C(\operatorname{Sp} T)$ d'après Stone-Weierstrass.

a) **Existence.** Pour tout $f \in A$, $f(T)$ est normal (par la prop.2.19), donc sa norme est égale à son rayon spectral (par le théorème 2.16.d) ; donc $\|f(T)\| = \sup\{|\lambda|,\ \lambda \in \mathrm{Sp}\, f(T)\} = \sup\{|f(\lambda)|,\ \lambda \in \mathrm{Sp}\, T\}$, puisque, par le calcul fonctionnel rationnel (prop. 2.2), $\mathrm{Sp}\, f(T) = f(\mathrm{Sp}\, T)$. En d'autres termes, on a $\|\Psi(f)\| = \|\phi(f)\|$.

Par le lemme 2.21, il existe une (unique) application linéaire continue $\Phi : C(\mathrm{Sp}\, T) \to \mathcal{L}(H)$ telle que $\Psi = \Phi \circ \phi$.

On a $\Phi(1) = \Phi(\phi(1)) = \Psi(1) = \mathrm{id}_H$; $\Phi(z) = \Phi(\phi(X)) = \Psi(X) = T$; les applications qui à $(f, g) \in C(\mathrm{Sp}\, T) \times C(\mathrm{Sp}\, T)$ associent respectivement $\Phi(fg)$ et $\Phi(f)\Phi(g)$ sont continues et coïncident sur $\phi(A) \times \phi(A)$; donc elles coïncident ; en d'autres termes, pour tout $f, g \in C(\mathrm{Sp}\, T)$, on a $\Phi(fg) = \Phi(f)\Phi(g)$.

Unicité. Soit $\Phi_1 : C(\mathrm{Sp}\, T) \to \mathcal{L}(H)$ une autre application vérifiant $\Phi_1(1) = \mathrm{id}_H$, $\Phi_1(z) = T$ et, telle que pour tout $f, g \in C(\mathrm{Sp}\, T)$, on ait $\Phi_1(fg) = \Phi_1(f)\Phi_1(g)$. Par Par l'unicité du calcul fonctionnel rationnel, (prop. 2.1) $\Phi \circ \phi$ et $\Phi_1 \circ \phi$ coïncident ; par densité de $\phi(A)$, on trouve $\Phi = \Phi_1$.

b) Par construction.

c) De plus, l'ensemble des $f \in C(\mathrm{Sp}\, T)$ tels que $\|\Phi(f)\| = \|f\|$ est fermé et contient $\phi(A)$; donc Φ est isométrique.

L'algèbre $\varphi(A)$ est stable par la conjugaison et, pour $f \in \varphi(A)$, on a $\Phi(\overline{f}) = \Phi(f)^*$:

- Si T est autoadjoint, $\overline{\varphi(P)} = \varphi(\widetilde{P})$ et $\widetilde{P}(T^*) = (P(T))^*$;
- Si T est unitaire, $\overline{\varphi(P)} = \varphi(\widetilde{P}(X^{-1}))$ et $\widetilde{P}(T^*) = (P(T))^*$.

L'ensemble des $f \in C(\mathrm{Sp}\, T)$, telles que $\Phi(f)^* = \Phi(\overline{f})$ est fermé et contient $\phi(A)$; donc, pour tout $f \in C(\mathrm{Sp}\, T)$, on a $\Phi(f)^* = \Phi(\overline{f})$. □

Soient H un espace hilbertien, $T \in \mathcal{L}(H)$ autoadjoint ou unitaire et f une fonction continue sur $\mathrm{Sp}\, T$. L'élément $\Phi(f)$ défini dans le théorème 2.22 se note $f(T)$.

2.23 Théorème. *Soient H un espace hilbertien, $T \in \mathcal{L}(H)$ autoadjoint ou unitaire et f une fonction continue sur $\mathrm{Sp}\, T$. Alors :*

a) $f(T)$ est normal. On a $\mathrm{Sp}\, f(T) = f(\mathrm{Sp}\, T)$.

b) Si $f(\mathrm{Sp}\, T) \subset \mathbb{R}$, $f(T) = f(T)^*$; si $f(\mathrm{Sp}\, T) \subset U(1)$, $f(T)$ est unitaire. Dans ces deux cas, pour toute fonction $g \in C(\mathrm{Sp}\, f(T))$ on a $(g \circ f)(T) = g(f(T))$.

Démonstration. a) On a $f(T)^* = \overline{f}(T)$, donc $f(T)f(T)^* = (f\overline{f})(T) = f(T)^*f(T)$, donc $f(T)$ est normal.

Si $\lambda \notin f(\mathrm{Sp}\, T)$, notons $h \in C(\mathrm{Sp}\, T)$ la fonction $s \mapsto (f(s) - \lambda)^{-1}$. On a $h(f - \lambda) = (f - \lambda)h = 1$, donc $h(T)(f(T) - \lambda \mathrm{id}_H) = (f(T) - \lambda \mathrm{id}_H)h(T) = \mathrm{id}_H$, donc $\lambda \notin \mathrm{Sp}\, f(T)$.

Cela prouve que $\mathrm{Sp}\, f(T) \subset f(\mathrm{Sp}\, T)$.

Inversement, soit $\lambda_0 \in \mathrm{Sp}\, T$. Pour $\lambda \in \mathrm{Sp}\, T$, posons $f_1(\lambda) = f(\lambda) - f(\lambda_0)$ et $g(\lambda) = \|f_1\|_\infty^2 - |f_1(\lambda)|^2$. Remarquons que la fonction g prend ces valeurs dans $[0, \|f_1\|_\infty^2]$ et que $g(\lambda_0) = \|f_1\|_\infty^2$, de sorte que $\|g\|_\infty = \|f_1\|_\infty^2$.

On en déduit que $\|g(T)\| = \|f_1\|_\infty^2$ et, puisque $g(T)$ est positif, $\|g(T)\| \in \mathrm{Sp}\, T$. Or $g(T) = \|f_1\|_\infty^2 \mathrm{id}_H - f_1(T)^*f_1(T)$, donc $0 \in \mathrm{Sp}\, f_1(T)^*f_1(T)$. On en déduit que $f_1(T)^*f_1(T)$ n'est pas inversible, donc $f_1(T)$ n'est pas inversible, *i.e.* $f(\lambda_0) \in \mathrm{Sp}\, f(T)$.

b) Si $f = \overline{f}$ alors $f(T) = \overline{f}(T) = f(T)^*$; si $f(\mathrm{Sp}\, T) \subset U(1)$, alors $f\overline{f} = 1$, donc $f(T)^*f(T) = f(T)f(T)^* = (f\overline{f})(T) = \mathrm{id}_H$, donc $f(T)$ est unitaire. L'application $g \mapsto g \circ f(T)$ vérifie les conditions du théorème 2.22 (relativement à $f(T)$), donc coïncide avec $g \mapsto g(f(T))$. □

2.5 Opérateurs positifs

2.24 Théorème. *Soient H un espace hilbertien et $T \in \mathcal{L}(H)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Pour tout $x \in H$, $\langle x|Tx\rangle \in \mathbb{R}_+$;*

(ii) *Il existe $S \in \mathcal{L}(H)$, $T = S^*S$;*

(iii) *Il existe $S \in \mathcal{L}(H)$, $S = S^*$, $T = S^2$;*

(iv) *$T = T^*$ et $\operatorname{Sp} T \subset \mathbb{R}_+$.*

Démonstration. On a $\langle x|S^*S(x)\rangle = \langle S(x)|S(x)\rangle \in \mathbb{R}_+$, donc (ii)$\Rightarrow$(i).

(iii)$\Rightarrow$(ii) est clair.

(i)$\Rightarrow$(ii) résulte du théorème 2.16.c)

Supposons que $T = T^*$ et $\operatorname{Sp} T \subset \mathbb{R}_+$; notons $f \in C(\operatorname{Sp} t)$ l'application $t \mapsto \sqrt{t}$; par le théorème 2.23.b), on a $f(T) = f(T)^*$; de plus $f^2 = z$, donc $f(T)^2 = T$ (par le théorème 2.22), donc (iv)$\Rightarrow$(iii). □

Un élément autoadjoint de $\mathcal{L}(H)$ satisfaisant aux conditions équivalentes du théorème 2.24 est appelé *positif* (définition 2.14). On note $\mathcal{L}(H)_+$ l'ensemble des éléments positifs de $\mathcal{L}(H)$.

Pour $T \in \mathcal{L}(H)_+$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $T^\alpha = f(T)$, où $f \in C(\operatorname{Sp} T)$ est l'application $t \mapsto t^\alpha$. Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$ on a $T^{\alpha+\beta} = T^\alpha T^\beta$ et, par le théorème 2.23.b), $(T^\alpha)^\beta = T^{\alpha\beta}$.

2.25 Proposition. *Pour $T \in \mathcal{L}(H)_+$, il existe un et seul $S \in \mathcal{L}(H)_+$ tel que $S^2 = T$.*

Démonstration. Pour $S, T \in \mathcal{L}(H)_+$ on a $(S^2)^{1/2} = S$ et $(T^{1/2})^2 = T$, donc $T = S^2 \iff S = T^{1/2}$, d'où la proposition. □

Soient E et F des espaces hilbertiens et $T \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle *module* de T et on note $|T|$ l'unique $S \in \mathcal{L}(E)_+$ tel que $S^2 = T^*T$.

2.26 Proposition (Décomposition polaire)**.** *Soient E et F des espaces hilbertiens et $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Il existe un et un seul $u \in \mathcal{L}(E, F)$, nul sur* $\ker T$ *tel que $T = u|T|$.*

Démonstration. Pour $x \in E$ on a $\|T(x)\|^2 = \langle x|T^*T(x)\rangle = \||T|(x)\|^2$; en particulier, $\ker T = \ker |T|$; par la proposition **??**, l'adhérence de l'image de $|T|$ est donc l'orthogonal de $\ker T$; pour $x \in E$ et $y \in \ker T$, on a alors $\|T(x)\|^2 = \||T|(x)\|^2 \leqslant \||T|(x)\|^2 + \|y\|^2 = \||T|(x) + y\|^2$. Comme $\operatorname{im} |T| + \ker T$ est dense dans E et F est complet, il existe un unique élément $u \in \mathcal{L}(E, F)$ tel que, pour tout $x \in E$ et tout $y \in \ker T$ on ait $u(|T|(x) + y) = T(x)$ (lemme 2.21). □

Soient E et F des espaces hilbertiens et $T \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle *phase* de T l'unique $u \in \mathcal{L}(E, F)$ nul sur $\ker T$ tel que $T = u|T|$. La décomposition $T = u|T|$ s'appelle *décomposition polaire* de T.

2.27 Proposition. *Soient E et F des espaces hilbertiens et $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Notons $T = u|T|$ sa décomposition polaire.*

a) On a $u^*T = |T|$; de plus, u^*u et uu^* sont les projecteurs orthogonaux sur l'orthogonal du noyau de T et sur l'adhérence de l'image de T respectivement.

b) Le module de T^* est $uT^* = Tu^*$; sa phase est u^*.

Démonstration. a) Soient $x, y \in E$, $z_1 \in \ker T$ et $z_2 \in \ker T^*$. On a

$$\begin{aligned}
\langle u^*(Tx+z_2)|(|T|y+z_1)\rangle &= \langle (Tx+z_2)|u(|T|y+z_1)\rangle \\
&= \langle (Tx+z_2)|Ty\rangle \\
&= \langle Tx, Ty\rangle \qquad \text{car } z_2 \in (\operatorname{im} T)^\perp \\
&= \langle |T|x, |T|y\rangle \\
&= \langle |T|x|(|T|y+z_1)\rangle \text{ car } z_1 \in (\operatorname{im}|T|)^\perp.
\end{aligned}$$

Comme l'ensemble $\{|T|y+z_1;\ y \in E,\ z_1 \in \ker\, T\}$ est dense dans E, on en déduit que, pour tout $x \in E$ et tout $z_2 \in \ker\, T^*$ on a $u^*(Tx+z_2) = |T|x$. En particulier, $u^*T = |T|$.

Notons p le projecteur orthogonal sur l'adhérence de l'image de $|T|$ (*i.e.* l'orthogonal de $\ker\, T$). On a $u^*u|T| = u^*T = |T|$; comme u^*u s'annule sur $\ker\, T$, il coïncide avec p sur $\operatorname{im}|T| + \ker\, T$; comme ce sous-espace est dense dans E, on a $u^*u = p$.

Notons q le projecteur orthogonal sur l'adhérence de l'image de T. On a $uu^*T = u|T| = T$; comme uu^* s'annule sur $\ker\, T^* = (\operatorname{im} T)^\perp$, il coïncide avec q sur $\operatorname{im} T + \ker\, T^*$; comme ce sous-espace est dense dans F, on a $uu^* = q$.

b) Ecrivons $|T| = S^*S$ (thèorème 2.24) ; alors $Tu^* = u|T|u^* = (Su^*)^*(Su^*)$. On en déduit immédiatement que Tu^* est positif ; alors $Tu^* = (Tu^*)^* = uT^*$; de plus $(Tu^*)^2 = uT^*Tu^* = u|T|^2u^* = TT^*$; par définition du module, $|T^*| = Tu^* = uT^*$.

De plus, u^* s'annule sur $\ker\, T^*$ et $u^*u(y) = y$ pour tout $y \in \operatorname{im} T^* \subset (\ker\, T)^\perp$, donc $u^*(uT^*) = T^*$; par définition, la phase de T^* est u^*. $\square$

2.28 Remarque. On déduit aisément des calculs ci-dessus les identités suivantes :
$T = u|T| = |T^*|u = uT^*u$, $\qquad |T| = u^*T = T^*u = u^*|T^*|u$,
$T^* = u^*|T^*| = |T|u^* = u^*Tu^*$, $\qquad |T^*| = u|T|u^* = Tu^* = uT^*$.
En particulier T^* et $|T|$ ont même image et u est un isomorphisme de l'image de T^* sur celle de T.

3 Applications linéaires compactes

3.1 Généralités

3.1 Définition. Soient E et F des espaces de Banach. Une application linéaire $T \in \mathcal{L}(E,F)$ est dit *compacte* si l'image par T de la boule unité fermée de E est (normiquement) relativement compacte dans F. On note $\mathcal{K}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires compactes de E dans F. On pose $\mathcal{K}(E) = \mathcal{K}(E,E)$.

Rappelons qu'une partie A d'un espace topologique séparé X est dite *relativement compacte* dans X s'il existe une partie compacte B de X contenant A. Dans ce cas B est fermée dans X donc contient $\overline{A}$ et $\overline{A}$ est alors fermé dans B donc est compacte. Autrement dit, A est relativement compacte si et seulement si $\overline{A}$ est compacte.

Si X est un espace métrique, $A \subset X$ est relativement compact si, de toute suite dans A on peut extraire une suite convergeant dans X.

3.2 Proposition. *Soient E, F et H des espaces de Banach, $S \in \mathcal{L}(E,F)$ et $T \in \mathcal{L}(F,H)$; si S ou T est compacte alors TS est compacte.*

Démonstration. Si $K \subset F$ est compact et contient l'image par S de la boule unité de E, alors $T(K)$ est compact et contient l'image par TS de la boule unité de E.

Remarquons que l'image par S de la boule unité de E, est contenue dans la boule de F de centre 0 et de rayon $\|S\|$. Si $K \subset H$ est compact et contient l'image par T de la boule unité de F, alors $\|S\|K$ est compact et contient l'image par TS de la boule unité de E. □

3.3 Remarque. Si $T \in \mathcal{K}(E,F)$, l'application $y \mapsto \|y\|$ est bornée dans le compact $\overline{T(B_E)}$, donc T est continue.

3.4 Proposition. *Une application linéaire continue de rang fini est compacte.*

Démonstration. Soit $T : E \to F$ une application linéaire continue de rang fini. On écrit $T = j \circ T_1$ où $T_1 : E \to \mathrm{im}T$ est l'application $T \mapsto T(x)$ de E dans $\mathrm{im}\,T$. Comme la boule unite B_1 de $\mathrm{im}\,T$ est compacte, l'application d'inclusion $j : \mathrm{im}T \to F$ est compacte. En particulier, si E, F sont de dimension finie, $\mathcal{L}(E,F) = \mathcal{K}(E,F)$. □

En particulier, si E ou F est de dimension finie, $\mathcal{K}(E,F) = \mathcal{L}(E,F)$.

3.5 Proposition. *Soient E et F des espaces de Banach. L'ensemble $\mathcal{K}(E,F)$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{L}(E,F)$.*

Démonstration. Il est clair que $0 \in \mathcal{K}(E,F)$ et que, si $T \in \mathcal{K}(E,F)$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, alors $\lambda T \in \mathcal{K}(E,F)$. Si K_1 et K_2 sont des parties compactes de F alors $K_1 \times K_2$ est compacte dans $F \times F$, donc $K_1 + K_2 = \{x + y,\ (x,y) \in K_1 \times K_2\}$ est compact dans F ; on en déduit que $\mathcal{K}(E,F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E,F)$.

Soit $T \in \overline{\mathcal{K}(E,F)}$. Notons B la boule unité de E et montrons que $T(B)$ est relativement compact. Soit (x_n) une suite d'éléments de B. On doit démontrer qu'il existe une sous-suite telle que $T(x_n)$ converge dans F. On écrit T comme une limite d'une suite (T_k) d'éléments de $\mathcal{K}(E,F)$.

On construit une application strictement croissante $\varphi_0 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $\Big(T_0(x_{\varphi_0(n)})\Big)_n$ converge, puis une suite extraite de $(x_{\varphi_0(n)})_n$, c'est-à-dire une application strictement croissante $\varphi_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $\Big(T_1(x_{\varphi_1(n)})\Big)_n$ converge et $\varphi_1(\mathbb{N}) \subset \varphi_0(\mathbb{N})$.

On construit ainsi par récurrence une suite d'applications strictement croissantes $\varphi_k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que, pour tout k, la suite $\Big(T_k(x_{\varphi_k(n)})\Big)_n$ converge et $\varphi_{k+1}(\mathbb{N}) \subset \varphi_k(\mathbb{N})$.

On pose alors $\varphi(n) = \varphi_n(n)$ et $z_n = x_{\varphi(n)}$.

Remarquons que, pour tout k, on a $\varphi(n) \in \varphi_k(\mathbb{N})$ pour $n \geqslant k$, donc la suite $\Big(T_k(z_n)\Big)_{n\geqslant k}$ extraite de la suite $\Big(T_k(x_{\varphi_k(n)})\Big)_n$ converge. Soit $y_k \in F$ sa limite.

Appliquons une interversion de limites : démontrons que la suite (y_k) est de Cauchy et que $\lim y_k = \lim T(z_n)$.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme la suite (T_n) converge en norme, il existe n_0 tel que, pour $n \geqslant n_0$ et tout $x \in B$ on ait $\|T(x_n) - T(x)\| < \varepsilon/4$. Soient $n, m \geqslant n_0$; pour tout k, on a $\|T_n(z_k) - T_m(z_k)\| \leqslant \varepsilon/2$, donc, à la limite $\|y_n - y_m\| \leqslant \varepsilon/2$. Cela prouve que (y_n) est de Cauchy. Soit y sa limite. Par le calcul ci-dessus, si $n \geqslant n_0$, on a $\|y_n - y\| \leqslant \varepsilon/2$. Or, il existe k_0, tel que pour $k \geqslant k_0$ on ait $\|T_n(z_k) - y_k\| \leqslant \varepsilon/4$; il vient

$$\|T(z_k) - y\| \leqslant \|(T - T_n)(z_k)\| + \|T_n(z_k) - y_k\| + \|y_k - y\| \leqslant \varepsilon.$$

□

3.6 Exemple. Soit E un espace hilbertien et soit $\mathcal{B} = (e_n)$ une base hilbertienne de E. Soit aussi (λ_n) une suite de nombres non nuls tendant vers 0. Notons $S : E \to c_0$ l'application $x \mapsto (\lambda_k\langle e_k|x\rangle)$.

Notons $S_k : E \to c_0$ l'application $x \mapsto (t_n)$ avec $t_n = \lambda_n\langle e_n|x\rangle$ pour $n \leqslant k$ et $t_n = 0$ pour $n > k$.

On a $\|S - S_k\| = \sup\limits_{n>k} |\lambda_n|$, donc $S = \lim S_k$ et S est compacte.

Par ailleurs $S(B) = \{(t_k)_{k\in\mathbb{N}};\ \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \left|t_k\lambda_k^{-1}\right|^2 \leqslant 1\}$ est fermé, donc compact.

Puisque S est injective, on peut munir B de la distance $d_S(x, y) = \|S(x - y)\|_\infty$.

Muni de la distance d_S, la boule B est compacte (et S est une isométrie de (B, d_S) sur $(S(B), \|\ \|_\infty)$).

Pour tout $b \in E$, l'application $x \mapsto \langle b|x\rangle$ est (uniformément) continue de B muni de la distance d_S dans $\mathbb{R}$. En effet, soit $\varepsilon > 0$. Comme $b = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} b_k e_k$, il existe si n_0 tel que $\displaystyle\sum_{k=n_0}^{+\infty} |b_k|^2 < \varepsilon^2/9$. Si $\|S(x - y)\| < \varepsilon/3 \displaystyle\sum_{k=0}^{n_0-1} |b_k\lambda_k^{-1}|$, alors

$$\langle (x - y)|b\rangle = \sum_{k=0}^{n_0-1} (x_k - y_k)b_k + \sum_{k=n_0}^{+\infty} (x_k - y_k)b_k$$

donc

$$\begin{aligned} |\langle (x - y)|b\rangle| &\leqslant \sum_{k=0}^{n_0-1} \|S(x - y)\||b_k\lambda_k^{-1}| + \Big(\sum_{k=n_0}^{+\infty} |x_k - y_k|^2\Big)\Big(\sum_{k=n_0}^{+\infty} |b_k|^2\Big) \\ &\leqslant \varepsilon/3 + 2\sqrt{\varepsilon^2/9}. \end{aligned}$$

3.7 Remarques. a) Cela prouve que l'application de (B, d_S) dans B muni de la topologie faible $\sigma(E, E')$ est continue ; comme (B, d_S) est compact et que $\sigma(E, E')$ est séparée, cette application est un homéomorphisme, donc d_S définit la topologie faible.

En d'autres termes, pour une suite (x_k) dans B et $x \in B$, on a $d_S(x_k, x) \to 0$ si et seulement si pour tout $b \in E$ on a $\langle x_k - x|b\rangle \to 0$.

b) On en déduit que si $(b_1, \dots, b_n) \in E^n$, l'application $x \mapsto (\langle b_1|x\rangle, \dots, \langle b_n|x\rangle)$ est continue de (B, d_S) dans $\mathbb{C}^n$.

c) Soit $\beta = (b_n)$ une sute dans E telle que $\|b_n\| \to 0$. Notons $S_\beta : E \to c_0$ l'application $x \mapsto (\langle b_n|x\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$. Alors S_β est limite uniforme sur B de $(S_{\beta,k})_{k\in\mathbb{N}}$ où

$$S_{\beta,k}(x) = (\langle b_0|x\rangle, \langle b_1|x\rangle, \dots, \langle b_k|x\rangle, 0 \dots, 0 \dots).$$

Comme les $S_{\beta,k}$ sont continues, il en va de même pour S_β.

d) Soit F un autre espace de Hilbert et $T \in \mathcal{L}(E, F)$ avec $\|T\| \leqslant 1$. Choisissons une base hilbertienne (f_n) de F et une suite (λ'_n) de nombres complexes non nuls et notons $S' : F \to c_0$ l'application $y \mapsto (\lambda'_n \langle f_n|y\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$. Posons $b_n = \overline{\lambda'_n} T^* f_n$. On a $S' \circ T = S_{(b_n)}$ donc $S' \circ T$ est continue de (B_E, d_S) dans c_0 et donc T est continue de (B_E, d_S) dans $(B_F, d_{S'})$.

e) Donnons-nous une autre base hilbertienne (e'_n) de E et une autre suite (λ'_n) de complexes non nuls tendant vers 0. Posons $S'(x) = (\lambda'_n \langle e'_n|x\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$, en appliquant (d), à $T = \mathrm{id}_E$, on en déduit que les distances d_S et $d_{S'}$ sur B sont uniformément équivalentes - ce que l'on savait déjà d'après (a).

f) Soit (f_n) un système orthonormé de E. On peut l'inclure comme suite extraite dans une base hilbertienne (e'_k). Prenant $S' : x \mapsto (2^{-k} \langle e'_k|x\rangle)_{k\in\mathbb{N}}$. On a $d_{S'}(e'_k, 0) = 2^{-k}$ donc $d_{S'}(f_n, 0) \to 0$ - et bien sûr cela est vrai pour toute distance de type d_S.

3.2 Le cas hilbertien

3.8 Théorème. *Soit E, F des espaces hilbertiens (séparables) et soit $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Notons B la boule unité fermée de E. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) $T(B)$ est (normiquement) relativement compacte dans F.

(ii) $T(B)$ est (normiquement) compacte dans F.

(iii) T est continue de B munie de la topologie faible (celle associée à la distance d_S de l'exemple ci-dessus) dans F muni de la topologie normique.

(iv) Pour tout système orthonormal $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans E on a $\lim \|T(e_n)\| = 0$.

(v) T est (normiquement) adhérente à l'espace des applications linéaires continues de rang fini.

Démonstration. (ii) $\Rightarrow$ (i) est clair.

Comme B est faiblement compact (iii) $\Rightarrow$ (ii).

(iii) $\Rightarrow$ (iv) résulte de la remarque 3.7.f) et (v)$\Rightarrow$(i) résulte des propositions 3.4 et 3.5.

(i)$\Rightarrow$(iii). On peut supposer que $\|T\| \leqslant 1$. Supposons (i) vérifiée et soit C une partie (normiquement) compacte de B_F contenant $T(B)$. L'identité, de C muni de la topologie normique, dans C muni de la topologie faible est continue ; comme C est normiquement compact, c'est un homéomorphisme. Comme T est continu de B muni de la topologie faible dans C muni de la topologie faible, (iii) est vérifiée.

(iv)$\Rightarrow$(v) Supposons que (iv) soit vérifiée et que T n'est pas de rang fini.

Remarquons que, si $P \in \mathcal{L}(E)$ est un projecteur orthogonal d'image F, alors la nome de TP est égale à la norme de la retriction de T à F. En effet, soit T' cette restriction et notons $j : F \to E$ l'inclusion et $Q : E \to F$ l'application $x \mapsto P(x)$. On a $\|j\| = \|Q\| \leqslant 1$ (on peut remarquer que $Q = j^*$ et $P = jQ$), et on a $TP = T'Q$ et $T' = Tj$.

Il existe e_0 tel que $\|e_0\| = 1$ et $\|T(e_0)\| \geqslant \|T\|/2$.

Notons T_1 la restriction de T à $e_0^\perp$. Il existe $e_1 \in e_0^\perp$ tel que $\|e_1\| = 1$ et $\|T(e_1)\| \geqslant \|T_1\|/2$.
Supposons que l'on ait construit $e_0 \ldots, e_{n-1}$. Notons T_n la restriction de T à $\{e_0, \ldots, e_{n-1}\}^\perp$. Il existe $e_n \in \{e_0, \ldots, e_{n-1}\}^\perp$ tel que $\|e_n\| = 1$ et $\|T(e_n)\| \geqslant \|T_n\|/2$.
D'après (iv) on a $\|T(e_n)\| \to 0$, donc $\|T_n\| \to 0$. Or si on note P_n la projection orthogonale sur $\{e_0, \ldots, e_{n-1}\}^\perp$, on a $\|T_n\| = \|TP_n\|$. Enfin $1 - P_n$ est le projecteur orthogonal sur $\mathrm{Vect}\{e_0, \ldots, e_{n-1}\}$; il est de rang fini, donc T est limite des opérateurs de rang fini $T - TP_n$. □

3.9 Proposition. *Soient E, F des espaces hilbertiens et $T \in \mathcal{L}(E, F)$. On a l'équivalence entre*

(i) T *est compacte ;*

(ii) T^* *est compacte ;*

(iii) T^*T *est compacte ;*

(iv) $|T|$ *est compacte.*

Démonstration.
- (ii)⇒(iii) résulte de la prop. 3.2 ;
- pour tout système orthonormal $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans E on a $\|T(e_n)\|^2 = \langle T^*T(e_n), e_n\rangle \leqslant \|T^*T(e_n)\|$ donc si $\lim \|T^*T(e_n)\| = 0$, alors $\lim \|T(e_n)\| = 0$; donc (iii)⇒(i) (propriété équivalente (v) du théorème 3.8).
- On a montré que (ii)⇒(i). Appliquant cela à T^*, on en déduit que (i)⇒(ii).
- Appliquant (i) $\iff$ (iii) à $|T|$, on trouve (iv) $\iff$ (iii). □

3.10 Théorème. *(« Alternative de Fredholm ») Soient E un espace hilbertien et $T \in \mathcal{K}(E)$.*

a) Pour tout $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$, l'image de $\lambda\mathrm{id}_E - T$ est fermée et de codimension finie et l'on a $\mathrm{codim}\,(\lambda\mathrm{id}_E - T)(E) = \dim \ker\,(\lambda\mathrm{id}_E - T)$.

b) $\mathrm{Sp}\,T$ *est fini ou formé d'une suite tendant vers* 0.

Démonstration. a) En remplaçant T par T/λ on se ramène à $\lambda = 1$. Soit $R \in \mathcal{L}(E)$ de rang fini telle que $\|T - R\| < 1$. Alors $\mathrm{id}_E - T + R$ est inversible. Posons $S = R(\mathrm{id}_E - T + R)^{-1}$; c'est une application linéaire continue de rang fini. Or $\mathrm{id}_E - T = (\mathrm{id}_E - S)(\mathrm{id}_E - T + R)$; donc $\mathrm{id}_E - T$ et $\mathrm{id}_E - S$ ont même image et $\ker\,(\mathrm{id}_E - T) = (\mathrm{id}_E - T + R)^{-1} \ker\,(\mathrm{id}_E - S)$, donc ces deux noyaux ont même dimension. Il suffit donc de traiter le cas d'une application linéaire continue de rang fini.
Soit alors F un sous-espace de dimension finie de E contenant $T(E)$ et $T^*(E)$ (qui par la remarque 2.28 est de dimension finie). Alors $\mathrm{id}_E - T$ est l'identité sur $F^\perp$ et laisse F stable. Notons $T_1 : F \to F$ la restriction de $\mathrm{id}_E - T$. Donc $(\mathrm{id}_E - T)(E) = F^\perp + T_1(F)$ et $\ker\,(\mathrm{id}_E - T) = \ker\, T_1$. On en déduit que l'image de $\mathrm{id}_E - T$ est $\{x \in E,\ p(x) \in \mathrm{im}\, T_1\}$ où p est la projection orthogonale d'image F ; l'image de $\mathrm{id}_E - T$ est donc fermée et sa codimension est égale à la codimension de l'image de T_1 dans F. L'égalité $\mathrm{codim}\,(\mathrm{id}_E - T)(E) = \dim \ker\,(\mathrm{id}_E - T)$ résulte alors de l'égalité $\dim\ker\, T_1 + \dim\, \mathrm{im}\, T_1 = \dim\, F$.

b) On doit démontrer que, pour tout $\varepsilon > 0$ il y a un nombre fini de valeurs spectrales telles que $|\lambda| \geqslant \varepsilon$, autrement dit que toute suite λ_n de valeurs spectrales distinctes tend vers 0. Il résulte de a) que toute valeur spectrale non nulle de T est valeur propre de T. Soit alors (λ_n) une suite de valeurs propres distinctes, et x_n des vecteurs propres associés. Démontrons que $\lim \lambda_n = 0$. Pour $n \in \mathbb{N}$, notons E_n l'espace engendré par $(x_k)_{0\leqslant k<n}$; comme les λ_k sont distinctes, le système x_k est libre, donc l'espace E_n est de dimension n. Notons e_n un vecteur de norme 1 de $E_{n+1} \cap E_n^\perp$; comme $T(x_k) = \lambda_k x_k$ on a $T(E_n) \subset E_n$. De plus, pour tout $k < n$, on a $(T - \lambda_n\mathrm{id}_E)(x_k) \in E_n$ et $(T - \lambda_n\mathrm{id}_E)(x_n) = 0 \in E_n$, donc $(T - \lambda_n\mathrm{id}_E)(E_{n+1}) \subset E_n$; on en déduit que $(T - \lambda_n\mathrm{id}_E)(e_n) \in E_n$, donc $\langle e_n|(T - \lambda_n)(e_n)\rangle = 0$; donc $\langle e_n|T(e_n)\rangle = \lambda_n$. En particulier, $\|T(e_n)\| \geqslant |\lambda_n|$. Par la caractérisation (iv) des applications linéaires compactes, on a $\lim \lambda_n = 0$, d'où le résultat. □

3.11 Théorème. *Une application linéaire compacte normale admet une base hilbertienne formée de vecteurs propres.*

Démonstration. Soit $T \in \mathcal{L}(E)$ une application linéaire compacte normale. Soit S son spectre. Pour $\lambda \in S$ notons E_λ l'espace propre de T associé. On doit démontrer que :

a) les E_λ sont deux à deux orthogonaux

b) Le sous-espace engendré par les E_λ est dense.

Alors si B_λ est une base hilbertienne de E_λ, $\displaystyle\bigcup_{\lambda \in S} B_\lambda$ sera la base voulue.

Si $x \in E_\lambda$, comme $TT^*(x) = T^*T(x) = \lambda T^*(x)$ on trouve $T^*(x) \in E_\lambda$. Pour tout $y \in E_\lambda$ on a $\langle T^*(x), y\rangle = \langle x, T(y)\rangle = \langle \overline{\lambda} x, y\rangle$; donc $T^*(x) - \overline{\lambda} x \in E_\lambda \cap E_\lambda^\perp$ donc $T^*(x) = \overline{\lambda} x$.

Si $x \in E_\lambda$ et $y \in E_\mu$ alors $\langle T(x), y\rangle = \mu\langle x, y\rangle = \langle x, T^* y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$ d'où a).

Notons F le sous-espace de E engendré par les E_λ, $\lambda \in S - \{0\}$. Alors $T(F) \subset F$ et $T^*(F) \subset F$. Il s'ensuit que $T(F^\perp) \subset F^\perp$ et $T^*(F^\perp) \subset F^\perp$. Notons $T_1 \in \mathcal{L}(F^\perp)$ la restriction de T. Alors T_1^* est la restriction de T^*, donc T_1 est normal. Remarquons que T_1 est compacte, qu'elle n'a pas de valeur propre non nulle ; par l'alternative de Fredholm, T_1 n'a pas de valeur spectrale non nulle ; par le théorème 2.16.d), $T_1 = 0$, donc $F^\perp = E_0$, d'où b). □

3.3 Opérateurs de Hilbert-Schmidt

3.12 Lemme. *Soient E et F des espaces hilbertiens, B une base hilbertienne de E et B' une base hilbertienne de F. Pour tout $T \in \mathcal{L}(E, F)$ on a :*

$$\sum_{b \in B,\, b' \in B'} |\langle b', T(b)\rangle|^2 = \sum_{b \in B} \|T(b)\|^2 = \sum_{b' \in B'} \|T^*(b')\|^2 (\in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}) .$$

Cette quantité ne dépend pas des bases B et B' choisies.

Démonstration. Pour $x \in E$ et $y \in F$ on a $\|x\|^2 = \displaystyle\sum_{b \in B} |\langle x, b\rangle|^2$ et $\|y\|^2 = \displaystyle\sum_{b' \in B'} |\langle b', y\rangle|^2$, d'où la première assertion. Il est clair que $\displaystyle\sum_{b \in B} \|T(b)\|^2$ ne dépend pas de B' et que $\displaystyle\sum_{b' \in B'} \|T^*(b')\|^2$ ne dépend pas de B, d'où la deuxième assertion. □

Pour $T \in \mathcal{L}(E, F)$ on pose $\|T\|_2 = \Big(\displaystyle\sum_{b \in B} \|T(b)\|^2\Big)^{1/2}$ où B est une base hilbertienne de E. Posons $\mathcal{L}^2(E, F) = \{T \in \mathcal{L}(E, F),\ \|T\|_2 < +\infty\}$.

3.13 Proposition. *Pour $T \in \mathcal{L}(E, F)$, on a $\|T\| \leqslant \|T\|_2$.*

Démonstration. Pour tout $x \in E$ de norme 1, prenant une base hilbertienne contenant x, on a $\|T\|_2 \geqslant \|T(x)\|$; ceci ayant lieu pour tout x, il en résulte que $\|T\|_2 \geqslant \|T\|$. □

3.14 Théorème. *Soient E et F des espaces hilbertiens.*

a) L'ensemble $\mathcal{L}^2(E, F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E, F)$.

b) Pour tout $S, T \in \mathcal{L}^2(E, F)$ et toute base hilbertienne B de E, la famille $(\langle S(b), T(b)\rangle)_{b \in B}$ est sommable ; l'application $(S, T) \mapsto \displaystyle\sum_{b \in B} \langle S(b), T(b)\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathcal{L}^2(E, F)$ indépendant de la base B.

On note $(S, T) \mapsto (S, T)_2$ ce produit scalaire.

c) *Muni de ce produit scalaire, $\mathcal{L}^2(E,F)$ est un espace hilbertien.*

d) $\mathcal{L}^2(E,F) \subset \mathcal{K}(E,F)$.

e) *Soit $T \in \mathcal{K}(E,F)$; notons $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les valeurs propres non nulles de T^*T comptées avec leur multiplicité. Alors* $\|T\|_2^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n$.

Démonstration. a) et b) Soient $S, T \in \mathcal{L}(E,F)$ et B une base hilbertienne de E. Pour $b \in B$ on a $|\langle S(b), T(b)\rangle| \leqslant \|S(b)\|\|T(b)\| \leqslant 1/2(\|S(b)\|^2 + \|T(b)\|^2)$. On en déduit que $(\langle S(b), T(b)\rangle)_{b\in B}$ est sommable. Comme $\|S(b)+T(b)\|^2 = \|S(b)\|^2 + \|T(b)\|^2 + 2\Re(\langle S(b), T(b)\rangle)$, on en déduit que $S + T \in \mathcal{L}^2(E,F)$; a) est alors clair. Il est clair que $(S,T) \mapsto \sum_{b\in B}\langle S(b), T(b)\rangle$ est un produit scalaire. On a $\sum_{b\in B}\langle S(b)|T(b)\rangle = 1/4(\|S+T\|_2^2 - \|S-T\|_2^2 - i\|S+iT\|_2^2 + i\|S-iT\|_2^2)$, (identité de polarisation) d'où l'indépendance de la base.

c) De b) il résulte que $\mathcal{L}^2(E,F)$ est un espace préhilbertien. On doit démontrer qu'il est séparé et complet. Remarquons que, pour tout $T \in \mathcal{L}^2(E,F)$ et tout $x \in E$ de norme 1, prenant une base hilbertienne contenant x, on a $\|T\|_2 \geqslant \|T(x)\|$; ceci ayant lieu pour tout x, il en résulte que $\|T\|_2 \geqslant \|T\|$. En particulier $\mathcal{L}^2(E,F)$ est séparé. Soit T_n une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}^2(E,F)$; comme $\| \ \| \leqslant \| \ \|_2$, T_n est une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}(E,F)$ qui est complet, donc la suite T_n converge en norme vers un opérateur T. Soit alors $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$; remarquons que l'ensemble $C_\varepsilon = \{S \in \mathcal{L}(E,F),\ \|S\|_2 \leqslant \varepsilon\}$ est l'intersection pour toutes les parties finies I de B de $\{S \in \mathcal{L}(E,F);\ \sum_{b\in I}\|S(b)\|^2 \leqslant \varepsilon^2\}$; c'est donc une partie fermée de $\mathcal{L}(E,F)$. Comme T_n est de Cauchy dans $\mathcal{L}^2(E,F)$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $m, n \geqslant N$ on ait $\|T_m - T_n\|_2 \leqslant \varepsilon$. Fixons $n \geqslant N$; comme $T_m - T_n$ converge vers $T - T_n$, on a $T - T_n \in C_\varepsilon$; on en déduit immédiatement que $T \in \mathcal{L}^2(E,F)$ et que $\lim_{n\to+\infty} \|T - T_n\|_2 = 0$.

d) Soit $T \in \mathcal{L}^2(E,F)$ et (e_n) un système orthonormal. Soit B une base contenant les e_n. La famille $(\|T(b)\|^2)$ est sommable, donc la suite $\|T(e_n)\|$ tend vers 0. Donc T est compact par la caractérisation (iv) du théorème 3.8.

e) est clair si on choisit une base B formée de vecteurs propres pour T^*T. □

3.15 Définition. Soient E et F des espaces hilbertiens. Un opérateur $T \in \mathcal{L}^2(E,F)$ est dit de *Hilbert-Schmidt.*

3.16 Proposition. *Soient E, F et H des espaces hilbertiens. Pour tout $S \in \mathcal{L}(E,F)$ et $T \in \mathcal{L}(F,H)$ on a :*

a) $\|S\|_2 = \|S^*\|_2$.

b) $\|TS\|_2 \leqslant \|T\|\|S\|_2$ *et* $\|TS\|_2 \leqslant \|T\|_2\|S\|$.

c) *Si S ou T est un opérateur de Hilbert-Schmidt alors il en va de même pour TS.*

Démonstration. a) résulte de la définition de $\|S\|_2$ (lemme 3.12).

b) Soit B une base hilbertienne de E. Pour tout $b \in B$ on a $\|TS(b)\| \leqslant \|T\|\|S(b)\|$ donc $\|TS\|_2^2 = \sum_{b\in B}\|TS(b)\|^2 \leqslant \|T\|^2 \sum_{b\in B}\|S(b)\|^2 = \|T\|\|S\|_2$. La deuxième assertion en résulte en remplaçant S et T par leurs adjoints.

c) résulte aussitôt de b).

□

En particulier l'espace $\mathcal{L}^2(E) = \mathcal{L}^2(E,E)$ est un idéal bilatère de $\mathcal{L}(E)$.

3.4 Opérateurs nucléaires

3.17 Proposition. *a) Soient E un espace hilbertien et $T \in \mathcal{L}(E)_+$. La quantité*

$$\mathrm{Tr}(T) = \sum_{b \in B} \langle T(b), b\rangle \in (\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\})$$

ne dépend pas de la base hilbertienne B.

b) Pour tout $S, T \in \mathcal{L}(E)_+$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}_+$ on a $\mathrm{Tr}(S+T) = \mathrm{Tr}(S) + \mathrm{Tr}(T)$ et $\mathrm{Tr}(\lambda S) = \lambda \mathrm{Tr}(S)$.

c) Soient F un espace hilbertien $U \in \mathcal{L}(E,F)$ un opérateur unitaire et $T \in \mathcal{L}(E)_+$ alors $\mathrm{Tr}(UTU^*) = \mathrm{Tr}(T)$.

d) Si $T \in \mathcal{L}(E)_+$ est compact, $\mathrm{Tr}(T)$ est la somme des valeurs propres de T comptées avec leur multiplicité.

Démonstration. Écrivons $T = S^*S$ alors $\mathrm{Tr}(T) = \|S\|_2^2$ ne dépend pas de la base, d'où a). b) est clair. Soit B une base hilbertienne de E ; alors $U(B)$ est une base hilbertienne de F. On a $\displaystyle\sum_{b \in U(B)} \langle UTU^*(b), b\rangle = \sum_{b \in B} \langle T(b), b\rangle$, d'où c). Enfin, d) est clair si on choisit une base B formée de vecteurs propres pour T. □

Soient E, F des espaces hilbertiens. Pour $T \in \mathcal{L}(E,F)$ posons

$$\|T\|_1 = \mathrm{Tr}(|T|) \ \text{ et } \ \mathcal{L}^1(E,F) = \{T \in \mathcal{L}(E,F),\ \|T\|_1 < +\infty\}.$$

3.18 Lemme. *Soit $T \in \mathcal{L}(E,F)$.*

a) Soient H un espace hilbertien et $S \in \mathcal{L}(E,H)$ tels que $|T| = S^*S$. On a $\|T\|_1 = \|S\|_2^2$.

b) On a $\|T\|_1 = \sup\{|(R|TS)_2|,\ R \in \mathcal{L}^2(E),\ S \in \mathcal{L}^2(E,F),\ \|R\|\|S\| \leqslant 1\}$.

Démonstration. a) est clair.

b) Si $T \in \mathcal{L}^1(E,F)$; notons $T = u|T|$ la décomposition polaire de T et $|T|^{1/2} \in \mathcal{L}^2(E)$ la racine de $|T|$; soient $R \in \mathcal{L}^2(E)$ et $S \in \mathcal{L}^2(E,F)$ tels que $\|S\|\|R\| \leqslant 1$. Soit B une base hilbertienne de E ; on a $(R|TS) = \displaystyle\sum_B \langle R(b)|TS(b)\rangle = \sum_B \langle R(b)|TS(b)\rangle = (|T|^{1/2}u^*R, |T|^{1/2}S)_2$. On en déduit que $|(R|TS)_2| \leqslant \||T|^{1/2}R\|_2 \||T|^{1/2}u^*S\|_2 \leqslant \|u^*S\|\|R\|\||T|^{1/2}\|_2^2 \leqslant \||T|^{1/2}\|_2^2 = \|T\|_1$. Donc $\{|(R|TS)_2|,\ R \in \mathcal{L}^2(E),\ S \in \mathcal{L}^2(E,F),\ \|R\|\|S\| \leqslant 1\}$ est majoré par $\|T\|_1$.

Soit B une base hilbertienne de E et I une partie finie de B ; notons P le projecteur orthogonal sur le sous-espace de E engendré par I ; alors $\displaystyle\sum_{b \in I} \langle b \,|\, |T|(b)\rangle = \sum_{b \in I} \langle b|u^*T(b)\rangle = (uP, TP)_2 \leqslant \sup\{|(R|TS)_2|,\ R \in \mathcal{L}^2(E),\ S \in \mathcal{L}^2(E,F),\ \|R\|\|S\| \leqslant 1\}$. Prenant le « sup » sur les parties finies de B on trouve $\|T\|_1 \leqslant \sup\{|(TR,S)_2|,\ R \in \mathcal{L}^2(E),\ S \in \mathcal{L}^2(E,F),\ \|R\|\|S\| \leqslant 1\}$. □

3.19 Théorème. *Soient E, F, H des espaces hilbertiens.*

a) L'ensemble $\mathcal{L}^1(E,F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E,F)$.

b) L'application $T \mapsto \|T\|_1$ est une norme sur $\mathcal{L}^1(E,F)$ pour laquelle $\mathcal{L}^1(E,F)$ est complet.

c) Pour tout $T \in \mathcal{L}(E,F)$ on a $\|T\|_1 = \|T^*\|_1$.

d) Pour tout $S \in \mathcal{L}(E,F)$ et tout $T \in \mathcal{L}(F,H)$ on a $\|TS\|_1 \leqslant \|S\|_1\|T\|$ et $\|TS\|_1 \leqslant \|S\|\|T\|_1$.

Démonstration. a) et b) Soient $S, T \in \mathcal{L}(E,F)$. Pour tout $R_1 \in \mathcal{L}^2(E)$ et $R_2 \in \mathcal{L}^2(E,F)$ tels que $\|R_1\|\|R_2\| \leqslant 1$, on a $|((S+T)R_1, R_2)_2| \leqslant |(SR_1, R_2)_2| + |(TR_1, R_2)_2|$. Par le lemme 3.18.b), $\|S+T\|_1 \leqslant \|S\|_1 + \|T\|_1$; on en déduit immédiatement que $\mathcal{L}^1(E,F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E,F)$ et que $\| \ \|_1$ est une semi-norme. Par le lemme 3.18.a), $\|T\|_1 = \||T|^{1/2}\|_2^2 \geqslant \||T|^{1/2}\|^2 = \|T\|$ (prop. 3.13). En particulier, $\| \ \|_1$ est une norme.

Par le lemme 3.18.b) l'application $T \mapsto \mathrm{Tr}(|T|)$ est semi-continue inférieurement et on en déduit comme dans le th. 3.14.c) que, muni de cette norme $\mathcal{L}^1(E)$ est complet.

c) On a $|T^*| = u^*|T|u^* = (|T|^{1/2}u^*)^*(|T|^{1/2}u^*)$. Donc $\|T^*\|_1 = \||T|^{1/2}u^*\|_2^2 \leqslant \||T|^{1/2}\|_2^2 = \|T\|_1$; remplaçant T par T^*, on en déduit c).

d) Soient $R_1 \in \mathcal{L}^2(E)$ et $R_2 \in \mathcal{L}^2(E,H)$. On a $(TSR_1, R_2)_2 = (SR_1, T^*R_2)_2$. Il résulte alors du lemme 3.18.b) que $\|TS\|_1 \leqslant \|S\|_1\|T\|$; remplaçant S et T par leur adjoint il résulte de c) que $\|TS\|_1 \leqslant \|S\|\|T\|_1$. □

3.20 Théorème. *Soient E, F des espaces hilbertiens.*

a) *Pour $T \in \mathcal{L}^1(E)$ et pour toute base hilbertienne B de E la famille $(\langle T(b), b\rangle)_{b\in B}$ est sommable et la quantité* $\mathrm{Tr}(T) = \displaystyle\sum_{b\in B}\langle b|T(b)\rangle$ *ne dépend pas de la base hilbertienne B.*

b) *On a* $|\mathrm{Tr}(T)| \leqslant \mathrm{Tr}(|T|)$.

c) *Pour tout $S \in \mathcal{L}(E,F)$, $T \in \mathcal{L}(F,E)$ si $S \in \mathcal{L}^1(E,F)$ ou si S et T sont de Hilbert-Schmidt, alors* $\mathrm{Tr}(TS) = \mathrm{Tr}(ST)$.

Démonstration. On a $\langle T(b), b\rangle = \langle |T|^{1/2}(b), |T|^{1/2}u^*(b)\rangle$. Comme $|T|^{1/2}, |T|^{1/2}u^* \in \mathcal{L}^2(E)$, a) résulte du théorème 3.14.b). De plus $|\mathrm{Tr}(T)| = |(|T|^{1/2}, |T|^{1/2}u^*)_2| \leqslant \||T|^{1/2}\|_2\||T|^{1/2}u^*\|_2 \leqslant \|T\|_1$, d'où b).

c) L'application $(S_1, S_2) \mapsto (S_2^*, S_1^*)_2$ est une forme sesquilinéaire sur $\mathcal{L}(E,F)$ (linéaire en S_2 et anti-linéaire en S_1). Pour $S_1 = S_2$, on a $(S_1^*, S_1^*)_2 = \|S_1^*\|_2^2 = \|S_1\|_2^2$. D'après l'identité de polarisation, il vient $(S_2^*, S_1^*)_2 = (S_1, S_2)_2$, soit $\mathrm{Tr}(S_2S_1^*) = \mathrm{Tr}(S_1^*S_2)$. Prenant $S_1 = T^*$ et $S_2 = S$, il vient $\mathrm{Tr}(TS) = \mathrm{Tr}(ST)$.

Enfin, soient $T \in \mathcal{L}(F,E)$ et $S \in \mathcal{L}^1(E,F)$. Donnons nous $S_1 \in \mathcal{L}^2(E,F)$ et $S_2 \in \mathcal{L}^2(E)$ tels que $S = S_1S_2$; on a $\mathrm{Tr}(ST) = \mathrm{Tr}(S_1S_2T) = \mathrm{Tr}(S_2TS_1) = \mathrm{Tr}(TS)$. □

3.21 Définition. Un opérateur $T \in \mathcal{L}^1(E)$ est appelé *nucléaire* ou *à trace.*

Il est clair que $\mathcal{L}^1(E,F) \subset \mathcal{L}^2(E,F)$. Un opérateur de rang fini est nucléaire.

4 Décomposition spectrale des opérateurs autoadjoints et unitaires

4.1 « Rappels » d'intégration

Un espace mesuré est donné par :

a) Un ensemble X ;
b) une tribu $\mathcal{B}$ sur X ;
c) une mesure.

4.1.1 Tribus

4.1 Définition. Une tribu sur X est un ensemble $\mathcal{B}$ de parties de X telle que :
- $\emptyset \in \mathcal{B}$;
- si $A \in \mathcal{B}$, alors $X \setminus A \in \mathcal{B}$;
- si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{B}$, alors $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{B}$.

Bien sûr, si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{B}$, alors $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{B}$; en effet, son complémentaire est $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(X \setminus A_n)$ est dans $\mathcal{B}$.

4.2 Remarque. Une intersection de tribus sur X est une tribu sur X. Si $\mathcal{D}$ est un ensemble de parties de X, il existe donc une plus petite tribu contenant $\mathcal{D}$. On l'appelle *tribu engendrée* par $\mathcal{D}$.

4.3 Définition. Soit (E, d) un espace métrique. La tribu engendrée par les ouverts de E s'appelle la *tribu borélienne* de E et ses éléments s'appellent les *boréliens* de E.

Soient $\mathcal{B}_1$ une tribu sur X_1 et $\mathcal{B}_2$ une tribu sur X_2 un espace métrique. Une application $X_1 \to X_2$ est dite mesurable si pour tout $A \in \mathcal{B}_2$ de E, $f^{-1}(A) \in \mathcal{B}_1$.

4.1.2 Mesure

4.4 Définition. Une mesure sur $(X, \mathcal{B})$ est une application $\mu : \mathcal{B} \to [0, +\infty]$ telle que :
- $\mu(\emptyset) = 0$;
- si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{B}$ *deux à deux disjoints* on ait $\displaystyle\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_n \mu(A_n)$.

4.1.3 L'intégrale

Soit $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espace mesuré

On veut intégrer des fonctions mesurables $X \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ ou un espace de Banach

Ce n'est pas l'endroit de faire un cours complet d'intégration...

Disons q'u'on commence par définir l'intégrale d'une fonction étagée positive, puis d'une fonction positive (sup des intégrales des fonctions étagées $\leqslant f$).

On dit que $f : X \to \mathbb{K}$ est intégrable si elle est mesurable et $\displaystyle\int |f|\, d\mu < +\infty$. On définit l'intégrale en écrivant $f = f_+ - f_-$ si f est réelle, puis $f = g + ih$ si g est complexe

On peut construire des mesures grâce au :

4.5 Théorème de représentation de Riesz. *Soit X un espace (localement) compact. Notons $\mathcal{B}$ sa tribu borélienne. Soit Λ une forme linéaire positive sur $C_c(X)$. Il existe une mesure de Borel μ sur $(X, \mathcal{B})$ telle que, pour tout $f \in C_c(X)$, on ait $\Lambda(f) = \displaystyle\int_X f d\mu$.*

4.6 Remarque. Pour intégrer les fonctions à valeurs dans un espace de Banach E, on procède de la manière suivante :

- Si $g : X \to E$ est étagée et prend les valeurs $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on dit qu'elle est *absolument intégrable* si la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu\big(\{x \in X;\ f(x) = y_n\}\big)\|y_n\|$ converge et l'on pose
$$\int_X f(x)\, d\mu(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu\big(\{x \in X;\ f(x) = y_n\}\big) y_n.$$
- Si $f : X \to E$ est mesurable, on dit que f est *absolument intégrable* s'il existe une suite de fonctions étagées absolument intégrables telle que $\displaystyle\int_X \|f - f_n\|\, d\mu$ tend vers 0. Dans ce cas, on vérifie que la suite $\Big(\displaystyle\int_X f_n(x)\, d\mu(x)\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy et l'on pose
$$\int_X f(x)\, d\mu(x) = \lim \int_X f_n(x)\, d\mu(x).$$
On vérifie aisément que, si F est un espace de Banach, si $T : E \to F$ est une application linéaire continue, et $f : X \to E$ est absolument intégrable, alors $T \circ f : X \to F$ est absolument intégrable et l'on a
$$\int_X T(f(x))\, d\mu(x) = T\Big(\int_X f(x)\, d\mu(x)\Big).$$

4.1.4 Les espaces L^2 et L^∞

Soit $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espace mesuré.

Fonctions négligeables : Une fonction mesurable $f : X \to \mathbb{K}$ est dite négligeable si $\{x \in X;\ f(x) \neq 0\}$ est de mesure nulle. Notons $\mathcal{N}$ l'ensemble des fonctions négligeables de $X \to \mathbb{C}$.

On note $\mathcal{L}^2(X, \mathcal{B}, \mu)$ l'ensemble des fonctions mesurables $f : X \to \mathbb{C}$ telles que $\displaystyle\int_X |f(x)|^2\, d\mu(x) < +\infty$.

Pour $f, g \in \mathcal{L}^2(X, \mathcal{B}, \mu)$, on pose $\langle f|g\rangle = \displaystyle\int_X \overline{f(x)}\, g(x), d\mu(x)$. On définit ainsi une forme sesquilinéaire positive. Pour $f \in \mathcal{L}^2(X, \mathcal{B}, \mu)$, on a $\langle f|f\rangle = 0 \iff f \in \mathcal{N}$.

4.7 Proposition. *L'espace quotient $L^2(X, \mathcal{B}, \mu) = \mathcal{L}^2(X, \mathcal{B}, \mu)/\mathcal{N}$ est un espace hilbertien.*

4.8 Remarque (Une précision sur le théorème de Riesz)**.** Soit X un espace métrique compact et soit $\Lambda : C(X) \to \mathbb{R}$ une forme linéaire positive. D'après le théorème de Riesz, il existe une mesure borélienne μ telle que l'on ait $\Lambda(f) = \displaystyle\int_X f(x)\, d\mu(x)$. On a une application $w : C(X) \to L^2(X, \mu)$ définie par $w(f) = f$ (vu comme élément de L^2).

- L'image de w est dense
- Le noyau de Λ est l'ensemble des fonctions nulles sur e support de μ *i.e.* le complémentaire du plus grand ouvert de mesure nulle.

On note $\mathcal{L}^\infty(X, \mathcal{B}, \mu)$ l'ensemble des fonctions $f : X \to \mathbb{C}$ mesurables et bornées.

4.2 Opérateurs de multiplication et spectre

Soient $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espace mesuré et $f \in \mathcal{L}^\infty(X, \mu)$. On note $\|f\|_{\infty,ess}$ son « sup essentiel » c'est à dire le plus petit nombre réel positif t tel que $\{x \in X,\ |f(x)| > t\}$ soit μ-négligeable. Soit $\xi : X \to \mathbb{C}$ une application mesurable de carré intégrable. L'application $f\xi$ est alors mesurable ; de plus, pour μ-presque tout $x \in X$, on a $|(f\xi)(x)| \leqslant \|f\|_{\infty,ess}|\xi(x)|$, donc $\|f\xi\|_2 \leqslant \|f\|_{\infty,ess}\|\xi\|_2$.

Notons $T_f : L^2(X, \mu) \to L^2(X, \mu)$ l'application qui, à (la classe d')une application $\xi : X \to \mathbb{C}$ mesurable de carré intégrable associe (la classe de) l'application $f\xi$. Par ce qui précède, $T_f \in \mathcal{L}(L^2(X, \mu))$ et $\|T_f\| \leqslant \|f\|_{\infty,ess}$. Pour $\xi, \eta \in \mathcal{L}^2(X, \mu)$, on a $\langle f\xi, \eta\rangle = \displaystyle\int_X f(x)\xi(x)\overline{\eta(x)}\ d\mu(x) = \langle \xi, \overline{f}\eta\rangle$, donc $T_f^* = T_{\overline{f}}$. On en déduit immédiatement que T_f est normal. Remarquons que si f est réelle, alors T_f est autoadjoint et si pour presque tout $x \in X$ on a $|f(x)| = 1$, alors $T_f^*T_f = T_{|f|^2} = \mathrm{id}_{L^2(X,\mu)}$.

4.9 Proposition. *Le spectre de T_f est l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que, pour tout $\varepsilon > 0$ l'ensemble $\{x \in X,\ |f(x) - \lambda| < \varepsilon\}$ ne soit pas μ-négligeable.*

Démonstration. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. S'il existe $\varepsilon > 0$ tel que l'ensemble $\{x \in X,\ |f(x) - \lambda| < \varepsilon\}$ soit μ-négligeable, notons h la fonction définie par $h(x) = (f(x) - \lambda)^{-1}$ si $f(x) \neq \lambda$ et $h(x) = 0$ sinon. Alors pour μ-presque tout x on a $|h(x)| \leqslant \varepsilon^{-1}$ et $h(x)(f(x) - \lambda) = 1$. On en déduit que $h \in \mathcal{L}^\infty(X, \mu)$ et $T_h(T_f - \lambda\mathrm{id}_{L^2(X,\mu)}) = (T_f - \lambda\mathrm{id}_{L^2(X,\mu)})T_h = \mathrm{id}_{L^2(X,\mu)}$.

Si pour tout $\varepsilon > 0$ l'ensemble $A_\varepsilon = \{x \in X,\ |f(x) - \lambda| < \varepsilon\}$ n'est pas μ-négligeable, soit $\xi \in L^2(X, \mu)$ nulle hors de A_ε et telle que $\|\xi\|_2 = 1$; alors $|(T_f - \lambda\mathrm{id}_{L^2(X,\mu)})(\xi)| \leqslant \varepsilon|\xi|$ donc $\|(T_f - \lambda\mathrm{id}_{L^2(X,\mu)})(\xi)\| \leqslant \varepsilon$. Il résulte de la prop. 1.12 que $T_f - \lambda\mathrm{id}_{L^2(X,\mu)}$ n'est pas bijective. $\square$

4.10 Proposition. *Pour $g \in \mathbb{C}(X)$ sans pôles dans $\mathrm{Sp}\,T_f$ on a $g(T_f) = T_{g(f)}$. Si T_f est autoadjoint ou unitaire, pour tout $g \in C(\mathrm{Sp}\,T_f)$ on a $g(T_f) = T_{g\circ f}$.*

Démonstration. L'application $g \mapsto T_{g(f)}$ est un morphisme d'anneaux linéaire, d'où la première assertion (par l'unicité dans la prop. 2.1) ; si T_f est autoadjoint ou unitaire, l'application $g \mapsto T_{g\circ f}$ est un morphisme d'anneaux linéaire et continu, d'où la deuxième assertion (par l'unicité dans le théorème 2.22). $\square$

4.3 Décomposition spectrale

4.11 Lemme. *Soient H un espace hilbertien, $T \in \mathcal{L}(H)$ un élément autoadjoint ou unitaire et $x \in H$.*

a) Il existe une mesure finie μ sur $\mathrm{Sp}\,T$ telle que, pour toute fonction continue $f \in C(\mathrm{Sp}\,T)$ on ait $\langle x|f(T)(x)\rangle = \displaystyle\int_{\mathrm{Sp}\,T} f(t)\ d\mu(t)$.

b) Notons $v : C(\mathrm{Sp}\,T) \to H$ l'application linéaire définie par $v(f) = f(T)(x)$ et $w : C(\mathrm{Sp}\,T) \to L^2(\mathrm{Sp}\,T, \mu)$ l'application qui à une fonction continue associe sa classe dans L^2. Il existe une isométrie $u : L^2(\mathrm{Sp}\,T, \mu) \to H$ telle que $u \circ w = v$. On a $u(1_\mu) = x$ où 1_μ désigne la classe de la fonction constante 1 dans $L^2(\mathrm{Sp}\,T, \mu)$; de plus $uT_z = Tu$ et $uT_{\overline{z}} = T^*u$.

Démonstration. a) Considérons la forme linéaire $\varphi : f \mapsto \langle x | f(T)(x) \rangle$ sur $C(\operatorname{Sp} T)$. Si $f \in C(\operatorname{Sp} T)$ est positive, $f(T) = f(T)^*$ et $\operatorname{Sp} f(T) \subset \mathbb{R}_+$ (par le théorème 2.23), donc $f(T) \in \mathcal{L}(H)_+$; donc $\langle x | f(T)(x) \rangle \in \mathbb{R}_+$ (th. 2.24). On en déduit que φ est une forme linéaire positive sur $C(\operatorname{Sp} T)$. Il existe donc, d'après le théorème de Riesz, une unique mesure μ sur $\operatorname{Sp} T$ telle que, pour tout $f \in C(\operatorname{Sp} T)$ on ait $\varphi(f) = \int_{\operatorname{Sp} T} f(t)\, d\mu(t)$.

b) Pour $f \in C(\operatorname{Sp} T)$ on a $\|v(f)\|^2 = \langle f(T)(x), f(T)(x) \rangle = \langle x | \overline{f}(T) f(T)(x) \rangle = \int_{\operatorname{Sp} T} |f(t)|^2\, d\mu(t) = \|w(f)\|^2$;munissons l'espace $C(\operatorname{Sp} T)$ de la semi-norme $f \mapsto \|v(f)\|$; l'application linéaire w étant isométrique d'image dense, il existe $u \in \mathcal{L}(L^2(\operatorname{Sp} T, \mu), H)$ telle que $v = u \circ w$ (lemme 2.21). Pour $f \in C(\operatorname{Sp} T)$ on a $\|u(w(f))\| = \|v(f)\| = \|w(f)\|$; par densité de l'image de w, on en déduit que pour tout $\xi \in L^2(\operatorname{Sp} T, \mu)$ on a $\|u(\xi)\| = \|\xi\|$, en d'autres termes u est isométrique. Notant $1 \in C(\operatorname{Sp} T)$ la fonction constante égale à 1, on a $1_\mu = w(1)$, donc $u(1_\mu) = v(1) = 1(T)(x) = \mathrm{id}_H(x) = x$.
Enfin, pour tout $f, g \in C(\operatorname{Sp} T)$, on a $u(T_f(w(g))) = u(w(fg)) = v(fg) = f(T)g(T)(x) = f(T)v(g) = f(T)u(w(g))$; par densité de l'image de w, on en déduit que pour tout $f \in C(\operatorname{Sp} T)$ et tout $\xi \in L^2(\operatorname{Sp} T, \mu)$ on a $u(T_f(\xi)) = f(T)u(\xi)$; prenant $f = z$ et $f = \overline{z}$ on trouve le résultat. □

4.12 Théorème. *Soient H un espace hilbertien séparable et $T \in \mathcal{L}(H)$ un élément autoadjoint ou unitaire. Il existe un espace mesuré (X, μ), une fonction $f \in \mathcal{L}^\infty(X, \mu)$ et un isomorphisme $U : L^2(X, \mu) \to H$ tel que $T = UT_fU^*$.*

Démonstration. Pour $x \in H$, on note μ_x la mesure sur $\operatorname{Sp} T$ telle que, pour $f \in C(\operatorname{Sp} T)$ on ait

$$\langle x | f(T)(x) \rangle = \int_{\operatorname{Sp} T} f(\lambda)\, d\mu_x(\lambda)$$

et $u_x : L^2(\operatorname{Sp} T, \mu_x) \to H$ l'isométrie décrite dans le lemme 4.11.b). Notons E_x l'image de u_x. C'est un sous-espace fermé de H (puisque u_x est une isométrie).

4.13 Lemme. *a) Si $y \in E_x^\perp$, alors $E_y \subset E_x^\perp$.*

b) Il existe une suite (v_n) d'éléments H telle que les E_{v_n} soient deux à deux orthogonaux et la somme des E_{v_n} pour $n \in \mathbb{N}$ soit dense.

Démonstration. a) Si $y \in E_x^\perp$, alors pour tout $f \in C(\operatorname{Sp} T)$ et tout $\xi \in L^2(\operatorname{Sp} T, \mu_x)$, on a $\langle u_x(\xi) | f(T)(y) \rangle = \langle \overline{f}(T) u_x(\xi) | y \rangle = \langle u_x(T_{\overline{f}}(\xi)) | y \rangle = 0$. Comme $\{f(T)(y),\ f \in C(\operatorname{Sp} T)\}$ est dense dans E_y on en déduit a).

b) Soit (x_n) une suite d'éléments de H *totale* dans H (*i.e.* l'espace vectoriel engendré soit dense).
On prend $v_0 = x_0$.
Supposons $(v_0, \dots, v_{n-1})$ construits. Écrivons $F_n = E_{v_0} \oplus E_{v_1} \oplus \ldots \oplus E_{v_{n-1}}$ et $x_n = y_n + v_n$ avec $y_n \in F_n$ et $v_n \in F_n^\perp$. Alors, d'après a), E_{v_n} est orthogonal aux pour $j < n$ donc à F_n. Comme $v_n \in E_{v_n}$ et $y_n \in F_n$, il vient $x_n \in \bigoplus_{k=0}^{n} E_{v_k}$.
La suite ainsi construite convient : la somme des E_{v_k} continent les x_k, donc est dense. □

Fin de la démonstration du théorème 4.12. Soit (v_n) comme dans le lemme 4.13.b). Posons $X = \operatorname{Sp} T \times \mathbb{N}$. Si g est une fonction sur X, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note g_n la fonction $t \mapsto g(t, n)$ sur $\operatorname{Sp} T$.

Soit B un borélien de X. Posons $B_n = \{\lambda \in \operatorname{Sp} T;\ (\lambda, n) \in B\}$. On définit une mesure μ sur X en posant $\mu(B) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mu_{v_n}(B_n)$.

Si $\xi \in L^2(X, \mu)$, on note ξ_n l'application (presque partout définie) $\lambda \mapsto \xi(\lambda, n)$. C'est un élément de $L^2(X, \mu_{v_n})$. On a $\|\xi\|_2^2 = \int_X |\xi(\lambda, n)|^2 \, d\mu(\lambda, n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\operatorname{Sp} T} |\xi_n(\lambda)|^2 \, d\mu_{v_n}(\lambda) = \sum_{n=0}^{+\infty} \|\xi_n\|_2^2$.

Comme $u_{v_n}(\xi_n) \in E_{v_n}$, les E_{v_n} sont deux à deux orthogonaux et la série $\sum_{k=0}^{n} \|u_{v_n}(\xi_n)\|^2$ converge (vu que $\|u_{v_n}(\xi_n)\| = \|\xi_n\|_2$), on en déduit que la série $\sum_{k=0}^{+\infty} u_{v_n}(\xi_n)$ converge. Posons $U(\xi) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_{v_n}(\xi_n)$. L'application U est bien définie et isométrique et, puisque l'image de U contient les E_{z_n}, son image est dense. Comme U est isométrique, son image est fermée : donc U est surjective.

Notons enfin $f : X \to \mathbb{C}$ l'application $(\lambda, n) \mapsto \lambda\ (\in \operatorname{Sp} T \subset \mathbb{C})$. Pour $\xi \in \mathcal{L}^2(X, \mu)$, on a $M_f(\xi)(\lambda, n) = f(\lambda, n)\xi(\lambda, n) = \lambda \xi_n(\lambda) = (M_z(\xi_n))(\lambda)$; donc, $\xi \in \mathcal{L}^2(X, \mu)$, on a

$$UM_f(\xi) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{v_n}(M_z \xi_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{v_n}(M_z \xi_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} T u_{v_n}(\xi_n) = TU(M_f).$$

□

Soit H un espace hilbertien séparable et $T \in \mathcal{L}(H)$ un élément autoadjoint ou unitaire. Ecrivons $T = UM_f U^*$. L'application $g \mapsto UM_{g \circ f} U^*$ est un morphisme continu d'algèbres de $C(\operatorname{Sp} T)$ dans $\mathcal{L}(H)$; par l'unicité dans le théorème 2.22, pour toute fonction continue $g \in C(\operatorname{Sp} T)$, on a $g(T) = UM_{g \circ f} U^*$.

4.4 Décomposition spectrale (2)

4.14 Théorème. *Soient H un espace hilbertien séparable et $T \in \mathcal{L}(H)$ un élément autoadjoint ou unitaire. Notons $\mathcal{B}(\operatorname{Sp} T)$ l'espace vectoriel des fonctions boréliennes bornées sur $\operatorname{Sp} T$. Il existe un unique morphisme d'algèbres $\Phi : \mathcal{B}(\operatorname{Sp} T) \to \mathcal{L}(H)$ satisfaisant $\Phi(1) = \mathrm{id}_H$, $\Phi(z) = T$ et tel que pour toute suite bornée $g_n \in \mathcal{B}(\operatorname{Sp} T)$ convergeant simplement vers $g \in \mathcal{B}(\operatorname{Sp} T)$ la suite $\Phi(g_n)$ converge fortement vers $\Phi(f)$. Si $g \in C(\operatorname{Sp} T)$ on a $\Phi(g) = g(T)$.*

Démonstration. **Existence.** Soient (X, μ) un espace mesuré $f \in \mathcal{L}^\infty(X, \mu)$ et $U : L^2(X, \mu) \to H$ un isomorphisme tels que $T = UM_f U^*$ (théorème 4.12). Notons $\Phi : \mathcal{B}(\operatorname{Sp} T) \to \mathcal{L}(H)$ l'application $g \mapsto UM_{g \circ f} U^*$; l'application Φ est clairement un morphisme d'anneaux linéaire satisfaisant $\Phi(1) = \mathrm{id}_H$ et $\Phi(z) = T$.

Soit $g_n \in \mathcal{B}(\operatorname{Sp} T)$ une suite bornée par $M \in \mathbb{R}_+$ convergeant simplement vers $g \in \mathcal{B}(\operatorname{Sp} T)$. Alors, pour tout $\xi \in H$, la suite $(g_n \circ f)u^*(\xi)$ est une suite dans $L^2(X, \mu)$ dominée par $Mu^*(\xi)$ et convergeant partout vers $(g \circ f)u^*(\xi)$. Par le théorème de convergence dominée, la suite $(g_n \circ f)u^*(\xi)$ converge vers $(g \circ f)u^*(\xi)$ dans L^2, donc $\Phi(g_n)(\xi) = u(g_n \circ f)u^*(\xi)$ converge (en norme) vers $u(g \circ f)u^*(\xi) = \Phi(g)(\xi)$.

Remarquons que si $g \in C(\operatorname{Sp} T)$ on a $\Phi(g) = g(T)$.

Unicité. Soient Φ_1 et Φ_2 deux applications vérifiant les conditions ci-dessus. Posons $A = \{g \in \mathcal{B}(\operatorname{Sp} T),\ \Phi_1(g) = \Phi_2(g)\}$. On doit démontrer que $A = \mathcal{B}(\operatorname{Sp} T)$. Par hypothèse, A est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{B}(\operatorname{Sp} T)$ et si (g_n) est une suite bornée d'éléments de A convergeant simplement vers

$g \in \mathcal{B}(\mathrm{Sp}\, T)$, on a $g \in A$. De plus, par la prop. 2.1, A contient les fonctions rationnelles, donc toutes les fonctions continues, (car toute fonction continue est limite uniforme de fonctions rationnelles).

Toute fonction borélienne bornée est limite uniforme de fonctions boréliennes prenant un nombre fini de valeurs ; celles-ci sont combinaisons linéaires de fonctions caractéristiques de sous-ensembles boréliens. Il suffit donc de prouver que A contient toutes les fonctions caractéristiques.

Notons $\mathcal{B}$ l'ensemble des boréliens de $\mathrm{Sp}\, T$ dont la fonction caractéristique est dans A. Comme A est un sous-anneau, $\mathcal{B}$ est stable par intersection finie ; comme A est stable par limite de suites bornées, $\mathcal{B}$ est stable par intersection dénombrable. De plus, si $g \in A$, $1 - g \in A$, donc $\mathcal{B}$ est stable par passage au complémentaire. Donc $\mathcal{B}$ est une tribu. Pour savoir que $\mathcal{B}$ contient tous les boréliens, il suffit de démontrer que $\mathcal{B}$ contient tous les fermés. Soit K un fermé non vide de $\mathrm{Sp}\, T$. Notons $h_0 : \mathrm{Sp}\, T \to \mathbb{R}$ la fonction qui à $x \in \mathrm{Sp}\, T$ associe sa distance à K. Posons $g = \sup(1 - h_0, 0)$ et $g_n = g^n$. Pour tout n on a $g_n \in C(\mathrm{Sp}\, T) \subset A$; de plus la suite g_n converge vers la fonction caractéristique de K. On a démontré que $K \in \mathcal{B}$. $\square$

Soient H un espace hilbertien, $T \in \mathcal{L}(H)$ autoadjoint ou unitaire et f une fonction borélienne sur $\mathrm{Sp}\, T$. L'élément $\Phi(f)$ défini dans le théorème 4.14 se note encore $f(T)$.