THÉORIE SPECTRALE - EXERCICES

Spectre

Exercice 1. Soient E, F des espaces de Banach complexes, $S \in \mathcal{L}(E, F)$ et $T \in \mathcal{L}(F, E)$ des applications linéaires continues.

1. Soit $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$.
   a) Démontrer que S induit une bijection de $\ker(TS - \lambda \mathrm{id}_E)$ sur $\ker(ST - \lambda \mathrm{id}_F)$. Démontrer que $ST - \lambda \mathrm{id}_F$ est injective si et seulement si $TS - \lambda \mathrm{id}_E$ est injective.
   b) Démontrer que l'image de $ST - \lambda \mathrm{id}_F$ est dense si et seulement si l'image de $TS - \lambda \mathrm{id}_E$ est dense.
   c) Démontrer que $ST - \lambda \mathrm{id}_F$ est surjective si et seulement si $TS - \lambda \mathrm{id}_E$ est surjective *(si $TS - \lambda \mathrm{id}_E$ est surjective, on démontrera que, pour tout $y \in F, STy$ est dans l'image de $ST - \lambda \mathrm{id}_F$).*
2. On suppose que TS est bijective. Démontrer que, si T est injective, S et T sont bijectives. Démontrer que si ST n'est pas bijective, elle n'est pas injective.
3. Démontrer que le spectre résiduel et le spectre continu de ST sont contenus dans le spectre de TS. Démontrer que $\{0\} \cup \mathrm{Sp}ST = \{0\} \cup \mathrm{Sp}TS$.

Exercice 2. Soit E un espace de Banach. Démontrer que pour toute partie ouverte U de $\mathbb{C}$, l'ensemble $\Omega_U = \{x \in \mathcal{L}(E),\ \mathrm{Sp}x \subset U\}$ est ouvert dans $\mathcal{L}(E)$.

Exercice 3. Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la base hilbertienne canonique de $\ell^2(\mathbb{N})$. Notons $T \in \mathcal{L}(\ell^2(\mathbb{N}))$ défini par $Te_0 = 0,\ Te_n = 2^{1-k}e_{n-1}$ si $n = 2^k p$ avec $p \in \mathbb{N}$ impair.

1. Quel est le spectre de T ?
2. Pour $k \in \mathbb{N}$, notons $T_k \in \mathcal{L}(\ell^2(\mathbb{N}))$ défini par $T_k e_n = 0$, si $n \in 2^k\mathbb{N}$ et $T_k e_n = Te_n$ sinon. Démontrer que T_k est nilpotent et que T_k converge vers T.

Espace hilbertien

Exercice 4. Soit T un opérateur d'un espace hilbertien H.

1. Démontrer que le noyau de T^* est l'orthogonal de l'image de T.
2. Démontrer que si T est normal et surjectif, il est bijectif.
3. Démontrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
   (i) T^* est surjectif ;
   (ii) Il existe $c > 0$ tel que pour tout $x \in H$ on ait $\|Tx\| \geqslant c\|x\|$.

   Pour les questions qui suivent, on suppose que T est normal.
4. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Démontrer que $\lambda \in \mathrm{Sp}T$ si et seulement si $\inf\{\|Tx - \lambda x\|/\|x\|,\ x \neq 0\} = 0$.
5. Démontrer que $\|T\| = \sup\{|\langle x, Tx\rangle|, x \in B\}$, où B est la boule unité de H.
6. Supposons que l'application $x \mapsto |\langle x, Tx\rangle|$ atteint son maximum en un point $x \in B$. Démontrer que x est vecteur propre.

Exercice 5. On note $C([0,1])$ l'espace de Banach des application continues de $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ (muni de la norme $f \mapsto \|f\|_\infty = \sup\{|f(t)|, t \in [0,1]\}$).

Notons $j : C([0,1]) \to L^2([0,1])$ l'application qui à toute fonction continue f associe sa classe dans L^2.

Soit E un sous-espace vectoriel de $C([0,1])$ tel que $j(E)$ soit un sous-espace fermé de $L^2([0,1])$.

1. Démontrer que la réciproque $\varphi : j(E) \to E$ de la restriction de j est continue. En déduire qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $f \in E$ on ait $\|f\|_\infty \leqslant M\|j(f)\|_2$.
2. Démontrer que, pour tout $t \in [0,1]$, il existe un unique élément $g_t \in j(E)$ tel que, pour tout $f \in E$ on ait $\langle g_t | j(f)\rangle = f(t)$. Démontrer que $\|g_t\|_2 \leqslant M$.
3. Soit $(f_1, \dots, f_n)$ une suite d'éléments de E telle que $(j(f_1), \dots, j(f_n))$ soit un système orthonormal de $j(E)$. Démontrer que, pour tout $t \in [0,1]$, $\displaystyle\sum_{k=1}^n |f_k(t)|^2 \leqslant \|g_t\|_2^2$.
4. En déduire que la dimension de E est finie.

Exercice 6. On note T l'opérateur de Voltera : T est l'opérateur de l'espace de Hilbert $L^2([0,1])$ des fonctions de carré intégrable pour la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$ donné par la formule $(Tf)(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$.

1. Démontrer que T est continu et calculer T^*.
2. Quel est le spectre de T ?
3. Quel est le spectre de $T + T^*$?
4. Quel est le spectre de $T - T^*$?

Exercice 7. Soit P un idempotent de $\mathcal{L}(H)$. Établir l'équivalence $P = P^* \iff \|P\| \leqslant 1 \iff \ker f = (\mathrm{im}_f)^\perp$. (On dit alors que P est un projecteur orthogonal).

Exercice 8.

1. Soient E, F, H des espaces hilbertiens $S \in \mathcal{L}(H,E)$ et $T \in \mathcal{L}(H,F)$ deux opérateurs tels que $S^*S = T^*T$. Démontrer qu'il existe un opérateur $u \in \mathcal{L}(E,F)$ tel que $T = uS$ et $S = u^*T$.
2. Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur normal. Démontrer que les opérateurs T et T^* ont même noyau et même image.

Exercice 9. Soit H un espace hilbertien et soient $S, T \in \mathcal{L}(H)$. On suppose que S est autoadjoint et T est positif.

1. Démontrer que $\mathrm{Sp}ST \subset \mathbb{R}$ - *on pourra comparer ce spectre à celui de* $T^{1/2}ST^{1/2}$.
2. Démontrer que $(\mathrm{id}_H + iST)^*(\mathrm{id}_H + iST)$ et $(\mathrm{id}_H + iST)(\mathrm{id}_H + iST)^*$ ont même spectre.
3. En déduire que $ST^2S + i(ST - TS)$ est positif si et seulement si $TS^2T + i(ST - TS)$ est positif.

Exercice 10. Soient H un espace hilbertien $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur autoadjoint.

1. Établir l'équivalence des conditions suivantes.
   (i) Il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que $\|T - k\mathrm{id}_H\| \leqslant k$.
   (ii) T est positif. *Pour montrer (ii)⇒(i), on pourra poser* $k = \|T\|$.
2. Démontrer que les conditions suivantes sont équivalentes.

(i) Il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que $\|T - k\mathrm{id}_H\| < k$.

(ii) T est positif et inversible.

3. Notons φ l'application de $\mathcal{L}(H)$ dans $\mathcal{L}(H)$ définie par $\varphi(S) = ST + TS$.
   a) On suppose que T est positif et inversible. Démontrer qu'il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que $\|\varphi - 2k\mathrm{id}_{\mathcal{L}(H)}\| < 2k$. En déduire que φ est bijective.
   b) On suppose que T n'est pas inversible. Démontrer que φ n'est pas bijective.

Exercice 11. 1. Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante (*i.e.* telle que $T_n - T_{n+1}$ est positif) d'opérateurs positifs agissant sur un espace hilbertien H. Démontrer que T_n converge faiblement (*i.e.* qu'il existe $S \in \mathcal{L}(H)$ tel que pour tout $x, y \in H$ on ait $\lim\langle x, T_n y\rangle = \langle x, Sy\rangle$).

2. Soit T un opérateur positif agissant sur un espace hilbertien H tel que $\|T\| \leqslant 1$.
   a) Démontrer que la suite T^n converge faiblement vers le projecteur orthogonal p de H sur $\ker(1 - T)$.
   b) (*ajouté*) Démontrer que, pour tout $x \in E$, on a $T^n x \to p(x)$.
3. Soient p et q deux projecteurs orthogonaux de H. Démontrer que $(pq)^n$ converge faiblement et calculer sa limite.

Exercice 12. Soit H un espace hilbertien.

1. Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ avec $T = T^*$. Démontrer qu'il existe un unique élément hermitien $S \in \mathcal{L}(H)$ tel que $S^3 = T$.
2. Soit $T \in \mathcal{L}(H)$. Démontrer qu'il existe un unique $S \in \mathcal{L}(H)$ tel que $SS^*S = T$

Exercice 13. On note $(e_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ la base orthonormale canonique de l'espace hilbertien $\ell^2(\mathbf{Z})$. Soit U l'opérateur unitaire sur $\ell^2(\mathbf{Z})$ tel que, pour tout $n \in \mathbf{Z}$ on ait $Ue_n = e_{n+1}$.

1. On pose $A = \{f(U);\ f \in C(\mathrm{Sp}U)\}$. Démontrer que le vecteur e_0 est *totalisateur* pour A, c'est à dire que $\{ae_0,\ a \in A\}$ est dense dans $\ell^2(\mathbf{Z})$.
2. Pour toute fonction continue f sur l'espace compact $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1 on pose $\mu(f) = \langle e_0 | f(U)e_0\rangle$. Démontrer que μ est une mesure positive et la déterminer. En déduire le spectre, la mesure spectrale et la multiplicité de l'opérateur unitaire U.
3. Soit $R \in \mathcal{L}(\ell^2(\mathbf{Z}))$ un opérateur qui commute à U (*i.e.* $UR = RU$). Démontrer qu'il existe $f \in L^\infty(\mathbf{T}, \mu)$ tel que $R = f(U)$.
   Notons P le projecteur orthogonal de $\ell^2(\mathbf{Z})$ dont l'image est le sous-espace engendré par $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, identifié à $\ell^2(\mathbf{N})$. On note S la restriction de U à $\ell^2(\mathbb{N})$.
4. Démontrer que, pour toute fonction continue $f \in C(\mathbf{T})$, l'opérateur $f(U)P - Pf(U)$ est compact.
5. Pour $f \in L^\infty(\mathbf{T}, \mu)$ on note $T_f \in \mathcal{L}(\ell^2(\mathbb{N}))$ l'opérateur qui à $x \in \ell^2(\mathbb{N})$ associe $Pf(U)x$.
   a) Démontrer que, pour tout $f \in L^\infty(\mathbf{T}, \mu)$, on a $T_f = S^*T_fS$.
   b) Calculer l'adjoint de T_f.
6. Pour $n \in \mathbf{N}$, notons $R_n \in \mathcal{L}(\ell^2(\mathbb{Z}))$ l'opérateur qui à $x \in \ell^2(\mathbb{Z})$ associe $U^{-n}T_fPU^nx$. Démontrer que, pour toute paire x, y de vecteurs de $\ell^2(\mathbb{Z})$, la suite $\langle x, R_ny\rangle$ converge vers $\langle x, f(U)y\rangle$. En déduire que $\|T_f\| = \|f(U)\|$.
7. Soient R un opérateur normal d'un espace hilbertien H et $\lambda \in \mathbf{C}$. Démontrer que $\lambda \in \mathrm{Sp}\, R$, si et seulement si $\inf\{\|(R - \lambda)x\|,\ x \in H,\ \|x\| = 1\} = 0$. En déduire que, pour tout $f \in L^\infty(\mathbf{T}, \mu)$ le spectre de T_f contient celui de $f(U)$.
8. Soit $T \in \mathcal{L}(\ell^2(\mathbb{N}))$ un opérateur tel que $T = S^*TS$. Démontrer qu'il existe $f \in L^\infty(\mathbf{T}, \mu)$ tel que $T = T_f$.

Solutions des exercices

Exercice 1.

1. a) Pour $x \in \ker(TS - \mathrm{id}_E)$, on a $(ST - \mathrm{id}_F)(S(x)) = S(TS - \mathrm{id}_E)(x) = 0$, donc $S(x) \in \ker(ST - \mathrm{id}_F)$. Notons $S_1 : \ker(TS - \mathrm{id}_E) \to \ker(ST - \mathrm{id}_F)$ l'application déduite de S. De même, notons $T_1 : \ker(ST - \mathrm{id}_F) \to \ker(TS - \mathrm{id}_E)$ l'application déduite de T. Pour $x \in \ker(TS - \mathrm{id}_E)$, on a $T_1S_1(x) = \lambda x$ et pour $x \in \ker(ST - \mathrm{id}_F)$, on a $S_1T_1(x) = \lambda y$; donc S_1 est bijective et $(S_1)^{-1} = \lambda^{-1}T_1$.

   La deuxième assertion s'en déduit immédiatement.

   b) On applique a) à ${}^tT$ et à ${}^tS$: on a donc les équivalences :
   l'image de $ST - \lambda\mathrm{id}_F$ est dense $\iff$ ${}^tT{}^tS - \lambda\mathrm{id}_{F'}$ est injective $\iff$ ${}^tS{}^tT - \lambda\mathrm{id}_{E'}$ est injective $\iff$ l'image de $TS - \lambda\mathrm{id}_E$ est dense.

   c) Supposons que $TS - \lambda\mathrm{id}_E$ est surjective. Soit $y \in F$. Alors il existe $z \in E$ tel que $T(y) = (TS - \lambda\mathrm{id}_E)(z)$; alors $(ST - \lambda\mathrm{id}_F)(S(z)) = S(TS - \lambda\mathrm{id}_E)(z) = ST(y)$, donc

   $$y = -\lambda^{-1}(ST - \lambda\mathrm{id}_F)(y) - \lambda^{-1}ST(y) = (ST - \lambda\mathrm{id}_F)(-\lambda^{-1}(y + S(z))).$$

   Donc $ST - \lambda\mathrm{id}_F$ est surjective.

2. Si TS est bijectif, alors T est sujectif. Si de plus T est injectif, alors il est bijectif, donc $ST = T^{-1}(TS)T$ aussi. Par contraposée, si ST n'est pas bijectif, alors T n'est pas injectif - donc ST non plus.

3. Dans la question 1, on a vu que les spectres ponctuels résiduels et continus de ST et TS ont même intersection avec $\mathbb{C}^*$. En partiulier, $\{0\} \cup \mathrm{Sp}ST = \{0\} \cup \mathrm{Sp}TS$.

   Si 0 n'est pas dans le spectre de TS, alors, d'après 2, ou bien il n'est pas dans celui de ST, ou bien il esta dans le spectre ponctuel de ST : il n'est donc pas dans le spectre résiduel ou continu de ST. Par contraposée, si 0 est dans le spectre résiduel ou continu de ST, alors 0 est dans le spectre de TS.

Exercice 2. Soit $S \in \Omega_U$. Posons $F = \mathbb{C} \setminus U$. C'est une partie fermée de $\mathbb{C}$. L'application $\lambda \mapsto \|(S - \lambda\mathrm{id}_E)^{-1}\|$ est continue sur F et tend vers 0 à l'infini (si $F = \emptyset$, il n'y a rien à démontrer). Elle atteint donc son maximum M sur F. Si $M\|S - T\| < 1$, alors, pour tout $\lambda \in F$, on a $T - \lambda\mathrm{id}_E = (S - \lambda\mathrm{id}_E)\big(\mathrm{id}_E - (S - \lambda\mathrm{id}_E)^{-1}(S - T)\big)$ et puisque $\|(S - \lambda\mathrm{id}_E)^{-1}(S - T)\| \leqslant M\|S - T\| < 1$, $T - \lambda\mathrm{id}_E$ est inversible. Cela prouve que $\mathrm{Sp}T \subset U$. Donc Ω_U est un voisinage de S. Enfin Ω_U est ouvert : c'est un voisinage de chacun de ses points.

Exercice 3. *Réponse un peu moins rapide...* Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons $k(n)$ la puissance de 2 dans n, *i.e.* $n = 2^{k(n)}m$ avec m impair. Remarquons que $1 - k(n) = j(n) - j(n-1)$ où $j(n)$ est le nombre de 1 dans l'écriture de n en binaire.

En effet, l'écriture en binaire de n se termine par 1 suivi de $k(n)$ zéros. Celle de $n - 1$ a le même début, et se termine par 0 suivi de $k(n)$ uns.

Posons $\lambda_n = 2^{1-k(n)}$. On a donc $\lambda_1 \dots \lambda_n = 2^{j(n)}$. En particulier, $1 \leqslant \lambda_n \leqslant n + 1$ (on a $j(n) = 1$ si et seulement si n est une puissance de 2 et $j(n) = n + 1$ si et seulement si $n + 1$ est une puissance de 2).

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Si $|\lambda| < 1$ alors la suite (x_n) avec $x_n = \dfrac{\lambda^n}{\lambda_1 \dots \lambda_n}$ est un élément de $\ell^2(\mathbb{N})$ et $T(x) = \lambda(x)$.

On a $T^n(e_k) = 0$ si $k < n$ et $T^n(e_k) = \lambda_k\lambda_{k-1} \dots \lambda_{k-n+1}e_{k-n}$ si $k \geqslant n$.

Remarquons que, pour $k \geqslant n$, on a $\lambda_k\lambda_{k-1} \dots \lambda_{k-n+1} = \dfrac{\lambda_1 \dots \lambda_k}{\lambda_1 \dots \lambda_{k-n}} = 2^{j(k)-j(k-n)}$ et comme $j(p+q) \leqslant j(p) + j(q)$, il vient $\lambda_k\lambda_{k-1} \dots \lambda_{k-n+1} \leqslant \lambda_1 \dots \lambda_n$.

On a donc $\sup \|T^n(e_k)\| = \lambda_1 \dots \lambda_n = \|T^n(e_n)\| \leqslant \|T^n\|$.

Comme les $T^k(e_n)$ sont deux à deux orthogonaux, on a, pour $\xi = (x_k) = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k e_k$,

$$\|T^n(\xi)^2\| = \sum_{k=0}^{+\infty} \|T(x_k e_k)\|^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} |x_k|^2 \|T(e_k)\|^2 \leqslant (\lambda_1 \dots \lambda_n)^2 \sum_{k=0}^{+\infty} |x_k|^2\| = (\lambda_1 \dots \lambda_n)^2 \|\xi\|^2.$$

Il vient $\|T^n\| \leqslant \lambda_1 \dots \lambda_n$, d'où l'égalité. Donc $\rho(T) = \lim(\lambda_1 \dots \lambda_n)^{1/n} = 1$.

Le spectre de T est fermé, contenu dans le disque unité fermé et contient le disque unité ouvert : c'est le disque unité fermé.

Exercice 4.

1. Cette question est traitée dans le cours : on a $x \in \ker T^* \iff \forall y \in H,\ \langle y|T^*x\rangle = 0 \iff x \in \mathrm{im}T^\perp$.
2. Si T est normal, alors pour tout $x \in H$, on a $\|Tx\|^2 = \langle x|T^*Tx\rangle = \|T^*x\|^2$, donc $\ker T = \ker T^*$.
Si T est surjectif, alors, comme d'après la question 1, $\ker T^* = (\mathrm{im}T)^\perp$, il vient $\ker T = \ker T^* = \{0\}$.
3. Écrivons $T = u|T|$ (décomposition polaire et donc $T^* = |T|u^*$). On a les implications suivantes :
$$T^* \text{ surjectif} \Rightarrow |T| \text{ surjectif} \Rightarrow |T|^2 = T^*T \text{ surjectif} \Rightarrow T^* \text{ surjectif}.$$
Ce sont donc des équivalences.

   Par ailleurs, on a les équivalences :

$$\begin{aligned}
(ii) &\Leftrightarrow \text{il existe } c > 0 \text{ tel que, pour tout } x \in H, \text{ on ait } \langle x|T^*Tx\rangle \geqslant c^2\langle x|x\rangle \\
&\Leftrightarrow \text{il existe } c > 0 \text{ tel que } T^*T - c^2\mathrm{id}_H \geqslant 0 \\
&\Leftrightarrow \text{il existe } c > 0 \text{ tel que } \mathrm{Sp}\, T^*T \subset [c^2, +\infty[\\
&\Leftrightarrow 0 \notin \mathrm{Sp} T^*T \\
&\Leftrightarrow T^*T \text{bijectif.}
\end{aligned}$$

   Or, d'après la question 1, on a T^*T surjectif $\Leftrightarrow$ T^*T bijectif.
4. L'endomorphisme $(T - \lambda\mathrm{id}_H)^*$ est normal. On a donc l'équivalence (d'après les question 2 et 3) :

$$\begin{aligned}
\lambda \notin \mathrm{Sp}\, T &\Leftrightarrow (T - \lambda\mathrm{id}_H)^* \text{ est bijectif} \\
&\Leftrightarrow (T - \lambda\mathrm{id}_H)^* \text{ est surjectif} \\
&\Leftrightarrow \text{il existe } c > 0 \text{ tel que, pour tout } x \in H, \text{ on ait } \|(T - \lambda\mathrm{id}_H)(x)\| \geqslant c\|x\|.
\end{aligned}$$

5. Pour $x \in B$, on a $|\langle x, Tx\rangle| \leqslant \|x\|\|Tx\| \leqslant \|T\|\|x\|^2$, donc $\|T\|$ majore $\{|\langle x, Tx\rangle|, x \in B\}$.
Par ailleurs, $\|T\|$ est le rayon spectral de T et il existe donc $\lambda \in \mathrm{Sp}\, T$ tel que $|\lambda| = \|T\|$. D'après la question 4, on a alors $\inf\{\|Tx - \lambda x\|,\ \|x\| = 1\} = 0$. Il existe donc une suite (x_n) de vecteurs de norme 1 telle que $\|Tx_n - \lambda x_n\| \to 0$. On a alors $|\langle x_n|Tx_n\rangle - \lambda| = |\langle x_n|Tx_n - \lambda x_n\rangle| \leqslant \|x_n\|\|T - \lambda x_n\|$. Donc $\langle x_n|Tx_n\rangle \to \lambda$ et donc $|\langle x_n|Tx_n\rangle| \to \|T\|$.
6. Pour $x \in B$, on a $|\langle x, Tx\rangle| \leqslant \|x\|\|Tx\| \leqslant \|T\|\|x\|^2$. Si $|\langle x|Tx\rangle| = \|T\|$, alors ces inégalités sont des égalités. Donc (si $T \neq 0$) on a $\|x\| = 1$ et, puisque l'inégalité de Cauchy-Schwarz est une égalité, x et Tx sont colinéaires, donc X est un vecteur propre.

Exercice 5.

1. L'application $j : E \to j(E)$ est linéaire bijective et continue. Comme $j(E)$ est fermé dans $L^2[0,1]$, il est complet. Comme j est injective, $E = j^{-1}(j(E))$, et puisque j est continue, E est fermé dans $C([0,1])$, donc complet. D'après le théorème de Banach, $\varphi : j(E) \to E$ est continue. Il existe donc $M \in \mathbb{R}_+$ ($M = \|\varphi\|$) tel que, pour tout $f \in E$ on ait $\|f\|_\infty \leqslant M\|j(f)\|_2$.
2. Notons $q_t : E \to \mathbb{C}$ l'application $f \mapsto f(t)$. L'espace $j(E)$ est un espace de Hilbert. L'application $\ell_t = q_t \circ \varphi$ est une forme linéaire continue, donc il existe $g_t \in j(E)$ tel que l'on ait $\ell_t(\xi) = \langle g_t|\xi\rangle$. Pour $f \in E$, on a $\langle g_t|j(f)\rangle = \ell_t(j(f)) = f(t)$. De plus, on a $\|g_t\| = \|\ell_t\| = \|q_t\|\|\varphi\| \leqslant M$.
3. Le projeté orthogonal de g_t dans le sous-espace vectoriel de $j(E)$ engendré par $(j(f_1), \ldots, j(f_n))$ est $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \langle j(f_k)|g_t\rangle j(f_i)$. On a donc $\displaystyle\|g_t\|^2 \geqslant \sum_{k=1}^{n} |\langle j(f_k)|g_t\rangle|^2 = \sum_{k=1}^{n} |f_k(t)|^2$.
4. On a donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |f_k(t)|^2 \leqslant M^2$, donc $\displaystyle\int_0^1 \sum_{k=1}^{n} |f_k(t)|^2\, dt \leqslant M^2$. Or pour tout k, on a $\displaystyle\int_0^1 |f_k(t)|^2\, dt = \|j(f_k)\|^2 = 1$. Il vient $n \leqslant M^2$. Cela prouve que tout système orthonormé a au plus M^2 éléments, donc $\dim(j(E)) \leqslant M^2$.

Exercice 6.

1. On a $T(f)(x) = \langle \mathbf{1}_{[0,x]}|f\rangle$. Donc $T(f)(x)$ est bien défini pour tout $f \in L^2$ et tout $x \in [0,1]$ et $|T(f)(x)| \leqslant \|\mathbf{1}_{[0,x]}\|_2\|f\|_2 = \sqrt{x}\|f\|_2$. De plus, pour $x < y$, on a $T(f)(y) - T(f)(x) = \langle \mathbf{1}_{[x,y]}|f\rangle$; donc $|T(f)(y) - T(f)(x)| \leqslant \|\mathbf{1}_{[x,y]}\|_2\|f\|_2 = \sqrt{y-x}\|f\|_2$.

   En conclusion, $T(f)$ est continue et $\|T(f)\|_2 \leqslant \|T(f)\|_\infty \leqslant \|f\|_2$. Cela prouve que T est bien définie et continue de $L^2([0,1])$ dans lui-même.

   Posons $\displaystyle S(f)(x) = \int_x^1 f(t)\, dt$. Pour $f, g \in C([0,1])$ on a
   $$\langle S(f)|g\rangle = \langle f|T(g)\rangle = \int_{0<s<t<1} \overline{f(t)}g(s)\, dsdt$$
   donc $T^* = S$.
2. Pour f continue, $T^n(f)$ est la fonction F de classe C^n dont la dérivée n-ième est f et telle que F ainsi que ses $n-1$ premières dérivées sont nulles en 0. Par la formule de Taylor avec reste intégrale, on a $\displaystyle T^n(f)(x) = \frac{1}{n!}\int_0^x f(t)(x-t)^{n-1}\, dt$. Cette formule reste vraie pour f quelconque dans L^2 par continuité.

   On a donc $\displaystyle|T^n(f)(x)| \leqslant \frac{\|f\|_2}{(n-1)!}$ et $\displaystyle\|T^n\| \leqslant \frac{1}{(n-1)!}$. On en déduit que $\sum T^n\lambda^n$ converge pour tout n, donc pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $\mathrm{id}_E - \lambda T$ est inversible et $\mathrm{Sp}(T) \subset \{0\}$; comme le spectre n'est pas vide $\mathrm{Sp}T = \{0\}$.
3. On a $(T+T^*)(f) = \langle \mathbf{1}|f\rangle\mathbf{1}$ où $\mathbf{1}$ est la fonction constante égale à 1. Donc $T+T^*$ est le projecteur orthogonal sur $\mathbb{C}\mathbf{1}$. Son spectre est $\{0,1\}$.
4. Remarquons que pour tout $f \in L^2([0,1])$, la fonction $(T-T^*)(f)$ est continue et $(T-T^*)(f)(1) = \displaystyle\int_0^1 f(t)dt = (T^* - T)(0)$. Si f est continue, $(T-T^*)(f)$ est donc l'unique primitive F de $2f$ telle que $F(1) + F(0) = 0$.

   Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Si $(T-T^*)(f) = \lambda f$, alors f est continue (puisque $T(f)$ et $T^*(f)$ le sont) et, comme $\displaystyle\lambda f(x) = 2\int_0^x f(t)\, dt - \int_0^1 f(t)\, dt$, on en déduit que f est de classe C^1, $\lambda f'(x) = 2f(x)$ et $f(0)+f(1) = 0$. Cela a lieu si et seulement si f est proportionnelle à $x \mapsto e^{(2/\lambda)x}$ et $f(1) = -f(0)$.

On trouve donc que $\dfrac{2}{\lambda} = (2k+1)i\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$. Posons donc $e_k(x) = e^{(2k+1)i\pi x}$ et $\lambda_k = \dfrac{2}{(2k+1)i\pi}$ pour $k \in \mathbb{Z}$. On a bien $T(e_k) = \lambda_k e_k$.

Comme $\lim\limits_{k\pm\infty} \lambda_k = 0$ et $\mathrm{Sp}\,(T - T^*)$ est compact, il vient $0 \in \mathrm{Sp}\,(T - T^*)$.

Rappelons (Fourier) que, l'ensemble des fonctions $f_k : t \mapsto e^{2ik\pi t}$ ($k \in \mathbb{Z}$) forment une base hilbertienne de $L^2([0,1], dx)$. Comme l'application $U : \xi \mapsto e_0\xi$ est un unitaire de $L^2([0,1], dx)$, l'image (e_k) de (f_k) est aussi une base hilbertienne de $L^2([0,1], dx)$.

Soit alors $\lambda \in \mathbb{C}^*$ qui n'est pas de la forme $\dfrac{2}{(2k+1)i\pi}$. Comme $\lim\limits_{k\pm\infty} |\lambda - \lambda_k| = |\lambda|$, l'ensemble des $k \in \mathbb{Z}$ tels que $|\lambda - \lambda_k| \leqslant |\lambda|/2$ est fini (ou vide), donc $\inf\limits_k |\lambda - \lambda_k| > 0$. Posons $M = \sup\limits_k |\lambda - \lambda_k|^{-1}$.

Pour $\xi \in L^2([0,1])$, posons $R(\xi) = \displaystyle\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{\langle e_k|\xi\rangle}{\lambda_k - \lambda} e_k$. Comme $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{Z}} \Big|\frac{\langle e_k|\xi\rangle}{\lambda_k - \lambda}\Big|^2 \leqslant M^2 \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\langle e_k|\xi\rangle|^2 = \|\xi\|_2^2 < +\infty$, cette série converge et l'application linéaire R ainsi définie est continue. On a $R(e_k) = \dfrac{1}{\lambda_k - \lambda} e_k$, de sorte que $(T - T^* - \lambda\mathrm{id}) \circ R(e_k) = R \circ (T - T^* - \lambda\mathrm{id})(e_k) = e_k$. Par linéarité et continuité, on trouve que $(T - T^* - \lambda\mathrm{id}) \circ R = R \circ (T - T^* - \lambda\mathrm{id}) = \mathrm{id}$, donc $\lambda \notin \mathrm{Sp}\,(T - T^*)$.

Cela prouve que $\mathrm{Sp}\,(T - T^*) = \{\lambda_k;\ k \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\}$.

Exercice 7. Deux idempotents sont égaux si et seulement s'ils ont même noyau et même image. Par ailleurs, si P est idempotent, on a $\mathrm{im}P = \ker(\mathrm{id}_H - P)$ donc $\mathrm{im}P$ est fermée. On a donc $\ker P^* = (\mathrm{im}P)^\perp$ et $\mathrm{im}P^* = (\ker P)^\perp$. Finalement, $P = P^*$ si et seulement si $\ker P = (\mathrm{im}P)^\perp$ (et alors $\mathrm{im}P = (\ker P)^\perp$).

Si $\mathrm{im}P = (\ker P)^\perp$, alors pour tout $x \in H$, on a $x = Px + (x - Px)$ et puisque $Px \in \mathrm{im}P$ et $x - Px \in \ker P$, ces vecteurs sont orthogonaux donc $\|x\|^2 = \|Px\|^2 + \|x - Px\|^2 \geqslant \|Px\|^2$, donc $\|Px\| \leqslant \|x\|$, et $\|P\| \leqslant 1$.

Pour tout $x \in (\ker P)^\perp$, on a $Px = x + (Px - x)$ et, puisque $Px - x \in \ker P$ et $x \in (\ker P)^\perp$, on a $\|Px\|^2 = \|x\|^2 + \|Px - x\|^2$. Si $\|P\| \leqslant 1$, alors $\|Px\| \leqslant \|x\|$, donc $Px - x = 0$, et donc $x \in \mathrm{im}P$. Il vient $(\ker P)^\perp \subset \mathrm{im}P$. Dans ce cas, si $x \in \mathrm{im}P$, écrivons $x = y + z$ avec $y \in (\ker P)^\perp \subset \mathrm{im}P$ et $z \in \ker P$. Alors $z = x - y \in \mathrm{im}P \cap \ker P = \{0\}$. cela prouve que $\mathrm{im}P = \ker P^\perp$.

Exercice 8.

1. Pour $x \in H$, on a $\|S(x)\|^2 = \langle x|S^*S(x)\rangle = \langle x|T^*T(x)\rangle = \|T(x)\|^2$. Posons $G = \{(S(x), T(x));\ x \in H\}$. Les applications $p_1 : (x,y) \mapsto x$ et $p_1 : (x,y) \mapsto y$ sont des bijections linéaires de G sur $\mathrm{im}(S)$ et $\mathrm{im}(T)$ respectivement. Posons $u_0 = p_2 \circ p_1^{-1}$. Remarquons que $u_0(S(x)) = T(x)$, donc u_0 est isométrique et se prolonge en une application linéaire isométrique $u_1 : \overline{\mathrm{im}(S)} \to \overline{\mathrm{im}(T)}$. L'application u_0^{-1} est aussi isométrique et se prolonge donc en une application linéaire isométrique $u_1' : \overline{\mathrm{im}(T)} \to \overline{\mathrm{im}(S)}$. L'application $u_1' \circ u_1$ coïncide avec l'identité sur $\mathrm{im}S$, donc sur $\overline{\mathrm{im}(S)}$ et de même $u_1 \circ u_1' = \mathrm{id}_{\overline{\mathrm{im}(T)}}$. Il vient $u_1' = u_1^{-1}$.

   Comme u_1 est isométrique, il vient $\langle u_1(x)|u_1(y)\rangle = \langle x|y\rangle$ (par polarisation), donc $\langle x|u_1^*u_1(y)\rangle = \langle x|y\rangle$, donc $u_1^*u_1(y) = y$. Enfin $u_1^* = u_1^{-1}$.

   Notons $p \in \mathcal{L}(E, \overline{\mathrm{im}(S)})$ le projecteur orthogonal et $u \in \mathcal{L}(E,F)$ l'application $x \mapsto u_1(p(x))$.

   Soient $y \in \overline{\mathrm{im}(S)}, z \in (\mathrm{im}(S))^\perp$ et $y' \in \overline{\mathrm{im}(T)}, z' \in (\mathrm{im}(T))^\perp$.

   On a $p(y+z) = y$, donc $u(y+z) = u_1(y)$. Donc $\langle y + z|u^*(y' + z')\rangle = \langle u_1(y)|y' + z'\rangle$; comme $z' \in \mathrm{im}(T)^\perp$ et $u_1(y) \in \overline{\mathrm{im}(T)}$, on a $\langle u_1(y)|z'\rangle = 0$, donc $\langle y + z|u^*(y' + z')\rangle = \langle u_1(y)|y'\rangle = \langle y|u_1^*(y')\rangle = \langle y + z|u_1^*(y')\rangle$ (puisque $z \in \mathrm{im}(S)^\perp$ et $u_1^*(y) \in \overline{\mathrm{im}(S)}$).

   On a donc $u^*(y' + z') = u_1^*(y')$.

Enfin, pour $x \in H$, on a $u(S(x)) = u_1(S(x)) = u_0(S(x)) = T(x)$ et $u^*(T(x)) = u_1^*(T(x)) = u_1^{-1}(T(x)) = S(x)$.

2. On a $\|T(x)\|^2 = \langle x|T^*T(x)\rangle = \langle x|TT^*(x)\rangle = \|T^*(x)\|^2$ donc $\ker T = \ker T^*$.
   D'après 1, on peut écrire $T^* = vT$ et $T = v^*T^*$, donc, prenant les adjoints, $T = T^*v^*$ (donc $\operatorname{im} T \subset \operatorname{im} T^*$) et $T^* = Tv$ (donc $\operatorname{im} T^* \subset \operatorname{im} T$).

Exercice 9.

1. D'après l'exercice 1, $\mathrm{Sp}((ST^{1/2})T^{1/2}) \cup \{0\} = \mathrm{Sp}(T^{1/2}(ST^{1/2})) \cup \{0\}$ et puisque $T^{1/2}ST^{1/2}$ est autoadjoint, $\mathrm{Sp}(T^{1/2}ST^{1/2}) \subset \mathbb{R}$.
2. D'après 1, $i \notin \mathrm{Sp}(ST)$, donc $i(ST - i\mathrm{id}_H)$ est inversible. Pour $\lambda \in \mathbb{C}$, on a $(\mathrm{id}_H + iST)^*(\mathrm{id}_H + iST) - \lambda\mathrm{id}$ inversible si et seulement si $(\mathrm{id}_H + iST)(\mathrm{id}_H + iST)^* - \lambda\mathrm{id} = (\mathrm{id}_H + iST)\Big((\mathrm{id}_H + iST)^*(\mathrm{id}_H + iST) - \lambda id_H\Big)(\mathrm{id}_H + iST)^{-1}$ l'est.
3. Or $(\mathrm{id}_H + iST)^* = \mathrm{id}_H - iTS$, donc $(\mathrm{id}_H + iST)^*(\mathrm{id}_H + iST) = \mathrm{id}_H + TS^2T + i(ST - TS)$ et $(\mathrm{id}_H + iST)(\mathrm{id}_H + iST)^* = \mathrm{id}_H + ST^2S + i(ST - TS)$. Comme ces opérateurs ont même spectre, les opérateurs autoadjoints $ST^2S + i(ST - TS)$ ont même spectre $TS^2T + i(ST - TS)$. L'un est positif si et seulement si l'autre l'est.

Exercice 10.

1. Pour $k \in \mathbb{R}_+$, comme $T - a\mathrm{id}_H$ est autoadjoint - donc normal, sa norme est égale à son rayon spectral, donc $\|T - k\mathrm{id}\| \leqslant k \iff \mathrm{Sp}(T) \subset [0, 2k]$. Cela implique que T est positif. Pour $k = \|T\|$, il vient $\|T - k\mathrm{id}\| \leqslant k \iff \mathrm{Sp}T \subset [0, 2\|T\|] \iff \mathrm{Sp}T \subset \mathbb{R}_+ \iff T$ est positif.
2. On a de même $\|T - k\mathrm{id}\| < k \iff \mathrm{Sp}(T) \subset]0, 2k[$, d'où l'équivalence.
3. a) Avec k donné par la question 2, notons m_g (*resp.* m_d) l'endomorphisme $S \mapsto (T - k\mathrm{id}_H)S$ et m_d (*resp.* . $S \mapsto S(T - k\mathrm{id}_H)$) de $\mathcal{L}(H)$. Comme $\|ab\| \leqslant \|a\|\|b\|$, il vient $\|m_g\| \leqslant \|T - k\mathrm{id}_H\| < k$ et $\|m_d\| < k$. Donc $\varphi - 2k\mathrm{id}_{\mathcal{L}(H)} = m_g + m_d$ et $\|m_g + m_d\| < 2k$. Donc φ est inversible (d'inverse $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(2k)^{-n-1}(m_g + m_d)^n$).

   b) Si $x \in \ker T$, alors notons P le projecteur orthogonal d'image $\mathbb{C}x$. On a $TP = 0$ et $PT = (TP)^* = 0$, donc $P \in \ker\varphi$.
   Plus généralement, si T n'est pas inversible, il existe une suite x_n de vecteurs de norme 1 tels que $\|Tx_n\| \to 0$ (exerc. 4). Si on note P_n le projecteur orthogonal d'image $\mathbb{C}x_n$, on a $TP_n(x) = \langle x_n|x\rangle T(x_n)$, donc $\|TP_n(x)\| \leqslant \|x\|\|x_n\|\|T(x_n)\| = \|T(x_n)\|\|x\|$ et donc $\|TP_n\| \to 0$. Or $P_nT = (TP_n)^*$, donc $\|TP_n\| = \|P_nT\|$ et $\varphi(P_n) \to 0$, et, comme $\|P_n\| = 1$, l'application φ n'est pas un homéomorphisme. Elle n'et donc pas bijective (théorème de Banach).

Exercice 11.

1. Pour $x \in H$, la suite $(\langle x|T_nx\rangle)$ est décroissante, minorée par 0, donc convergente (dans $\mathbb{R}_+$). Pour $(x, y) \in H$, la suite $(\langle x|T_ny\rangle)$ est convergente par polarisation. Posons $B(x, y) = \lim(\langle x|T_ny\rangle)$. Comme chaque application $(x, y) \mapsto \langle x|T_ny\rangle$ est sequilinéaire, il en va de même pour B. De plus, pour $(x, y) \in H^2$ on a $|\langle x|T_ny\rangle| \leqslant \|x\|\|y\|\|T_n\| \leqslant \|x\|\|y\|\|T_0\|$ (par décroissance). On en déduit que $|B(x, y)| \leqslant \|T_0\|\|x\|\|y\|$. Pour tout $y \in H$, l'application $\ell_y : x \mapsto B(y, x)$ est une forme linéaire continue et $\|\ell_y\| \leqslant \|T_0\|\|y\|$. Il existe donc un unique vecteur $S(y)$ tel que l'on ait $B(y, x) = \langle S(y)|x\rangle$. Comme $y \mapsto B(y, x)$ et $y \mapsto \ell_y$ sont antiniléaires, l'application S est linéaire.Et comme $\|\ell_y\| \leqslant \|T_0\|\|y\|$, on en déduit que S est continue et $\|S\| \leqslant \|T_0$. Enfin, pour $x \in H$, on a $\langle x|Sx\rangle = \lim\langle x|T_nx\rangle$ donc $\langle x|Sx\rangle \in \mathbb{R}_+$. On en déduit que S est autoadjoint et positif.

2. a) Comme la suite de fonctions $t \mapsto t^n$ est décroissante sur $\mathrm{Sp}T \subset [0,1]$, la suite T^n est décroissante. Notons S sa limite faible. Si $x \in \ker(\mathrm{id}_H - T)$, on a $T^n x = x$ pour tout n, donc $Sx = x$.

   Par ailleurs soit $x \in H$. Pour tout $y \in H$, on a $\langle y|TSx\rangle = \langle Ty|Sx\rangle = \lim\langle Ty|T^n x\rangle = \lim\langle y|T^{n+1}x\rangle = \langle y|Sx\rangle$. On en déduit que $TSx = Sx$, donc $TS = S$. Il vient $\mathrm{im}S \subset \ker(\mathrm{id}_H - T)$ et puisque pour $x \in \ker(\mathrm{id}_H - T)$ on a $Sx = x$, il vient $S^2 = S$ et $\mathrm{im}S = \ker(\mathrm{id}_H - T)$. Comme de plus $S = S^*$, S est le projecteur orthogonal d'image $\ker(\mathrm{id}_H - T)$.

   b) La suite de fonctions $t \mapsto t^n(1-t)$ converge uniformément vers 0 sur l'intervalle $[0,1]$ (on calcule le maximum en dérivant). Or $\|T^n - T^{n+1}\|$ est le rayon spectral de $T^n - T^{n+1}$ c'est à dire le sup de $t^n - t^{n+1}$ sur le spectre de T. Il vient $\|T^n - T^{n+1}\| \to 0$. Si $x \in \mathrm{im}(\mathrm{id}_H - T)$, il existe $y \in H$ avec $(\mathrm{id}_H - T)y = x$, donc $T^n x = (T^n - T^{n+1})y \to 0$. Donc $Sx = x$. Par continuité de S, on a $Sz = 0$ pour $z \in \mathrm{im}T$. Or, puisque $\mathrm{id}_H - T$ est autoadjoint, on a $\mathrm{im}(\mathrm{id}_H - T)^\perp = \ker T$, donc S est le projecteur orthogonal d'image $\ker(\mathrm{id}_H - T)$.

   Soit $x \in H$ et soit $\varepsilon > 0$. Écrivons $x = y + z$ avec $y \in \overline{\mathrm{im}(\mathrm{id}_H - T)}$ et $z \in \ker(\mathrm{id}_H - T)$. On a $Sx = z$. Il existe $u \in \mathrm{im}(\mathrm{id}_H - T)$ avec $\| - u - y\| \leqslant \varepsilon/2$. Il vient $T^n x - Sx = T^n y = T^n u + T^n(y-u)$. Or $\|T^n\| \leqslant 1$ donc $\|T^n u\| \leqslant \varepsilon/2$; comme $T^n y \to 0$, il existe n_0 tel que, pour $n \geqslant n_0$ on a $\|T^n u\| \leqslant \varepsilon/2$, et donc $\|T^n x - x\| \leqslant \varepsilon$.

3. Remarquons que $(pq)^{n+1} = p(qpq)^n$. Posons $qpq = T$ et notons S le projecteur orthogonal d'image $\ker(\mathrm{id}_H - T)$. Alors $T = (pq)^* pq$ est positif et $\|T\| \leqslant 1$. D'après la question 2, pour $x \in H$, la suite $(pq)^n x$ converge vers pSx. Par ailleurs, si $x = qpqx$, alors $qx = qpqx = x$ et, puisque $\|x\| = \|qpqx\| \leqslant \|pqx\| \leqslant \|qx\| = \|x\|$, il vient $\|pqx\| = \|qx\|$, donc $qx \in \mathrm{im}p$. Il vient $x = px = qx$. Donc $\ker(\mathrm{id}_H - T) = \mathrm{im}p \cap \mathrm{im}q$. On en déduit que S est le projecteur orthogonal d'image $\mathrm{im}p \cap \mathrm{im}q$. Donc $qS = S$.

Exercice 12.

1. Notons $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application $t \mapsto t^3$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son application réciproque. Pour $S, T \in \mathcal{L}(H)$ autoadjoints, on a $T = f(S) \iff S = g(T)$.

2. On munit l'espace $H \times H$ du produit scalaire $\langle (x,x')|(y,y')\rangle = \langle x|y\rangle + \langle x'|y'\rangle$. Muni de ce produit scalaire, $H \times H$ est un espace hilbertien. Notons $\widetilde{T} \in \mathcal{L}(H \oplus H)$ l'application $(x,x') \mapsto (Tx', T^*x)$. On vérifie immédiatement que $\widetilde{T}$ est autoadjoint.

   Si $SS^*S = T$, notons $\widetilde{S} \in \mathcal{L}(H \times H)$ l'application $(x,x') \mapsto (Sx', S^*x)$. On a $\widetilde{S}^3 = \widetilde{T}$ donc $\widetilde{S} = g(\widetilde{T})$, d'où l'unicité de S.

   Écrvons $g(\widetilde{T})(x,x') = (ax + bx', cx + dx')$, où $a,b,c,d \in \mathcal{L}(H)$. Puisque $g(\widetilde{T})$ est autoadjoint, on trouve $a = a^*$, $d = d^*$ et $c = b^*$.

   Notons $V \in \mathcal{L}(H \times H)$ l'application $(x,x) \mapsto (x, -x')$. On a $V^2 = V$ et $V\widetilde{T}V = -\widetilde{T}$, donc $\Big(-Vg(\widetilde{T})V\Big)^3 = \widetilde{T}$. Par unicité, dans a), il vient $-Vg(\widetilde{T})V = g(\widetilde{T})$ et donc $a = d = 0$, de sorte que $S = b$ convient.

Exercice 13.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $U^n e_0 = e_n$, donc l'espace $Ae_0 = \{f(U)e_0;\ f \in C(\mathrm{Sp}U)\}$ contient la base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, donc le sous espace vectoriel qu'elle engendre. Donc Ae_0 est dense.

2. On sait que μ est une forme linéaire positive sur $C(\mathrm{Sp}U)$. C'est donc une mesure borélienne sur $\mathrm{Sp}U$.

   Notons $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1. On a $\mathrm{Sp}U \subset C(\mathbb{U})$. Si $f \in \mathbb{U}$, on note encore $f \in C(\mathrm{Sp}U)$ sa restriction. Notons $z \in C(\mathbb{U})$ la fonction $\lambda \mapsto \lambda$. On a $\mu(z^n) = \langle e_0|e_n\rangle = 0$ si $n \neq 0$ (et $\mu(z^0) = \mu(1) = 1$). Les formes linéaires $f \mapsto \mu(f)$ et $f \mapsto \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(e^{it})\,dt$ sur $C(\mathbb{U})$

coïncident sur les fonctions z^n. Comme le sous-espace de A engendré par les z^n est dense dans A, il vient $\mu(f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(e^{it})\,dt$ pour tout $f \in C(\mathbb{U})$.

On en déduit que le spectre de U, qui contient le support de la mesure μ est tout le cercle $\mathbb{U}$; puisque A a un vecteur totalisateur, sa mesure spectrale est la mesure associée à e_0 et la multiplicité spectrale est 1. Nous n'avons pas abordé ces notions dans le cours.

3. Pour $k \in \mathbb{Z}$, notons $f_k \in L^2(\mathbb{U}, \mu)$ la classe de la fonction z^k. Les $(f_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ forment une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{U}, \mu)$. Notons $V : \ell^2(\mathbb{Z}) \to L^2\mathbb{U}, \mu)$ l'isomorphisme d'espaces hilbertiens tel que $Ve_k = f_k$ pour tout k. On a $VUV^* = m_z$ (multiplication par l'application z - en effet $VUV^* f_k = f_{k+1} = zf_k$).

   Posons $R' = VRV^*$. On a donc $R'm_z = m_z R'$. Posons $f = R'f_0 \in L^2(\mathbb{U}, \mu)$. Pour $g \in C(\mathbb{U})$, on a $R'm_g f_0 = m_g R' f_0 = m_g f = fg$.

   Notons $m_f : L^2(\mathbb{U}, \mu) \to L^1(\mathbb{U}, \mu)$ l'application $g \mapsto fg$ et j l'application qui à $g \in L^2(\mathbb{U}, \mu)$ associe g vu comme élément de $L^1(\mathbb{U}, \mu)$. Les applications continues, $j \circ R'$ et m_f coïncident sur $C(\mathbb{U})$, donc elles sont égales.

   Comme j est injective, on en déduit que, pour tout $g \in L^2(\mathbb{U}, \mu)$, on a $fg \in L^2(\mathbb{U}, \mu)$ et $R'g = fg$. En particulier $\|fg\|_2 \leqslant \|R'\|\|g\|_2$. Prenons pour g la fonction $\mathbb{1}_B$ où $B = \{u \in \mathbb{U};\ |f(u)| > \|R'\|\}$; posons $h(u) = |f(u)g(u)|^2 - \|R'\|^2|g(u)|^2$. On a $h(u) \geqslant 0$ pour tout u et $\displaystyle\int_{\mathbb{U}} h(u)\,d\mu(u) = \|fg\|_2^2 - \|R'\|^2\|g\|_2^2 \leqslant 0$, donc $h(u) = 0$ pour presque tout u. Or $h(u) > 0$, donc B est μ-négligeable. Donc $f \in L^\infty(\mathbb{U}, \mu)$. On a $R' = m_f = f(m_z)$. Par unicité du calcul fonctionnel borélien, on a donc $h(U) = V^* m_h V$ pour toute fonction borélienne bornée h.

4.
   - L'application $f \mapsto f(U)P - Pf(U)$ est linéaire et continue et $\mathcal{K}(\ell^2(\mathbb{Z}))$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(\ell^2(\mathbb{Z}))$, donc $A = \{f \in C(\mathbb{U});\ f(U)P - Pf(U) \in \mathcal{K}(\ell^2(\mathbb{Z}))\}$ est un sous-espace vectoriel fermé de $C(\mathbb{U})$.
   - Si $f, g \in A$, on a $(fg)(U)P - P(fg)(U) = f(U)\big(g(U)P - Pg(U)\big) + \big(f(U)P - Pf(U)\big)g(U)$, et puisque $\mathcal{K}(\ell^2(\mathbb{Z}))$ est un idéal bilatère de $\mathcal{L}(\ell^2(\mathbb{Z}))$, on en déduit que $fg \in A$.
   - Si $n \geqslant 0$, on a $UPe_n = e_{n+1} = PUe_n$. Si $n < -1$, on a $UPe_n = 0 = PUe_n$. (Et $(UP - PU)(e_{-1}) = -e_0$.) On en déduit que $UP - PU$ est nul sur l'orthogonal de e_{-1} ; il est de rang 1, donc compact.
   - De plus $U^{-1}P - PU^{-1} = U^{-1}(PU - UP)U^{-1}$ est aussi de rang 1.

   Alors, B est une sous-algèbre fermée de $C(\mathbb{U})$ qui contient z et z^{-1}, c'est tout $C(\mathbb{U})$.

5. a) On considère $\ell^2(\mathbb{N})$ comme sous-espace de $\ell^2(\mathbb{Z})$. Notons $J : \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$ l'inclusion ($\xi \mapsto \xi$). L'application $J^* : \ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{N})$ est l'application $\xi \mapsto P(\xi)$. On a donc $T_f = J^* f(U)J$, $S = J^*UJ$. On remarque que $J^*J = \mathrm{id}_{\ell^2(\mathbb{N})}$ et que $JJ^* = P$ est le projecteur orthogonal d'image de $\ell^2(\mathbb{Z})$ d'image $\ell^2(\mathbb{N})$. Comme $U\ell^2(\mathbb{N}) \subset \ell^2(\mathbb{N})$ il vient $PUJ = UJ$, donc

   $$S^*T_fS = J^*U^*JJ^*f(U)JJ^*UJ = (PUJ)^*f(U)(PUJ) = (UJ)^*f(U)(UJ) = J^*U^*Uf(U)J = T_f.$$

   b) Bien sûr $T_f^* = J^*f(U)^*J$, donc $T_f^* = T_{\overline{f}}$.

6. Par définition, on a $R_n = U^{-n}Pf(U)PU^n = P_nf(U)P_n$ où $P_n = U^{-n}PU^n$ est le projecteur orthogonal dont l'image est le sous-esapce vectoriel engendré par $(e_k)_{k\geqslant -n}$. Pour $x \in \ell^2(\mathbb{Z})$, $P_n(x) \to x$ (puisque la série $\sum \langle e_k|x\rangle e_k$ converge (vers x) les restes $\displaystyle\sum_{k>n} \langle e_k|x\rangle e_k$ et $x - P_n(x) = \displaystyle\sum_{k<-n} \langle e_k|x\rangle e_k$ tendent vers 0).

   Par continuité de $f(U)$ et du produit scalaire, il vient $\langle P_ny|f(U)P_nx\rangle \to \langle y|f(U)x\rangle$.

   On a $T_f = J^*U(f)J$ et puisque $\|J\| \leqslant 1$, il vient $\|T_f\| \leqslant \|U(f)\|$. On a

   $$\|U(f)\| = \sup\{|\langle y|f(U)x\rangle;\ (x, y) \in \ell^2(\mathbb{Z})^2, \|x\| = \|y\| = 1\}.$$

Pour $(x,y)\in\ell^2(\mathbb{Z})^2$ tels que $\|x\|=\|y\|=1$, on a $\langle y|f(U)x\rangle=\lim\langle x|U^{-n}JT_fJ^*U^ny\rangle$. Or pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a

$$|\langle x|U^{-n}JT_fJ^*U^ny\rangle|\leqslant\|x\|\|U^{-n}\|\|J\|\|T_f\|\|J^*\|\|U^n\|\|y\|=\|T_f\|,$$

donc $\|f(U)\|\leqslant\|T_f\|$.

7. La première question est la question 4 de l'exercice 4.
   Soit $\lambda\in\mathrm{Sp}f(U)$. Il existe une suite x_n de vecteurs de norme 1 tels que $f(U)x_n-\lambda x_n\to 0$. Pour tout n, il existe m_n tel que $\|x_n-P_{m_n}x_n\|\leqslant 2^{-n}$. Posons $y_n=PU^{m_n}x_n=U^{m_n}P_{m_n}x_n$. On a

$$T_fy_n-\lambda y_n=Pf(U)y_n-Pf(U)U^{m_n}x_n+Pf(U)U^{m_n}x_n-\lambda PU^{m_n}x_n.$$

   Or $Pf(U)y_n-Pf(U)U^{m_n}x_n=Pf(U)(P_{m_n}x_n-x_n)\to 0$ et $Pf(U)U^{m_n}x_n-\lambda PU^{m_n}x_n=PU^{m_n}(f(U)x_n-\lambda x_n)\to 0$. Donc $(T_f-\lambda\mathrm{id}_{\ell^2(\mathbb{N})})y_n\to 0$, alors que $y_n\|\to 1$, donc $(T_f-\lambda\mathrm{id}_{\ell^2(\mathbb{N})})$ n'est pas un homéomorphisme. Il vient $\lambda\in\mathrm{Sp}T_f$.

8. Pour $n\in\mathbb{N}$, définissons $R_n\in\mathcal{L}(\ell^2(\mathbb{N}))$ par $R_n=U^{-n}JTJ^*U^n$. Pour $m,n\in\mathbb{N}$ avec $m\geqslant n$, on a $JU^mP_n=S^{m-n}JU^nP_n$ et, puisque $(S^*)^{m-n}TS^{M-n}=T$, il vient $P_nR_nP_n=P_nR_mP_n$. On a donc $R_m-R_n=(\mathrm{id}_{\ell^2(\mathbb{Z})}-P_n)(R_m-R_n)+P_n(R_m-R_n)(\mathrm{id}_{\ell^2(\mathbb{Z})}-P_n)$.
   Soient $x,y\in\ell^2(\mathbb{Z})$; on a donc $\langle x|(R_m-R_n)y\rangle=\langle(x-P_nx)|(R_m-R_n)P_ny\rangle+\langle P_nx|(R_m-R_n)(y-P_ny)\rangle$ et puisque $x-P_nx\to 0$ et $y-P_ny\to 0$, on en déduit que la suite $\langle x|R_ny\rangle$ est de Cauchy. Par sesquilinéarité et continuité, on en déduit qu'il existe $R\in\mathcal{L}(\ell^2(\mathbb{Z}))$ tel que $\langle x|R_ny\rangle\to\langle x|Ry\rangle$.
   On a $U^{-1}R_nU=R_{n+1}$, donc $\langle x|U^{-1}RUy\rangle=\lim\langle x|R_{n+1}y\rangle=\langle x|Ry\rangle$, donc $U^{-1}RU=R$. Donc il existe $f\in L^\infty(\mathbb{U},\mu)$ tel que $R=f(U)$ (d'après la question 3).
   Pour $n\in\mathbb{N}$, on a $J^*R_nJ=J^*U^{-n}JTJ^*U^nJ=(U^nJ)^*JTJ^*(U^nJ)$. Or $U^nJ=JS^n$ et $J^*J=\mathrm{id}_{\ell^2(\mathbb{N})}$, et donc $J^*R_nJ=(JS^n)^*JTJ^*JS^n=(S^n)^*T(S^n)=T$.
   Pour $\xi,\eta\in\ell^2(\mathbb{N})$, on a $\langle\xi|T_f\eta\rangle=\langle J\xi|f(U)J\eta\rangle=\lim\limits_{n\to\infty}\langle J\xi|R_nJ\eta\rangle=\langle\xi|T\eta\rangle$ et donc $T=T_f$.