

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

MICHEL HILSUM

GEORGES SKANDALIS

Morphismes K -orientés d'espaces de feuilles et fonctorialité en théorie de Kasparov (d'après une conjecture d'A. Connes)

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4^e série, tome 20, n° 3 (1987), p. 325-390.

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1987_4_20_3_325_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1987, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

MORPHISMES K-ORIENTÉS D'ESPACES DE FEUILLES ET FONCTORIALITÉ EN THÉORIE DE KASPAROV (d'après une conjecture d'A. Connes)

PAR Michel HILSUM ET Georges SKANDALIS

RÉSUMÉ. — Soient (V_1, F_1) et (V_2, F_2) deux variétés feuilletées et f un morphisme d'espaces singuliers, K-orienté $f: V_1/F_1 \rightarrow V_2/F_2$. Nous construisons un élément $f!$ du groupe de Kasparov $KK(V_1/F_1; V_2/F_2)$ et calculons le produit de Kasparov de deux tels éléments. L'existence de $f!$, conjecturée par A. Connes [8] a déjà été établie dans des cas particuliers ([8], [4], [11]).

ABSTRACT. — Let (V_1, F_1) and (V_2, F_2) be two foliated manifolds and $f: V_1/F_1 \rightarrow V_2/F_2$ a K-oriented morphism of quotient spaces. We associate to f an element $f!$ of the Kasparov group $KK(C^*(V_1, F_1); C^*(V_2, F_2))$ and compute the Kasparov product of two such elements. The existence of $f!$ was conjectured by A. Connes [8]. Previous constructions of $f!$ in particular cases were given in [8], [4], [11].

Introduction

Soit $f: V_1/F_1 \rightarrow V_2/F_2$ une application K-orientée de classe C^∞ , où V_j/F_j désigne la « variété singulière » espace des feuilles du feuilletage (V_j, F_j) . Nous construisons un élément $f!$ du groupe de Kasparov $KK(V_1/F_1; V_2/F_2) \stackrel{\text{def}}{=} KK(C^*(V_1, F_1); C^*(V_2, F_2))$, et calculons le produit de Kasparov $f! \otimes g!$ de deux tels éléments. Nous réalisons ainsi le programme défini par Alain Connes dans [8] (p. 593).

La construction de $f!$ dans le cas où le feuilletage F_1 est *trivial* a été donnée dans [8] (§ 11) et systématisée dans [11], où la functorialité $(g \circ f)! = f! \otimes g!$ avait été démontrée, et par P. Baum et A. Connes dans [4] où la même construction étendue au cas où (V_1, F_1) est un feuilletage *propre* est utilisée.

Une conséquence de la construction de $f!$ est la suivante : soit $K_{\text{top}}^*(V_j, F_j)$ le groupe de K-théorie géométrique du feuilletage (V_j, F_j) défini par P. Baum et A. Connes [4]. A l'application K-orientée f est associé un homomorphisme

$$f!^{\text{top}}: K_{\text{top}}^*(V_1, F_1) \rightarrow K_{\text{top}}^*(V_2, F_2).$$

L'élément $f! \in KK(C^*(V_1, F_1); C^*(V_2, F_2))$ considéré comme homomorphisme de

groupes de K théorie, rend commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} K_{\text{top}}^*(V_1, F_1) & \xrightarrow{f_!^{\text{top}}} & K_{\text{top}}^*(V_2, F_2) \\ \downarrow \mu & & \downarrow \mu \\ K_*(C^*(V_1, F_1)) & \longrightarrow & K_*(C^*(V_2, F_2)) \end{array}$$

où $\mu: K_{\text{top}}^*(V_j, F_j) \rightarrow K_*(C^*(V_j, F_j))$ est l'homomorphisme défini dans [4]. L'existence de $f_!$ rendant ce diagramme commutatif peut être utilisée en vue de montrer que μ est injective : si $x \in K_{\text{top}}^*(V_1, F_1)$ est tel que $\mu(f_!^{\text{top}}(x))$ n'est pas nul, alors $\mu(x)$ n'est pas nul.

Un important cas particulier est le cas de la projection $p: V/F \rightarrow pt$. Dans ce cas $p_!$ définit un homomorphisme $K_*(C^*(V, F)) \rightarrow \mathbb{Z}$ tel que $p_! \circ \mu = p_!^{\text{top}}: K_{\text{top}}^*(V, F) \rightarrow \mathbb{Z}$. En utilisant $p_!$ on obtient le résultat suivant :

THÉORÈME. — Soit L un fibré vectoriel complexe sur V , équivariant pour l'action du groupoïde d'holonomie G de (V, F) . Alors il existe un élément $p_L \in KK(C^*(V, F); \mathbb{C})$ tel que pour tout élément $(M, E, f) \in K_{\text{top}}^*(V, F)$ on ait

$$\mu(M, E, f) \otimes p_L = \langle \text{ch}(E) \cup \text{ch}(f^*(L)) \cup Td(M), [M] \rangle.$$

Ce théorème est un analogue en « K-homologie » du théorème 6.8 de [10]. Nous obtenons ainsi des homomorphismes de la K-théorie de $C^*(V, F)$ à valeurs entières alors que l'approche d'A. Connes par la cohomologie cyclique donne des valeurs complexes (ou réelles) [10]. Cependant, nous sommes obligés d'utiliser la C^* -algèbre « max » du feuilletage (V, F) pour construire p_L , alors que l'élément de cohomologie cyclique de [10] est défini sur la C^* -algèbre réduite. Signalons qu'alors que nous savons la coïncidence de ces deux homomorphismes sur le groupe $\mu(K_{\text{top}}^*(V, F))$, nous ne savons pas s'ils sont égaux sur $K_*(C^*(V, F))$.

Nous construisons d'abord $f_!$ dans le cas où f est une immersion ou une submersion. Pour le cas général nous utilisons une factorisation $f = p \circ i$ où p est une submersion et i une immersion (par exemple $V_1/F_1 \xrightarrow{i = (\text{id} \times f)} (V_1 \times V_2/F_1 \times F_2) \xrightarrow{p} V_2/F_2$).

Si $i: V_1 \rightarrow V_2$ est une immersion (propre, injective) K-orientée, l'élément $i! \in KK(V_1; V_2)$ est le produit de Kasparov $i! = \beta_N \otimes [\text{exp}]$ où N est le fibré normal, $\beta_N \in KK(V_1; N)$ est l'isomorphisme de Thom (cf. [30], § 5) et $[\text{exp}] \in KK(N; V_2)$ est donné par l'inclusion $C_0(N) \hookrightarrow C_0(V_2)$ identifiant N à un voisinage tubulaire de V_1 dans V_2 . L'élément β_N se construit dans notre cadre grâce à la théorie de Kasparov équivariante (cf. [31]); un élément très proche a été utilisé dans [10]. La difficulté pour $[\text{exp}]$ est qu'il n'existe pas en général d'application exponentielle équivariante par l'holonomie. Nous la remplaçons par un « groupoïde normal » analogue au groupoïde tangent d'A. Connes (cf. [9]). Ce groupoïde donne lieu à une suite exacte de C^* -algèbres qui nous permet de construire l'élément cherché. Du fait qu'il repose sur une suite exacte de C^* -algèbres l'élément $i!$ n'est bien défini que sous certaines hypothèses de nucléarité ([30], § 7). Sans cette hypothèse on obtient quand même un homomorphisme de groupes de K-théorie.

Pour expliquer la difficulté du cas des submersions, considérons la submersion $V/F \xrightarrow{p} pt$ et supposons qu'une transversale de (V, F) est donnée par l'action du groupe

(dénombrable) Γ dans la variété X par difféomorphismes. L'élément $p!$ devrait alors être donné par l'opérateur de Dirac sur X si celui-ci pouvait être rendu « presque invariant » par l'action de Γ (i. e. $g D g^{-1} - D$ borné pour tout $g \in \Gamma$). Cependant une telle invariance supposerait que Γ préserve une métrique riemannienne sur X . Pour traiter le cas général (i. e. le cas des feuilletages non riemanniens) nous utilisons d'abord l'astuce de [10] pour nous ramener au cas presque isométrique. Revenons alors à notre exemple ci-dessus où Γ agit maintenant sur la variété X en préservant une structure presque isométrique. Celle-ci consiste en une suite exacte de Γ fibrés $0 \rightarrow E' \rightarrow TX \rightarrow E \rightarrow 0$, telle que Γ agit préservant une métrique invariante sur E' et sur E . Soient alors $D_{E'}$ et D_E des opérateurs de Dirac « partiels » $D_{E'}$ ne différentiant que dans la direction E' et D_E ne différentiant que dans une direction complémentaire à E' . Soit alors D l'opérateur différentiel *hypoelliptique* (cf. [26]) $D = D_{E'}^5 + D_E^3$. Pour tout $g \in \Gamma$, l'opérateur $g D g^{-1} - D$ est alors « D compact » (i. e. $(g D g^{-1} - D)(D^2 + 1)^{-1/2}$ est compact), et définit donc l'élément $p!$. Dans le texte, nous travaillons avec l'opérateur $D(D^2 + 1)^{-1/2}$ afin de ne considérer que des opérateurs bornés. Cet opérateur est un opérateur pseudodifférentiel de type ρ, δ de L. Hörmander [25] ce qui nous amène dans un long appendice à redémontrer dans le cadre ρ, δ l'analogie de la suite exacte des opérateurs pseudodifférentiels (cf. [36], [7]) prouvant que de tels opérateurs définissent des bimodules de Kasparov — et les analogues de trois lemmes de [11] permettant de calculer le produit de Kasparov de ces bimodules. Les opérateurs pseudodifférentiels de type ρ, δ ont été utilisés pour construire des éléments de KK-théorie par G.G. Kasparov (cf. [32], [33]).

L'organisation de ce papier est la suivante :

- Dans le premier paragraphe nous rappelons la définition d'une application K-orientée d'un espace de feuilles dans un autre.
- Dans le deuxième paragraphe nous rappelons la construction de certains éléments de groupes de Kasparov qui nous seront utiles par la suite.
- Dans les troisième et quatrième paragraphes nous construirons $f!$ dans le cas des immersions et des submersions et démontrons la fonctorialité $((g \circ f)! \otimes g!)$ dans ces cas.
- Dans le cinquième paragraphe nous examinons les différentes factorisations $f = p \circ i$, nous comparons les diverses définitions de $f!$ ainsi obtenues, et nous montrons que le défaut de fonctorialité est relié à l'élément γ construit par G.G. Kasparov [31].
- Dans le sixième paragraphe nous nous intéressons au groupe géométrique et nous obtenons les résultats mentionnés ci-dessus.
- Dans le septième paragraphe nous faisons quelques remarques finales.

Enfin dans l'appendice nous présentons ce que nous utilisons dans le texte (au § 4) des opérateurs pseudo différentiels de type ρ, δ .

REMARQUE SUR LES NOTATIONS. — Dans tout le texte $C^*(V, F)$ désigne la C^* -algèbre du groupoïde d'holonomie du feuilletage (V, F) i. e. l'algèbre notée $C^*(G)$ dans [37] et non pas l'algèbre notée $C^*(V, F)$ par A. Connes [qui correspond à $C_{\text{red}}^*(G)$ au sens de J. Renault [37], et que nous noterons $C_{\text{red}}^*(V, F)$].

I. Définitions générales (cf. [8], §9 et [11], §IV)

Soient (V_1, F_1) et (V_2, F_2) deux feuilletages et soient G_1 et G_2 leurs groupoïdes d'holonomie (cf. [44], [7]). Une application f de classe C^∞ de V_1/F_1 dans V_2/F_2 est donnée par son graphe G_f qui est une variété (non nécessairement séparée) de classe C^∞ munie d'applications de classe C^∞ $r: G_f \rightarrow V_1$ et $s: G_f \rightarrow V_2$ et d'actions de G_1 et de G_2 qui commutent entre elles telles que $r: G_f \rightarrow V_1$ est une fibration principale de groupoïde structural G_2 -c'est-à-dire r est surjective et pour tout x et y de G_f tels que $r(x) = r(y)$, il existe un unique γ dans G_2 avec $x\gamma = y$, et l'action de G_2 est propre.

Notons pour mémoire qu'on a :

$$\forall x \in G_f, \quad \forall \gamma_2 \in G_2 \quad \text{tels que} \quad s(x) = r(\gamma_2), \quad x\gamma_2 \in G_f$$

avec

$$r(x\gamma_2) = r(x), \quad s(x\gamma_2) = s(\gamma_2).$$

Si $\gamma_1 \in G_1$ avec $s(\gamma_1) = r(x)$ alors

$$\gamma_1 x \in G_f \quad \text{et} \quad r(\gamma_1 x) = r(\gamma_1), \quad s(\gamma_1 x) = s(x) \quad \text{et} \quad (\gamma_1 x)\gamma_2 = \gamma_1(x\gamma_2).$$

La différentiabilité des actions de G_1 et G_2 s'exprime de la façon suivante :

Soit $G_1 \times_{V_1} G_f = \{(\gamma_1, x) \in G_1 \times G_f \text{ avec } r(x) = s(\gamma_1)\}$ et

$$G_f \times_{V_2} G_2 = \{(x, \gamma_2) \in G_f \times G_2 \text{ avec } r(\gamma_2) = s(x)\}.$$

Ce sont des variétés comme $s: G_1 \rightarrow V_1$ et $r: G_2 \rightarrow V_2$ sont des submersions. Les applications $(\gamma_1, x) \rightarrow \gamma_1 x$ et $(x, \gamma_2) \rightarrow x\gamma_2$ sont de classe C^∞ .

A noter qu'alors G_f est feuilleté par $F = (dr)^{-1}(F_1)$, que les espaces quotients V_1/F_1 et G_f/F sont isomorphes par r et que l'application s définit un homomorphisme de groupoïdes du graphe du feuilletage (G_f, F) à valeurs dans G_2 (cf. [11], lemme 4.2). On peut donc voir f comme un homomorphisme du groupoïde d'holonomie d'une désingularisation de V_1/F_1 dans G_2 (ou dans le groupoïde d'une quelconque désingularisation de V_2/F_2).

Une façon équivalente de définir une application f de V_1/F_1 dans V_2/F_2 est fournie par la notion de cocycle de G_1 à valeurs dans G_2 , c'est-à-dire un recouvrement ouvert Ω_i de V_1 et des applications de classe C^∞ $g_{i,j}$:

$$G_{1, \Omega_j}^{\Omega_i} \rightarrow G_2 \quad \text{où} \quad G_{1, \Omega_j}^{\Omega_i} = \{\gamma \in G_1, r(\gamma) \in \Omega_i \text{ et } s(\gamma) \in \Omega_j\}$$

tels que

$$\forall \gamma \in G_{1, \Omega_p}^{\Omega_i}, \quad g_{j,i}(\gamma^{-1}) = g_{i,j}(\gamma)^{-1}$$

et $\forall \gamma' \in G_{1, \Omega_k}^{\Omega_i}$ tel que

$$s(\gamma) = r(\gamma'), \quad s(g_{i,j}(\gamma)) = r(g_{j,k}(\gamma'))$$

et

$$g_{i,k}(\gamma\gamma') = g_{i,j}(\gamma)g_{j,k}(\gamma').$$

En d'autres termes soit $G'_1 = \coprod_{i,j} G_{1,\Omega_j}^{\Omega_i}$ c'est un groupoïde, équivalent à G_1 (cf. [35], [22]),

et g un homomorphisme de G'_1 dans G_2 [donné par $g(\gamma, i, j) = g_{i,j}(\gamma)$]. Remarquons que si $g_{i,j}$ est un cocycle alors $r(g_{i,j}(\gamma))$ ne dépend que de i et de $r(\gamma)$. Soit $f_i: \Omega_i \rightarrow V_2$ donnée par $f_i(r(\gamma)) = r(g_{i,j}(\gamma))$. Quitte à remplacer le recouvrement Ω_i par un recouvrement plus fin, on peut supposer que les Ω_i sont des ouverts trivialisants de transversales $T_{1,i}$ et que les $f_i(\Omega_i)$ sont inclus dans des ouverts trivialisants de transversales $T_{2,i}$. Soient $T_1 = \coprod T_{1,i}$ et $T_2 = \coprod T_{2,i}$. Soit $g'_{i,j}: G_{1,T_{1,j}}^{T_{1,i}} \rightarrow G_{2,T_{2,j}}^{T_{2,i}}$ le projeté à la transversale de la restriction de $g_{i,j}$ à $G_{1,T_{1,j}}^{T_{1,i}}$. Notons que T_j est une transversale de (V_j, F_j) (c'est-à-dire une variété munie d'une application étale à valeurs dans V_j/F_j au sens de [8], p. 594), que T_1 est fidèle (i. e. rencontre toutes les feuilles de (V_1, F_1)), et que $g'_{i,j}$ définit un homomorphisme $g': G_{1,T_1}^{T_1} \rightarrow G_{2,T_2}^{T_2}$ de classe C^∞ (où $G_{i,T_i}^{T_i} = \coprod_{j,k} G_{i,T_i,k}^{T_i,j}$).

Notons enfin qu'on peut grandir T_2 et donc supposer que T_2 aussi est fidèle.

Nous pouvons alors introduire l'énoncé suivant :

1. 1. DÉFINITION. — Une application $f: V_1/F_1 \rightarrow V_2/F_2$ de classe C^∞ est définie par une des données équivalentes

- (i) Un G_1 fibré principal G_f sur V_1 de groupoïde structural G_2 .
- (ii) Un cocycle de G_1 dans G_2 .
- (iii) Un homomorphisme $g: G'_1 \rightarrow G'_2$ où G'_j est équivalent à G_j .
- (iv) Un homomorphisme $\varphi: G_{1,T_1}^{T_1} \rightarrow G_{2,T_2}^{T_2}$ où T_j est une transversale fidèle de (V_j, F_j) .

On a déjà vu comment (i) \Rightarrow (iii), (ii) \Rightarrow (iii) et (ii) \Rightarrow (iv). L'implication (iv) \Rightarrow (iii) résulte du fait que si T est une transversale fidèle de (V, F) , G_T^T est équivalent à G . Si G'_j est équivalent à G_j soit G'_j l'espace qui réalise cette équivalence $r: G'_j \rightarrow V_j$ la fibration de groupoïde G'_j , et $s: G'_j \rightarrow V'_j$ la fibration de groupoïde $G_j(V'_j = G_j^{(0)})$. Posons $G_f = G'_1 \times_{G'_1} G_2'^{-1}$: c'est le quotient de

$$\{(x_1, x_2) \in G'_1 \times G_2' / g(s_1(x_1)) = s_2(x_2)\}$$

par la relation

$$(x_1, x_2) \sim (x_1 y, x_2 g(y)), \quad y \in G'_1, \quad r(y) = s(x_1).$$

Ceci montre comment (iii) implique (i). Pour passer du point de vue (i) au point de vue

(ii) on utilise des sections locales de la fibration $G_f \xrightarrow{r} V_1$.

La composée de deux applications $f_3: V_1/F_1 \rightarrow V_2/F_2$ et $f_1: V_2/F_2 \rightarrow V_3/F_3$ est donnée par son graphe $G_{f_1 \circ f_3} = G_{f_3} \times_{G_2} G_{f_1}$ i. e. le quotient de $\{(x_3, x_1) \in G_{f_3} \times G_{f_1}, s(x_3) = r(x_1)\}$ par la relation $(x_3, x_1) \sim (y_3, y_1) \Leftrightarrow \exists \gamma \in G_2$ avec $x_3 \gamma = y_3$ et $\gamma y_1 = x_1$.

Notons que, pour les points de vue (iii) et (iv) de la définition 1.1, étant donnés G'_2 ou $G_{2,T_2}^{T_2}$, il existe une transversale T_1 et un homomorphisme $g: G_{1,T_1}^{T_1} \rightarrow G'_2$ ou

$\varphi: G_{1,T_1}^{T_1} \rightarrow G_{2,T_2}^{T_2}$ (de classe C^∞) réalisant f_3 . Ceci montre qu'on peut calculer $f_1 \circ f_3$ en utilisant la composée d'homomorphismes bien choisis.

Étudions maintenant les cas particuliers des submersions et des immersions :

1. 2. DÉFINITION. — *L'application $f: V_1/F_1 \rightarrow V_2/F_2$ est dite une submersion si les conditions équivalentes suivantes sont vérifiées :*

- (i) *L'application $s: G_f \rightarrow V_2$ est une submersion.*
- (ii) *Le cocycle $g_{i,j}: G_1 \rightarrow G_2$ est transverse (i.e. les applications $f_i: \Omega_i \rightarrow V_2$ sont transverses à F_2).*
- (iii) *L'homomorphisme $g: G'_1 \rightarrow G'_2$ est transverse (pour le feuilletage de G'_2 donné par $r^{-1}(F'_2)$).*

(iv) *L'homomorphisme $\varphi: G_{1,T_1}^{T_1} \rightarrow G_{2,T_2}^{T_2}$ est une submersion.*

Si $f: V_1/F_1 \rightarrow V_2/F_2$ est une submersion alors le feuilletage F_2 se ramène en arrière par f en un feuilletage F'_2 sur V_1 . Dans ce cas $F_1 \subseteq F'_2$ et toute la situation est exactement décrite par ce double feuilletage de V_1 et par l'application étale $V_1/F'_2 \rightarrow V_2/F_2$.

Nous ne donnons la définition des immersions qu'en fonction des données équivalentes (i) et (iv) de la définition 1. 1.

1. 3. DÉFINITION. — *L'application $f: V_1/F_1 \rightarrow V_2/F_2$ est dite une immersion si les conditions équivalentes suivantes sont vérifiées :*

- (i) *On a $dr^{-1}(F_1) = ds^{-1}(F_2)$ (ce sont des sous-espaces de TG_f).*
- (ii) *L'application $\varphi: G_{1,T_1}^{T_1} \rightarrow G_{2,T_2}^{T_2}$ est une immersion.*

1. 4. Remarques. — (a) Si f est une immersion on peut, quitte à modifier T_2 , supposer que l'application $\varphi: T_1 \rightarrow T_2$ est une inclusion propre (c'est très facile de le faire localement de $T_{1,i}$ dans $T_{2,i}$). On l'obtient alors globalement en prenant $T_1 = \coprod T_{1,i}$ et $T_2 = \coprod T_{2,i}$.

(b) Pour toute application f , comme $r: G_f \rightarrow V_1$ est une submersion, $dr^{-1}(F_1)$ est un sous fibré intégrable de TG_f et on a $dr^{-1}(F_1) \subseteq ds^{-1}(F_2)$. Cependant $ds^{-1}(F_2)$ n'est pas toujours un fibré vectoriel car sa dimension peut varier. Nous dirons que f est de rang constant si la dimension de $ds^{-1}(F_2)$ est constante. Dans ce cas $ds^{-1}(F_2)$ est un feuilletage sur G_f .

(c) D'un point de vue naïf une application de $V_1/F_1 \rightarrow V_2/F_2$ est une application $f: V_1 \rightarrow V_2/F_2$ qui passe au quotient V_1/F_1 i.e. constante sur les feuilles de (V_1, F_1) . Une application $f: V_1 \rightarrow V_2/F_2$ est donnée par son graphe G_f qui est un G_2 fibré principal au-dessus de V_1 . D'un point de vue ensembliste, f passe au quotient si $dr^{-1}(F_1) \subseteq ds^{-1}(F_2)$. Cependant cette condition n'est pas suffisante ⁽¹⁾ et on doit supposer que G_1 agit dans G_f . Un exemple simple où ces deux notions sont distinctes est donné par le cas où V_1 , feuilletée par une seule feuille, est une feuille à holonomie non triviale de V_2/F_2 . Le graphe de l'inclusion est alors $G_f = G_2^{V_1} = \{\gamma \in G_2, r(\gamma) \in V_1\}$ mais le groupoïde $G_1 = V_1 \times V_1$ n'agit pas dans G_f . Notons qu'on ne doit pas confondre cette

⁽¹⁾ Elle l'est dans le cas où f est une submersion (cf. [11], lemma 4. 2).

application $f: V_1 \rightarrow V_2/F_2$ qui ne passe pas au quotient avec la composée $V_1 \rightarrow pt \rightarrow V_2/F_2$ de graphe $V_1 \times G_2^x$ (où $x \in V_1$ et $G_2^x = \{\gamma \in G_2, r(\gamma) = x\}$) qui, elle, passe bien sûr au quotient.

Plus généralement, si V_1 est une sous-variété de V_2 , l'application f de V_1 dans V_2/F_2 induite par l'inclusion $V_1 \subseteq V_2$ « passe au quotient » si et seulement si

$$(i) \quad \forall x \in V_1, F_{1,x} \subseteq F_{2,x}.$$

(ii) Pour tout lacet γ tracé dans une feuille de (V_1, F_1) , si son holonomie pour (V_1, F_1) est triviale alors son holonomie pour (V_2, F_2) l'est aussi. La condition (i) signifie que f passe au quotient d'un point de vue ensembliste; la condition (ii) signifie que l'application f induit un homomorphisme de groupoïdes $G_1 \rightarrow G_2$, où G_j est le graphe (groupoïde d'holonomie) de (V_j, F_j) . Notons que si au lieu de considérer les groupoïdes d'holonomie on travaille avec le groupoïde du feuilletage (cf. [5]) le problème n'apparaîtrait pas, la condition (ii) étant toujours vérifiée si on remplace « holonomie » par « homotopie ».

Le cas $V_1 =$ feuille de (V_2, F_2) à holonomie non triviale fournit un exemple où (i) n'implique pas (ii). Mais comme nous l'avons indiqué plus haut l'application $f: V_1 \rightarrow V_2/F_2$ peut être modifiée, gardant la même application d'un point de vue ensembliste et qui elle passe au quotient. Nous donnons maintenant un exemple où ceci ne se produit plus.

Soient T_1, T_2 deux difféomorphismes de S^1 tels que l'ensemble des points fixes de T_1 soit un intervalle $[a, b]$ ($a \neq b$) et celui de T_2 un point $\{c\}$. Soit T le difféomorphisme de \mathbb{T}^2 donné par $T(x_1, x_2) = (T_1 x_1, T_2 x_2)$.

Soit V_2 le « mapping torus » de T i.e. le quotient $(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}/\mathbb{Z})$ où \mathbb{Z} agit dans $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$ par $T'(u, t) = (Tu, t+1)$. La partie $S^1 \times \{c\} \times \mathbb{R}$ de $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$ est invariante par T' . Soit V_1 son image dans V_2 . Feuilletons V_1 et V_2 par l'action de \mathbb{R} (par translations dans $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$). Soit $c' \in]a, b[$ et $\tilde{\gamma}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$ donné par $\tilde{\gamma}(t) = (c', c, t)$. Alors l'image de $\tilde{\gamma}$ dans V_1 est un lacet tracé dans une feuille de (V_1, F_1) . Son holonomie pour (V_1, F_1) est triviale mais son holonomie pour (V_2, F_2) ne l'est pas.

1.5. *Exemples.* — 1. L'identité $id: V/F \rightarrow V/F$ dont le graphe G_{id} est le graphe (=le groupoïde d'holonomie) de (V, F) .

2. La projection $p: V \rightarrow V/F$ dont le graphe est encore G . En général, si $f: V_1/F_1 \rightarrow V_2/F_2$ et $f': V_1 \rightarrow V_2/F_2, f' = f \circ p_1$ on a $G_f = G_{f'}$.

3. La projection $V/F \rightarrow pt$ de graphe V . Notons que le graphe G de (V, F) agit dans $V = G^{(0)}$.

4. Si E est un fibré vectoriel réel sur V sur lequel le graphe G de (V, F) agit, E est muni d'un feuilletage horizontal F_E . Alors la section nulle définit une immersion $i_E: V/F \rightarrow E/F_E$, et la projection $E \rightarrow V$ définit une submersion $p_E: E/F_E \rightarrow V/F$ [le graphe de i_E est égal au graphe de (V, F) ; celui de p_E est égal au graphe de (E, F_E)].

5. Si $f: V_1/F_1 \rightarrow V_2/F_2$ et $f': V_1/F_1 \rightarrow V'_2/F'_2$ sont deux applications alors $(f, f'): V_1/F_1 \rightarrow (V_2 \times V'_2/F_2 \times F'_2)$ est donné par son graphe

$$G_{(f, f')} = G_f \times_{v_1} G_{f'} = \{(x, x')/r(x) = r(x')\}.$$

Si f ou f' est une immersion alors (f, f') est une immersion. Un exemple important pour la suite est fourni par $(\text{id}, f): V_1/F_1 \rightarrow V_1 \times V_2/F_1 \times F_2$ où $f: V_1/F_1 \rightarrow V_2/F_2$.

6. Si $f: V_1/F_1 \rightarrow V_2/F_2$ et $f': V'_1/F'_1 \rightarrow V'_2/F'_2$ alors

$$(f \times f'): (V_1 \times V'_1/F_1 \times F'_1) \rightarrow (V_2 \times V'_2/F_2 \times F'_2)$$

est donné par $G_{f \times f'} = G_f \times G_{f'}$. Un exemple utile pour la suite est fourni par

$$(p \times \text{id}): (V_1 \times V_2, F_1 \times F_2) \rightarrow V_2/F_2.$$

Notons que $f = (p \times \text{id}) \circ (\text{id}, f)$.

K-ORIENTATIONS. — Les définitions ci-dessous sont dues à P. Baum.

Soit MI_n^c le groupe $MI_n^c = (MI_n(\mathbb{R}) \times_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} U(1))$ où $MI_n(\mathbb{R})$ désigne le groupe *métalinéaire* i. e. le revêtement non trivial à deux feuillets du groupe des matrices réelles à déterminant positif $GL_n^+(\mathbb{R})$. Le compact maximal de MI_n^c est $Spin^c(n)$.

Soit E un G -fibré vectoriel réel de dimension n sur V , où G est le graphe de (V, F) . Le G fibré E est orienté si son groupe structural est réduit à GL_n^+ , i. e. s'il existe un G fibré principal P de groupe structural $GL_n^+(\mathbb{R})$ avec $E \cong P \times_{GL_n^+} \mathbb{R}^n$.

1. 6. DÉFINITION (P. Baum). — *Le G -fibré E est dit K-orienté si son groupe structural est réduit à MI_n^c .*

Notons qu'en général un G -fibré n'a pas de structure métrique G -invariante, et donc on ne peut pas réduire le groupe structural à $Spin^c(n)$.

1. 7. PROPOSITION. — (a) Si E est un G -fibré complexe alors E est K-orienté.

(b) Si E est K-orienté, E^* est K-orienté.

(c) Pour tout G -fibré E , $E \oplus E^*$ est K-orienté.

(d) Si $0 \rightarrow E' \rightarrow E \rightarrow E'' \rightarrow 0$ est une suite exacte de G fibrés et si deux des fibrés E , E' , E'' sont K-orientés alors le troisième l'est.

(e) Si $0 \rightarrow E' \rightarrow E \rightarrow E'' \rightarrow 0$ est une suite exacte de G fibrés alors $E' \oplus E''$ est K-orienté si et seulement si E l'est.

Preuve. — (a) On a un homomorphisme $GL_n(\mathbb{C}) \rightarrow MI_{2n}^c$ qui prolonge l'homomorphisme $U(n) \rightarrow Spin^c(2n)$ (cf. [2], [29]).

(b) L'automorphisme de $GL_n^+(\mathbb{R})$ donné par $x \rightarrow {}^t x^{-1}$ se prolonge à MI_n^c .

(c) L'homomorphisme $GL_n(\mathbb{R}) \rightarrow GL_{2n}^+(\mathbb{R})$ donné par $x \rightarrow \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & {}^t x^{-1} \end{pmatrix}$ se relève en un

homomorphisme $GL_n \rightarrow MI_{2n}^c$.

(d) Si E' et E'' sont K-orientés on utilise l'homomorphisme $\begin{bmatrix} MI_{n'}^c & M_{n', n''}(\mathbb{R}) \\ 0 & MI_{n''}^c \end{bmatrix} \rightarrow MI_{n'+n''}^c$ pour montrer que E l'est. Si E' et E sont K-orientés, on note que le produit fibré

$$\begin{bmatrix} MI_{n'}^c & M_{n', n''}(\mathbb{R}) \\ 0 & GL_{n''}(\mathbb{R}) \end{bmatrix}_{GL_{n'+n''}} \times MI_{n'+n''}^c = \begin{bmatrix} MI_{n'}^c & M_{n', n''}(\mathbb{R}) \\ 0 & MI_{n''}^c \end{bmatrix}$$

Si E et E'' sont K -orientés, on raisonne de la même façon ou on passe aux fibrés duaux.

(e) On a la suite exacte

$$0 \rightarrow E' \oplus E' \rightarrow E \oplus E' \oplus E'' \rightarrow E'' \oplus E'' \rightarrow 0$$

et donc par (a) et (d) $E \oplus E' \oplus E''$ est K -orienté.

On conclut en utilisant (d). ■

Soit $f: V_1/F_1 \rightarrow V_2/F_2$ et soit E un G_2 -fibré réel sur V_2 . Alors s^*E est un G_2 -fibré sur G_f sur lequel G_1 agit trivialement. Comme G_f est un G_2 -fibré principal, il existe un unique G_1 -fibré E' sur V_1 avec $r^*E' \cong s^*E$ (en tant que G_1, G_2 fibrés sur G_f). On pose $E' = f^*E$.

Une autre façon de voir f^*E est de considérer le fibré E comme associé à un cocycle $i: G_2 \rightarrow Gl_n(\mathbb{R})$ et utiliser le cocycle composé $i \circ f$. Soit τ_j le fibré transverse à (V_j, F_j) ($\tau_{j,x} = T_x V_j / F_{j,x}$ pour $x \in V_j, j=1, 2$). Alors τ_j est un G_j -fibré.

1.8. DÉFINITION. — L'application $f: V_1/F_1 \rightarrow V_2/F_2$ est dite K -orientée si le G_1 -fibré $\tau_1^* \oplus f^* \tau_2$ est K -orientée.

Si $f: V_1/F_1 \rightarrow V_2/F_2$ est une application de classe C^∞ , df détermine un G_1 -homomorphisme de G_1 -fibrés $df: \tau_1 \rightarrow f^* \tau_2$. Alors f est une immersion si et seulement si en tout $x \in V_1$ $(df)_x$ est injective et une submersion si $(df)_x$ est surjective.

1.9. DÉFINITION. — (a) Si f est une immersion on pose $N_f = f^* \tau_2 / df(\tau_1)$.

Alors f est K -orienté si N_f est K -orienté en tant que G_1 -fibré.

(b) Si f est une submersion on pose $K_f = \text{Ker}(df)$.

Alors f est K -orienté si K_f^* est K -orienté.

La cohérence entre les définitions 1.8 et 1.9 est assurée par la proposition 1.7 (d) et (c). On renvoie à [11] Appendice B pour les conventions sur les K -orientations d'une immersion, d'une submersion et d'une composée de deux applications.

1.10. Remarque (suggérée par A. Connes). — Il est légitime de comparer la notion de K -orientation que nous utilisons ici à la suivante : le fibré G équivariant E est K -orienté si sur BG il a une structure Spin^c . Sans trop rentrer dans le formalisme cohomologique (cf. [19], [21], [39] pour des discussions détaillées) disons que l'obstruction à une K -orientation vit dans le groupe de cohomologie $H^2(G; \mathcal{U})$ où \mathcal{U} est le faisceau des germes d'applications continues à valeurs dans $U(1)$: il s'agit du ramené en arrière par le cocycle (homomorphisme) $G \rightarrow Gl_n^+(\mathbb{R})$ qui correspond au fibré E , de la classe de $H^2(Gl_n^+(\mathbb{R}); U(1))$ associé à l'extension centrale

$$1 \rightarrow U(1) \rightarrow MI_n^c \rightarrow Gl_n^+ \rightarrow 1.$$

L'obstruction à une structure Spin^c sur BG vit dans le groupe $H^2(BG; \mathcal{U}) \cong H^3(BG; \mathbb{Z})$. Cependant l'application naturelle $H^2(G; \mathcal{U}) \rightarrow H^2(BG; \mathcal{U})$ n'est pas un isomorphisme car les coefficients \mathcal{U} ne sont pas discrets⁽²⁾. En fait l'application $H^3(G; \mathbb{Z}) \rightarrow H^3(BG; \mathbb{Z})$

⁽²⁾ On a, en fait, un isomorphisme $H^2(G; \mathcal{U}) = H^2(BG; \mathcal{U}')$ où \mathcal{U}' est le faisceau des germes d'applications continues à valeurs dans $U(1)$, constantes sur les feuilles du feuilletage sur BG (cf. [21]).

est un isomorphisme (cf. [21]) mais comme $H^*(G; \mathcal{R}) \neq 0$ où \mathcal{R} désigne le faisceau des germes d'applications continues à valeurs réelles on a $H^2(G; \mathcal{U}) \neq H^3(G; \mathbb{Z})$.

Notons que les notions analogues de K-orientation réelle coïncident comme les obstructions vivant dans les groupes $H^2(G; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ et $H^2(BG; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ et que l'application naturelle $H^2(G; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow H^2(BG; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ est un isomorphisme.

Nous construisons maintenant explicitement un exemple où ces notions de K-orientation ne coïncident pas.

Soit (V, F) un feuilletage dont le groupoïde d'holonomie restreint à une transversale T est $G_T^T = T \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}^2$ où \mathbb{Z}^2 agit dans T (par exemple $T = \mathbb{T}^2$) avec un point fixe isolé x_0 .

Soit E le fibré réel G -équivariant de dimension 3 sur V donné par le cocycle composé

$$G \xrightarrow{\sim} G_T^T \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\beta} \text{SO}(3) \text{ où } \alpha \text{ est l'homomorphisme } (x, p) \rightarrow p (x \in T, p \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) \text{ et}$$

$$\beta(1, 0) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \beta(0, 1) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Soient j et k des antécédents de $\beta(1, 0)$ et de $\beta(0, 1)$ dans $\text{Spin}(3) = \text{SU}(2)$. On a

$$[j, k] = \varepsilon \left(= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \in \text{SU}(2) \right) \text{ et donc l'obstruction à une K-orientation réelle est le}$$

ramené par α de l'élément $u \in H^2(\mathbb{Z}^2; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ donné par la suite exacte $1 \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \Gamma \rightarrow \mathbb{Z}^2 \rightarrow 1$ où Γ est le « groupe de Heisenberg » des matrices

$$\begin{bmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{Z}, c \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}. \text{ L'obstruction à une K-orientation complexe est l'image}$$

par α^* de $v \in H^2(\mathbb{Z}^2; U(1))$ donné par $1 \rightarrow U(1) \rightarrow \Gamma' \rightarrow \mathbb{Z}^2 \rightarrow 1$ où

$$\Gamma' = \begin{bmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{Z}, c \in \mathbb{R}/2\mathbb{Z}.$$

Soit $i: \mathbb{Z}^2 \rightarrow G_T^T$ l'homomorphisme donné par le point x_0 . On a $\alpha \circ i = \text{Id}_{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}$. Comme $v \neq 0$, $i^* \alpha^*(v) \neq 0$ et donc $\alpha^*(v) \neq 0$ et le G -fibré E n'est pas K-orienté. Cependant, dans $BG = (T \times \mathbb{R}^2)/\mathbb{Z}^2$ l'obstruction à une structure Spin^c est le ramené en arrière par $\alpha: BG \rightarrow \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 = B\mathbb{Z}^2$ d'un élément de $H^3(\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2; \mathbb{Z}) = 0$.

Notons finalement que de la discussion ci-dessus résulte que si E_0 et E_1 sont des G -fibrés homotopes (i.e. il existe un $G \times [0, 1]$ fibré E de restrictions E_0 et E_1) une K-orientation réelle de E_0 détermine une K-orientation réelle de E_1 . En particulier $E_0 \oplus E_1$ a une K-orientation réelle canonique, et donc une K-orientation complexe canonique et finalement une K-orientation (complexe) de E_0 détermine une K-orientation (complexe) de E_1 . Le (e) de la proposition 1.7 est un cas particulier de ce fait, les fibrés E et $E' \oplus E''$ étant canoniquement homotopes (notations de 1.7).

**II. Construction de quelques éléments
de groupes de Kasparov
associés à des fibres K-orientés (cf. [31] et [10])**

Dans cette section G désigne, ou bien un groupoïde étale (i.e. G est une variété, $V=G^{(0)}$ est ouvert, r et s sont des morphismes étales de variétés), ou bien le groupoïde d'holonomie d'une variété feuilletée (V, F) . Soit E un G -fibré vectoriel réel :

Nous systématisons la construction de ([10], § V) : nous allons décrire une méthode permettant de construire des éléments de groupes de Kasparov qui nous seront essentiels par la suite :

1. Un élément $\gamma_E \in \text{KK}(C^*(G); C^*(G))$ qui correspond à l'obstruction γ de G . G . Kasparov ([31], § 5) (définition 2. 5),

2. Des éléments $\alpha'_E \in \text{KK}(C^*(G^E); C^*(G))$ et $\beta'_E \in \text{KK}(C^*(G); C^*(G^E))$ associés à une K -orientation de E et qui se réduisent à l'isomorphisme de Thom lorsque E possède une structure riemannienne G -invariante (définition 2. 8) (cf. [30], § 5).

3. Soit W le G -fibré des formes quadratiques définies positives sur E . On retrouve les éléments $\tilde{\alpha}_E \in \text{KK}(C^*(G); C^*(G^W))$ et $\tilde{\beta}_E \in \text{KK}(C^*(G^W); C^*(G))$ (2. 10) de [10], § V.

4. Soit L un fibré complexe G -équivariant. On définit un élément de multiplicité $[L] \in \text{KK}(C^*(G); C^*(G))$ (2. 11) (cf. [10]).

Soit H un groupe de Lie, $i : G \rightarrow H$ un cocycle, A et B des H -algèbres. Le cocycle i en fait des G -algèbres et on peut considérer les produits croisés $A \rtimes_i G$ et $B \rtimes_i G$ au sens de [38].

On construit alors un morphisme de $\text{KK}_H(A; B)$ dans $\text{KK}(A \rtimes_i G; B \rtimes_i G)$ qui est « naturel » relativement au produit de Kasparov, à la réduction du groupe structural et à la restriction de G à des fermés (ou des ouverts) saturés.

Dans les exemples ci-dessus, H est le groupe structural du fibré E , (i. e. $H = \text{Gl}_n(\mathbb{R})$, $\text{Gl}_n^+(\mathbb{R})$, $\text{Gl}_n(\mathbb{C})$, Ml_n^i) $i : G \rightarrow H$ le cocycle associé à E et on prend les H -algèbres commutatives \mathbb{C} , $C_0(\mathbb{R}^n)$, $C_0(H/K)$ où K est le compact maximal de H .

Notons que la construction que nous faisons ici se généralise *nec varietur* à un groupoïde G et un groupe H localement compacts.

NOTATION. — Soit $\pi : X \rightarrow V$ un fibré G -équivariant, X étant une variété C^∞ . On note G^X le groupoïde $r^*(X) = \{(x, \gamma) \in X \times G, \pi(x) = r(\gamma)\}$; on a $G^{X^{(0)}} = X$, $r(x, \gamma) = x$ et $s(x, \gamma) = \gamma^{-1}x$. G^X est une variété.

Si G est un groupoïde étale, alors G^X l'est aussi.

Si G est le groupoïde d'une variété feuilletée (V, F) , son action sur X détermine un feuilletage horizontal F' sur X (de même dimension que F) et G^X n'est autre que le groupoïde d'holonomie de (X, F') .

Remarquons que la réciproque est fautive : l'existence sur X d'un feuilletage « parallèle » à F n'implique pas une action de G comme nous l'avons déjà vu dans la remarque 1. 4 (c) en construisant une immersion au sens ensembliste de $V_1/F_1 \rightarrow V_2/F_2$ qui n'est pas une immersion au sens de la définition 1. 3.

2.1. Soit H un groupe de Lie et un cocycle $i : G \rightarrow H$: c'est-à-dire la donnée d'un recouvrement ouvert $(\Omega_j)_{j \in I}$ de $V = G^{(0)}$ et, pour tout $k, l \in I$, d'une application $i_{k,l} : G_{\Omega_k}^{\Omega_l} \rightarrow H$ telle que $i_{k,p}(\gamma_1 \gamma_2) = i_{k,l}(\gamma_1) i_{l,p}(\gamma_2)$, pour $\gamma_1 \in G_{\Omega_k}^{\Omega_l}$ et $\gamma_2 \in G_{\Omega_l}^{\Omega_p}$.

Il est équivalent de considérer le fibré principal G -équivariant P de groupe structural H construit à partir de la restriction i_0 de i à V , les actions de G et H commutant.

Soit A une H -algèbre (i. e. une C^* -algèbre $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ graduée) munie d'une action continue, involutive (et préservant le degré) de H); le fibré associé $P \times_H A$ de C^* -algèbres sur V est G -équivariant et on peut former le produit croisé $C^*(G; P \times_H A)$ (cf. [38]); nous noterons $A \rtimes_i G$ cette dernière C^* -algèbre.

Soit B une autre H -algèbre : nous allons décrire à partir de i un morphisme de groupes de Kasparov :

$$i^* : KK_H(A; B) \rightarrow KK(A \rtimes_i G; B \rtimes_i G).$$

Pour cela, soit (\mathcal{E}_0, F_0) un bimodule de Kasparov représentant une classe $x \in KK_H(A; B)$; notons que H agit sur \mathcal{E}_0 et $g(F_0) - F_0$ est compact pour $g \in H$.

Pour simplifier, notons $\mathcal{E}_1 = P \times_H \mathcal{E}_0$, $A_1 = P \times_H A$, $B_1 = P \times_H B$ les fibrés G -équivariant associés sur V .

On peut supposer que le recouvrement $(\Omega_j)_{j \in I}$ associé à i est localement fini et soit (φ_j) une partition de l'unité associée à ce recouvrement. On a donc des trivialisations locales $\Theta_j \in C(\Omega_j; \mathcal{L}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_0))$ Soit F_1 l'élément de $C(V; \mathcal{L}(\mathcal{E}_1))$ défini par :

$$F_1 = \sum_{j \in I} \varphi_j \Theta_j^{-1} F_0 \Theta_j.$$

Fixons $j \in I$ et prenons $\xi = \Theta_j^{-1}(\xi_0)$ où $\xi_0 \in C_0(\Omega_j; \mathcal{E}_1)$.

Sur $\Omega_i \cap \Omega_j$, l'automorphisme $\Theta_j \circ \Theta_i^{-1}$ de \mathcal{E}_0 est dans l'image de l'action de H et donc on a pour un tel ξ :

$$(\Theta_i(F_1 \xi))(x) = F_0(\xi_0(x)) + k_{i,j}(x) \xi(x)$$

où $k_{i,j} \in C(\Omega_i \cap \Omega_j; \mathcal{K}(\mathcal{E}_0))$.

On a donc construit un champ d'opérateurs $F_1 \in C(V; \mathcal{L}(\mathcal{E}_1))$, tel que $F_1 - F_1^*$, $F_1^2 - 1$ et $[F_1, a]$ (pour $a \in C(V; A_1)$) soient localement compacts, i. e. éléments de $C(V; \mathcal{K}(\mathcal{E}_1))$. F_1 dépend du choix de recouvrement, mais l'image $\pi(F_1)$ dans $C_b(V; \mathcal{L}(\mathcal{E}_1))/C_b(V; \mathcal{K}(\mathcal{E}_1))$ n'en dépend pas.

De plus comme l'action de G dans \mathcal{E}_0 est factorisée à travers H , on a $\gamma \rightarrow F_{1,r(\gamma)} - \gamma(F_{1,s(\gamma)}) \in C_b(G; \mathcal{K}(r^* \mathcal{E}_1))$ pour $\gamma \in G$ (i. e. F_1 est G -continu cf. [31]).

Notons que l'action de G dans \mathcal{E}_1 est continue.

Rappelons que $B \rtimes_i G$ est l'algèbre enveloppante de l'algèbre involutive $C_c(G; r^*(B_1))$ pour le produit :

$$bb'(\gamma) = \int_{r(\gamma')=r(\gamma)} b(\gamma') \gamma'(b(\gamma'^{-1} \gamma)) \quad (\text{cf. [38]})$$

[dans le cas d'un groupoïde étale, il s'agit d'une somme discrète; dans le cas du groupoïde d'une variété feuilletée (V, F) , b et b' sont des sections du fibré de $1/2$ densités $r^*(\Omega^{1/2}(F)) \otimes s^*(\Omega^{1/2}(F)) \otimes r^*(B_1)$].

On a un produit hilbertien de $C_c(G; r^*(\mathcal{E}_1))$ à valeurs dans $B \rtimes_i G$ en posant pour $\xi, \eta \in C_c(G; r^*(\mathcal{E}_1))$:

$$\langle \xi, \eta \rangle(\gamma) = \int_{s(\gamma')=r(\gamma)} \gamma'^{-1} \langle \xi(\gamma'), \eta(\gamma'\gamma) \rangle$$

Soit \mathcal{E} le $B \rtimes_i G$ C^* -module hilbertien complété pour ce produit; alors $A \rtimes_i G$ agit sur \mathcal{E} et $F = r^*(F_1) \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$ et $a(F - F^*)$, $a(F^2 - 1)$, $[F, a]$ sont compacts, $\forall a \in A \rtimes_i G$.

On pose alors $i^*(x) =$ classe de (\mathcal{E}, F) dans $\text{KK}(A \rtimes_i G; B \rtimes_i G)$ (où $x = [(\mathcal{E}_0, F_0)] \in \text{KK}_H(A; B)$).

On peut construire d'une autre façon $i^*(x)$ en considérant le groupoïde G^P associé au fibré principal défini par $i: G \rightarrow H$. Le produit croisé $(A \otimes C^*(G^P)) \rtimes H$ est équivalent au sens de Morita à $A \rtimes_i G$.

A un élément $x \in \text{KK}_H(A, B)$ on peut associer un élément

$$\tilde{x} \in \text{KK}((A \otimes C^*(G^P)) \rtimes H; (B \otimes C^*(G^P)) \rtimes H)$$

provenant, par la construction de [31], de l'élément $\tau_{C^*(G^P)}(x)$ de

$$\text{KK}_H(A \otimes C^*(G^P); B \otimes C^*(G^P)).$$

Par les équivalences de Morita mentionnées, \tilde{x} correspond à $i^*(x)$.

En utilisant alternativement ces deux constructions, on obtient les propriétés de naturalité suivantes :

2.2. LEMME (cf. [31], theorem 4, § 4 et 1, § 6). — Pour $x \in \text{KK}_H(A; B)$ et $y \in \text{KK}_H(B; C)$, on a :

$$i^*(x \otimes y) = i^*(x) \otimes i^*(y).$$

De plus $i^*(1_A) = 1_{A \rtimes_i G}$. ■

2.3. LEMME. — Soient H_1, H_2 deux groupes de Lie, $\varphi: H_1 \rightarrow H_2$ un homomorphisme continu, $i_1: G \rightarrow H_1$ un cocycle et $i_2 = \varphi \circ i_1$.

L'homomorphisme φ induit un morphisme $\varphi^*: \text{KK}_{H_2}(A; B) \rightarrow \text{KK}_{H_1}(A; B)$ et pour $x \in \text{KK}_{H_2}(A; B)$ on a :

$$i_1^*(\varphi^*(x)) = i_2^*(x). \quad \blacksquare$$

2.4. RESTRICTION A DES FERMÉS OU OUVERTS SATURÉS. — Soit Y une sous-variété fermée de V , saturée par G et $\Omega = V \setminus Y$. On a alors une suite exacte :

$$0 \rightarrow C^*(G_\Omega^h) \xrightarrow{j} C^*(G) \xrightarrow{h} C^*(G_Y^h) \rightarrow 0.$$

L'homomorphisme j est injectif car toute représentation de $C_c(G_\Omega^h)$ se prolonge à $C_c(G)$ (cf. [37]) et h est surjectif car $h(C^*(G))$ contient $C_c(G_Y^h)$.

Soit π une représentation de $C^*(G)$ nulle sur $j(C^*(G_\Omega^\Omega))$; par [37] une telle représentation s'obtient par intégration à partir d'un couple (μ, H) où μ est une mesure sur V quasi invariante et H est un G -fibré d'espaces de Hilbert. On a donc $\text{support}(\mu) \subset Y$ et π définit alors par restriction une représentation de $C^*(G_Y^Y)$. Ceci montre que

$$C^*(G)/C^*(G_\Omega^\Omega) \cong C^*(G_Y^Y).$$

Soit alors $i : G \rightarrow H$ un cocycle, i_Y, i_Ω ses restrictions, et $x \in \text{KK}_H(A; B)$. Avec des notations évidentes, on a :

$$i^*(x) \otimes h_B = h_A \otimes i_Y^*(x)$$

$$i_\Omega^*(x) \otimes j_B = j_A \otimes i^*(x).$$

Exemples. — Nous supposons que H est connexe; soit $\gamma_H \in \text{KK}_H(\mathbb{C}; \mathbb{C})$ l'élément construit par G. G. Kasparov ([31], § 5). Rappelons que nous avons les propriétés suivantes :

1. γ_H est un idempotent : $\gamma_H \otimes \gamma_H = \gamma_H$.
2. $\gamma_H = 1_{\mathbb{C}}$ si H est moyennable (ou de Lorentz, cf. [33]).
3. Soit K le compact maximal de H . Le morphisme de restriction $\text{rest}_H^K : \text{KK}_H(\mathbb{C}; \mathbb{C}) \rightarrow \text{KK}_K(\mathbb{C}; \mathbb{C})$ est un isomorphisme de

$$\text{Im}(\gamma_H) = \{x \in \text{KK}_H(\mathbb{C}; \mathbb{C}), x \gamma_H = \gamma_H x = x\} \text{ sur } \text{KK}_K(\mathbb{C}; \mathbb{C}).$$

4. Soient H_1, H_2 deux groupes de Lie connexes. On a

$$\gamma_{H_1 \times H_2} = p_1^*(\gamma_{H_1}) \otimes_{\mathbb{C}} p_2^*(\gamma_{H_2})$$

où $p_j : H_1 \times H_2 \rightarrow H_j$ est la projection.

5. Soit $\varphi : H_1 \rightarrow H_2$ un homomorphisme propre. On a :

$$\varphi^*(\gamma_{H_1}) = \gamma_{H_2}.$$

Pour simplifier, on note γ_n l'élément $\gamma_{\text{Gl}_n^+}$ et soit E un G -fibré vectoriel orienté, $i : G \rightarrow \text{Gl}_n^+$ le cocycle associé ($n = \dim E$).

2.5. DÉFINITION. — On pose $\gamma_E = i^*(\gamma_n)$; c'est un élément du groupe $\text{KK}(C^*(G); C^*(G))$.

A partir des propriétés de γ_H ci-dessus, et avec les notations précédentes, on a :

2.6. PROPOSITION. — On a les propriétés :

1. γ_E est un idempotent : $\gamma_E^2 = \gamma_E$.
2. Si le groupe structural de E se réduit à un groupe moyennable (ou de Lorentz), on a : $\gamma_E = 1$ (c'est en particulier le cas si E possède une métrique riemannienne G -invariante).
3. Soit $0 \rightarrow E_1 \rightarrow E \rightarrow E_2 \rightarrow 0$ une suite exacte de G -fibrés vectoriels.

On a : $\gamma_E = \gamma_{E_1} \otimes \gamma_{E_2}$.

Démonstration. — Nous montrons (3).

Soit $n = \dim E$, $n_j = \dim E_j$, $j = 1, 2$ et Gl_{n_1, n_2}^+ le sous-groupe de Gl_n^+ des matrices triangulaires supérieures par blocs :

$$\begin{pmatrix} a_1 & b \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}$$

où $a_j \in Gl_{n_j}^+$, $b \in M_{n_1, n_2}$. Soit $\psi : Gl_{n_1, n_2}^+ \rightarrow Gl_{n_1}^+ \times Gl_{n_2}^+$ l'homomorphisme $\psi \left(\begin{pmatrix} a_1 & b \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \right) = (a_1, a_2)$.

Notons que $\gamma_{Gl_{n_1}^+ \times Gl_{n_2}^+} = \gamma_{n_1} \otimes \gamma_{n_2}$.

Posons $\gamma_{n_1, n_2} = \gamma_{Gl_{n_1, n_2}^+}$. E est défini par un cocycle $i : G \rightarrow Gl_{n_1, n_2}^+$ et par le lemme 2.3, il suffit de montrer que $\psi^*(\gamma_{n_1} \otimes \gamma_{n_2}) = \gamma_{n_1, n_2}$.

Soit $\varphi : Gl_{n_1}^+ \times Gl_{n_2}^+ \rightarrow Gl_{n_1, n_2}^+$ l'inclusion canonique.

Comme φ est propre, on a $\varphi^*(\gamma_{n_1, n_2}) = \gamma_{n_1} \otimes \gamma_{n_2}$.

Soit Θ_t , $t \in [0, 1]$, l'homomorphisme de Gl_{n_1, n_2}^+ défini par

$$\Theta_t \left(\begin{pmatrix} a_1 & b \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a_1 & tb \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}.$$

Ceci réalise une homotopie entre $\varphi \circ \psi$ et l'homomorphisme identique de Gl_{n_1, n_2}^+ . On a donc :

$$\gamma_{n_1, n_2} = (\varphi \circ \psi)^*(\gamma_{n_1, n_2}) = \psi^*(\gamma_{n_1} \otimes \gamma_{n_2}). \blacksquare$$

2.7. *Remarque.* — Comme $E \oplus E$ est canoniquement orienté et que $\gamma_E = \gamma_{E \oplus E}$, on voit que γ_E ne dépend pas de l'orientation. Ceci montre aussi qu'on peut définir γ_E pour tout G -fibré vectoriel réel E (non nécessairement orienté) en posant $\gamma_E = \gamma_{E \oplus E}$.

Soit $\alpha'_n \in KK_{M_n^c}^n(C_0(\mathbb{R}^n); \mathbb{C})$ et $\beta'_n \in KK_{M_n^c}^n(\mathbb{C}; C_0(\mathbb{R}^n))$ les uniques éléments qui vérifient les propriétés :

1. $\gamma_{M_n^c} \otimes \alpha'_n = \alpha'_n \otimes \gamma_{M_n^c} = \alpha'_n$, $\gamma_{M_n^c} \otimes \beta'_n = \beta'_n \otimes \gamma_{M_n^c} = \beta'_n$
2. $\text{rest}_{M_n^c}^{\text{Spin}^c(n)}(\beta'_n)$ et $\text{rest}_{M_n^c}^{\text{Spin}^c(n)}(\alpha'_n)$

sont les éléments de $KK_{\text{Spin}^c(n)}^*$ inverse l'un de l'autre construits par Kasparov dans [30] (théorème 7, § 5) et qui constituent une formulation de l'isomorphisme de Thom dans la théorie de Kasparov.

2.8. DÉFINITION. — Soit E un G -fibré vectoriel K -orienté, $i : G \rightarrow M_n^c$ le cocycle associé. On pose

$$\alpha'_E = i^*(\alpha'_n)$$

$$\beta'_E = i^*(\beta'_n)$$

On a $\alpha'_E \in KK^n(C^*(G^E); C^*(G))$, $\beta'_E \in KK^n(C^*(G); C^*(G^E))$.

Par le lemme 2.2, on a :

2.9. PROPOSITION. — On a les propriétés suivantes :

1. Avec les notations précédentes : $\gamma_E \otimes \beta'_E = \beta'_E$, $\alpha'_E \otimes \gamma_E = \alpha'_E$ et $\beta'_E \otimes \alpha'_E = \gamma_E$.
2. Soient E_1 et E_2 deux G -fibrés vectoriels K -orientés et $E'_1 = \pi_1^*(E_2)$ le fibré sur E_1 d'espace total $E_1 \oplus E_2$. On a l'égalité :

$$\beta'_{E_1 \oplus E_2} = \beta'_{E_1} \otimes \beta'_{E_2}$$

(fonctorialité de β'). ■

2.10. $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$ (cf. [10], § V). — Soit n un entier et $m = n(n+1)/2$.

L'espace $X = \text{ML}_n^c / \text{Spin}^c(n)$ étant muni d'une structure $\text{Spin}^c \text{ML}_n^c$ -équivariante, on a un élément inversible du groupe $\text{KK}_{\text{ML}_n^c}^m(C_0(X); C_\tau(X))$ (avec les notations de [31], § 5). Soient alors $\tilde{\alpha}_n \in \text{KK}_{\text{ML}_n^c}^m(C_0(X); \mathbb{C})$ le produit de Kasparov de cet élément avec $\alpha_{\text{ML}_n^c} \in \text{KK}_{\text{ML}_n^c}(C_\tau(X); \mathbb{C})$ de [31], § 5 et $\tilde{\beta}_n$ l'unique élément de $\text{KK}_{\text{ML}_n^c}^m(\mathbb{C}; C_0(X))$ qui vérifie $\tilde{\alpha}_n \otimes \tilde{\beta}_n = 1_{C_0(X)}$.

Soit $i : G \rightarrow \text{ML}_n^c$ un cocycle, $E = i^*(\mathbb{R}^n)$ et $W = i^*(X)$ les G -fibrés associés sur V .

On pose alors :

$$\tilde{\alpha}_E = i^*(\tilde{\alpha}_n) \in \text{KK}^m(C^*(G^W); C^*(G))$$

$$\tilde{\beta}_E = i^*(\tilde{\beta}_n) \in \text{KK}^m(C^*(G); C^*(G^W)).$$

On a les égalités : $\gamma_E \otimes \tilde{\beta}_E = \tilde{\beta}_E$, $\tilde{\alpha}_E \otimes \gamma_E = \tilde{\alpha}_E$, $\tilde{\beta}_E \otimes \tilde{\alpha}_E = \gamma_E$ et $\tilde{\alpha}_E \otimes \tilde{\beta}_E = 1_{C^*(G^W)}$.

Remarque. — Pour construire $\tilde{\alpha}_E$ et $\tilde{\beta}_E$, on n'a pas besoin de supposer que E est K -orienté. Par exemple, si la dimension de E est paire, il suffit de supposer E orienté.

2.11. MULTIPLICITÉ (cf. [10], § 6). — Soit L un G -fibré complexe de dimension m , $i : G \rightarrow \text{GL}_m(\mathbb{C})$ le cocycle associé. Soit $[\mathbb{C}^m] \in \text{KK}_{\text{GL}_m(\mathbb{C})}(\mathbb{C}; \mathbb{C})$ l'unique élément donné par :

(i) $\text{rest}_{\text{GL}_m(\mathbb{C})}^{U(m)}([\mathbb{C}^m])$ considéré comme élément de $R(U(m)) = \text{KK}_{U(m)}(\mathbb{C}; \mathbb{C})$ est la représentation tautologique de $U(m)$ dans \mathbb{C}^m .

(ii) $\gamma_{\text{GL}_m(\mathbb{C})} \otimes [\mathbb{C}^m] = [\mathbb{C}^m]$.

On pose alors $[L] = i^*([\mathbb{C}^m])$, qui est un élément de $\text{KK}(C^*(G); C^*(G))$.

2.12. *Remarque.* — La notion de cocycle de G à valeurs dans un groupe et celle de morphisme d'espaces feuilletés $f : V/F \rightarrow V'/F'$ sont deux exemples de cocycle de G à valeurs dans un groupoïde Γ . A un tel cocycle est associé un fibré principal X sur $V = G^{(0)}$, G -équivariant, de groupoïde structural Γ (G et Γ commutent sur X). Deux tels cocycles i et i' : $G \rightarrow \Gamma$ coïncident si et seulement si les fibrés associés X et X' sont isomorphes de façon équivariante par rapport à G , Γ . Ceci revient à dire que les deux cocycles i et i' , sont « cobordants ».

III. Functorialité dans le cas des immersions

Dans cette section, nous définissons pour une immersion K-orientée $f : V_1/F_1 \rightarrow V_2/F_2$ l'élément $f! \in \text{KK}^*(C^*(V_1, F_1); C^*(V_2, F_2))$ et nous démontrons la functorialité de cette construction : soient $f_3 : V_1/F_1 \rightarrow V_2/F_2$ et $f_1 : V_2/F_2 \rightarrow V_3/F_3$ deux immersions K-orientées et $f_2 = f_1 \circ f_3$ la composée; on a alors $f_2! = f_3! \otimes f_1!$.

Tout se passe en réalité sur les groupoïdes étales associés à des transversales fidèles T_1 et T_2 à, respectivement, V_1/F_1 et V_2/F_2 . Notons pour simplifier G_j le groupoïde restreint $G_j^{T_j}$. Rappelons que l'on peut supposer que f induit un homomorphisme $\varphi : G_1 \rightarrow G_2$ et que l'immersion induite : $T_1 \rightarrow T_2$ est injective et propre (remarque 1.4); φ est alors une immersion injective, K-orientée et $\varphi(G_1)$ est une sous-variété localement fermée de G_2 . En utilisant le bimodule d'imprimitivité entre $C^*(V_j, F_j)$ et $C^*(C_j)$, on calcule $f!$ à partir d'un élément $\varphi! \in \text{KK}^*(C^*(G_1); C^*(G_2))$.

$\varphi!$ est lui-même le produit de Kasparov de deux éléments :

Le premier est $\beta_N \in \text{KK}^*(C^*(G_1); C^*(G_1^N))$ qui a été construit dans la définition 2.8, N étant le fibré normal de l'immersion $T_1 \rightarrow T_2$ qui est G_1 -équivariant et K-orienté.

Pour le deuxième, on fait une construction qui se réduit, lorsque $G_1 = G_1^{(0)}$ est un groupoïde trivial, à l'application exponentielle qui est un difféomorphisme de N sur un ouvert de $G_2^{(0)}$. En général, il n'existe pas un tel difféomorphisme compatible avec l'action de G_1 et on est amené à construire directement un élément $\sigma_\varphi \in \text{KK}(C^*(G_1^N); C^*(G_2))$ à partir d'une extension de $C^*(G_1^N)$ par $C^*(G_2) \otimes C_0(]0,1])$. Cette extension utilise le groupoïde normal associé à φ , que nous commençons par définir (cf. [9]).

Nous supposons, pour définir σ_φ , que $C^*(G_1)$ est nucléaire (en K-théorie, cf remarque 3.17).

Dans le cas général, on a une forme plus faible de l'énoncé (*ibid.*).

3.1. GROUPOÏDE NORMAL. — Soit X une sous-variété localement fermée de la variété Y , $N = TY/TX$ le fibré normal sur X . Sur l'ensemble $\mathcal{N} = N \times \{0\} \cup (Y \times]0,1])$ on définit une structure de variété à bord par les cartes suivantes :

1. Sur $Y \times]0,1]$, on a la structure produit.

2. Soient $\Omega \subset N$ et $U \subset Y$ deux ouverts contenant $x \in X$ et $\Theta : \Omega \rightarrow U$ une application exponentielle associée à une métrique riemannienne sur Y . On suppose que Ω contient la section nulle $i \circ \pi(\Omega)$ de la projection de Ω dans X . On a alors une bijection entre l'ouvert $\{(\xi, \lambda), \xi \in \Omega, \lambda \in [0,1], \lambda\xi \in \Omega\}$ de $N \times [0,1]$ et l'ensemble $\pi^{-1}(\pi(\Omega)) \cup (U \times]0,1])$ définie par :

$$\tilde{\Theta}(\xi, \lambda) = \begin{cases} (\xi, 0) & \text{si } \lambda = 0 \\ (\Theta(\lambda\xi), \lambda) & \text{si } \lambda \neq 0. \end{cases}$$

Montrons que les changements de carte sont C^∞ .

Soit $x_0 \in X$: on peut écrire au voisinage de x_0 , $N = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ et

$$\Omega = \mathbb{R}^p \times B_1^q \quad (\text{où } B_\lambda^q = \{y \in \mathbb{R}^q, \|y\| \leq \lambda^{-1}\}),$$

et on a :

$$\tilde{\Theta}(x, y, \lambda) = \begin{cases} (x, y, 0) & \text{si } \lambda = 0 \\ (x, \lambda y, \lambda) & \text{si } \lambda \neq 0, \quad y \in \mathbb{B}_\lambda^q. \end{cases}$$

Soit Θ' un autre tel difféomorphisme, on a $\Theta'(x, 0) = (x, 0)$ et $d\Theta'_{(x, 0)}(0, Y) = (A_x Y, Y)$ où $A_x \in \text{End}(\mathbb{R}^q, \mathbb{R}^p)$ et donc il existe des fonctions $C^\infty f_i (i=1, 2, \dots, q)$ à valeurs dans \mathbb{R}^p et $g_{i,j} (i, j=1, 2, \dots, q)$ à valeurs dans \mathbb{R}^q telles que

$$\Theta'^{-1}(x, y) = (x + \sum_i y_i f_i(x, y), y + \sum_{i,j} y_i y_j g_{i,j}(x, y)).$$

On a alors, pour $\lambda \neq 0$:

$$\tilde{\Theta}'^{-1} \circ \tilde{\Theta}(x, y, \lambda) = (x + \lambda \sum_i y_i f_i(x, \lambda y), y + \lambda \sum_{i,j} y_i y_j g_{i,j}(x, \lambda y), \lambda)$$

et on a $\tilde{\Theta}'^{-1} \circ \tilde{\Theta}(x, y, 0) = (x, y, 0)$, ce qui montre que $\tilde{\Theta}'^{-1} \circ \tilde{\Theta}$ est un difféomorphisme C^∞ d'un voisinage de $(x_0, 0)$ dans $\mathbb{N} \times [0, 1]$ sur son image. Notons que \mathbb{N} s'identifie (par $\mathbb{N} \times \{0\}$) à une sous-variété fermée de \mathcal{N} .

Soit alors un homomorphisme injectif de groupoïdes étales $\varphi : G_1 \rightarrow G_2$ qui soit une immersion C^∞ et telle que $\varphi(G_1)$ soit une sous-variété localement fermée de G_2 et soit \mathbb{N} le fibré normal de l'immersion $\varphi_0 : G_1^{(0)} \rightarrow G_2^{(0)}$. \mathbb{N} est G_1 -équivariant et le groupoïde $G_1^{\mathbb{N}} = r^*(\mathbb{N})$ est aussi l'espace total du fibré normal de φ .

Le groupoïde normal de φ est la variété à bord $G = G_1^{\mathbb{N}} \times \{0\} \cup (G_2 \times]0, 1])$ construite précédemment. G est un groupoïde comme réunion de deux groupoïdes et sa structure de variété est compatible à celle de groupoïde.

Comme $G_2 \times \{t\}$, $t \neq 0$ et $G_1^{\mathbb{N}} \times \{0\}$ sont des fermés saturés de G , on a des homomorphismes d'évaluation

$$h_t : C^*(G) \rightarrow C^*(G_2), \quad t \neq 0 \quad \text{et} \quad h_0 : C^*(G) \rightarrow C^*(G_1^{\mathbb{N}}).$$

On a vu au paragraphe 2.4, que l'on obtient alors une suite exacte

$$0 \rightarrow C^*(G_2 \times]0, 1]) \rightarrow C^*(G) \xrightarrow{h_0} C^*(G_1^{\mathbb{N}}) \rightarrow 0.$$

Rappelons que nous supposons que $C^*(G_1)$ est nucléaire. Par un résultat de R. Zimmer [45], il est équivalent de dire que G_1 est moyennable ([37], définition 3.6). Il est clair alors que $G_1^{\mathbb{N}}$ est aussi moyennable et donc $C^*(G_1^{\mathbb{N}})$ est aussi nucléaire.

Par G. G. Kasparov, ([30]. § 7), pour toute C*-algèbre nucléaire A, on a une suite exacte de groupes de KK-théorie :

$$\begin{array}{ccc}
 \text{KK}^*(A; C^*(G)) & & \\
 \otimes [h_0] \downarrow & \swarrow & \searrow \\
 \text{KK}^*(A; C^*(G_1^N)) & & \text{KK}^*(A; C^*(G_2 \times]0, 1])
 \end{array}$$

Or, pour toute C*-algèbre A, on a $\text{KK}^*(A; C^*(G_2 \times]0, 1]) = 0$, et donc l'homomorphisme de groupe induit par $\otimes [h_0]$ est inversible. En particulier, en prenant $A = C^*(G_1^N)$, on voit que $[h_0]$ est inversible en KK-théorie, i.e. il existe $[h_0]^{-1} \in \text{KK}(C^*(G_1^N); C^*(G))$ tel que $[h_0] \otimes [h_0]^{-1} = 1_G$ et $[h_0]^{-1} \otimes [h_0] = 1_{G_1^N}$.

3.2. DÉFINITION. — Soit $\varphi : G_1 \rightarrow G_2$ un homomorphisme injectif d'image localement fermée qui soit une immersion de classe C^∞ .

On pose :

$$\sigma_\varphi = [h_0]^{-1} \otimes [h_1].$$

3.3. Remarque. — 1. Pour avoir une suite exacte en KK-théorie et donc pour construire $[h_0]^{-1}$, et σ_φ , il suffit de supposer que h_0 admet un relèvement complètement positif (cf. [13], [42]).

2. Une autre façon de construire σ_φ est de considérer la suite exacte

$$0 \rightarrow C^*(G_2 \times]0, 1]) \rightarrow C^*(G') \xrightarrow{h_0} C^*(G_1^N) \rightarrow 0$$

où $G' = G_1^N \times \{0\} \cup (G_2 \times]0, 1])$ est un sous-groupe ouvert de G. A cette suite exacte correspond un élément $\sigma'_\varphi \in \text{KK}^1(C^*(G_1^N); C^*(G_2 \times]0, 1])$. Soit alors $\alpha \in \text{KK}^1(C_0(]0, 1]); \mathbb{C})$ l'inverse de l'élément de Bott (cf. [30], § 5). On a $\sigma_\varphi = -\sigma'_\varphi \otimes_{C_0(]0, 1])} \alpha$.

3.4. Remarque. — Supposons que $G_1 = V_1$ et $G_2 = V_2$ soient simplement des variétés (i.e. $G_j = G_j^{(0)}$) et soit $\Theta : N \rightarrow V_2$ un difféomorphisme exponentiel de N sur un ouvert U de V_2 . Avec les notations ci-dessus $\tilde{\Theta} : N \times [0, 1] \rightarrow \mathcal{N}$ définit une section de h_0 et donc $\sigma_\varphi = \Theta_*$.

Cette remarque s'applique encore dans le cas où il existe un difféomorphisme exponentiel $\Theta : G_1^N \rightarrow G_2$ qui soit un homomorphisme de groupoïdes.

3.5. Exemple. — Soit G un groupoïde étale et $0 \rightarrow E_1 \rightarrow E \rightarrow E_2 \rightarrow 0$ une suite exacte de fibrés sur $G^{(0)}$, G-équivariants et K-orientés. Le fibré normal de l'immersion $E_1 \hookrightarrow E$ est $E_1 \oplus E_2$ considéré comme fibré sur E_1 et on a donc un élément $\sigma \in \text{KK}(C^*(G^{E_1 \oplus E_2}); C^*(G^E))$.

Soit d'autre part $\beta'_E \in \text{KK}^*(C^*(G); C^*(G^E))$ et $\beta'_{E_1 \oplus E_2} \in \text{KK}^*(C^*(G); C^*(G^{E_1 \oplus E_2}))$ les éléments donnés par les K-orientations (définition 2.9).

3.6. PROPOSITION. — *On a l'égalité :*

$$\beta'_E = \beta'_{E_1 \oplus E_2} \otimes \sigma.$$

Démonstration. — Le groupoïde normal \tilde{G} associé à l'immersion $E_1 \hookrightarrow E$ est l'espace total d'un fibré \tilde{E} sur $G \times [0,1]$ tel que $\tilde{E}|_{G \times \{0\}} = E_1 \oplus E_2$ et $\tilde{E}|_{G \times \{1\}} = 2$. C'est l'homotopie de E à $E_1 \oplus E_2$ de la démonstration de la proposition 2.6. Soit \tilde{h}_t les homomorphismes d'évaluation de $C^*(\tilde{G})$ et h_t ceux de $C^*(G \times [0,1])$; notons que l'élément $[h_t] \in \text{KK}(C^*(G \times [0,1]); C^*(G))$ ne dépend pas de t . Par 2.4, on a alors :

$$\beta'_E = [h_1]^{-1} \otimes \beta'_E \otimes [\tilde{h}_1] = \beta'_{E_1 \oplus E_2} \otimes [\tilde{h}_0]^{-1} \otimes [\tilde{h}_1] = \beta'_{E_1 \oplus E_2} \otimes \sigma \quad \blacksquare$$

$\varphi!$ pour les groupoïdes étales.

3.7. DÉFINITION. — Soit $\varphi : G_1 \rightarrow G_2$ un homomorphisme de groupoïdes étales. On suppose que φ est une immersion de classe C^∞ , injective et K-orientée, et que $\varphi(G_1)$ est une sous-variété localement fermée de G_2 . On suppose aussi que $C^*(G_1)$ est nucléaire. A partir des éléments $\beta'_N \in \text{KK}^*(C^*(G_1); C^*(G_1^N))$ (définition 2.8) et $\sigma_\varphi \in \text{KK}(C^*(G_1^N); C^*(G_2))$, on définit alors un élément $\varphi!$ de $\text{KK}^*(C^*(G_1), C^*(G_2))$ par :

$$\varphi! = \beta'_N \otimes \sigma_\varphi.$$

3.8. THÉORÈME. — Soient $\varphi_3 : G_1 \rightarrow G_2$, $\varphi_1 : G_2 \rightarrow G_3$ deux homomorphismes de groupoïdes étales satisfaisant aux conditions de la définition 3.7. Alors $\varphi_2 = \varphi_1 \circ \varphi_3$ vérifie ces mêmes conditions et on a l'égalité :

$$\varphi_2! = \varphi_3! \otimes \varphi_1!$$

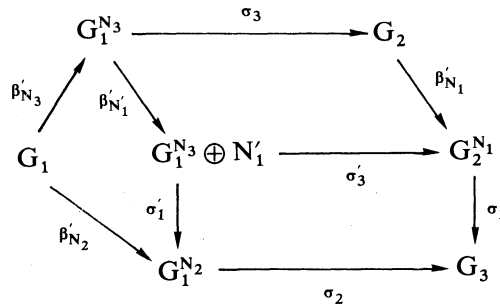
Démonstration. — Soit N_i le fibré normal G_j -équivariant de l'immersion induite $\varphi_i|_{G_j^{(0)}} : G_j^{(0)} \rightarrow G_k^{(0)}$, avec $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ et $N'_1 = \varphi_3^*(N_1)$ la restriction du fibré N_1 à $G_1^{(0)}$. On a une suite exacte de fibrés G_1 -équivariants :

$$0 \rightarrow N_3 \rightarrow N_2 \rightarrow N'_1 \rightarrow 0$$

et donc un élément $\sigma'_1 \in \text{KK}(C^*(G_1^{N_3 \oplus N'_1}); C^*(G_1^{N_2}))$ (cf. exemple 3.5) et on a une immersion K-orientée $N'_1 \hookrightarrow N_1$ de fibré normal N_3 , d'où un élément

$$\sigma'_3 \in \text{KK}(C^*(G_1^{N_3 \oplus N'_1}); C^*(G_2^{N_1})).$$

On va démontrer dans les trois lemmes qui vont suivre la commutativité du diagramme suivant, où les flèches désignent des éléments de groupes de KK-théorie :

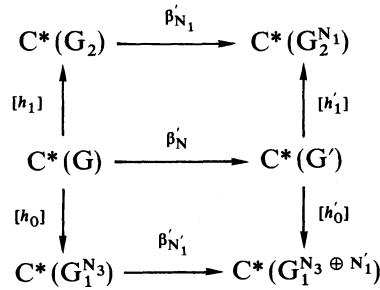


3. 9. LEMME. — On a $\beta'_{N_2} = \beta'_{N_3} \otimes \beta'_{N_1} \otimes \sigma'_1$.

Démonstration. — C'est la proposition 3. 6 et la functorialité de β' (Lemme 2. 9). ■

3. 10. LEMME. — On a $\beta'_{N_1} \otimes \sigma'_3 = \sigma_3 \otimes \beta'_{N_1}$.

Démonstration. — Soient G et G' les groupoïdes normaux des immersions $\varphi_3 : G_1 \hookrightarrow G_2$ et $\varphi'_1 : G_1^{N_1} \rightarrow G_2^{N_1}$; G' est l'espace total d'un fibré vectoriel N sur G , K -orienté, et par la naturalité, (§ 2. 4) on a un diagramme commutatif où les flèches sont encore des éléments de KK -théorie :



■

3. 11. LEMME. — On a $\sigma'_1 \otimes \sigma_2 = \sigma'_3 \otimes \sigma_1$.

Démonstration. — L'ensemble

$$G = G_1^{N_3} \oplus N'_1 \cup (G_1^{N_2} \times]0,1] \times \{0\}) \cup (G_2^{N_1} \times \{0\} \times]0,1]) \cup (G_3 \times]0,1] \times]0,1])$$

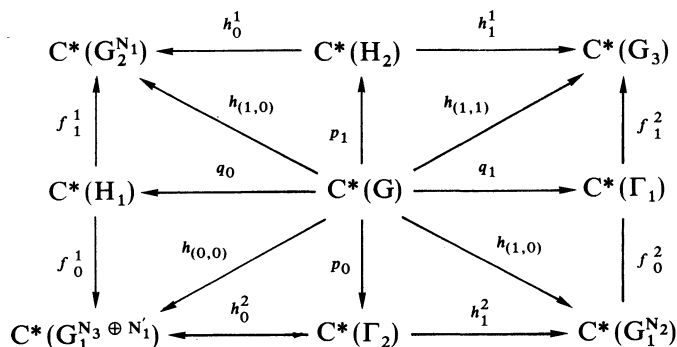
est le groupoïde normal de l'immersion $H_1 \hookrightarrow H_2$ où

- H_1 est le groupoïde normal de l'immersion $G_1 \hookrightarrow G_2$
- H_2 est le groupoïde normal de l'immersion $G_1 \hookrightarrow G_3$.

Le fibré normal de l'immersion $H_1 \hookrightarrow H_2$ s'identifie au groupoïde normal H_1 de l'immersion $G_1^{N_1} \hookrightarrow G_2^{N_1}$.

Soit $\Gamma_1 = G_1^{N_2} \times \{0\} \cup (G_3 \times]0,1])$ et $\Gamma_2 = G_1^{N_3} \oplus N_1 \times \{0\} \cup (G_1^{N_2} \times]0,1])$ les groupoïdes normaux des immersions $G_1 \rightarrow G_3$ et $G_1^{N_3} \rightarrow G_1^{N_2}$ qui s'identifient à des sous-groupoïdes fermés de G .

On a un diagramme commutatif d'homomorphismes d'évaluation de C^* -algèbres de groupoïdes :



Les éléments de KK-théorie $[h_{0,0}], [f_0^1], [h_0^1], [p_0], [q_0]$ sont inversibles et par définition on a

$$\sigma'_1 \otimes \sigma_2 = [h_0^2]^{-1} \otimes [h_1^2] \otimes [f_0^2]^{-1} \otimes [f_1^2]$$

et donc par le diagramme précédent :

$$\sigma'_1 \otimes \sigma_2 = [h_{(0,0)}]^{-1} \otimes [h_{(1,1)}]$$

De même on a $\sigma'_3 \otimes \sigma_1 = [h_{(0,0)}]^{-1} \otimes [h_{(1,1)}]$, d'où l'égalité annoncée. ■

Ceci achève la démonstration du théorème 3. 8. ■

3. 12. *Remarque.* — Restriction de $\varphi!$ à un sous-groupoïde ouvert. Soit $\varphi : G_1 \rightarrow G_2$ une immersion injective et K-orientée de groupoïdes étales, N le fibré normal de φ et deux sous-groupoïdes ouverts $G'_1 \subset G_1, G'_2 \subset G_2$ tels que $\varphi(G'_1) \subset G'_2$. On a alors l'égalité :

$$\varphi'! \otimes [j_2] = [j_1] \otimes \varphi!$$

où $\varphi' = \varphi|_{G'_1 \rightarrow G'_2}$ et $j_i : C^*(G'_i) \hookrightarrow C^*(G_i)$ est l'injection canonique.

Cela résulte de la naturalité de β' (cf. 2. 4) et de la commutativité du diagramme (avec des notations évidentes) :

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \rightarrow & C^*(G'_2 \times]0,1]) & \rightarrow & C^*(G') & \rightarrow & C^*(G'_1^N) \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \rightarrow & C^*(G_2 \times]0,1]) & \rightarrow & C^*(G) & \rightarrow & C^*(G_1^N) \rightarrow 0
 \end{array}$$

3.13. $f!$ POUR LES IMMERSIONS D'ESPACES DE FEUILLES. — Soit $f: V_1/F_1 \rightarrow V_2/F_2$ une immersion d'espaces feuilletés, K-orientée, et T_1, T_2 deux transversales fidèles à V_1/F_1 et V_2/F_2 telles que f induise une immersion injective et propre (cf. remarque 1.4). Posons pour simplifier $G_j = G_{j, T_j}^{T_j}$ pour $j=1,2$. Alors f induit un homomorphisme $\varphi: G_1 \rightarrow G_2$ qui est une immersion injective, K-orientée et telle que $\varphi(G_1)$ soit localement fermée dans G_2 . En effet, pour tout $\gamma \in G_1$, l'holonomie de $\varphi(\gamma)$ est un germe de difféomorphisme de T_2 dont la restriction à T_1 est l'holonomie de γ , donc φ est injective. D'autre part, soit G' le sous-groupeïde de G_2 , $G' = \{\gamma \in G_2, r(\gamma), s(\gamma) \in T_1, \text{ et } \gamma(T_1) \subset T_1\}$; c'est-à-dire qu'il existe U et U' des voisinages de $r(\gamma)$ et $s(\gamma)$ dans T_2 et un difféomorphisme $h: U \rightarrow U'$ dont le germe en $r(\gamma)$ soit γ et tel que $h(T_1 \cap U) = T_1 \cap U$. G' est une sous-variété localement fermée de $G_2^{T_2}$ de dimension $\dim(T_1)$; $\varphi(G_1) \subset G'$ et comme φ est étale de G_1 dans G' dans G_2 , $\varphi(G_1)$ est un sous-groupeïde ouvert de G' . On a donc un élément $\varphi! \in \text{KK}^*(C^*(G_1); C^*(G_2))$. Soit \mathcal{E}^{T_j} le bimodule d'imprimitivité entre $C^*(V_j, F_j)$ et $C^*(G_j)$. Il définit un élément inversible $[\mathcal{E}^{T_j}]$ de $\text{KK}(C^*(V_j, F_j); C^*(G_j))$ et $[\mathcal{E}^{T_j}]^{-1} = [\mathcal{E}_{T_j}]$ (cf. [8], [24], [37]).

On a alors un élément de $\text{KK}^*(C^*(V_1, F_1); C^*(V_2, F_2))$ défini par :

$$[\mathcal{E}^{T_1}] \otimes \varphi! \otimes [\mathcal{E}_{T_2}].$$

3.14. LEMME. — L'élément ci-dessus défini ne dépend pas du choix de la réduction de f aux transversales fidèles T_1 et T_2 .

Démonstration. — Soit $\varphi': G'_1 \rightarrow G'_2$ une autre réduction comme ci-dessus associée à des transversales fidèles T'_1 et T'_2 aux feuilletages. En prenant la réunion $T_i \cup T'_i$ de ces transversales (pour $i=1,2$), on peut supposer que G'_i est un sous-groupeïde ouvert et fermé de G_i . Soit j_i l'injection $C^*(G'_i) \hookrightarrow C^*(G_i)$. On a alors $[\mathcal{E}_{T_i}] = [\mathcal{E}_{T'_i}] \otimes [j_i]$ et $[\mathcal{E}^{T'_i}] = [j_i] \otimes [\mathcal{E}^{T_i}]$.

Utilisant alors la remarque 3.12, on a :

$$\begin{aligned} [\mathcal{E}_{T_1}] \otimes \varphi! \otimes [\mathcal{E}^{T_2}] &= [\mathcal{E}_{T'_1}] \otimes [j_1] \otimes \varphi! \otimes [\mathcal{E}^{T_2}] \\ &= [\mathcal{E}_{T'_1}] \otimes \varphi' \otimes [j_2] \otimes [\mathcal{E}^{T_2}] = [\mathcal{E}_{T'_1}] \otimes \varphi'! \otimes [\mathcal{E}^{T_2}]. \blacksquare \end{aligned}$$

On peut alors poser :

3.15. DÉFINITION. — Avec les notations précédentes, on définit

$$f! \in \text{KK}^*(C^*(V_1, F_1); C^*(V_2, F_2)) \text{ par } f! = [\mathcal{E}_{T_1}] \otimes \varphi! \otimes [\mathcal{E}^{T_2}]$$

pour un choix φ de réduction de f à des transversales fidèles.

On a alors immédiatement :

3.16. THÉORÈME. — Soit $f_3: V_1/F_1 \rightarrow V_2/F_2$, $f_1: V_2/F_2 \rightarrow V_3/F_3$ deux immersions K-orientées, de variétés feuilletées. On suppose que $C^*(V_1, F_1)$ et $C^*(V_2, F_2)$ sont nucléaires.

Alors $f_2 = f_1 \circ f_3$ est une immersion K-orientée et on a

$$f_2! = f_3! \otimes f_1! \quad \blacksquare$$

3.17. *Remarque.* — Nous examinons ici comment formuler les résultats précédents lorsque $C^*(V_1, F_1)$ n'est pas supposée nucléaire : le problème est dans la définition de σ_φ .

1. Il suffit en fait de supposer que $C^*(V_1, F_1)$ est nucléaire en K-théorie, et plus généralement que β'_N est dans l'image de KK_{nuc} [52]. En effet, h_0 définit toujours un isomorphisme de $KK_{\text{nuc}}(C^*(G_1); C^*(G))$ sur $KK_{\text{nuc}}(C^*(G_1); C^*(G_1^N))$ (cf. [52], proposition 2.7). On pose alors : $\varphi! = \Theta(\sigma_\varphi(\beta'_N))$ où $\sigma_\varphi = (h_{1*}) \circ (h_{0*})^{-1}$ désigne l'homomorphisme de $KK_{\text{nuc}}(C^*(G_1); C^*(G_1^N))$ dans $KK_{\text{nuc}}(C^*(G_1); C^*(G_2))$ et β'_N est tel que $\Theta(\beta'_N) = \beta'_N$ (où $\Theta : KK_{\text{nuc}} \rightarrow KK$ est l'homomorphisme de [52]).

Notons que β'_N est dans l'image de KK_{nuc} si et seulement si γ_N l'est, ce qui est équivalent à dire, avec les notations de 2.10, que $C^*(G_1^W)$ est nucléaire en K-théorie.

2. Si on ne fait plus aucune hypothèse sur $C^*(V_1, F_1)$, on a quand même pour toute C^* -algèbre A nucléaire en K-théorie un homomorphisme

$$\sigma_\varphi^A : KK(A; C^*(G_1^N)) \rightarrow KK(A; C^*(G_2))$$

donné par $\sigma_\varphi^A(x) = [h_0]_A^{-1}(x) \otimes [h_1]_A$

et on définit $f!^A$ comme élément du groupe

$$\text{Hom}(KK(A; C^*(V_1, F_1)), KK(A; C^*(V_2, F_2)))$$

et la functorialité s'écrit alors $f_2!^A = f_1!^A \circ f_3!^A$.

3. Si dans le théorème 3.16 on suppose que seulement $C^*(V_1, F_1)$ est nucléaire en K-théorie alors on a un homomorphisme

$$f_1!^{C^*(V_1, F_1)} : KK^*(C^*(V_1, F_1); C^*(V_2, F_2)) \rightarrow KK^*(C^*(V_1, F_1); C^*(V_3, F_3)).$$

Dans ce cas, $f_2!$ et $f_3!$ sont bien définis et on a :

$$f_1!^{C^*(V_1, F_1)}(f_3!) = f_2!.$$

Nous ne reviendrons pas là-dessus dans la suite, mais nous pouvons noter que les résultats que nous obtiendrons garderont un sens lorsque les hypothèses de nucléarité ne seront pas satisfaites.

3.18. *Remarque.* — Soit $f : V_1/F_1 \rightarrow V_2/F_2$ une immersion d'espaces feuilletés, de groupoïdes d'holonomie G_1 et G_2 et $i_2 : G_2 \rightarrow H$ un cocycle de G_2 à valeurs dans un groupe de Lie H (cf. 2.1). La composée $i_1 = i_2 \circ f$ définit un cocycle $i_1 : G_1 \rightarrow H$. Nous supposons que $C^*(V_1, F_1)$ est nucléaire.

Soit A une H -algèbre : à partir des algèbres $A \rtimes_{i_j} G_j$, $j=1,2$, on peut refaire la construction précédente pour définir un élément

$$f_A! \in KK^m(A \rtimes_{i_1} G_1; A \rtimes_{i_1} G_2).$$

Pour $x \in KK_H^n(A; B)$, on a alors :

$$i_1^*(x) \otimes f_B! = (-1)^{mn} f_A! \otimes i_2^*(x).$$

3.19. *Remarque.* — La construction du groupoïde normal (§ 3.1) est analogue à celle du groupoïde tangent à une variété V due à A. Connes [9] : on retrouve cette dernière construction en considérant l'immersion $\varphi(x) = (x, x)$ de V dans $V \times V$ comme homomorphisme de groupoïdes représentant la submersion $V/F_1 \rightarrow V/F_2$, où $F_1 = \{0\}$ et $F_2 = TV$.

Ce sont là deux cas particuliers d'une construction plus générale d'un groupoïde normal associé à une immersion $\varphi : G_1 \rightarrow G_2$ de groupoïdes soit étales, soit d'holonomie de variétés feuilletées.

Remarquons d'abord que si $j : X \rightarrow Y$ est une immersion de classe C^∞ de variétés, on peut construire la variété normale $N \times \{0\} \cup (Y \times]0, 1])$ (cf. 3.1) sans supposer ni que $j(X)$ est localement fermée dans Y , ni que j est injective. Pour simplifier, supposons que Y est une variété riemannienne complète et soit $\Theta : N \rightarrow Y$ l'application induite par l'application exponentielle. On a alors sur $N \times [0, 1]$ une relation d'équivalence $(\xi, \lambda) \sim (\xi', \lambda')$ si et seulement si $\lambda = \lambda'$ et si $\lambda = 0$, $\xi = \xi'$, et si $\lambda \neq 0$, $\Theta(\lambda\xi) = \Theta(\lambda\xi')$. L'espace quotient $N \times [0, 1]/\sim$ est une variété C^∞ et est en bijection ensembliste avec un ouvert de $N \times \{0\} \cup (Y \times]0, 1])$. Cette variété est séparée si et seulement si j est injective et X et Y sont séparées.

Cependant, si $\varphi : G_1 \rightarrow G_2$ est comme plus haut, on n'a pas forcément une structure de groupoïde sur la variété normale de φ . Il faut pour cela que Γ , l'espace du fibré normal de φ hérite d'une structure de groupoïde.

Deux cas extrêmes de cette situation sont d'une part le cas où pour tout $x \in G_1^{(0)}$, la restriction $\varphi : G_1^x \rightarrow G_2^{(x)}$ est étale (ce qui est le cas si G_1 et G_2 sont des groupoïdes étales) et on a $\Gamma = G_1^N$; d'autre part le cas d'une variété doublement feuilletée (V, F_1, F_2) avec $F_1 \subset F_2$. On a une submersion $f : V/F_1 \rightarrow V/F_2$ et une immersion induite de groupoïdes d'holonomie $\varphi : G_1 \rightarrow G_2$. Dans ce cas la structure de groupoïde sur $\Gamma = r^*(F_2/F_1)$ inclut la structure de groupe de ce fibré vectoriel : $\Gamma^{(0)} = V$ et pour (X_1, γ_1) , (X_2, γ_2) éléments de Γ , avec $X_i \in (F_2/F_1)_{r(\gamma_i)}$, $r(\gamma_2) = s(\gamma_1)$, on a

$$(X_1, \gamma_1) \circ (X_2, \gamma_2) = (X_1 + \gamma_1(X_2), \gamma_1 \gamma_2).$$

Notons que par la transformation de Fourier, on a un isomorphisme entre $C^*(\Gamma)$ et $C^*(G_1^{(F_2/F_1)^*})$. On a, par la même construction que précédemment et en supposant $C^*(G_1)$ nucléaire, un élément de $KK^*(C^*(G_1); C^*(G_2))$.

Cette définition est due essentiellement à A. Connes et coïncide avec la construction de $f!$ que nous ferons au paragraphe IV.

En effet, cette construction est fonctorielle (par la même démonstration que ci-dessus) donc il suffit de voir la coïncidence de ces deux éléments dans le cas presque isométrique. Soit $G = \Gamma \times \{0\} \cup (G_2 \times]0, 1])$ le groupoïde normal de φ . Par un calcul différentiel asymptotique « ρ, δ » ([50], [51], [46], [48], [47]) on obtient un élément $x \in KK^*(C^*(G_1); C^*(G))$ qui est une homotopie entre un symbole σ et l'opérateur P_σ de symbole σ ; on a donc $h_{0^*}(x) = [\sigma]$ et $h_{1^*}(x) = [P_\sigma]$. En particulier pour le symbole σ considéré au paragraphe IV, on a $[\sigma] = \beta'_{(F_2/F_1)^*}$ et $[P_\sigma] = f!$ et donc :

$$h_{1^*}(h_{0^*})^{-1} \beta'_{F_2/F_1} = f!$$

Voici un exemple d'homomorphisme $\varphi : G_1 \rightarrow G_2$ qui est une immersion et tel que Γ ne soit pas un groupoïde. Soit (V, F) une variété feuilletée, de graphe G , E un fibré vectoriel sur V , non nécessairement G -équivariant, et $F' = p^{-1}(F)$ le feuilletage sur E , image réciproque de F par la projection $p : E \rightarrow V$. Par la section nulle, on a un homomorphisme $\varphi : G \rightarrow G' = G(E, F')$ qui est une immersion injective et propre, et cependant $\Gamma = r^*E$ n'admet une structure de groupoïde permettant de construire le groupoïde normal que si E est un fibré G -équivariant.

IV. Functorialité dans le cas des submersions

Soit $f : V_1/F_1 \rightarrow V_2/F_2$ une submersion K -orientée.

Dans ce paragraphe nous construisons un élément $f! \in KK(V_1/F_1; V_2/F_2)$ (définition 4.6) et nous montrons la functorialité de cette construction (théorème 4.10). Pour ce faire, nous supposons d'abord que le G_1 fibré $f^{-1}F_2/F_1$ est presque isométrique, nous construisons $f!$ (définition 4.2) et montrons la functorialité (proposition 4.4) dans ce cas. Nous rappelons enfin comment le cas général se ramène au cas presque isométrique (cf. [10] § V).

Remarquons d'abord que si $f : V_1/F_1 \rightarrow V_2/F_2$ est une submersion, et si $F'_2 = f^{-1}(F_2)$ est le ramené en arrière par f de F_2 dans V_1 (cf. [20], p. 378 ou [11], § IV) alors F_1 est un sous-fibré de F'_2 et l'application $V_1/F'_2 \rightarrow V_2/F_2$ est étale.

Notons que le groupoïde d'holonomie G_1 de (V_1, F_1) agit sur le fibré transverse TV_1/F_1 en préservant le sous-fibré F'_2/F_1 . Et donc G_1 agit sur F'_2/F_1 . Rappelons que f est K -orientée si ce G_1 fibré est K -orienté i.e. son groupe structural se réduit à $M_n^c = \tilde{G}1_n^+ \times_{\mathbb{Z}/2} U(1)$ (définition 1.9).

Rappelons aussi que le fibré F'_2/F_1 est dit presque isométrique s'il existe un sous-fibré E' de F'_2/F_1 , G_1 invariant, et tel que E' et $E = (F'_2/F_1)/E'$ sont munis de structures isométriques invariantes-i.e. le groupe structural est réduit à $\begin{bmatrix} 0_{n'} & M_{n', n-n'} \\ 0 & 0_{n-n'} \end{bmatrix}$ ⁽³⁾.

Par [11] proposition 4.3, à l'application étale $V_1/F'_2 \rightarrow V_2/F_2$ il correspond un Hilbert $C^*(V_2, F_2)$ -module \mathcal{E}_f où $C^*(V_1, F'_2)$ agit par opérateurs compacts, et donc un élément ε_f de $KK(C^*(V_1, F'_2); C^*(V_2, F_2))$ ([11] Corollary 4.4).

Il suffit donc de traiter le cas $p : V/F_1 \rightarrow V/F_2$ où F_1 et F_2 sont deux feuilletages de V avec $F_1 \subset F_2$.

Soit alors $0 \rightarrow E' \rightarrow F_2/F_1 \rightarrow E \rightarrow 0$ une structure presque isométrique sur le G_1 fibré F_2/F_1 . A la K -orientation sur F_2/F_1 est associée une structure Spin^c sur le fibré $E^* \oplus E'^*$, i.e. un G_1 fibré complexe hermitien S de dimension $2^{[n/2]}$ (où n est la dimension de F_2/F_1 et $[n/2]$ désigne la partie entière de $n/2$) et d'un homomorphisme G_1 équivariant $c : E^* \oplus E'^* \rightarrow \mathcal{L}(S)$ vérifiant $c(\xi) = c(\xi)^*$, $c(\xi)^2 = \|\xi\|^2$ pour tout $\xi \in E^* \oplus E'^*$.

⁽³⁾ La notion de structure presque isométrique utilisée ici est plus stricte que celle définie par A. Connes [10].

Si n est pair, le G_1 fibré S est $\mathbb{Z}/2$ gradué et $c(\xi)$ est de degré 1 pour tout $\xi \in E^* \oplus E'^*$ (cf. [2], [23], [11] App. B).

Soit alors \mathcal{E}_S le hilbert $C^*(V, F_2)$ module complété de $C_c(G_2; r^*(S) \otimes \Omega^{1/2})$ relativement au produit scalaire

$$\langle f_1, f_2 \rangle(x) = \int \langle f_1(y), f_2(yx) \rangle$$

l'intégrale étant prise sur l'ensemble $\{y \in G_2/s(y) = r(x)\}$ — nous utilisons des demi-densités pour donner des formules intrinsèques. C'est le fibré noté $\mathcal{E}_{V,S}$ dans [11], § IV.

Comme G_1 agit dans S par transformations unitaires on obtient une représentation involutive π de $C_c(G_1; \Omega^{1/2})$ dans \mathcal{E}_S en posant

$$\pi(f)g(x) = \int f(y)y \cdot g(y^{-1}x)$$

(l'intégrale est prise sur $\{y \in G_1/r(y) = r(x)\}$).

Remarque. — Pour donner un sens à cette intégration notons que

$$f(y) \in \Omega^{1/2}(F_{1,r(y)}) \otimes \Omega^{1/2}(F_{1,s(y)}),$$

que

$$\begin{aligned} g(y^{-1}x) &\in S_{s(y)} \otimes \Omega^{1/2}(F_{2,s(y)}) \otimes \Omega^{1/2}(F_{2,s(x)}) \\ &= S_{s(y)} \otimes \Omega^{1/2}((F_2/F_1)_{s(y)}) \otimes \Omega^{1/2}(F_{1,s(y)}) \otimes \Omega^{1/2}(F_{2,s(x)}) \end{aligned}$$

et que

$$y \cdot g(y^{-1}x) \in S_{r(y)} \otimes \Omega^{1/2}((F_2/F_1)_{r(y)}) \otimes \Omega^{1/2}(F_{1,s(y)}) \otimes \Omega^{1/2}(F_{2,s(x)})$$

Donc

$$f(y) \cdot y \cdot g(y^{-1}x) \in S_{r(x)} \otimes \Omega^{1/2}(F_{2,r(x)}) \otimes \Omega^{1/2}(F_{2,s(x)}) \otimes \Omega(F_{1,s(y)})$$

Et donc $\int f(y)y \cdot g(y^{-1}x)$ a un sens et est un élément de

$$S_{r(x)} \otimes \Omega^{1/2}(F_{2,r(x)}) \otimes \Omega^{1/2}(F_{2,s(x)}).$$

Cette représentation π s'étend à une représentation, notée encore π de la C^* -algèbre $C^*(V, F_1)$ (cf. [37], [15]) [on rappelle que $C^*(V, F_1)$ désigne dans tout le papier le « C^* max » de (V, F_1)].

Pour compléter la construction d'un élément de $KK^*(C^*(V, F_1); C^*(V, F_2))$ il suffit de définir un opérateur $D \in \mathcal{L}(\mathcal{E}_S)$ vérifiant les conditions $D = D^*$, $f(D^2 - 1) \in \mathcal{K}(\mathcal{E}_S)$, $[D, f] \in \mathcal{K}(\mathcal{E}_S)$ et D est de degré 1 si n est pair.

L'opérateur $D \in \mathcal{L}(\mathcal{E}_S)$ est pseudo-différentiel (i. e. $D \in \Psi_p^*(V, F_2; \mathcal{L}(S))$) sa classe en KK -théorie est donnée par son symbole transverse $\sigma = \sigma(D) \in \Sigma_p(V, (F_2/F_1)^*; \mathcal{L}(S))$, que nous construisons maintenant.

Soit $p : (F_2/F_1)^* \rightarrow E'^*$ la transposée de l'inclusion $E' \subset F_2/F_1$. Soit $s : E \rightarrow F_2/F_1$ une section et soit $q : (F_2/F_1)^* \rightarrow E^*$ la transposée de s . (Notons que q n'est pas G_1 équivariante). Soit ρ avec $1/2 < \rho < 1$.

On pose $b_q(x, \xi) = ((1 + \|p(\xi)\|^2 + \|q(\xi)\|^2)^{\rho-1/2} q(\xi), p(\xi)) \in (E^* \oplus E'^*)_x$, et $a_q(x, \xi) = (1 + \|b_q(x, \xi)\|^2)^{-1/2} c(b_q(x, \xi)) \in \mathcal{L}(S_x)$.

4.1. LEMME. — *La fonction a_q est un symbole transverse transversalement elliptique (définition A.7.4).*

Preuve. — Notons que $1 - a_q^2 = (1 + \|b_q\|^2)^{-1} \in C_v((F_2/F_1)^*; \mathcal{L}(S))$ (cf. Appendice, A.1).

Pour montrer que a_q est un symbole de type ρ, δ , on utilise que b_q est un symbole d'ordre 1, de type 1, 0 pour écrire en coordonnées par une récurrence immédiate :

$$(D_x^k D_\xi^l) a_q = \sum_{i=0}^{|k|} \sum_{j=0}^{|l|} a_{k,l}^{i,j} \frac{P_{k,l}^{i,j}(b_q)}{(1 + \|b_q\|^2)^{i+j+(1/2)}}$$

où $P_{k,l}^{i,j}$ est un polynôme de degré $i+j+1$ et $a_{k,l}^{i,j}$ est un symbole d'ordre $i+j-|l|$, de type 1, 0. Les estimés découlent immédiatement de cette écriture et de ce que $(1 + \|\xi\|)^{\rho} \leq (1 + \|b_q(\xi)\|^2)^{1/2}$.

Nous montrons maintenant que a_q est un symbole transverse.

Si q' est une autre projection $q' : (F_2/F_1)^* \rightarrow E^*$ transposée de la section s' , alors $q - q'$ étant nulle sur E^* il existe $L \in \mathcal{L}(E'^*, E^*)$ avec $q - q' = L \circ p$.

Pour $\xi \in (F_2/F_1)^*$ posons $\|\xi\|_q = \sqrt{\|p(\xi)\|^2 + \|q(\xi)\|^2}$ et $\|\xi\|_{q'} = \sqrt{\|p(\xi)\|^2 + \|q'(\xi)\|^2}$. On a :

$$|\sqrt{1 + \|\xi\|_q^2} - \sqrt{1 + \|\xi\|_{q'}^2}| \leq \|(q - q')(\xi)\| \leq \|L_x\| \|p(\xi)\|$$

et comme pour $0 < \alpha < 1$ et $t \geq -1$ on a $|(1+t)^\alpha - 1| \leq |t|$ on déduit

$$\left| \left(\frac{1 + \|\xi\|_q^2}{1 + \|\xi\|_{q'}^2} \right)^{(1-\rho)/2} - 1 \right| \leq \frac{\|L_x\| \|p(\xi)\|}{(1 + \|\xi\|_{q'}^2)^{1/2}}.$$

Donc

$$\begin{aligned} \|(b_q - b_{q'})(x, \xi)\| &= \|q(\xi)(1 + \|\xi\|_q^2)^{\rho-1/2} - q'(\xi)(1 + \|\xi\|_{q'}^2)^{\rho-1/2}\| \\ &\leq \|q(\xi) - q'(\xi)\| (1 + \|\xi\|_q^2)^{\rho-1/2} + \|q'(\xi)\| (1 + \|\xi\|_q^2)^{\rho-1/2} \frac{\|L_x\| \|p(\xi)\|}{(\|\xi\|_{q'}^2 + 1)^{1/2}} \\ &\leq 2 \|L_x\| \|p(\xi)\| (1 + \|\xi\|_q^2)^{\rho-1/2} \end{aligned}$$

Et donc

$$\|(b_q - b_{q'})(x, \xi)\| \leq 2 \|L_x\| \|b_q(x, \xi)\| (1 + \|\xi\|_q^2)^{\rho-1/2}$$

et enfin

$$\begin{aligned} \|a_q - a_{q'}\| &\leq \frac{\|b_q - b_{q'}\|}{(\|b_q\|^2 + 1)^{1/2}} + \frac{(\|b_q\|^2 + 1)^{1/2} - (\|b_{q'}\|^2 + 1)^{1/2}}{(\|b_q\|^2 + 1)^{1/2} (\|b_{q'}\|^2 + 1)^{1/2}} \|b_{q'}\| \\ &\leq \frac{2 \|b_q - b_{q'}\|}{(\|b_q\|^2 + 1)^{1/2}} \leq 4 \|L_x\| (1 + \|\xi\|_q^2)^{\rho-1/2}. \end{aligned}$$

Notons que $\gamma a_q(x, \xi) \gamma^{-1} = a_{\gamma q \gamma^{-1}}(r(\gamma), \gamma \xi)$ et que $\gamma \rightarrow \gamma q \gamma^{-1} - q$ est une section continue du fibré $r^* \mathcal{L}(E^*, E^*)$. On a donc, pour tout $\varphi \in C_c(G_1)$,

$$(\gamma, \xi) \rightarrow \varphi(\gamma) [a_q(r(\gamma), \xi) - \gamma a_q(s(\gamma), \gamma^{-1} \xi) \gamma^{-1}]$$

est un élément de $C_0(r^*(F_2/F_1)^*; \mathcal{L}(r^*S))$ et donc a_q est un symbole transverse. ■

Soit $D \in \Psi_\rho^*(V, F_2; \mathcal{L}(S))$ de symbole transverse la classe de a_q (modulo les symboles tendant vers zéro à l'infini en ξ). Par le théorème A.7.5 on sait que (\mathcal{E}_S, D) est un bimodule de Kasparov $(\mathcal{E}_S, D) \in \mathcal{E}(C^*(V, F_1); C^*(V, F_2))$ (avec les notations de [8]).

4.2. DÉFINITION. — Soit $f: V_1/F_1 \rightarrow V_2/F_2$ une submersion presque isométrique et K-orientée. L'élément $f!$ associé à la K-orientation et à la structure presque isométrique est la classe dans $\text{KK}^*(C^*(V_1, F_1); C^*(V_2, F_2))$ du bimodule de Kasparov $(\mathcal{E}_S \otimes \mathcal{E}_f, D \otimes 1)$.

Remarquons que $f!$ ne dépend pas du choix de ρ , deux choix différents donnant lieu à une homotopie évidente. Notons cependant que ce n'est pas une homotopie opératorielle [$\rho \rightarrow \rho_q$ n'est pas normiquement continu — cependant $\rho_q \in \mathcal{S}_{\rho_0, \delta_0}^0(V \times [\rho_0, \rho_1], (F_2/F_1)^*; \mathcal{L}(S))$ (si $1/2 < \rho_0 < \rho_1 < 1$)].

4.3. Remarque. — Nous dirons que F'_2/F_1 est presque isométrique au sens généralisé s'il existe une suite emboîtée de sous fibrés G_1 équivariants

$$F'_2/F_1 = E_k \supseteq E_{k-1} \supseteq \dots \supseteq E_1 \supseteq E_0 = \{0\}$$

avec E_j/E_{j-1} isométrique pour $j=1, 2, \dots, k$. Soient alors $s_j: E_j/E_{j-1} \rightarrow E_j$ des sections et $p_j: (F'_2/F_1)^* \rightarrow (E_j/E_{j-1})^*$ la transposée de $i_j \circ s_j$ où $i_j: E_j \rightarrow F'_2/F_1$ est l'inclusion.

Le fibré F'_2/F_1 est K-orienté si et seulement si le fibré $\bigoplus_{j=1}^k (E_j/E_{j-1})^*$ est muni d'une structure $\text{Spin}^c S$.

On pose alors $s = (s_1, \dots, s_k)$, $\|\xi\|_s = (\sum \|p_j(\xi)\|^2)^{1/2}$

$$b_s(x, \xi) = \left((\|\xi\|_s^2 + 1) \frac{\rho_j - 1}{2} p_j(\xi) \right)_{j=1, \dots, k} \in \bigoplus_{j=1}^k (E_j/E_{j-1})^*$$

où $\rho_1 = 1 > \rho_2 > \dots > \rho_k = \rho > 1/2$.

Finalement,

$$a_s(x, \xi) = (\|b_s(x, \xi)\|^2 + 1)^{-1/2} c(b_s(x, \xi)) \in \mathcal{L}(S_x).$$

Alors a_s définit encore un symbole transverse transversalement elliptique, et donc un élément $f! \in \text{KK}(C^*(V_1, F_1); C^*(V_2, F_2))$.

Bien sûr $f!$ ne dépend pas des sections s_j comme son symbole principal n'en dépend pas. De plus, $f!$ ne dépend pas de la suite des ρ_j . Remarquons en outre que $f!$ ne dépend pas non plus des structures isométriques sur E_j/E_{j-1} , comme il y a une homotopie canonique entre deux telles structures.

Donc $f!$ ne dépend que de la K-orientation et — a priori — de la suite emboîtée de sous-fibrés E_j . Nous verrons plus bas que $f!$ ne dépend pas de cette suite de sous-fibrés.

Notons pour le moment que si la suite E'_j est « plus fine » que la suite E_j , ces deux suites définissent le même $f!$.

Soient $f_3 : V_1/F_1 \rightarrow V_2/F_2$ et $f_1 : V_2/F_2 \rightarrow V_3/F_3$ deux submersions K -orientées et presque isométriques. Alors $f_2 = f_1 \circ f_3$ est K -orientée (proposition 1. 7) et presque isométrique au sens généralisé.

4. 4. PROPOSITION. — Pour la K -orientation et la structure presque isométrique généralisée de f_2 induites par celles de f_1 et f_3 , on a :

$$f_2! = f_3! \otimes f_1!$$

Preuve. — Soit $F'_2 = f_3^{-1} F_2$ et $F'_3 = f_2^{-1} F_3$. On a $F_1 \subseteq F'_2 \subseteq F'_3 \subseteq TV_1$. D'après la remarque A. 7. 6, il suffit de montrer $p_2! = p_3! \otimes p_1!$ où $p_3 : V_1/F_1 \rightarrow V_1/F'_2$, $p_1 : V_1/F'_2 \rightarrow V_1/F'_3$, $p_2 = p_1 \circ p_3 : V_1/F_1 \rightarrow V_1/F'_3$ sont les projections.

Soient $\sigma_3 \in \Sigma(V_1, (F'_2/F_1)^*; \mathcal{L}(S_3))$, $\sigma_1 \in \Sigma(V_1, (F'_3/F'_2)^*; \mathcal{L}(S_1))$ et $\sigma_2 \in \Sigma(V_1, (F'_3/F'_2)^*; \mathcal{L}(S_2))$ les symboles associés aux K -orientations et aux structures presque isométriques de p_3 , p_1 et p_2 (rappelons que $S_2 = S_3 \hat{\otimes} S_1$ si la dimension de F'_2/F_1 ou celle de F'_3/F'_2 est paire et $S_2 = (S_3 \otimes S_1)^{(0)} \oplus (S_3 \otimes S_1)^{(1)}$ si ces deux dimensions sont impaires).

Mais pour un bon choix des constantes ρ et ρ_j définissant les σ_j , on a les conditions du théorème A. 11 et donc $p_2! = p_3! \otimes p_1!$ ■

4. 5. Remarque. — Si f_3 et f_1 sont munies de structures presque isométriques au sens généralisé, f_2 l'est aussi et la proposition 4. 4 reste encore vraie (ainsi que sa preuve).

Soit maintenant $f : V_1/F_1 \rightarrow V_2/F_2$ une submersion K -orientée qu'on ne suppose plus presque isométrique.

Soit $F'_2 = f^{-1} F_2$ le feuilletage sur V_1 ramené en arrière par f de F_2 .

Soit W le fibré des formes quadratiques sur F'_2/F_1 et $p : W \rightarrow V_1$ la projection canonique. Comme F'_2/F_1 est un G_1 -fibré, G_1 agit dans W et donc W est muni d'un feuilletage F'_1 tel que la feuille passant par $w \in W$ soit $\{ \gamma w / \gamma \in G_1, s(\gamma) = p(w) \}$.

Soit $f' : W/F'_1 \rightarrow V_2/F_2$ la composée $f' = f \circ p$. Posons $F'_2 = p^{-1} F_2 = f'^{-1} F_2$.

On a la suite exacte $0 \rightarrow \text{Ker}(dp) \rightarrow F'_2/F'_1 \rightarrow p^*(F_2/F_1) \rightarrow 0$.

Or $\text{Ker}(dp)$ peut être muni de la structure isométrique induite pour la métrique GL_n^+ invariante sur $GL_n^+ / SO_n (= W_x)$ et tout point w de W définit un produit scalaire sur $(F'_2/F_1)_p(w)$. Donc F'_2/F'_1 est presque isométrique.

De plus, le fibré $\text{Ker } p$ est muni d'une structure Spin^c induite par la structure $\text{Spin}^c \text{ML}_n^c$ -invariante sur $\text{ML}_n^c / \text{Spin}^c(n) = W_x$ [comme la représentation $SO_n \rightarrow \text{so}(\tau_1(GL_n^+ / SO_n))$ se remonte à $\text{Spin}^c(n) \rightarrow \text{Spin}^c((n(n+1))/2)$]. ($n = \dim F'_2/F_1$).

Donc f' est K -orientée.

Soit $\tilde{\beta}_{(F'_2/F_1)^*} \in \text{KK}^{n(n+1)/2}(C^*(V_1, F_2); C^*(W, F'_1))$ l'élément construit en 2. 10.

4. 6 DÉFINITION. — L'élément $f! \in \text{KK}(C^*(V_1, F_1); C^*(V_2, F_2))$ est défini par $f! = \tilde{\beta}_{(F'_2/F_1)^*} \otimes f'!$ où $f' : W/F'_1 \rightarrow V_2/F_2$ est muni de la structure presque isométrique $0 \rightarrow \text{Ker } dp \rightarrow F'_2/F'_1 \rightarrow p^*(F_2/F_1) \rightarrow 0$ et de la K -orientation $S_{(\text{Ker } dp)^*} \hat{\otimes} S_{p^*(F_2/F_1)^*}$ où $S_{p^*(F_2/F_1)^*}$ est la structure Spin^c sur $p^*(F_2/F_1)^*$ associée à la K -orientation de f .

Montrons maintenant la cohérence des notations dans les définitions 4.2 et 4.6.

4.7. PROPOSITION. — Si $f: V_1/F_1 \rightarrow V_2/F_2$ est une submersion K-orientée et presque isométrique (au sens généralisé) les deux définitions de $f!$ coïncident.

Preuve. — Soit $\tilde{\alpha}_{(F'_2/F_1)^*} \in \text{KK}^{n(n+1)/2}(C^*(W_1, F'_1); C^*(V_1, F_1))$ construit en 2.10 et tel que $\tilde{\beta}_{(F'_2/F_1)^*} \otimes \tilde{\alpha}_{(F'_2/F_1)^*} = \gamma_{(F'_2/F_1)^*}$.

Notons (provisoirement) $f_!^{\text{iso}}$ le $f!$ donné par la définition 4.2.

On a : $\tilde{\alpha}_{(F'_2/F_1)^*} = p_1^{\text{iso}}$.

Or d'après la proposition 4.4 $f_!^{\text{iso}} = p_1^{\text{iso}} \otimes f_!^{\text{iso}}$, donc

$$f! = (\tilde{\beta}_{(F'_2/F_1)^*} \otimes \tilde{\alpha}_{(F'_2/F_1)^*}) \otimes f_!^{\text{iso}} = \gamma_{(F'_2/F_1)^*} \otimes f_!^{\text{iso}}.$$

Mais comme F'_2/F_1 est presque isométrique son groupe structural se réduit à un sous-groupe moyennable de Gl_n^+ donc $\gamma_{(F'_2/F_1)^*} = 1_{C^*(V_1, F_1)}$. ■

Remarque. — Il résulte immédiatement de 4.7 que $f_!^{\text{iso}}$ ne dépend pas de la structure presque isométrique (voir remarque 4.3).

4.8. Remarque. — Soit $f: V_1/F_1 \rightarrow V_2/F_2$ une submersion K-orientée.

Soit $i_2: G_2 \rightarrow H$ un cocycle où H est un groupe de Lie [G_2 désigne le graphe de (V_2, F_2)]. La composée $i_2 \circ f$ définit un cocycle $i_1: G_1 \rightarrow H$. Soit A une H algèbre.

La même construction que ci-dessus permet de définir $f_A! \in \text{KK}^*(A \rtimes_{i_1} G_1; A \rtimes_{i_2} G_2)$ (on utilise des opérateurs pseudo-différentiels à coefficients dans A). Une autre façon de définir $f_A!$ est de considérer les fibrés principaux feuilletés (P_1, F'_1) et (P_2, F'_2) associés aux cocycles i_1 et i_2 . Alors si $f_H: P_1/F'_1 \rightarrow P_2/F'_2$ est la submersion associée $f_H! \in \text{KK}_H(C^*(P_1, F'_1); C^*(P_2, F'_2))$.

Rappelons que $C^*(V_1, F_1)$ est équivalente au sens de Morita à $C^*(P_1, F'_1) \rtimes H$ et que $A \rtimes_{i_1} G_1$ est équivalente au sens de Morita à $(A \otimes_{\max} C^*(P_1, F'_1)) \rtimes H$. A travers ces équivalences de Morita on a :

$$f! = f_H! \rtimes H; \quad f_A! = \tau_A(f_H!) \rtimes H.$$

Notons que si B est une autre H algèbre et que $x \in \text{KK}_H^j(A, B)$ on a

$$f_H! \otimes_{\mathbb{C}} x = (-1)^{jn} x \otimes_{\mathbb{C}} f_H! \quad (n = \dim F'_2/F_1)$$

et donc

$$f_A! \otimes i_2^*(x) = (-1)^{jn} i_1^*(x) \otimes f_B!.$$

Notre but maintenant est de démontrer la functorialité de $f \rightarrow f!$ dans le cas de submersions non nécessairement presque isométriques. Pour cela nous aurons besoin d'un lemme :

Soient n et n' deux entiers et soient $H_{n, n'}$ le groupe $\begin{pmatrix} \text{Ml}_n^{\mathbb{C}} & M_{n, n'} \\ 0 & \text{Ml}_{n'}^{\mathbb{C}} \end{pmatrix}$,

$$K = \begin{pmatrix} \text{Spin}^{\mathbb{C}}(n) & 0 \\ 0 & \text{Spin}^{\mathbb{C}}(n') \end{pmatrix}$$

son compact maximal et

$$L = \begin{pmatrix} \text{Spin}^c(n) & M_{n,n'} \\ 0 & \text{Spin}^c(n') \end{pmatrix} \subseteq H_{n,n'}.$$

Soient

$$\tilde{\alpha}_L \in \text{KK}_L^{nn'}(C_0(L/K); \mathbb{C}), \quad \tilde{\beta}_p \in \text{KK}_{\text{MI}_p^c}^{p(p+1)/2}(\mathbb{C}; C_0(\text{MI}_p^c/\text{Spin}^c(p)))$$

les éléments associés aux structures Spin^c équivariantes sur L/K et $\text{MI}_p^c/\text{Spin}^c(p)$ (voir 2. 10).

Soient $j : H_{n,n'} \rightarrow \text{MI}_{n+n'}^c$; $r : H_{n,n'} \rightarrow \text{MI}_n^c$ et $r' : H_{n,n'} \rightarrow \text{MI}_{n'}^c$ les homomorphismes naturels.

Notons que $H_{n,n'}/K$ est égal (en tant $H_{n,n'}$ espace) à $\text{MI}_{n+n'}^c/\text{Spin}^c(n+n')$ et donc $j^*(\tilde{\beta}_{n+n'}) = \tilde{\beta}_{H_{n,n'}}$.

4. 9 LEMME. — On a :

$$j^*(\tilde{\beta}_{n+n'}) \otimes_{C_0(H_{n,n'}/K)} \text{ind}_{L^{H_{n,n'}}}^{H_{n,n'}}(\tilde{\alpha}_L) = r^*(\tilde{\beta}_n) \otimes_{\mathbb{C}} r'^*(\tilde{\beta}_{n'}) \in \text{KK}_{H_{n,n'}}^*(\mathbb{C}; C_0(H_{n,n'}/L)).$$

Preuve. — Ces deux éléments sont stables par multiplication par $\gamma_{H_{n,n'}} (= r^*(\gamma_n) \otimes_{\mathbb{C}} r'^*(\gamma_{n'}))$ d'après la proposition 2. 7), et leurs restrictions à K coïncident (c'est l'élément $i!$ en KK-théorie K -équivariante où i est l'inclusion du point dans $H_{n,n'}/L$. On utilise la functorialité en KK-théorie équivariante par un groupe compact. Remarquons que les résultats et les démonstrations de [11] restent valables *nec varietur* dans ce cadre cf. [30]). ■

4. 10. THÉORÈME. — Soient $f_3 : V_1/F_1 \rightarrow V_2/F_2$ et $f_1 : V_2/F_2 \rightarrow V_3/F_3$ des submersions K -orientées. Alors $(f_1 \circ f_3)! = f_3! \otimes f_1!$

Preuve. — Posons $f_2 = f_1 \circ f_3$. Notons W_2 le G_2 espace des formes quadratiques définies, positives sur $f_1^{-1}(F_3)/F_2$ et \tilde{F}_2 le feuilletage de W_2 associé à l'action de G_2 . Notons W_1 (respectivement W'_1) le G_1 espace des formes quadratiques définies, positives sur $f_2^{-1}(F_3)/F_1$ [respectivement sur $f_3^{-1}(F_2)/F_1$ et sur $f_2^{-1}(F_3)/f_3^{-1}(F_2)$] et \tilde{F} (resp. \tilde{F}'_1) le feuilletage sur W_1 (resp. W'_1) associé à l'action de G_1 .

Notons $p : W_1/\tilde{F}_1 \rightarrow W'_1/\tilde{F}'_1$, $g_3 : W'_1/\tilde{F}'_1 \rightarrow W_2/\tilde{F}_2$, $g_1 : W_2/\tilde{F}_2 \rightarrow V_3/F_3$ et $f_2 : W'_1/\tilde{F}'_1 \rightarrow V_3/F_3$ les submersions naturelles. Elles sont toutes trois K -orientées et presque isométriques naturellement.

Soit enfin $i : G_1 \rightarrow H_{n,n'}$ ($n = \dim f_3^{-1}(F_2)/F_1$ et $n' = \dim f_1^{-1}(F_3)/F_2$) le cocycle associé aux K -orientations des fibrés $f_3^{-1}(F_2)/F_1$ et $f_1^{-1}(F_3)/F_2$.

On a $p! = i^*(\text{ind}_{L^{H_{n,n'}}}^{H_{n,n'}}(\tilde{\alpha}_L))$ et donc, d'après le lemme 4. 9 et la proposition 4. 4 on a $f_2! = i^*(r^*(\tilde{\beta}_n) \otimes_{\mathbb{C}} r'^*(\tilde{\beta}_{n'})) \otimes_{C^*(W'_1, \tilde{F}'_1)} g_2!$.

Notons E_1, E_2, E_3, E_4 les fibrés Spin^c sur W'_1 de fibre

$$\begin{aligned} (E_1)_w &= T_1(\text{MI}_n^c/\text{Spin}^c(n)); & (E_2)_w &= T_1(\text{MI}_{n'}^c/\text{Spin}^c(n')); \\ (E_3)_w &= (f_3^{-1}(F_2)/F_1)_x & \text{et} & & (E_4)_w &= (f_2^{-1}(F_3)/f_3^{-1}(F_2))_x \end{aligned}$$

et soient S_1, S_2, S_3, S_4 les structures Spin^c associées.

Remarquons que la K-orientation de g_2 est donnée par la structure $S_1 \hat{\otimes} S_2 \hat{\otimes} S_3 \hat{\otimes} S_4$ et que celle de $g_1 \circ g_3$ par $S_1 \hat{\otimes} S_3 \hat{\otimes} S_2 \hat{\otimes} S_4$.

Donc $g_3! \otimes g_1! = (g_1 \circ g_3)! = \varepsilon g_2!$ où $\varepsilon = (-1)^{nn'(n'+1)/2}$.

Donc

$$f_2! = \varepsilon i^*(r^*(\tilde{\beta}_n) \otimes_{\mathbb{C}} r'^*(\tilde{\beta}_{n'})) \otimes_{\mathbb{C}^*(W'_1, F'_1)} g_3! \otimes_{\mathbb{C}^*(W_2, F_2)} g_1!$$

Soit W'_1 le G_1 espace des formes quadratiques sur $f_3^{-1}(F_2)/F_1$, \tilde{F}'_1 le feuilletage associé à l'action de G_1 et $g'_3 : W'_1/\tilde{F}'_1 \rightarrow V_2/F_2$ la projection. Soit $i_2 : G_2 \rightarrow \text{MI}_n^c$ le cocycle associé au fibré $f_1^{-1}(F_3)/F_2$ et $i' : G(W'_1, \tilde{F}'_1) \rightarrow \text{MI}_{n'}^c$, $i' = i_2 \circ g'_3 = r' \circ i$.

On a par la remarque 4.8

$$i'^*(\tilde{\beta}_{n'}) \otimes_{\mathbb{C}^*(W'_1, \tilde{F}'_1)} g_3! = \varepsilon g'_3! \otimes i_2^*(\tilde{\beta}_n)$$

et donc

$$f_2! = \varepsilon (r \circ i)^*(\tilde{\beta}_n) \otimes i'^*(\tilde{\beta}_{n'}) \otimes g_3! \otimes g_1! = (r \circ i)^* \tilde{\beta}_n \otimes g_3! \otimes i_2^*(\tilde{\beta}_n) \otimes g_2! = f_3! \otimes f_1! \quad \blacksquare$$

4.11. *Remarque* (Naturalité de $f \rightarrow f!$). — Soit $f : V_1/F_1 \rightarrow V_2/F_2$ une submersion K-orientée et soit $W_2 \subseteq V_2$ une sous-variété fermée saturée pour le feuilletage F_2 . Soit $W_1 = f^{-1}(W_2)$, c'est une sous-variété fermée de V_1 saturée pour le feuilletage F_1 . Soit $G'_j \subseteq G_j$ le sous-groupe $G'_j = \{\gamma \in G_j / r(\gamma) \in W_j\} = \{\gamma \in G_j / s(\gamma) \in W_j\}$. Supposons, pour simplifier, que G'_j est le groupoïde du feuilletage (W_j, F_j) .

Soit $p_j : \mathbb{C}^*(V_j; F_j) \rightarrow \mathbb{C}^*(W_j, F_j)$ donnée par $p_j(h) = h|_{G'_j}$ si $h \in \mathbb{C}_c(G_j)$, et soit $f' : W_1/F_1 \rightarrow W_2/F_2$ la restriction de f à W_1/F_1 . On a

$$p_1^*(f') = p_{2*}(f!) \in \text{KK}(\mathbb{C}^*(V_1, F_1); \mathbb{C}^*(W_2, F_2)).$$

4.12. *Remarque* (Cas d'une structure conforme invariante). — Soit (V, F_1, F_2) une variété doublement feuilletée avec $F_1 \subseteq F_2$ et supposons que le G_1 fibre F_2/F_1 est K-orienté et muni d'une structure conforme G_1 invariante. Dans ce cas, une construction d'Alain Connes donne aussi un élément de $\text{KK}^*(\mathbb{C}^*(V, F_1); \mathbb{C}^*(V, F_2))$. Nous allons montrer que l'élément ainsi obtenu coïncide avec notre $f!$ (f est la projection $V/F_1 \rightarrow V/F_2$). Commençons par rappeler la construction de A. Connes. Elle est donnée par un opérateur pseudodifférentiel d'ordre 0 (de type 1, 0) longitudinal pour F_2 et de symbole principal transverse (pour F_1) $c(\xi)/\|\xi\|$ ($\xi \in (F_2/F_1)^*$) où on a choisi une métrique (qui n'est pas G_1 invariante) sur F_2/F_1 telle que la structure conforme associée soit G_1 invariante, et où $c(\xi)$ désigne l'action dans le fibré S des spineurs. Il s'agit bien d'un symbole G_1 invariant, transversalement elliptique (A.7.4) qui détermine donc un élément $d \in \text{KK}^*(\mathbb{C}^*(V, F_1); \mathbb{C}^*(V, F_2))$. Pour montrer que $d = f!$, considérons d'abord l'homomorphisme $\varphi : G_1 \rightarrow \mathbb{R}$ donné par $\varphi(\gamma) = \text{Log} \|h(\gamma)\|$ où $h(\gamma) : (F_2/F_1)_{s(\gamma)} \rightarrow (F_2/F_1)_{r(\gamma)}$ est la restriction à F_2/F_1 de la différentielle de l'holonomie de γ (c'est un homomorphisme car la structure conforme étant invariante, $\|h(\gamma)\|^2 = h(\gamma)^* h(\gamma)$). Soit F'_1 le feuilletage de $V_1 \times \mathbb{R}$ provenant de cet homomorphisme (la feuille de F'_1 passant par $(x, t) \in V \times \mathbb{R}$ est $\{(r(\gamma), t + \varphi(\gamma)) / \gamma \in G_1, s(\gamma) = x\}$). Soient $p_1 : V \times \mathbb{R}/F'_1 \rightarrow V \times \mathbb{R}/F_1 \times \mathbb{R}$;

$p_2 : V \times \mathbb{R}/F'_1 \rightarrow V \times \mathbb{R}/F_2 \times \mathbb{R}$ les projections. Comme $p_1 !$ est inversible, il suffit de montrer que $p_1 ! \otimes f ! = p_1 ! \otimes \tau_{x, (L^2(\mathbb{R}))} d$. On a, par le théorème 4. 10, $p_1 ! \otimes f ! = p_2 !$. Comme le fibré $(F_2 \times \mathbb{R}/F'_1)$ est presque isométrique, $p_2 !$ est donné par un opérateur pseudodifférentiel, longitudinal pour $F_2 \times \mathbb{R}$ dont le symbole transverse (pour F'_1) est

$$a(x, t, \xi, \eta) = (\|b(x, t, \xi, \eta)\|^2 + 1)^{-1/2} b(x, t, \xi, \eta)$$

où

$$b(x, t, \xi, \eta) = (\|e^t \xi\|^2 + \|\eta\|^2 + 1)^{(\rho-1)/2} c(e^t \xi) \hat{\otimes} 1 + 1 \hat{\otimes} c(\eta) \quad (1/2 < \rho < 1, \\ x \in V, t \in \mathbb{R}, \xi \in (F_2/F_1)_x^*, \eta \in \mathbb{R}^*.$$

(La norme $\|\xi\|$ ne désigne pas ici une norme invariante mais une norme indépendante de t telle que $e^t \|\xi\|$ soit invariante).

L'égalité $p_2 ! = p_1 ! \otimes d$ découle alors directement du théorème A. 11.

V. Le cas général

Soit $f: V_1/F_1 \rightarrow V_2/F_2$ une application K-orientée de classe C^∞ . Alors f admet des factorisations $f = p \circ i$ où $i: V_1/F_1 \rightarrow V/F$ est une immersion K-orientée et où $p: V/F \rightarrow V_2/F_2$ est une submersion K-orientée (si V_1/F_1 est K-orientée on peut prendre $i: V_1/F_1 \rightarrow V_1/F_1 \times V_2/F_2$, $i = (\text{id}, f)$ et $p: V_1/F_2 \times V_2/F_2 \rightarrow V_2/F_2$ la projection — si V_1/F_1 n'est pas K-orientée on considère le feuilletage (V'_1, F'_1) donné par l'action de G_1 sur l'espace total du fibré transverse à F_1 ; alors $i: V_1/F_1 \rightarrow V_1/F'_1 \times V_2/F_2$ et $p: V_1/F'_1 \times V_2/F_2 \rightarrow V_2/F_2$ sont K-orientées).

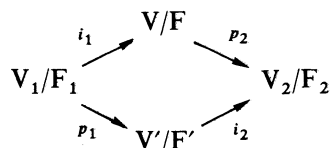
Dans le paragraphe 3 nous avons construit un élément $i ! \in \text{KK}^*(C^*(V_1, F_1); C^*(V, F))$ [dans le cas où $C^*(V_1, F_1)$ est nucléaire]. Dans le paragraphe 4 nous avons défini un élément $p ! \in \text{KK}^*(C^*(V, F); C^*(V_2, F_2))$. On a envie de poser $f ! = i \otimes p !$. Deux questions se posent alors naturellement :

- 1° Comment $i ! \otimes p !$ dépend de la factorisation $f = p \circ i$?
- 2° Est-ce que $(f_1 \circ f_3) ! = f_3 ! \otimes f_1 !$?

Le prochain lemme est le pas essentiel à la réponse à ces deux questions.

Remarquons que toute application f admet une factorisation $f = p \circ i$, mais pour que f admette une factorisation $f = i \circ p$ (notation évidente) il faut et il suffit que f soit de rang constant (remarque 1. 4. b).

5. 1. LEMME. — Soit

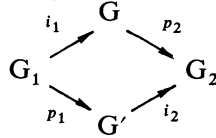


un diagramme commutatif d'applications K-orientées les i_j étant des immersions et les p_j des submersions.

Alors on a $i_1 ! \otimes p_2 ! = \gamma_{N_{i_1}} \otimes p_1 ! \otimes i_2 !$

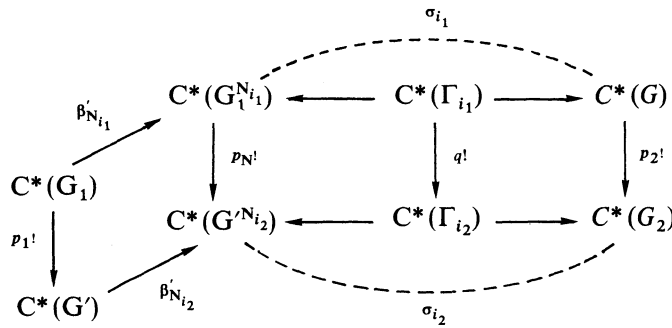
Ici N_{i_1} désigne le G_1 fibré normal à i_1 (voir 1.9 a) et $\gamma_{N_{i_1}}$ l'élément associé de $\text{KK}(C^*(V_1, F_1); C^*(V_1, F_1))$ (définition 2.5).

Preuve. — On peut se restreindre à des transversales. On a alors un diagramme commutatif de groupoïdes étales



Notons $q: \Gamma_{i_1} \rightarrow \Gamma_{i_2}$ la submersion K-orientée associée à ce diagramme où les Γ_{i_j} désignent les « groupoïdes normaux » associés aux immersions i_j (cf. 3.1).

D'après le diagramme :



où les carrés sont commutatifs par la remarque 4.11, il suffit de montrer que le défaut de commutation du losange est $\gamma_{N_{i_1}}$ i.e. $\gamma_{N_{i_1}} \otimes p_1! \otimes \beta'_{N_{i_2}} = \beta'_{N_{i_1}} \otimes p_N!$

Soient $\pi_1: G_1^{N_{i_1}} \rightarrow G_1$ et $\pi_2: G'N_{i_2} \rightarrow G'$ les projections. Elles sont K-orientées par hypothèse et $\pi_j! = \alpha'_{N_{i_j}}$ (définition 2.8). Comme $p_1 \circ \pi_1 = \pi_2 \circ p_N$ on a $\alpha'_{N_{i_1}} \otimes p_1! = p_N! \otimes \alpha'_{N_{i_2}}$ (théorème 4.10). Multipliant à gauche par $\beta'_{N_{i_1}}$ et à droite par $\beta'_{N_{i_2}}$ on obtient

$$\gamma_{N_{i_1}} \otimes p_1! \otimes \beta'_{N_{i_2}} = \beta'_{N_{i_1}} \otimes p_N! \otimes \gamma_{N_{i_2}}.$$

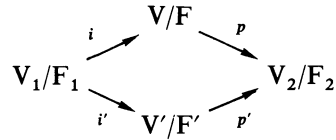
Or par la remarque 4.8 $p_N! \otimes \gamma_{N_{i_1}} = \gamma_{p_N^*(N_{i_2})} \otimes p_N!$ et par 2.2

$$\beta'_{N_{i_1}} \otimes \gamma_{p_N^*(N_{i_2})} = \gamma_{p_1^*(N_{i_2})} \otimes \beta'_{N_{i_1}}.$$

Or $p_1^*(N_{i_2})$ est un quotient de N_{i_1} donc $\gamma_{p_1^*(N_{i_2})} \otimes \gamma_{N_{i_1}} = \gamma_{N_{i_1}}$ (proposition 2.7) et comme $\gamma_{N_{i_1}} \otimes \beta'_{N_{i_1}} = \beta'_{N_{i_1}}$ on a $\gamma_{N_{i_1}} \otimes p_1! \otimes \beta'_{N_{i_2}} = \beta'_{N_{i_1}} \otimes p_N!$ ■

Soit $f: V_1/F_1 \rightarrow V_2/F_2$ de rang constant et $f = i_0 \circ p_0$ une décomposition de f avec i_0 et p_0 K-orientées. Alors si $f = p \circ i = p' \circ i'$ sont deux décompositions de f , on a $i! \otimes p! = \gamma_{N_i} \otimes p_0! \otimes i_0!$ et $i'! \otimes p'! = \gamma_{N_{i'}} \otimes p_0! \otimes i_0!$ et donc $\gamma_{N_{i'}} \otimes i'! \otimes p'! = \gamma_{N_i} \otimes i! \otimes p!$. Cette dernière égalité reste vraie même si f n'est pas de rang constant :

5.2. PROPOSITION. — Soit

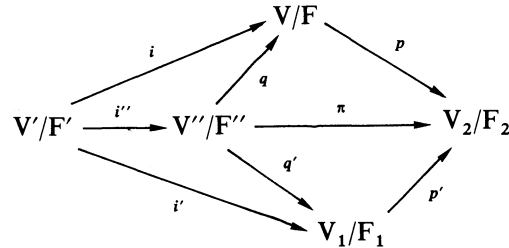


un diagramme commutatif d'applications K-orientées, i et i' étant des immersions, p et p' des submersions. On a

$$\gamma_{N_i} \otimes i! \otimes p! = \gamma_{N_i} \otimes i'! \otimes p'!$$

Preuve. — Soit V''/F'' le produit fibré $V/F \times_{V_2/F_2} V'/F'$.

On a un diagramme commutatif d'applications K-orientées :



où p, p', q, q' sont des submersions et i'' une immersion.

On a $\pi! = q! \otimes p! = q'! \otimes p'!$ (théorème 4.10) et

$$\gamma_{N_{i''}} \otimes i! = i''! \otimes q!; \quad \gamma_{N_{i''}} \otimes i'! = i''! \otimes q'! \quad (\text{lemme 5.1}).$$

Donc $\gamma_{N_{i''}} \otimes i! \otimes p! = \gamma_{N_{i''}} \otimes i'! \otimes p'!$.

Mais l'application q induit une suite exacte de fibrés

$$0 \rightarrow i''^*(\text{Ker } q) \rightarrow N_{i''} \rightarrow N_i \rightarrow 0,$$

et comme V''/F'' est le produit fibré $\text{Ker } q = q'^*(\text{ker } p')$ et donc $i''^*(\text{Ker } q) = i'^*(\text{ker } p')$.

Or $\gamma_{i'^*(\text{ker } p')} \otimes i'! = i'! \otimes \gamma_{\text{ker } p'}$ (remarque 3.18), $\gamma_{\text{ker } p'} \otimes p'! = p'!$ (par la définition 4.6)

et $\gamma_{N_{i''}} = \gamma_{N_i} \otimes \gamma_{i'^*(\text{ker } p')}$ (proposition 2.7).

Donc

$$\gamma_{N_i} \otimes i'! \otimes p'! = \gamma_{N_{i''}} \otimes i'! \otimes p'! = \gamma_{N_{i''}} \otimes i! \otimes p! = \gamma_{N_i} \otimes i! \otimes p!. \quad \blacksquare$$

5.3. *Remarque.* — Nous avons utilisé dans la proposition 5.2 le produit fibré de deux feuilletages. Rappelons ici comment il se définit (cf. [11] preuve de la proposition 4.9).

Soient $p: V_1/F_1 \rightarrow V/F$ et $f: V_2/F_2 \rightarrow V/F$ des applications de classe C^∞ telles que p soit une submersion. Soient G_p et G_f les graphes de p et f . Comme l'application $s: G_p \rightarrow V$

est une submersion le produit fibré $G_p \times_V G_f$ est une variété (de classe C^∞) notée G_h . Remarquons que G (le graphe de V/F) agit proprement et librement sur G_h . Le quotient est donc une variété V' , et G_h est le graphe d'une application $h: V' \rightarrow V/F$. Considérons les applications $(x_1, x_2) \rightarrow r(x_j)$ de G_h dans V_j ($j=1,2$). Elles passent au quotient par l'action de G et définissent donc des applications $f': V' \rightarrow V_1$ et $p': V' \rightarrow V_2$. Soit F' le feuilletage de V' dont la feuille passant par la classe de $(x_1, x_2) (\in G_h)$ soit l'ensemble des classes de $(\gamma_1 x_1, \gamma_2 x_2)$ où $\gamma_j \in G_j$, $s(\gamma_j) = r(x_j)$ ($j=1,2$). Les applications f' et p' passent au quotient et définissent $f': V'/F' \rightarrow V_1/F_1$ et $p': V'/F' \rightarrow V_2/F_2$. C'est ce V'/F' le produit fibré $V_1/F_1 \times_{V/F} V_2/F_2$.

La propriété universelle se vérifie comme suit :

Soient G_{f_j} des G_j fibrés principaux sur une variété V_0 définissant des applications $f_j: V_0/F_0 \rightarrow V_j/F_j$ ($j=1,2$), et soit $u: G_{f_1} \times_{G_1} G_p \rightarrow G_{f_2} \times_{G_2} G_f$ un difféomorphisme commutant aux applications r et s (à valeurs dans V_0 et V) et aux actions de G_0 (à gauche) et de G (à droite). Soit alors $G_g = G_{f_1} \times_{V_0} G_{f_2}$.

Remarquons que pour tout $(x_1, x_2) \in G_g$ il existe $y_1 \in G_p$, $y_2 \in G_f$ avec $s(x_j) = r(y_j)$ (les applications $r: G_p \rightarrow V_1$ et $r: G_f \rightarrow V_2$ sont des fibrations principales, en particulier elles sont surjectives). Notons $x_1 \circ y_1$ la classe de (x_1, y_1) dans $G_{f_1} \times_{G_1} G_p$ et $x_2 \circ y_2$ celle de (x_2, y_2) dans $G_{f_2} \times_{G_2} G_f$. Comme $G_{f_2} \times_{G_2} G_f = G_{f \circ f_2}$ est un G fibré principal sur V_0 , il existe un et un seul $\gamma \in G$ avec

$$u(x_1 \circ y_1) = (x_2 \circ y_2) \cdot \gamma = x_2 \circ (y_2 \circ \gamma).$$

On a $s(y_1) = s(y_2 \circ \gamma)$ donc $(y_1, y_2 \circ \gamma) \in G_h$. Si (y_1, y_2) et $(y'_1, y'_2) \in G_h$ sont tels que $u(x_1 \circ y_1) = (x_2 \circ y_2)$ et $u(x_1 \circ y'_1) = x_2 \circ y'_2$, comme $r(y_1) = r(y'_1) = s(x_1)$ il existe $\gamma \in G$ avec $y'_1 = y_1 \circ \gamma$ donc

$$u(x_1 \circ y'_1) = u((x_1 \circ y_1) \circ \gamma) = u(x_1 \circ y_1) \circ \gamma$$

et donc $y'_2 = y_2 \circ \gamma$.

Donc l'application $s: G_g \rightarrow V'$ donnée par $s(x_1, x_2) =$ classe de (y_1, y_2) est bien définie. On vérifie que G_g est un G' fibré principal et qu'il définit donc une application $g: V_0/F_0 \rightarrow V'/F'$. De plus on vérifie que $f' \circ g = f_1$ et $p' \circ g = f_2$ ce qui montre la propriété universelle pour V'/F' .

Soit $f: V_1/F_1 \rightarrow V_2/F_2$ une application K-orientée. Soit τ_j le fibré transverse à (V_j, F_j) . Considérons les feuilletages (V'_1, F'_1) et (V''_1, F''_1) donnés par l'action de G_1 sur l'espace total des fibrés τ_1 et $f^* \tau_2$. On a les factorisations $f = p' \circ i' = p'' \circ i''$ où $i': V_1/F_1 \rightarrow V'_1/F'_1 \times V_2/F_2$ et $i'': V_1/F_1 \rightarrow V''_1/F''_1 \times V_2/F_2$ sont des immersions K-orientées et $p': V'_1/F'_1 \times V_2/F_2 \rightarrow V_2/F_2$ et $p'': V''_1/F''_1 \times V_2/F_2 \rightarrow V_2/F_2$ sont des submersions K-orientées. Si de plus V_1/F_1 est K-orientée on a aussi la décomposition $f = p \circ i$ avec $i: V_1/F_1 \rightarrow V_1/F_1 \times V_2/F_2$ et $p: V_1/F_1 \times V_2/F_2 \rightarrow V_2/F_2$.

5.4. COROLLAIRE. — On a $i'! \otimes p'! = i''! \otimes p''!$ et si V_1/F_1 est K-orientée $i'! \otimes p'! = i! \otimes p!$

Preuve. — On a $N_{i'} = \tau_1 \oplus f^* \tau_2$, $N_{i''} = f^*(\tau_2 \oplus \tau_2)$ et $N_i = f^* \tau_2$. Donc $\gamma_{N_i} = \gamma_{N_{i''}}$ et $i'! \otimes p'! = i''! \otimes p''!$ (proposition 5.2). De plus $p''! = \gamma_{\tau_1} \otimes p'!$ et donc $i''! \otimes p''! = \gamma_{\tau_1} i'! \otimes p'!$ et comme $\gamma_{N_{i'}} = \gamma_{N_{i''}} \otimes \gamma_{\tau_1}$ on a $i'! \otimes p'! = i''! \otimes p''!$ ■

La proposition 5.2 montre qu'il n'y a pas de définition naturelle pour $f!$ dans le cas général (à moins de savoir que $\gamma_N = 1$ pour tout G_1 fibré N , voir remarque 5.8). Cependant le corollaire 5.4 nous permet de donner la définition suivante :

5.5. DÉFINITION. — Avec les notations ci-dessus on pose

$$\Gamma(f) = i'! \otimes p'!$$

$$(\Gamma(f) \in \text{KK}^*(C^*(V_1, F_1); C^*(V_2, F_2)))$$

Commençons par comparer $\Gamma(f)$ à $f!$ dans le cas où f est une immersion ou une submersion.

5.6. COROLLAIRE. — Si f est une immersion ou une submersion K -orientée on a :

$$\Gamma(f) = \gamma_{f^* \tau_2} \otimes f!$$

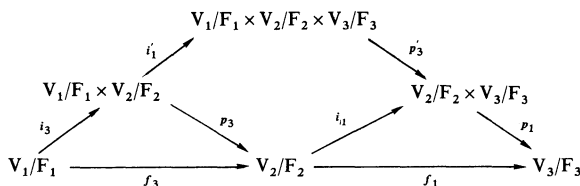
Preuve. — Résulte immédiatement du lemme 5.1 ou de la proposition 5.2. ■

Le prochain résultat est une réponse à la question (2) du début de ce paragraphe.

5.7. PROPOSITION. — Si $f_3: V_1/F_1 \rightarrow V_2/F_2$ et $f_1: V_2/F_2 \rightarrow V_3/F_3$ sont K -orientées on a

$$\Gamma(f_3) \otimes \Gamma(f_1) = \gamma_{f_3^* \tau_2} \otimes \Gamma(f_1 \circ f_3).$$

Preuve. — Supposons, afin de simplifier les notations, que V_1/F_1 , V_2/F_2 et V_3/F_3 sont K -orientés. Considérons le diagramme suivant :



Comme $p_3^* N_{i_1} = N_{i_1'}$ on a par le lemme 5.1 $i_1'! \otimes p_3'! = p_3! \otimes i_1!$ et donc

$$\Gamma(f_3) \otimes \Gamma(f_1) = i_3! \otimes i_1'! \otimes p_3'! \otimes p_1! = (i_1' \circ i_3)! \otimes (p_1 \circ p_3'!)$$

(théorèmes 3.16 et 4.10).

Posons $f_2 = f_1 \circ f_3$ et soit $f_2 = p_2 \circ i_2$ sa décomposition canonique. Comme $N_{i_2} = f_2^* \tau_3$ et $N_{i_1' \circ i_3} = f_3^* \tau_2 \oplus f_1^* \tau_3$ on a

$$\gamma_{N_{i_2}} \otimes (i_1' \circ i_3)! = (i_1' \circ i_3)! \quad \text{et} \quad \gamma_{N_{i_1' \circ i_3}} \otimes i_2! = \gamma_{f_3^* \tau_2} \otimes i_2!$$

Et donc, d'après la proposition 5.2 on a :

$$(i'_1 \circ i_3)! \otimes (p_1 \circ p'_3)! = \gamma_{f_3^* \tau_2} \otimes i_2! \otimes p_2! \quad \blacksquare$$

5.8. *Remarque.* — Il y a toute une famille d'exemples de feuilletages (V, F) pour lesquels on sait que $\gamma_E = 1$ pour tout G fibré vectoriel E :

(i) si V/F est propre i.e. si l'application $(r, s) : G \rightarrow V \times V$ est propre, alors tout G fibré E admet une structure euclidienne G invariante et donc $\gamma_E = 1$.

(ii) si (V, F) est équivalent à une action d'un groupe de Lie connexe et moyennable alors V/F est équivalent au sens de la KK théorie à l'action du compact maximal (par [31]) qui est alors propre.

(iii) de même si V/F est équivalent à une action de $SO(n, 1)$ par [33].

Comme $f!$ n'est bien défini que si G_1 est moyennable (ce qui n'est pas le cas pour (iii) ci-dessus) ⁽⁴⁾ nous espérons que l'affirmation suivante est vraie :

5.9. *Conjecture.* — Si V/F est moyennable alors $\gamma_E = 1$ pour tout G -fibré E .

Si cette conjecture est vraie on saurait que

(i) $f!$ ne dépend pas de la décomposition $f = p \circ i$ (5.2).

(ii) $(g \circ f)! = f! \otimes g!$ pour toutes f et g K-orientées (5.7).

Si cette conjecture n'est pas vraie, factorisant $\text{id}_{V/F}$ à travers $V/F \xrightarrow{i} E/F' \xrightarrow{p} V/F$ on voit qu'on n'a pas la functorialité en général ($\text{id}! = 1$; $i! \otimes p! = \gamma_E$).

5.10. *Remarque.* — Si on ne suppose pas V/F moyennable, cette conjecture est fautive :

Soit (V, F) un feuilletage dont la transversale est donnée par l'action de $SL_3(\mathbb{Z})$ dans le tore \mathbb{T}^3 . L'algèbre $C^*(V, F)$ est alors équivalente au sens de Morita à

$$C(\mathbb{T}^3) \rtimes SL_3(\mathbb{Z}) \cong C^*(\mathbb{Z}^3 \rtimes SL_3(\mathbb{Z})).$$

Soit E le fibré provenant du cocycle $SL_3(\mathbb{Z}) \rightarrow SL_3(\mathbb{R})$. Si γ_E était égal à 1 la projection $C(\mathbb{T}^3) \rtimes SL_3 \rightarrow C(\mathbb{T}^3) \rtimes_{\text{red}} SL_3(\mathbb{Z})$ i.e. la projection

$\lambda : C^*(\mathbb{Z}^3 \rtimes SL_3(\mathbb{Z})) \rightarrow C^*_{\text{red}}(\mathbb{Z}^3 \rtimes SL_3(\mathbb{Z}))$ serait inversible en KK théorie, ce qui est faux par [12], remarque 2.7, b.

VI. Relations avec le groupe de K-théorie géométrique

Dans [4] P. Baum et A. Connes définissent le groupe de K-théorie géométrique $K^*_{\text{top}}(V, F)$ du feuilletage (V, F) . Clairement, une application K-orientée $f : V_1/F_1 \rightarrow V_2/F_2$ définit un homomorphisme $f^{\text{top}} : K^*_{\text{top}}(V_1, F_1) \rightarrow K^*_{\text{top}}(V_2, F_2)$. Nous vérifions que l'élément $f!$ [ou $\Gamma(f)$] que nous avons construit dans les paragraphes précédents est une réalisation analytique de f^{top} (proposition 6.2). Regardant ensuite le cas de la projection

⁽⁴⁾ Notons que dans ce cas $C^*(G_1)$ est nucléaire en K-théorie et que $f!$ est donc bien défini par la remarque 3.17.

$p: V/F \rightarrow pt$, nous retrouvons un résultat de [10] (théorème 6.8) qui constitue un pas en vue de l'injectivité de l'application $\mu: K_{\text{top}}^*(V, F) \rightarrow K_*(C^*(V, F))$, avec une précision supplémentaire qui constitue un pas vers la surjectivité de μ .

Rappelons (cf. [4]) que le groupe géométrique $K_{\text{top}}^*(V, F)$ se définit par générateurs et relations de la façon suivante :

Les générateurs sont les quadruplets (M, F_M, x, f) où (M, F_M) est un feuilletage propre (i. e. l'application $(r, s): G_M \rightarrow M \times M$ est propre où G_M désigne le graphe de (M, F_M)), $x \in K_*(C^*(M, F_M))$ et $f: M/F_M \rightarrow V/F$ est K -orientée.

L'addition est donnée par somme disjointe.

Les relations sont données par

$$(M, F_M, x, f \circ g) \sim (M', F_{M'}, g_!(x), f)$$

où $g: M/F_M \rightarrow M'/F_{M'}$ est K orientée.

L'application $\mu: K_{\text{top}}^*(V, F) \rightarrow K_*(C^*(V, F))$ est donnée par

$$\mu(M, F_M, x, f) = f_!(x) = x \otimes f!$$

Elle est bien définie à cause de la functorialité pour les feuilletages propres.

6.1. *Remarque.* — La définition que nous donnons du groupe géométrique n'est pas exactement celle donnée dans [4]. Le lien entre les deux vient de ce que pour un feuilletage propre (M, F_M) la K -théorie $K_*(C^*(M, F_M))$ coïncide avec la K -théorie des fibrés G_M équivariants sur M à support compact dans le quotient M/F_M (qui n'est pas une variété mais une « orbifold »). La coïncidence de ces deux K -théories est une conséquence de l'égalité entre la K -théorie équivariante et celle du produit croisé pour une action de groupe compact (cf. [30], [18], [28]), toute « orbifold » étant équivalente à une action de O_n (cf. [22]).

Si $f: V_1/F_1 \rightarrow V_2/F_2$ est une application K -orientée de classe C^∞ , elle définit $f_!^{\text{top}}: K_{\text{top}}^*(V_1, F_1) \rightarrow K_{\text{top}}^*(V_2, F_2)$ par la formule

$$f_!^{\text{top}}(M, F_M, x, g) = (M, F_M, x, f \circ g).$$

6.2. PROPOSITION. — *Le diagramme :*

$$\begin{array}{ccc} K_{\text{top}}^*(V_1, F_1) & \xrightarrow{f_!^{\text{top}}} & K_{\text{top}}^*(V_2, F_2) \\ \mu \downarrow & & \downarrow \mu \\ K_*(C^*(V_1, F_1)) & \xrightarrow{\otimes f!} & K_*(C^*(V_2, F_2)) \end{array}$$

est commutatif.

Pour être plus précis, comme $f!$ n'est pas défini de façon unique (cf. § 5), pour toute décomposition $f = p \circ i$ où i est une immersion et p une submersion K -orientées on a $\forall x \in K_{\text{top}}^*(V_1, F_1) \mu(f_!^{\text{top}}(x)) = \mu(x) \otimes i! \otimes p!$. Notons que, dans le cas non moyennable, $\mu(x) \otimes i!$ est défini même si $i!$ ne l'est pas (remarque 3.17).

Preuve. — Si (M, F_M, x, g) est un générateur du groupe géométrique, on a $(f \circ g)! = g! \otimes f!$ car (M, F_M) est propre (remarque 5.8). ■

En particulier, si $x \in K_{\text{top}}^*(V_1, F_1)$ est tel que $\mu(f_!^{\text{top}}(x)) \neq 0$, alors $\mu(x)$ est non nul. Notons qu'il y a beaucoup de feuilletages pour lesquels on sait que μ est injective (tous les feuilletages provenant d'actions de groupes de Lie connexes). Si (V_2, F_2) est un tel feuilletage, il suffit donc de savoir que $f_!^{\text{top}}(x) \neq 0$. En cela l'existence de $f!$ peut être utilisée pour démontrer l'injectivité de μ dans d'autres cas.

6.3. *Exemple.* — Soit H un groupe de Lie connexe de compact maximal K ; soit α une action de classe C^∞ de H dans une variété M . On suppose que K agit librement et que l'action est presque libre (c'est-à-dire qu'il existe un voisinage de 1 dans H qui ne rencontre aucun stabilisateur et que l'ensemble des points de M de stabilisateur trivial est un G_δ dense). La variété $V = M/K$ est alors munie d'un feuilletage F_2 (le revêtement d'holonomie des feuilles de F_2 s'identifie à H/K). Soit $F_1 \subset F_2$ un autre feuilletage de V ; supposons pour simplifier que la submersion $q: V/F_1 \rightarrow V/F_2$ est K -orientée. L'application μ de $K_{\text{top}}^*(V, F_2) = K^*(F_2)$ à valeurs dans $K_*(C^*(V, F_2))$ est injective d'après un résultat de G. Kasparov ([31], § 6, théorème 2). Donc si $x \in K_{\text{top}}^*(V, F_1)$ est tel que $q_!^{\text{top}}(x) \neq 0$, alors $\mu(x) \neq 0$ par la proposition 6.2. En particulier, si $x \in K^*(F_1) \cong K^*(F_2)$ est non nul, alors $\mu(x) \in K_*(C^*(V, F_1))$ est non nul : cela signifie que la flèche $\text{ind}: K^*(F_1^*) \rightarrow K_*(C^*(V, F_1))$ de [7], [8], [11] est injective.

Un exemple d'une telle situation peut d'obtenir de la façon suivante : soit Γ un sous-groupe discret sans torsion de H , $B = \Gamma \backslash H/K$ la variété quotient et F_0 un feuilletage sur B . Soit X une variété munie d'une action presque libre de Γ . Sur $V = X \times_\Gamma H/K$ on a un feuilletage F_2 , quotient par Γ du feuilletage de feuilles $\{x\} \times H/K$ de $X \times H/K$ (i. e. la suspension de l'action de Γ sur X cf. [20] 1.8) et un feuilletage (parallèle à F_0), $F_1 = p_0^{-1}(F_0) \cap F_2$, où $p_0: V \rightarrow B$ est la fibration de fibre X .

Supposons que les revêtements d'holonomie des feuilles de (B, F_0) soient simplement connexes et choisissons X ayant un point fixe x_0 pour Γ (l'action restant presque libre). Le point x_0 détermine des immersions $i_0: B \rightarrow V$, $i: B/F_0 \rightarrow V/F_1$. En effet, le groupoïde d'holonomie de (B, F_0) étant son groupoïde d'homotopie, on a remarqué en 1.4. c) que i est alors bien définie.

En fait, pour que i soit défini, il suffit de supposer que tout lacet tracé dans une feuille de (B, F_0) dont l'holonomie est triviale, a une image triviale dans $\pi_1(B) = \Gamma$.

Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} B & \xrightarrow{i_0} & V & \xrightarrow{p_0} & B \\ q_0 \downarrow & & q \downarrow & & \\ B/F_0 & \xrightarrow{i} & V/F_1 & & \end{array}$$

Supposons pour simplifier que tous les fibrés apparaissant sont K -orientés. On a $p_0 \circ i_0 = \text{id}_B$ donc $i_0!: K^*(B) \rightarrow K^*(V)$ est injective. On a vu que $q!$ est injective donc $q_0!$ est injective.

Par exemple, on a obtenu que l'homomorphisme d'indice $\text{Ind}: K^*(F^*) \rightarrow K_*(C^*(T^n, F))$ est injectif pour tout feuilletage F du tore T^n à feuilles

simplement connexes. Plus généralement, et avec les notations de [5], pour tout feuilletage du tore \mathbb{T}^n l'homomorphisme $\text{Ind}: K^*(F^*) \rightarrow K_*(C^*(\mathbb{T}^n, F))$ est injectif. Notons que si les revêtements d'homotopie des feuilles sont contractiles $\text{BG} = \mathbb{T}^n$ (G est le groupoïde d'homotopie de (\mathbb{T}^n, F) — noté π dans [5]). On obtient alors l'injectivité (rationnelle) de μ et donc la « conjecture de Novikov pour les feuilletages » de Baum-Connes ([5], conjecture 6.2) est vérifiée (voir la remarque de la fin du paragraphe 6 de [5]). Notons cependant que dans ce cas et dans le cas plus général où $\text{BG} = \text{B}\pi$ avec π groupe dénombrable la conjecture de Novikov pour π implique clairement la conjecture de Baum-Connes pour G .

Plus généralement, soit (V, F_1, F_2) une variété doublement feuilletée avec $F_1 \subset F_2$, telle que les revêtements d'holonomie des feuilles de (V, F_1) soient contractiles et les feuilles de F_2 soient à courbure sectionnelle négative ou nulle (au sens de [5]). Alors la conjecture de Baum-Connes est vérifiée pour (V, F_1) .

Considérons maintenant le cas de la projection $p: V/F \rightarrow pt$, qu'on supposera K -orientée. Dans ce cas $p! \in \text{KK}^*(C^*(V, F); \mathbb{C})$.

6.4. THÉORÈME (cf. [10] théorème 6.8). — Soit L un G -fibré vectoriel complexe sur V . Alors il existe $p_L \in \text{KK}^*(C^*(V, F); \mathbb{C})$ tel que $\mu(M, F_M, x, f) \otimes p_L = (p \circ f)_!([f^*(L)] \otimes x) \in \mathbb{Z}$ et, en particulier, si F_M est trivial

$$\mu(M, \{0\}, x, f) \otimes p_L = \langle \text{ch}(x) \cdot \text{ch}(f^*L) \cdot \text{Td}(M), [M] \rangle.$$

Preuve. — On pose $p_L = [L] \otimes p!$ où $[L] \in \text{KK}(C^*(V, F))$ est défini en 2.11. Par la remarque 4.8 on a $f! \otimes [L] = [f^*L] \otimes f!$ donc

$$x \otimes f! \otimes [L] \otimes p! = x \otimes [f^*L] \otimes (p \circ f)!.$$

La deuxième égalité résulte du théorème de l'indice d'Atiyah et Singer [3] ■

Ce résultat implique le théorème 6.8 de [10], du moins dans le cas où $p! \in K^*(C_{\text{red}}^*(V, F))$, par exemple si (V, F) est moyennable (en mesure) (cf. [37], définition 3.6, p. 92 et proposition 3.2). Nous ne savons cependant pas si les deux homomorphismes de $K_*(C^*(V, F)) \rightarrow \mathbb{C}$, $q_L \circ \lambda_*$ et $\otimes p_L$ coïncident⁽⁵⁾ où $q_L \in K_*(C_{\text{red}}^*(V, F)) \rightarrow \mathbb{C}$ est l'homomorphisme de [10] et $\lambda: C^*(V, F) \rightarrow C_{\text{red}}^*(V, F)$ est la surjection naturelle. Une difficulté qu'on rencontre en essayant de démontrer l'égalité entre ces deux homomorphismes est que les homomorphismes de base pour construire q_L et p_L ne sont pas les mêmes : l'homomorphisme correspondant à p_L est le produit du cycle fondamental de A . Connes par la classe de Todd de τ . Notons qu'en plus il n'y a pas unicité du fibré virtuel L (ou plutôt de $1/k[L]$) tel que $\text{ch}[L] = k \text{Td}(\tau)$ $k \in \mathbb{N}$.

Si on a l'égalité de ces deux homomorphismes on obtient que l'homomorphisme q_L est à valeurs entières sur l'image de λ_* et que l'homomorphisme $\otimes p_L$ est nul sur le noyau de λ_* .

⁽⁵⁾ Ils coïncident sur l'image de μ .

Remarquons finalement que si $x \in K_{\text{top}}^*(V, F)$ est tel que $\mu(x) \otimes p_L \neq 0$ pour un certain L , alors $\mu(x)$ n'est pas indéfiniment divisible dans $K_*(C^*(V, F))$. Ce résultat est un petit pas en vue de la surjectivité de μ .

VII. Remarques finales

7.1. LE CAS OÙ f N'EST PAS K-ORIENTÉE. — Il y a des cas où, bien que f ne soit pas K-orientée, on peut construire des éléments de KK-théorie associés à f . Si, par exemple, f est une submersion orientée, on peut utiliser le symbole de l'opérateur de signature transverse au lieu de celui de l'opérateur de Dirac. La même construction qu'au quatrième paragraphe donne encore un élément de $KK^*(C^*(V_1, F_1); C^*(V_2, F_2))$. Si V/F est orientée, la submersion $p: V/F \rightarrow pt$ est orientée, et la construction ci-dessus permet de retrouver dans ce cadre le théorème 6.8 de [10].

Plus généralement, soit (W_1, F'_1) le feuilletage horizontal sur l'espace total du G_1 fibré $\tau_1^* \oplus f^* \tau_2$. Alors la composée $f': W_1/F'_1 \rightarrow V_2/F_2$ de la projection $W_1 \rightarrow V_1$ par f est toujours K-orientée. Appelons K-polarisation de f un élément de $KK(C^*(V_1, F_1); C^*(W_1, F'_1))$.

Si σ est une K-polarisation de f posons $\Gamma(f, \sigma) = \sigma \otimes \Gamma(f')$. Notons qu'une K-orientation τ détermine une K-polarisation $\sigma(\tau)$ (l'élément β'_N du paragraphe 2) et qu'on a $\Gamma(f, \sigma(\tau)) = \Gamma(f)$. De même une orientation détermine une K-polarisation, considérant l'élément de $KK_{G_1^+}^n(C, C_0(\mathbb{R}^n))$ dont la restriction à SO_n est le symbole de l'opérateur de signature.

7.2. CAS DES ACTIONS DE GROUPES. — Il est clair que tous les résultats décrits aux paragraphes précédents se retrouvent dans plusieurs contextes autres que les espaces de feuilles de feuilletages :

Si G_1 et G_2 sont les groupoïdes étales et $f: G_1 \rightarrow G_2$ est un cocycle K-orienté on peut construire un élément $f! \in KK^*(C^*(G_1); C^*(G_2))$ [du moins si $C^*(G_1)$ est nucléaire]. En particulier si Γ est un groupe (moyennable) discret agissant sur les variétés V_1 et V_2 par difféomorphismes, et si $f: V_1 \rightarrow V_2$ est une application de classe C^∞ , Γ équivariante et K-orientée de façon Γ équivariante, on obtient un élément $f! \in KK^*(C(V_1) \rtimes \Gamma; C(V_2) \rtimes \Gamma)$. Si f est une submersion $f!$ est en fait un élément de $KK_\Gamma^*(V_1; V_2)$; par contre, dans le cas des immersions nous ne savons pas si $f!$ provient d'un élément de $KK_\Gamma^*(V_1; V_2)$, car nous ne connaissons pas de résultats de suite exacte en KK-théorie Γ -équivariante. Pour cette raison nous souhaiterions avoir une définition plus directe de $f!$ dans le cas des immersions

7.3. COHOMOLOGIE DE GEL'FAND FUCHS. — Dans [10] A. Connes arrive à construire des cocycles cycliques associés à des éléments de la cohomologie de Gel'fand Fuchs comme homomorphismes de $K_*(C^*(V, F)) \rightarrow \mathbb{C}$ ([10] theorem 8.1). Nous aurions voulu obtenir ces homomorphismes comme éléments de K-homologie à coefficients réels. Le problème est le suivant : étant donnée une forme transverse ω , invariante par holonomie, et fermée sur V , construire un élément de K-homologie à coefficients réels qui lui corresponde (cf. [10] remark 6.15). En général nous ne savons pas le résoudre.

Remarquons cependant que si ω est de degré maximal [i. e. degré $(\omega) = \text{codimension}(F)$] elle définit un courant de Ruelle-Sullivan [43], donc une trace sur $C^*(V, F)$ [7] et donc un homomorphisme $K_*(C^*(V, F)) \rightarrow C$. Remarquons aussi que si ω n'est plus de degré maximal mais est non nulle en tout point et produit de 1-formes, elle définit un feuilletage F' (l'annulateur de ces 1-formes) avec $F \subseteq F'$, et un courant de Ruelle-Sullivan sur (V, F') . Soit $f: V/F \rightarrow V/F'$ la projection, si V/F est orientée, f l'est, et on sait alors construire (cf. 7.1) un élément $\Gamma(f) \in KK(V/F; V/F')$. Il n'y a plus alors qu'à le composer avec la trace sur $C^*(V, F')$ (une trace définissant un élément de K-homologie à coefficients réels).

Notons pour terminer que si T est une transversale fidèle de (V, F) difféomorphe à un ouvert (non nécessairement connexe) de \mathbb{R}^q alors G_T^T est un sous-groupe ouvert de Γ_q et $C^*(G_T^T)$ est une sous-algèbre de la C^* -algèbre (non séparable!) $C^*(\Gamma_q)$, où Γ_q désigne le groupe d'Haefliger des germes de difféomorphismes de \mathbb{R}^q (cf. [20]). On a donc un élément de $KK(C^*(V, F); C^*(\Gamma_q))$. Le problème est de construire des homomorphismes $K_*(C^*(\Gamma_q)) \rightarrow \mathbb{R}$ associés aux classes de $H^*(WO_q)$ ou plus généralement $H^*(B\Gamma_q)$. C'est ce problème qui a été résolu dans [10] au moyen de la cohomologie cyclique [du moins en ce qui concerne $H^*(WO_q)$]. Nous en aimerions une solution en K homologie (à coefficients réels) qui pourrait, peut-être, apporter des précisions supplémentaires.

APPENDICE

Opérateurs pseudodifférentiels transversalement elliptiques

Dans cet appendice nous définissons des opérateurs transversalement elliptiques qui nous permettent de construire l'élément $f!$ où $f: V_1/F_1 \rightarrow V_2/F_2$ est une submersion K-orientée et presque isométrique. Enfin nous calculons le produit de Kasparov de deux opérateurs transversalement elliptiques.

Le principal problème que nous rencontrons ici est que nous ne pouvons pas nous restreindre aux symboles homogènes (comme c'est le cas dans [3], [36], [1], [7], [11] etc.). Nous utiliserons ici une sorte de réceptacle maximal : les opérateurs pseudodifférentiels d'ordre 0 et de type (ρ, δ) cf. [25]. Nous montrons pour ces opérateurs un analogue de la suite exacte des opérateurs pseudodifférentiels (cf. [36], §XVI, [7] § 9.1) et, pour calculer les produits de Kasparov, nous généralisons les lemmes techniques de [11], § 1 (lemmes 1.7, 1.8 et 1.9).

Nous commençons cet appendice en rappelant les définitions des symboles « ρ, δ ». Ensuite nous prouvons la suite exacte associée : d'abord dans le cas de \mathbb{R}^n , ensuite dans le cas des variétés, dans le cas des familles et enfin dans le cas des feuilletages. Nous donnons ensuite la définition des opérateurs transversalement elliptiques et montrons successivement les analogues des trois lemmes de [11] cités plus haut.

Sommaire de l'appendice

- A. 1. Symboles de type ρ, δ .
- A. 2. La suite exacte des opérateurs pseudodifférentiels sur un ouvert de \mathbb{R}^n .
- A. 3. La suite exacte des opérateurs pseudodifférentiels sur une variété.

- A. 4. Familles d'opérateurs pseudodifférentiels.
- A. 5. Opérateurs pseudodifférentiels longitudinaux sur un feuilletage.
- A. 6. Familles d'opérateurs pseudodifférentiels et connexions.
- A. 7. Opérateurs pseudodifférentiels transverses et bimodules de Kasparov.
- A. 8. Opérateurs pseudodifférentiels transverses et connexions.
- A. 9. Le produit d'une zéro connexion par un (pseudodifférentiel) $\hat{\otimes} 1$.
- A. 10. Commutateur d'une connexion et d'un (pseudodifférentiel) $\hat{\otimes} 1$.
- A. 11. Produit de Kasparov de deux opérateurs pseudodifférentiels transverses transversalement elliptiques.
- A. 12. Une remarque.

A. 1. Symboles de type ρ, δ (cf. [25], [27])

Soit V une variété de classe C^∞ de dimension n et T un fibré vectoriel réel de dimension n' de classe C^∞ sur V . Soient $m, \rho \in \mathbb{R}$ avec $1/2 < \rho \leq 1$, et posons $\delta = 1 - \rho$.

Soit a une fonction complexe de classe C^∞ définie sur l'espace total T . Rappelons ([25], p. 84) que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) Pour toute carte $\varphi : \Omega \times \mathbb{R}^{n'} \rightarrow T$ (Ω ouvert de \mathbb{R}^n ; φ application de fibrés), pour tout compact K de Ω et pour toute paire $p \in \mathbb{N}^n, q \in \mathbb{N}^{n'}$ de multiindices, il existe une constante C avec

$$\left| \frac{\partial^p}{\partial x^p} \frac{\partial^q}{\partial \xi^q} (a \circ \varphi)(x, \xi) \right| \leq C (1 + \|\xi\|)^{m - \rho|q| + \delta|p|}$$

pour tout x, ξ avec $x \in K, \xi \in \mathbb{R}^{n'}$.

(ii) Il existe un recouvrement de V par des cartes vérifiant (i).

On dit alors que a est un symbole d'ordre m et de type ρ, δ . Si a est un symbole, son support $\text{Supp}(a)$ est l'adhérence dans V de l'ensemble

$$\{x \in V \mid \exists \xi \in T_x / a(x, \xi) \neq 0\}.$$

Soit $\mathcal{S}_{\rho, \delta}^m(V, T)$ l'espace des symboles m, ρ, δ à support compact.

Remarquons que $\mathcal{S}_{\rho, \delta}^0$ est une sous algèbre involutive de l'algèbre $C_b(T)$ des fonctions continues bornées sur l'espace total de T . Notons $\bar{\mathcal{S}}_{\rho, \delta}^0$ l'adhérence de $\mathcal{S}_{\rho, \delta}^0$ dans $C_b(T)$ et \mathcal{S}^0 l'adhérence de l'union des $\mathcal{S}_{\rho, \delta}^0$ ($1/2 < \rho \leq 1, \delta = 1 - \rho$).

On pose $\Sigma_{0, \rho}(V, T) = \bar{\mathcal{S}}_{\rho, \delta}^0 / C_0(T)$ où $C_0(T)$ désigne l'espace des fonctions continues nulles à l'infini dans T (remarquons que comme $C_c^\infty(T) \subseteq \mathcal{S}_{1, 0}^0$ où $C_c^\infty(T)$ désigne l'algèbre des fonctions C^∞ à support compact, on a $C_0(T) \subseteq \bar{\mathcal{S}}_{\rho, \delta}^0$).

Si la variété V n'est pas compacte, on est amené à considérer aussi des symboles non nuls à l'infini. Ainsi on note

$$\begin{aligned} C_V(T) &= \{a \in C_b(T) / a \varphi \in C_0(T), \forall \varphi \in C_0(V)\}, \\ \bar{\mathcal{S}}_{V, \rho}^0 &= \{a \in C_b(T) / a \varphi \in \bar{\mathcal{S}}_{\rho, \delta}^0(V, T), \forall \varphi \in C_0(V)\} \end{aligned}$$

et on pose $\Sigma_\rho(V, T) = \bar{\mathcal{S}}_{V, \rho}^0 / C_V(T)$.

Si E désigne un fibré complexe hermitien de classe C^∞ sur V on peut aussi parler de symboles de type ρ, δ agissant sur le fibré E . On définit ainsi $\mathcal{S}_{\rho, \delta}^m(V, T; \mathcal{L}(E))$ et les algèbres $\Sigma_{0, \rho}(V, T; \mathcal{L}(E))$ et $\Sigma_\rho(V, T; \mathcal{L}(E))$.

Enfin notons que si T' est un sous fibré de T , on a des opérateurs de restriction surjectifs $\mathcal{S}_{\rho, \delta}^m(\mathbb{V}, T; \mathcal{L}(E)) \rightarrow \mathcal{S}_{\rho, \delta}^m(\mathbb{V}, T'; \mathcal{L}(E))$ et donc

$$\Sigma_{0, \rho}(\mathbb{V}, T; \mathcal{L}(E)) \rightarrow \Sigma_{0, \rho}(\mathbb{V}, T'; \mathcal{L}(E)) \quad \text{et} \quad \Sigma_{\rho}(\mathbb{V}, T; \mathcal{L}(E)) \rightarrow \Sigma_{\rho}(\mathbb{V}, T'; \mathcal{L}(E)).$$

(Pour voir la surjectivité de la restriction, choisissons une métrique sur T , et écrivons $T = T' \oplus T''$ où $T'' = T'^{\perp}$; si $a \in \mathcal{S}_{\rho, \delta}^m(\mathbb{V}, T'; \mathcal{L}(E))$ alors $b \in \mathcal{S}_{\rho, \delta}^m(\mathbb{V}, T; \mathcal{L}(E))$ où

$$b(x, (\xi', \xi'')) = \chi \left(\frac{\|\xi''\|^2}{1 + \|\xi'\|^2 + \|\xi''\|^2} \right) a(x, \xi')$$

où $\chi \in C^{\infty}([0, 1])$ est nulle au voisinage de 1 et vaut 1 au voisinage de 0).

A. 2. La suite exacte des opérateurs pseudodifférentiels sur un ouvert de \mathbb{R}^n ([25], [27])

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n et $a \in \mathcal{S}_{\rho, \delta}^m(\Omega \times \Omega, (\mathbb{R}^n)^*)$.

La formule

$$(\mathbf{P}_a f)(x) = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^n \iint e^{i \langle x - x', \xi \rangle} a(x, x', \xi) f(x') dx' d\xi$$

définit un opérateur $\mathbf{P}_a : C^{\infty}(\Omega) \rightarrow C_c^{\infty}(\Omega)$.

PROPRIÉTÉS :

A. 2. 1. Si $a(x, x, \xi) = 0, \forall x \in \Omega$ et $\forall \xi \in (\mathbb{R}^n)^*$, il existe

$$b \in \mathcal{S}_{\rho, \delta}^{m-\rho+\delta}(\Omega \times \Omega, (\mathbb{R}^n)^*) \quad \text{avec} \quad \mathbf{P}_a = \mathbf{P}_b.$$

A. 2. 2. Si $a \in \mathcal{S}_{\rho, \delta}^m$ et $a' \in \mathcal{S}_{\rho, \delta}^{m'}$ alors il existe $b \in \mathcal{S}_{\rho, \delta}^{m+m'-\rho+\delta}$ avec $\mathbf{P}_a \mathbf{P}_{a'} = \mathbf{P}_{aa'} + \mathbf{P}_b$.

A. 2. 3. On a : $\mathbf{P}_{a^*} = (\mathbf{P}_a)^*$ où $a^*(x, x', \xi) = \overline{a(x', x, \xi)}$.

A. 2. 4. Si $\varphi : \Omega \rightarrow \Omega'$ est un difféomorphisme et $a \in \mathcal{S}_{\rho, \delta}^m(\Omega' \times \Omega', (\mathbb{R}^n)^*)$ alors il existe $b \in \mathcal{S}_{\rho, \delta}^{m-\rho+\delta}(\Omega \times \Omega, (\mathbb{R}^n)^*)$ avec $\varphi^* \mathbf{P}_a (\varphi^*)^{-1} = \mathbf{P}_a + \mathbf{P}_b$ où $\varphi^* : C^{\infty}(\Omega') \rightarrow C^{\infty}(\Omega)$ est donnée par $\varphi^*(f) = f \circ \varphi$ et $a' \in \mathcal{S}_{\rho, \delta}^m(\Omega \times \Omega, (\mathbb{R}^n)^*)$ est donnée par $a'(x, x', \xi) = a(\varphi(x), \varphi(x'), (d\varphi)_x^{-1}(\xi))$.

A. 2. 5. Si $a \in \mathcal{S}_{\rho, \delta}^0(\Omega \times \Omega, (\mathbb{R}^n)^*)$ alors \mathbf{P}_a est continu de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$. Si la classe de a dans $\Sigma_{0, \rho}(\Omega \times \Omega, (\mathbb{R}^n)^*)$ est nulle alors $\mathbf{P}_a \in \mathcal{L}(L^2(\Omega))$ est compact. En particulier si $a \in \mathcal{S}_{\rho, \delta}^m, m < 0$, alors \mathbf{P}_a est compact.

A. 2. 6. Soit $\pi : \mathcal{S}_{\rho, \delta}^0(\Omega \times \Omega, (\mathbb{R}^n)^*) \rightarrow \Sigma_{0, \rho}(\Omega, (\mathbb{R}^n)^*)$ donnée par $\pi(a) = (\text{classe de } \Delta(a))$, où $(\Delta(a) \in \mathcal{S}_{\rho, \delta}^0(\Omega, \mathbb{R}^n))$ est donnée par $\Delta(a)(x, \xi) = a(x, x, \xi)$. On obtient, combinant A. 2. 1 et A. 2. 5 que si $\pi(a) = 0$ alors $\mathbf{P}_a \in \mathcal{K}(L^2(\Omega))$. La réciproque est aussi vraie et on a, pour tout $a \in \mathcal{S}_{\rho, \delta}^0(\Omega \times \Omega, (\mathbb{R}^n)^*) \parallel \mathbf{P}_a \parallel = \parallel \pi(a) \parallel$ où q est la projection de $\mathcal{L}(L^2(\Omega))$ dans l'algèbre de Calkin $\mathcal{L}(L^2(\Omega))/\mathcal{K}(L^2(\Omega))$.

A. 2. 7. Soit $\Psi_{0, \rho}^*(\Omega)$ l'adhérence dans $\mathcal{L}(L^2(\Omega))$ de l'algèbre (A. 2. 2) involutive (A. 2. 3) des opérateurs de la forme $\mathbf{P}_a, a \in \mathcal{S}_{\rho, \delta}^0(\Omega \times \Omega, (\mathbb{R}^n)^*)$ ($1/2 < \rho \leq 1, \delta = 1 - \rho$) $\Psi_{0, \rho}^*(\Omega)$ contient les opérateurs régularisants, donc les compacts. On a par A. 2. 6 la

suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{K}(L^2(\Omega)) \rightarrow \Psi_{0,\rho}^*(\Omega) \xrightarrow{\sigma} \Sigma_{0,\rho}(\Omega, (\mathbb{R}^n)^*) \rightarrow 0$$

où $\sigma(P_a) = \pi(a)$.

On renvoie à [25] pour la preuve de toutes les assertions ci-dessus. Nous ferons d'ailleurs la preuve de certaines de ces assertions dans le cas, plus général, des familles d'opérateurs pseudodifférentiels.

A.3. La suite exacte des opérateurs pseudodifférentiels sur une variété

L'invariance de l'algèbre des opérateurs pseudodifférentiels et de l'application σ par les difféomorphismes de \mathbb{R}^n (propriété A.2.4) permet de définir les opérateurs pseudodifférentiels sur la variété V de classe C^∞ : ce sont les opérateurs de la forme $\sum_{j=1}^m P_j + k$ où les P_j sont des opérateurs de la forme P_a dans une carte et $k \in C_c^\infty(V \times V)$ est régularisant. On a la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{K}(L^2(V)) \rightarrow \Psi_{0,\rho}^*(V) \xrightarrow{\sigma} \Sigma_{0,\rho}(V, T^*V) \rightarrow 0$$

On définit aussi (si V n'est pas compacte)

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_V(L^2(V)) &= \{ T \in \mathcal{L}(L^2(V)) \mid \varphi T \in \mathcal{K}(L^2(V)), T \varphi \in \mathcal{K}(L^2(V)), \forall \varphi \in C_0(V) \} \\ \Psi_\rho^*(V) &= \{ T \in \mathcal{L}(L^2(V)) \mid \varphi T \in \Psi_{0,\rho}^*(V), T \varphi \in \Psi_{0,\rho}^*(V), \forall \varphi \in C_0(V) \}. \end{aligned}$$

On a la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{K}_V(L^2(V)) \rightarrow \Psi_\rho^*(V) \xrightarrow{\sigma} \Sigma_\rho(V, T^*V) \rightarrow 0.$$

Si E est un fibré hermitien de classe C^∞ sur V , on peut définir les opérateurs pseudodifférentiels agissant dans E et les algèbres $\Psi_{0,\rho}^*(V; \mathcal{L}(E))$ et $\Psi_\rho^*(V; \mathcal{L}(E))$.

On a alors les suites exactes

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathcal{K}(L^2(V; E)) \rightarrow \Psi_{0,\rho}^*(V; \mathcal{L}(E)) \rightarrow \Sigma_{0,\rho}(V, T^*V; \mathcal{L}(E)) \rightarrow 0 \\ 0 \rightarrow \mathcal{K}(L^2(V; E)) \rightarrow \Psi_\rho^*(V; \mathcal{L}(E)) \rightarrow \Sigma_\rho(V, T^*V; \mathcal{L}(E)) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

A.4. Familles d'opérateurs pseudodifférentiels ([27], [3]-IV, [7], [11])

Soit Y une variété de classe C^∞ , peut être à bord, et soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n \times Y$. Posons

$$\Omega^{(2)} = \{ (x, x', y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times Y \mid (x, y) \in \Omega, (x', y) \in \Omega \}$$

Soit $a \in \mathcal{S}_{\rho, \delta}^m(\Omega^{(2)}, (\mathbb{R}^n)^*)$. La formule

$$(P_a f)(x, y) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \iint e^{i\langle x-x', \xi \rangle} a(x, x', y, \xi) f(x', y) dx' d\xi$$

définit un opérateur $P_a: C^\infty(\Omega) \rightarrow C_c^\infty(\Omega)$.

On a les propriétés suivantes :

A. 4. 1. Si $a(x, x, y, \xi) = 0, \forall (x, y) \in \Omega$ et $\forall \xi \in (\mathbb{R}^n)^*$ alors il existe $b \in \mathcal{S}_{\rho, \delta}^{m-\rho+\delta}(\Omega^{(2)}, (\mathbb{R}^n)^*)$ avec $P_a = P_b$.

A. 4. 2. Si $a \in \mathcal{S}_{\rho, \delta}^m$ et $a' \in \mathcal{S}_{\rho, \delta}^{m'}$, il existe $b \in \mathcal{S}_{\rho, \delta}^{m+m'-\rho+\delta}$ avec $P_a P_{a'} = P_{aa'} + P_b$.

A. 4. 3. On a $P_{a^*} = (P_a)^*$ où $a^*(x, x', y, \xi) = \overline{a(x', x, y, \xi)}$.

A. 4. 4. Si $\varphi: \Omega \rightarrow \Omega'$ est un difféomorphisme de la forme $\varphi(x, y) = (f(x, y), g(y))$ et si $a \in \mathcal{S}_{\rho, \delta}^m(\Omega^{(2)}, (\mathbb{R}^n)^*)$ alors il existe $b \in \mathcal{S}_{\rho, \delta}^{m-\rho+\delta}(\Omega'^{(2)}, (\mathbb{R}^n)^*)$ avec

$$\varphi^* P_a (\varphi^*)^{-1} = P_{a^\varphi} + P_b$$

où

$$a^\varphi(x, x', y, \xi) = a(f(x, y), f(x', y), g(y), {}^t(d_x f)^{-1}(x, y)(\xi)).$$

A. 4. 5. Sur $C_c^\infty(\Omega)$ on définit le produit scalaire à valeurs dans $C_0(Y)$ donné par $\langle f, g \rangle(y) = \int \overline{f(x, y)} g(x, y) dx$. Soit $\mathcal{E}(\Omega, \mathbb{R}^n) = \mathcal{E}$ le C^* -module Hilbertien sur $C_0(Y)$ complété de $C_c^\infty(\Omega)$ pour ce produit scalaire.

Si $a \in \mathcal{S}_{\rho, \delta}^0(\Omega^{(2)}, (\mathbb{R}^n)^*)$ alors P_a définit un opérateur sur \mathcal{E} , i. e. $P_a \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$.

En effet P_a^y est un opérateur borné de $L^2(\Omega_x)$ dans $L^2(\Omega_y)$ (par A. 2. 5 on a posé $\Omega_y = \{x \in \mathbb{R}^n / (x, y) \in \Omega\}$) et en fait P_a^y est uniformément borné. On a $P_a(C_c^\infty(\Omega)) \subseteq C_c^\infty(\Omega)$ donc $P_a(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{E}$. On utilise alors A. 4. 3.

A. 4. 6. LEMME. — Si $a \in \mathcal{S}_{\rho, \delta}^m(\Omega^{(2)}, (\mathbb{R}^n)^*)$ avec $m < 0$ alors $P_a \in \mathcal{K}(\mathcal{E})$.

Preuve. — Si $m < -n$ on peut dans la formule donnant P_a intégrer d'abord par rapport à ξ et obtenir $(P_a f)(x, y) = \int k(x, x', y) f(x') dx'$ où k est continu et à support compact et définit donc une famille continue d'opérateurs de Hilbert Schmidt et donc $P_a \in \mathcal{K}(\mathcal{E})$.

Dans le cas général on a $(P_a^* P_a)^N = P_b$ où $b \in \mathcal{S}_{\rho, \delta}^{2Nm}(\Omega^{(2)}, (\mathbb{R}^n)^*)$. On choisit alors N avec $2Nm < -n$. ■

Soit K un compact de Ω et soit $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que $\|\chi\|_2 = 1$ et pour tout $(x, y) \in K$ et $\lambda \in \mathbb{R} \lambda \geq 1$, le support de la fonction $x' \rightarrow \chi(\lambda(x-x'))$ soit inclus dans $\Omega_y = \{x' / (x', y) \in \Omega\}$.

Pour $(x, y, \xi) \in K \times (\mathbb{R}^n)^*$ posons $\eta_{x, y, \xi}(x') = e^{i\langle x-x', \xi \rangle} (\|\xi\| + 1)^{n/4} \chi((\|\xi\| + 1)^{1/2}(x-x'))$. Alors $\eta_{x, y, \xi} \in L^2(\Omega_y)$ et $\|\eta_{x, y, \xi}\|_2 = 1$.

A. 4. 7. LEMME. — 1. Si $k \in \mathcal{K}(\mathcal{E})$ alors la fonction $(x, y, \xi) \rightarrow \langle \eta_{x, y, \xi}, k_y \eta_{x, y, \xi} \rangle$ appartient à $C_0(K \times (\mathbb{R}^n)^*)$.

2. Si $a \in \mathcal{S}_{\rho, \delta}^0(\Omega^{(2)}, (\mathbb{R}^n)^*)$, posons

$$b(x, y, \xi) = \langle \eta_{x, y, \xi}, (P_a)_y \eta_{x, y, \xi} \rangle.$$

Alors la fonction $(x, y, \xi) \rightarrow a(x, x, y, \xi) - b(x, y, \xi)$ appartient à $C_0(K \times (\mathbb{R}^n)^*)$.

Preuve. — 1. Il est clair que $\eta_{x, y, \xi} \rightarrow 0$ faiblement quand $\xi \rightarrow \infty$, uniformément sur K . D'où l'assertion pour $k = \theta_{\eta, \eta}$. Le cas général s'en déduit.

2. Soit $a \in \mathcal{S}_{\rho, \delta}^0(\Omega^{(2)}, \mathbb{R}^n)$, et posons

$$a'(x, x', y, \xi) = a(x, x, y, \xi) c(x, x', y)$$

où $c \in C_c^\infty(\Omega^{(2)})$ est égale à 1 dans un voisinage du support de a . Alors $P_a - P_{a'} \in \mathcal{K}(E)$ par A.4.1 et le lemme A.4.6, et donc $b - b' \in C_0(K \times \mathbb{R}^n)$ par la partie 1 (notation évidente). On a, pour $\|\xi\|$ assez grand

$$\begin{aligned} b'(x, y, \xi) &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int e^{i\langle z-u, \xi'-\xi \rangle} a(z, z, y, \xi') \chi((1+\|\xi\|)^{1/2}(x-z)) \\ &\quad \times \chi((1+\|\xi\|)^{1/2}(x-u)) (1+\|\xi\|)^{n/2} du d\xi' dz \\ &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int e^{i\langle z-x, \xi'-\xi \rangle} a(z, z, y, \xi') \overline{\chi((1+\|\xi\|)^{1/2}(x-z))} \hat{\chi}\left(\frac{\xi-\xi'}{(1+\|\xi\|)^{1/2}}\right) d\xi' dz \\ &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int e^{i\langle v, \zeta \rangle} a\left(x + \frac{v}{(\|\xi\|+1)^{1/2}}, x + \frac{v}{(\|\xi\|+1)^{1/2}}, y, \xi + (1+\|\xi\|)^{1/2}\zeta\right) \\ &\quad \times \overline{\chi(v)} \hat{\chi}(\zeta) dv d\zeta. \end{aligned}$$

Mais on a :

$$a(x, x, y, \xi) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int e^{i\langle v, \zeta \rangle} a(x, x, y, \xi) \overline{\chi(v)} \hat{\chi}(\zeta) dv d\zeta.$$

Soit $\varepsilon > 0$ et soit K' un compact de $(\mathbb{R}^n)^*$ tel que

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_{\mathbb{R}^n \times ((\mathbb{R}^n)^* \setminus K')} 2\|a\|_\infty |\chi(v)| |\hat{\chi}(\zeta)| dv d\zeta < \varepsilon/2.$$

Comme $|D_x a| \leq k \|\xi\|^\delta$ et $|D_\xi a| < k' \|\xi\|^{-\rho}$ on a

$$\lim_{\|\xi\| \rightarrow \infty} a\left(x + \frac{v}{(\|\xi\|+1)^{1/2}}, x + \frac{v}{(\|\xi\|+1)^{1/2}}, y, \xi + (1+\|\xi\|)^{1/2}\zeta\right) - a(x, x, y, \xi) = 0$$

uniformément sur $K \times \text{Supp } \chi \times K'$. Et donc pour $\|\xi\|$ suffisamment grand $\|a(x, x, y, \xi) - b'(x, y, \xi)\| < \varepsilon$. ■

Soit $\pi: \mathcal{S}_{\rho, \delta}^0(\Omega^{(2)}, (\mathbb{R}^n)^*) \rightarrow \Sigma_{0, \rho}(\Omega, (\mathbb{R}^n)^*)$ donné par $\pi(a) =$ classe de $\Delta(a)$ où $\Delta(a) \in \mathcal{S}_{\rho, \delta}^0(\Omega, (\mathbb{R}^n)^*)$ est défini par $\Delta(a)(x, y, \xi) = a(x, x, y, \xi)$.

A.4.8. PROPOSITION. — Soit $q: \mathcal{L}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{E})/\mathcal{K}(\mathcal{E})$ la projection.

Alors pour tout $a \in \mathcal{S}_{\rho, \delta}^0(\Omega^{(2)}, \mathbb{R}^n)$ on a $\|\pi(a)\| = \|q(P_a)\|$.

Preuve. — L'inégalité $\|\pi(a)\| \leq \|q(P_a)\|$ résulte du lemme A.4.7.

Pour avoir l'inégalité $\|\pi(a)\| \geq \|q(P_a)\|$, il suffit de prouver que pour $|\lambda| > \|\pi(a)\|$, $\lambda + P_a$ est inversible modulo $\mathcal{K}(\mathcal{E})$, car par A.4.2, A.4.3 et le lemme A.4.6, P_a est essentiellement normal.

Soit $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ avec $\varphi = 1$ sur le support de a i.e.

$$\varphi(x, y) a(x, x', y, \xi) = a(x, x', y, \xi) = a(x, x', y, \xi) \varphi(x', y)$$

pour tout $(x, x', y, \xi) \in \Omega^{(2)} \times (\mathbb{R}^n)^*$. On a $\varphi P_a = P_a \varphi = P_a$ où φ est considéré comme opérateur de multiplication. Il suffit de trouver Q_λ avec $(P_a + \lambda)Q_\lambda - \varphi \in \mathcal{K}(\mathcal{E})$ et $Q_\lambda(P_a + \lambda) - \varphi \in \mathcal{K}(\mathcal{E})$ car alors $Q_\lambda + (1 - \varphi)/\lambda$ est un inverse de $P_a + \lambda$ modulo $\mathcal{K}(\mathcal{E})$.

Pour ξ suffisamment grand $|\lambda + a(x, x', y, \xi)|$ est supérieur à $|\lambda| - \|\pi(a)\|/2$. Soit alors $b'_\lambda \in \mathcal{S}_{\rho, \delta}^0(\Omega, (\mathbb{R}^n)^*)$ tel que la fonction $(x, y, \xi) \rightarrow b'_\lambda(x, y, \xi) (a(x, x', y, \xi) + \lambda) - \varphi(x, y)$ soit à support compact, et soit $b_\lambda \in \mathcal{S}_{\rho, \delta}^0(\Omega^{(2)}, (\mathbb{R}^n)^*)$ avec $b_\lambda(x, x', y, \xi) = b'_\lambda(x, y, \xi)$.

Alors $Q_\lambda = P_{b_\lambda}$ satisfait l'équation ci-dessus par A.4.2, A.4.1 le lemme A.4.6 et le fait que $P_\varphi = \psi$ où $\varphi'(x, x', y, \xi)$ ne dépend pas de ξ et $\psi(x, y) = \varphi'(x, x', y, \xi)$. ■

Soit $\Psi_{0, \rho}^*(\Omega, \mathbb{R}^n)$ l'adhérence dans $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ de l'algèbre des opérateurs de la forme $P_a (a \in \mathcal{S}_{\rho, \delta}^0(\Omega^{(2)}, (\mathbb{R}^n)^*))$. On a un homomorphisme $\sigma: \Psi_{0, \rho}^*(\Omega, \mathbb{R}^n) \rightarrow \Sigma_{0, \rho}(\Omega, (\mathbb{R}^n)^*)$ donné par $\sigma(P_a) = \pi(a)$. La proposition A.4 implique immédiatement :

A.4.9. COROLLAIRE. — L'application σ ainsi définie s'étend par continuité en un \star -homomorphisme.

On a la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{K}(\mathcal{E}) \rightarrow \Psi_{0, \rho}^*(\Omega, \mathbb{R}^n) \rightarrow \Sigma_{0, \rho}(\Omega, (\mathbb{R}^n)^*) \rightarrow 0.$$

Preuve. — D'après A.4.8 la seule chose qui reste à démontrer est que $\mathcal{K}(\mathcal{E}) \subseteq \Psi_{0, \rho}^*(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Si $k \in C_c^\infty(\Omega^{(2)})$ l'opérateur de convolution qu'il définit $(kf(x, y) = \int k(x, x', y) f(x', y) dx')$ est évidemment dans $\Psi_{0, \rho}^*$. Or l'adhérence de $C_c^\infty(\Omega^{(2)})$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ est $\mathcal{K}(\mathcal{E})$. ■

A.4.10. Remarque. — Soit y_p une suite d'éléments de Y avec $d(y_p, y_q) \geq 2^{-p} + 2^{-q}$. Soit $\xi_p \in (\mathbb{R}^n)^*$ avec $\|\xi_p\|^\delta \geq 2^p$ et $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ $\chi(t) = 0$ pour $t \geq 1$ et $\chi(t) = 1$ pour $t \leq 0$. Soit x_p une suite de points de \mathbb{R}^n avec $(x_p, y_p) \in \Omega$.

On pose :

$$a(x, x', y, \xi) = \sum_{p=1}^{+\infty} \chi(\|x - x_p\|^2 + \|x' - x_p\|^2 + d(y, y_p)^2) \|\xi_p\|^{2\delta} \chi(\|\xi - \xi_p\|^2 \|\xi_p\|^{-2\rho})$$

Alors $a \in \mathcal{S}_{\rho, \delta}^0(\Omega^{(2)}, (\mathbb{R}^n)^*)$. Pour tout $y \in Y$ $a_y \in C_c^\infty(\Omega_y \times \Omega_y \times (\mathbb{R}^n)^*)$ donc $(P_a)_y \in \mathcal{K}(L^2(\Omega_y))$ ($\Omega_y = \{x/(x, y) \in \Omega\}$). Cependant $\pi(a) \neq 0$ donc $P_a \notin \mathcal{K}(\mathcal{E})$. Notons qu'un tel phénomène ne se produit pas avec des opérateurs de type $(1, 0)$.

A. 5. Opérateurs pseudodifférentiels longitudinaux sur un feuilletage ([7], [11])

L'invariance de l'algèbre des opérateurs pseudodifférentiels et de l'application σ par les difféomorphismes *distingués* de $\mathbb{R}^n \times Y$ (propriété A. 4. 4), permet de définir les opérateurs pseudodifférentiels longitudinaux sur la variété feuilletée (V, F) de classe C^∞ : ce sont les opérateurs de la forme $\sum_{j=1}^m P_j + k$ où les P_j sont des familles de la forme P_a dans une carte feuilletante et $k \in C_c^\infty(G)$ est régularisant (au sens de [7], § 7). On a la suite exacte :

$$0 \rightarrow C^*(V, F) \rightarrow \Psi_{0, \rho}^*(V, F) \xrightarrow{\sigma} \Sigma_{0, \rho}(V, F^*) \rightarrow 0.$$

Si V n'est pas compacte on définit aussi

$$C_V(V, F) = \{ T \in M(C^*(V, F)) / \varphi T \in C^*(V, F), T \varphi \in C^*(V, F), \forall \varphi \in C_0(V) \}$$

où $M(C^*(V, F))$ est l'algèbre des multiplicateurs de $C^*(V, F)$ – l'algèbre $C_0(V)$ est considérée ici comme sous algèbre de $M(C^*(V, F))$;

$$\Psi_\rho^*(V, F) = \{ T \in M(C^*(V, F)) / \varphi T \in \Psi_{0, \rho}^*(V, F), T \varphi \in \Psi_{0, \rho}^*(V, F), \forall \varphi \in C_0(V) \}.$$

On a la suite exacte (cf. [11], proposition 4. 6) :

$$0 \rightarrow C_V^*(V, F) \rightarrow \Psi_\rho^*(V, F) \rightarrow \Sigma_\rho(V, F^*) \rightarrow 0.$$

Si E est un fibré hermitien de classe C^∞ sur V , on peut définir les opérateurs pseudodifférentiels longitudinaux agissant dans E et les algèbres $C^*(V, F; \mathcal{L}(E))$, $C_V^*(V, F; \mathcal{L}(E))$, $\Psi_{0, \rho}^*(V, F; \mathcal{L}(E))$ et $\Psi_\rho^*(V, F; \mathcal{L}(E))$. On a les suites exactes :

$$0 \rightarrow C^*(V, F; \mathcal{L}(E)) \rightarrow \Psi_{0, \rho}^*(V, F; \mathcal{L}(E)) \rightarrow \Sigma_{0, \rho}(V, F^*; \mathcal{L}(E)) \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow C_V^*(V, F; \mathcal{L}(E)) \rightarrow \Psi_\rho^*(V, F; \mathcal{L}(E)) \rightarrow \Sigma_\rho(V, F^*; \mathcal{L}(E)) \rightarrow 0.$$

A. 6. Familles d'opérateurs pseudodifférentiels et connexions

Posons $\Omega = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times Y$, $\Omega_2 = \mathbb{R}^n \times Y$ et soit $p : \Omega \rightarrow \Omega_2$ la projection. Soient E_1 et E_2 des fibrés hermitiens sur Ω et Ω_2 respectivement. Soit \mathcal{E} (resp. $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$) le C^* -module hilbertien sur $C_0(Y)$ [resp. $C_0(\mathbb{R}^n \times Y), C_0(Y)$] complété de $C_c^\infty(\Omega; E_1 \hat{\otimes} p^* E_2)$ [resp. $C_c^\infty(\Omega; E_1), C_c^\infty(\Omega_2; E_2)$] pour le produit scalaire donné par $\langle f, g \rangle(y) = \int \langle f(x, y), g(x, y) \rangle dx$ où l'intégration est prise sur $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n$) et $y \in Y$ (resp. $y \in \mathbb{R}^n \times Y, y \in Y$).

Notons que $C_0(\mathbb{R}^n \times Y)$ agit sur \mathcal{E}_2 et qu'on a $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \hat{\otimes}_{C_0(\mathbb{R}^n \times Y)} \mathcal{E}_2$. Soit P_2 une famille pseudodifférentielle $P_2 \in \Psi_\rho^*(\Omega_2, \mathbb{R}^n; \mathcal{L}(E_2))$ et $f \in C_0(\mathbb{R}^n \times Y)$. Par A. 4. 9, $[f, P_2] \in \mathcal{K}(\mathcal{E}_2)$. Notre but ici est de trouver quelles familles pseudodifférentielles $P \in \Psi_\rho^*(\Omega, \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n; \mathcal{L}(E_1 \hat{\otimes} E_2))$ sont des P_2 connexions pour \mathcal{E}_1 ([11], définition A. 1).

Rappelons que si $\eta_1 \in \mathcal{E}_1$, $T_{\eta_1} \in \mathcal{L}(\mathcal{E}_2, \mathcal{E})$ est donné par $T_{\eta_1}(\eta_2) = \eta_1 \hat{\otimes} \eta_2$ et $T_{\eta_1}^*(\eta'_1 \hat{\otimes} \eta_2) = \langle \eta_1, \eta'_1 \rangle \eta_2$.

A. 6. 1. LEMME (cf. [11] lemma 1. 7). — Soit $P \in \Psi_p^*(\Omega, \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n; \mathcal{L}(E_1 \hat{\otimes} p^* E_2))$ et $\eta_1, \eta'_1 \in \mathcal{E}_1$. Posons $P_2 = T_{\eta_1}^* P T_{\eta_1}$. Alors $P_2 \in \Psi_{0,p}^*(\Omega_2, \mathbb{R}^n; \mathcal{L}(E_2))$ et si $\sigma(P)$ est la classe modulo $C_\Omega(\Omega \times (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)^*; \mathcal{L}(E_1 \hat{\otimes} p^* E_2))$ de $a \in C_b(\Omega \times (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)^*; \mathcal{L}(E_1 \hat{\otimes} p^* E_2))$ alors $\sigma(P_2)$ est la classe modulo $C_{\Omega_2}(\Omega_2 \times (\mathbb{R}^n)^*; \mathcal{L}(E_2))$ de a_2 donné par

$$a_2(x_2, y, \xi_2) = \int_{\mathbb{R}^m} \langle \eta_1(x_1, x_2, y), a(x_1, x_2, y, 0, \xi_2) \eta'_1(x_1, x_2, y) \rangle dx_1.$$

Preuve. — Par un argument de densité on peut supposer que η_1 et $\eta'_1 \in C_c^\infty(\Omega; E_1)$, et donc que $\eta'_1 = f \eta_1$ où $f \in C_c^\infty(\Omega)$. Comme $PT_{\eta_1} = PfT_{\eta_1}$, on peut donc supposer que $P \in \Psi_{0,p}^*(\Omega, \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n; \mathcal{L}(E_1 \hat{\otimes} p^* E_2))$ et, par un argument de densité, que $P = P_b$ pour $b \in \mathcal{S}_{p,\delta}^0((\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)^2 \times Y, (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)^*; \mathcal{L}(E_1 \hat{\otimes} p^* E_2))$. On a alors

$$P_2(f)(x_2, y) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int e^{i \langle x_2 - x'_2, \xi_2 \rangle} b'(x_2, x'_2, y, \xi_2) f(x'_2, y) dx'_2 d\xi_2$$

où

$$b'(x_2, x'_2, y, \xi_2) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^m \int e^{i \langle x_1 - x'_1, \xi_1 \rangle} \times \langle \eta_1(x_1, x_2, y), b(x_1, x_2, x'_1, x'_2, y, \xi_1, \xi_2) \eta'_1(x'_1, x'_2, y) \rangle dx'_1 d\xi_1 dx_1$$

Si on remplace $b(x_1, x_2, x'_1, x'_2, y, \xi_1, \xi_2)$ par $\chi(x'_1) b(x_1, x_2, x_1, x'_2, y, \xi_1, \xi_2)$ où $\chi = 1$ sur le support de b et de η'_1 , on ne change P (et donc P_2) que par un opérateur compact. On peut donc supposer que b ne dépend pas de x'_1 . On a alors

$$b'(x_2, x'_2, y, \xi_2) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^m \int e^{i \langle x_1, \xi_1 \rangle} \times \langle \eta_1(x_1, x_2, y), b(x_1, x_2, x'_2, y, \xi_1, \xi_2) (\eta'_1)_{x'_1}^\wedge(\xi_1, x'_2, y) \rangle d\xi_1 dx_1$$

où $(\eta'_1)_{x'_1}^\wedge$ désigne la transformée de Fourier de η'_1 par rapport à x'_1 .

Par dérivation sous le signe \int , il est clair que $b' \in \mathcal{S}_{p,\delta}^0(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times Y, (\mathbb{R}^n)^*; \mathcal{L}(E_2))$.

Donc $P_2 = P_b \in \Psi_0^*$.

Posons

$$\begin{aligned} b''(x_2, x'_2, y, \xi_2) &= \int \langle \eta_1(x_1, x_2, y), b(x_1, x_2, x'_2, y, 0, \xi_2) \eta'_1(x_1, x_2, y) \rangle dx_1 \\ &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^m \int e^{i \langle x_1, \xi_1 \rangle} \langle \eta_1(x_1, x_2, y), b(x_1, x_2, x'_2, y, 0, \xi_2) \\ &\quad (\eta'_1)_{x'_1}^\wedge(\xi_1, x_2, y) \rangle d\xi_1 dx_1 \end{aligned}$$

On a

$$(b' - b'')(x_2, x'_2, y, \xi_2) = \int e^{i \langle x_1, \xi_1 \rangle} \times \langle \eta_1(x_1, x_2, y), \int_0^1 \langle (d_{\xi_1} b)(x_1, x_2, x'_2, y, t \xi_1, \xi_2), \xi_1 \rangle dt (\eta'_1)_{x_1}^\wedge(\xi_1, x_2, y) \rangle d\xi_1 dx_1$$

Mais $\|(d_{\xi_1} b)(x_1, x_2, x'_2, y, t \xi_1, \xi_2)\| < k(1 + \|\xi_2\|)^{-p}$, et donc $\lim_{\xi_2 \rightarrow \infty} \|b' - b''\| = 0$. On en

déduit que $\sigma(P_2)$ est la classe modulo $C_{\Omega_2}(\Omega_2 \times (\mathbb{R}^n)^*; \mathcal{L}(E_2))$ de la restriction de b'' à la diagonale c'est-à-dire du a_2 de l'énoncé. ■

De ce lemme on déduit immédiatement :

A. 6.2. PROPOSITION. — (a) Si $P \in \Psi_p^*(\Omega, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m; \mathcal{L}(E_1 \hat{\otimes} p^* E_2))$ vérifie $\sigma_P(x_1, x_2, y, 0, \xi_2) = 0$ alors P est une zéro connexion i.e. pour tout $T \in \mathcal{K}(\mathcal{E}_1)$, $(T \otimes 1)P \in \mathcal{K}(\mathcal{E})$ et $P(T \otimes 1) \in \mathcal{K}(\mathcal{E})$.

(b) Soit $P \in \Psi_p^*(\Omega, \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n; \mathcal{L}(E_1, \hat{\otimes} p^* E_2))$ et soit $a \in C_b(\Omega \times (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)^*; \mathcal{L}(E_1 \hat{\otimes} p^* E_2))$ dont la classe modulo C_Ω soit $\sigma(P)$; s'il existe $a_2 \in C_b(\Omega_2 \times (\mathbb{R}^n)^*; \mathcal{L}(E_2))$ tel que $a(x_1, x_2, y, 0, \xi_2) - 1_{E_1} \hat{\otimes} a_2(x_2, y, \xi_2) \in C_\Omega(\Omega \times (\mathbb{R}^n)^*; \mathcal{L}(E_1 \hat{\otimes} p^* E_2))$ alors P est une P_2 connexion où $P_2 \in \Psi_p^*(\Omega_2, \mathbb{R}^n; \mathcal{L}(E_2))$ satisfait $\sigma(P_2) =$ classe modulo C_{Ω_2} de a_2 .

En particulier, pour tout $T \in \mathcal{K}(E_1)$, $[T \otimes 1, P] \in \mathcal{K}(\mathcal{E})$.

Preuve. — Résulte du lemme A. 6.1 et de [11] (remarque A. 6.4 et proposition A. 2). ■

A. 7. Opérateurs pseudodifférentiels transverses et bimodules de Kasparov

Soit V une variété et F_1 et F_2 deux sous-fibrés intégrables de TV avec $F_1 \subseteq F_2$. Appelons G_1, G_2 les groupoïdes d'holonomie des feuilletages (V, F_1) et (V, F_2) . Notons qu'on a un homomorphisme naturel $h: G_1 \rightarrow G_2$, qui est une immersion de classe C^∞ . Nous allons définir les opérateurs pseudodifférentiels longitudinaux pour F_2 et transverses pour F_1 .

Soit E un fibré hermitien sur V et supposons que G_1 agit dans E par isométries.

Soit $\mathcal{E} = \mathcal{E}(V, F_2; E)$ le C^* -module hilbertien sur $C^*(V, F_2)$, complété de $C_c^\infty(G_2; r^* E \otimes \Omega^{1/2})$ par rapport au produit scalaire [à valeurs dans $C_c^\infty(G_2; \Omega^{1/2})$]

$$\langle f, f' \rangle = \int_{s(\gamma_1) = r(\gamma), \gamma_1 \in G_2} \langle f(\gamma_1), f'(\gamma_1 \gamma) \rangle$$

(on utilise des demies densités pour définir cette intégrale).

L'algèbre $C^*(V, F_1)$ ⁽⁶⁾ agit sur \mathcal{E} grâce à l'action de G_1 sur E : si $f \in C_c^\infty(G_1; \Omega^{1/2})$, $g \in C_c^\infty(G_2; r^*E \otimes \Omega^{1/2})$ alors

$$f \cdot g(\gamma) = \int_{r(\gamma_1)=r(\gamma), \gamma_1 \in G_1} f(\gamma_1) [\gamma_1 \cdot g(h(\gamma_1^{-1})\gamma)]$$

(voir le début du paragraphe IV pour une discussion des demi-densités utilisées ici).

A. 7. 1. DÉFINITION. — Soit $P \in \Psi_\rho^*(V, F_2; \mathcal{L}(E))$. Le symbole transverse $\sigma_{F_1^\dagger}(P) \in \Sigma_\rho(V, (F_2/F_1)^*; \mathcal{L}(E))$ est la restriction de $\sigma(P)$ à $F_1^\dagger = (F_2/F_1)^* (\cong F_2^*)$.

Soit $\sigma \in \Sigma_\rho(V, (F_2/F_1)^*; \mathcal{L}(E))$, et soit $a \in C_b((F_2/F_1)^*; \mathcal{L}(E))$ de classe σ . Alors $r^*(\sigma) \in \Sigma_\rho(G_1, r^*(F_2/F_1)^*; \mathcal{L}(r^*E))$ et $s^*(\sigma) \in \Sigma_\rho(G_1, s^*(F_2/F_1)^*; \mathcal{L}(s^*E))$ sont les classes de $r^*(a)$ et $s^*(a)$ (où $(r^*(a))(\gamma, \xi) = a(r(\gamma), \xi)$).

Soit $\sigma \in \Sigma_\rho(G_1, s^*(F_2/F_1)^*; \mathcal{L}(s^*E))$ et soit $a \in C_b(s^*(F_2/F_1)^*; \mathcal{L}(s^*E))$ de classe σ . On note $\tilde{\sigma} \in \Sigma_\rho(G_1, r^*(F_2/F_1)^*; \mathcal{L}(r^*E))$ la classe de \tilde{a} donné par $\tilde{a}(\gamma, \xi)(\eta) = \gamma \cdot a(\gamma, \gamma^{-1}\xi)(\gamma^{-1} \cdot \eta)$ où $\gamma \in G_1$, $\xi \in (F_2/F_1)^*_{r(\gamma)}$, $\eta \in E_{r(\gamma)}$ (on utilise l'action de G_1 dans $(F_2/F_1)^*$, provenant de l'action de G_1 dans TV/F_1 laissant F_2/F_1 invariant).

A. 7. 2. DÉFINITION. — L'opérateur $P \in \Psi_\rho^*(V, F_2; \mathcal{L}(E))$ est dit transverse si son symbole transverse est G_1 invariant i. e. si $r^*(\sigma_{F_1^\dagger}(P)) = s^*(\sigma_{F_1^\dagger}(P)) \tilde{}$.

Utilisant la proposition A. 6. 2 on obtient :

A. 7. 3. PROPOSITION. — Soit $P \in \Psi_\rho^*(V, F_2; \mathcal{L}(E))$.

(a) Si le symbole transverse de P est nul alors pour tout $T \in C^*(V, F_1)$, $PT \in \mathcal{K}(\mathcal{E})$ et $TP \in \mathcal{K}(\mathcal{E})$.

(b) Si P est transverse, alors pour tout $T \in C^*(V, F_1)$, $[P, T] \in \mathcal{K}(\mathcal{E})$.

Preuve. — Comme $C^*(V, F_1)$ est engendrée par les $C^*(\Omega, F_1)$ où Ω est un ouvert trivialisant (cf. par exemple [15], lemme 1. 8) il suffit de supposer que $T \in C^*(\Omega, F_1)$ où Ω est un ouvert trivialisant pour (F_1, F_2) , i. e. $\Omega \approx \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times Y$, où $F_1 = \mathbb{R}^m \times \{0\} \times \{0\}$ et $F_2 = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times \{0\}$ (comme sous-espaces du fibré tangent). Utilisant l'action de $G_1(\Omega)$ dans E on identifie E à p^*E_2 où $p : \Omega \rightarrow \Omega_2 = \mathbb{R}^n \times Y$ est la projection et $E_2 = j^*E$ où $j : \Omega_2 \rightarrow \Omega$ est une section de p de classe C^∞ (par exemple la section nulle); l'action de $G_1(\Omega)$ dans p^*E_2 est alors triviale. On peut de plus supposer que le support de T est compact dans Ω .

Soit $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ avec $\varphi T = T \varphi = T$. Écrivons

$$P = (1 - \varphi) P (1 - \varphi) + P \varphi (2 - \varphi) + [\varphi, P] (1 - \varphi) = (1 - \varphi) P (1 - \varphi) + (P' + K_1) + K_2$$

où $K_1, K_2 \in \mathcal{K}(\mathcal{E})$ et $P' \in \Psi_0^*(\Omega, F_2; \mathcal{L}(E))$ est tel que $\sigma_{P'} = \varphi(2 - \varphi)\sigma_P$. Alors $(T \hat{\otimes} 1)(1 - \varphi) P (1 - \varphi) = (1 - \varphi) P (1 - \varphi) T \hat{\otimes} 1 = 0$ et on conclut grâce à la proposition A. 6. 2.

■

⁽⁶⁾ Rappelons que dans tout le papier $C^*(V, F)$ désigne la C^* -algèbre « max » de (V, F) ; notons qu'en général l'action de $C^*(V, F_1)$ dans $\mathcal{E}_{red}(V, F_2; E)$ ne passe pas au quotient $C_{red}^*(V, F_1)$ (prendre par exemple $F_2 = TV$).

La proposition A. 7. 3 permet de construire des bimodules de Kasparov :

A. 7. 4. DÉFINITION. — Soit (V, F_1, F_2) une variété doublement feuilletée avec $F_1 \subset F_2$. On appelle symbole transversalement elliptique de type ρ une paire (E, σ) où

(a) E est un G_1 fibré hermitien $\mathbb{Z}/2$ gradué sur V , i. e. un fibré hermitien sur V muni d'une action isométrique de G_1 préservant le degré;

(b) $\sigma \in \Sigma_\rho(V, (F_2/F_1)^*; \mathcal{L}(E))$ est G_1 -invariant, de degré 1 et $\sigma^2 = 1$.

Il résulte immédiatement de la proposition A. 7. 3 :

A. 7. 5. THÉORÈME. — Soit (V, F_1, F_2) une variété doublement feuilletée avec $F_1 \subseteq F_2$.

(a) Si (E, σ) est un symbole transversalement elliptique de type ρ et si $D \in \Psi_\rho^*(V, F_2; \mathcal{L}(E))$ est tel que $\sigma_{F_1^\dagger}(D) = \sigma$ alors $(\mathcal{E}(V, F_2; E), D)$ est un $C^*(V, F_1), C^*(V, F_2)$ bimodule de Kasparov.

(b) La classe de (\mathcal{E}, D) dans $KK(C^*(V, F_1); C^*(V, F_2))$ ne dépend que de (E, σ) et est invariante par homotopie. Notons $\Psi(E, \sigma)$ cette classe.

Une homotopie ici signifie une paire (E, σ) où E est un $G_1 \times [0, 1]$ fibré hermitien $\mathbb{Z}/2$ -gradué sur $V \times [0, 1]$ et $\sigma \in \Sigma_\rho(V \times [0, 1], p^*(F_2/F_1)^*; \mathcal{L}(E))$ est $G_1 \times [0, 1]$ invariant, de degré 1 et $\sigma^2 = 1$ où $p : V \times [0, 1] \rightarrow V$ est la projection.

Preuve. — Résulte immédiatement de la proposition A. 7. 3. L'invariance par homotopie résulte de la surjectivité de l'application

$$\sigma_{F_1^\dagger} : \Psi_\rho^*(V \times [0, 1], F_2; \mathcal{L}(E)) \rightarrow \Sigma_\rho(V \times [0, 1], (F_2/F_1)^*; \mathcal{L}(E)). \blacksquare$$

A. 7. 6. Remarque. — Soit (V, F_1, F_2) une variété doublement feuilletée et soit $f : W \rightarrow V/F_1$ une submersion. Soient $F'_1 = f^{-1}(F_1)$ et $F'_2 = f^{-1}(F_2)$ les feuilletages de W ramenés en arrière par f .

Soit (E, σ) un symbole transversalement elliptique pour (V, F_1, F_2) . Alors le fibré $f^* E$ est bien défini et est un G'_1 fibré sur W [où G'_1 désigne le graphe de (W, F'_1)]. Comme σ est G_1 invariant on peut aussi définir le symbole $f^*(\sigma)$:

Soit W_i un recouvrement ouvert de W et $f_i : W_i \rightarrow V$ des applications définissant f .

Soit φ_i une partition de l'unité subordonnée à W_i et posons $f^*(\sigma) = \sum_i \varphi_i f_i^*(\sigma)$. Comme

$f_i^*(\sigma) = f_j^*(\sigma)$ sur $W_i \cap W_j$, $f^*(\sigma)$ ne dépend pas des φ_i .

Évidemment $(f^* E, f^*(\sigma))$ est un symbole transversalement elliptique pour (W, F'_1, F'_2) . [Remarquons que $f^*(F_2/F_1)$ s'identifie naturellement à F'_2/F'_1 .]

Notons $\mathcal{E}_j (j=1, 2)$ les $C^*(W, F'_j), C^*(V, F_j)$ bimodules induits par f (cf. [11], §IV). Comme $C^*(W, F'_j)$ agit dans \mathcal{E}_j par opérateurs compacts ([11], proposition 4. 3) \mathcal{E}_j définit un élément $[\mathcal{E}_j]$ de $KK(C^*(W, F'_j); C^*(V, F_j))$. Il est alors facile de voir qu'on a :

$$\psi(f^* E, f^*(\sigma)) \otimes [\mathcal{E}_2] = [\mathcal{E}_1] \otimes \psi(E, \sigma)$$

[i. e. que si D' est tel $\sigma_{F'_1 \perp}(D') = f^*(\sigma)$ alors $D' \otimes 1_{\mathcal{E}_2}$ est une \mathcal{E}_1 connexion pour D où D vérifie $\sigma_{F_1 \perp}(D) = \sigma$, ce qui résulte de la proposition A. 7. 3].

Nous calculons maintenant le produit de Kasparov de deux opérateurs pseudodifférentiels transverses.

A. 8. Opérateurs pseudodifférentiels transverses et connexions

Soit (V, F_1, F_2) une variété doublement feuilletée avec $F_1 \subseteq F_2$. Soient E_1, E_2 deux fibrés hermitiens sur V et supposons que G_1 agit sur E_2 par isométries.

Soit $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}(V, F_1; E_1)$ le C^* -module hilbertien sur $C^*(V, F_1)$ complété de $C_c^\infty(G_1; r^*E_1 \otimes \Omega^{1/2})$, et $\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}(V, F_2; E_2)$.

Posons $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \hat{\otimes}_{C^*(V, F_1)} \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}(V, F_2; E_1 \hat{\otimes} E_2)$ [\mathcal{E}_2 et \mathcal{E} sont des C^* -modules hilbertiens sur $C^*(V, F_2)$].

Soit $P \in \Psi_\rho^*(V, F_2; \mathcal{L}(E_2))$ un opérateur transverse. Par la proposition A. 7. 3, pour tout $T \in C^*(V, F_1)$, $[P, T] \in \mathcal{H}(\mathcal{E}_2)$. Notre but est de trouver des P -connexions pour \mathcal{E}_1 .

A. 8. PROPOSITION. — Soit $P \in \Psi_\rho^*(V, F_2; \mathcal{L}(E_2))$ un opérateur transverse et $\tilde{P} \in \Psi_\rho^*(V, F_2; \mathcal{L}(E_1 \hat{\otimes} E_2))$ tel que $\sigma_{F_1^\dagger}(\tilde{P}) = 1_{E_1} \hat{\otimes} \sigma_{F_1^\dagger}(P) \in \Sigma_\rho(V, (F_2/F_1)^*; \mathcal{L}(E_1 \hat{\otimes} E_2))$. Alors \tilde{P} est une P connexion pour \mathcal{E}_1 .

Preuve. — Il résulte directement de la proposition A. 6. 2 que si $\sigma_{F_1}(\tilde{P}) = 0$ alors \tilde{P} est une zéro-connexion (voir la preuve de A. 7. 3). Il suffit donc de prouver qu'il existe $\tilde{P}_0 \in \Psi_\rho^*(V, F_2; \mathcal{L}(E_1 \hat{\otimes} E_2))$ avec $\sigma_{F_1^\dagger}(\tilde{P}_0) = 1_{E_1} \hat{\otimes} \sigma_{F_1}(P)$ et \tilde{P}_0 est une P connexion (cf. [11], proposition A. 2. b).

Si E_1 est le fibré trivial \mathbb{C}^n , il suffit de prendre

$$\tilde{P}_0 = 1_n \hat{\otimes} P \in M_n(\mathbb{C}) \hat{\otimes} \Psi_\rho^*(V, F_2; \mathcal{L}(E_2)) = \Psi_\rho^*(V, F_2; \mathcal{L}(E_1 \hat{\otimes} E_2))$$

qui est une connexion par [11] (preuve de proposition A. 2. a).

Si E_1 n'est pas trivial, on écrit $E_1 = p \mathbb{C}^n$ où $p \in C^\infty(V; M_n(\mathbb{C}))$ et $p(x)$ est projecteur pour tout $x \in V$. On pose alors $\tilde{P}_0 = p(1_n \hat{\otimes} P)p$ qui est une P connexion par [11] (preuve de proposition A. 2. a), et est pseudodifférentiel avec le bon symbole car p est pseudodifférentiel de symbole p . ■

A. 9. Le produit d'une zéro connexion par un (pseudodifférentiel) $\hat{\otimes} 1$

Soit (V, F_1, F_2) une variété doublement feuilletée avec $F_1 \subset F_2$. Soient E_1, E_2 deux fibrés hermitiens sur V et supposons que G_1 agit sur E_2 par isométries. On pose encore

$$\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}(V, F_1; E_1), \quad \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}(V, F_2; E_2), \quad \mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \hat{\otimes}_{C^*(V, F_2)} \mathcal{E}_2.$$

Soit

$$P \in \Psi_\rho^*(V, F_1; \mathcal{L}(E_1)), \quad Q \in \Psi_\rho^*(V, F_2; \mathcal{L}(E_1 \hat{\otimes} E_2))$$

avec $\sigma_{F_1^\dagger}(Q) = 0$. Nous montrons ici que $(P \hat{\otimes} 1)Q \in \Psi_{\rho\rho'}^*(V, F_2; \mathcal{L}(E_1 \hat{\otimes} E_2))$ et que $\sigma((P \hat{\otimes} 1)Q) = (\sigma(P) \hat{\otimes} 1)\sigma(Q)$. Commençons par donner un sens à cette formule :

A. 9. 1. LEMME. — (a) Si $a \in C_0(F_1^*; \mathcal{L}(E_1))$ et $b \in \mathcal{S}_{\rho', \delta'}^0(V, F_2^*; \mathcal{L}(E_1 \hat{\otimes} E_2))$ est tel que $b|_{F_1^\dagger} \in C_0((F_2/F_1)^*; \mathcal{L}(E_1 \hat{\otimes} E_2))$ alors $((a \circ p) \hat{\otimes} 1_{E_2})b \in C_0(F_2^*; \mathcal{L}(E_1 \hat{\otimes} E_2))$ où $p : F_2^* \rightarrow F_1^*$ est la transposée de l'inclusion $F_1 \rightarrow F_2$.

(b) Si $a \in \mathcal{S}_{\rho, \delta}^0(V, F_1^*; \mathcal{L}(E_1))$ et b est comme ci-dessus alors $((a \circ p) \hat{\otimes} 1_{E_2})b \in \mathcal{S}_{\rho\rho', \delta''}^0(V, F_2^*; \mathcal{L}(E_1 \hat{\otimes} E_2))$ où $\rho'' = \rho\rho'$ $\delta'' = 1 - \rho''$.

(Rappelons que $\mathcal{S}_{\rho, \delta}^0$ désigne l'adhérence pour la norme $\| \cdot \|_{\infty}$.)

Preuve. — (a) Fixons une norme euclidienne sur F_2 , et soit $s : F_1^* \rightarrow F_2^*$ la section associée.

Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que pour $\xi_1 \in F_1^*$, $\|\xi_1\| \geq M$ on ait $\|a(x, \xi_1)\| \leq \varepsilon / \|b\|_{\infty}$.

Soit

$$K = \sup_{\xi_2 \in F_2^*} \|\xi_2\|^{\rho'} \|D_{\xi} b(x, \xi_2)\|$$

($K < +\infty$ par définition de $\mathcal{S}_{\rho', \delta}^0$). Pour $\xi_1 \in F_1^*$, $\|\xi_1\| \leq M$ et $\xi_2 \in F_1^{\perp} = (F_2/F_1)^*$ on a :

$$\|b(x, s(\xi_1) + \xi_2)\| \leq \|b(x, \xi_2)\| + \frac{KM}{\|\xi_2\|^{\rho'}}$$

et donc il existe M' tel que pour

$$\|\xi_2\| \geq M' \quad \text{et} \quad \|\xi_1\| \leq M, \quad \|b(x, s(\xi_1) + \xi_2)\| < \frac{\varepsilon}{\|a\|_{\infty}}.$$

Donc pour $\xi \in F_2^*$, $\|\xi\|^2 \geq M^2 + M'^2$, on a $\|(a(x, p(\xi)) \hat{\otimes} 1_{E_2}) b(x, \xi)\| < \varepsilon$.

(b) Comme a et b sont à support compact dans V on peut supposer que V est compacte.

Soit $h \in \mathcal{S}_{\rho', \delta}^0(V, F_2^*)$ donné par

$$h(x, \xi) = \frac{\|p(\xi)\|^2}{\|p(\xi)\|^2 + (1 + \|\xi\|^2)^{\rho'}}, \quad \xi \in F_2^* \quad (\text{cf. preuve du lemme 4. 1}).$$

Soit $b \in \mathcal{S}_{\rho', \delta}^0(V, F_2^*; \mathcal{L}(E_1 \hat{\otimes} E_2))$ avec $b|_{F_1^*} \in C_0$.

Alors, pour tout $\xi_1 \in F_1^*$ et $\xi_2 \in F_1^{\perp}$ on a

$$\|b(x, s(\xi_1) + \xi_2)\| \leq \inf(\|b\|_{\infty}, \|b(x, \xi_2)\| + \frac{K \|\xi_1\|}{(1 + \|\xi_2\|^2)^{\rho'/2}})$$

où $K = \sup_{\xi \in F_2^*} (1 + \|\xi\|^2)^{\rho'/2} \|(D_{\xi} b)(x, \xi)\| (< +\infty)$.

Si $\|\xi_1\|^2 \geq (1 + \|\xi_2\|^2)^{\rho'}$, alors $h(x, s(\xi_1) + \xi_2) \geq 1/3$ et

$$\|b(x, s(\xi_1) + \xi_2)\|^2 \leq \|b\|_{\infty}^2 \leq 3 \|b\|_{\infty}^2 h(x, s(\xi_1) + \xi_2).$$

Si $\|\xi_1\|^2 \leq (1 + \|\xi_2\|^2)^{\rho'}$, alors

$$\begin{aligned} \|b(x, s(\xi_1) + \xi_2)\|^2 &\leq 2 \|b(x, \xi_2)\|^2 + \frac{2K^2 \|\xi_1\|^2}{(1 + \|\xi_2\|^2)^{\rho'}} \\ &\leq 2h(x, s(\xi_1) + \xi_2) (\|b(x, \xi_2)\|^2 + 3K^2) + b'(x, s(\xi_1) + \xi_2) \end{aligned}$$

où

$$b'(x, s(\xi_1) + \xi_2) = 2 \|b(x, \xi_2)\|^2 (1 - h(x, s(\xi_1) + \xi_2))$$

est dans $C_0(F_2^*)$. Donc, pour tout ξ de F_2^* , on a l'inégalité :

$$\|b(\xi)\|^2 \leq 6(\|b\|_\infty^2 + K^2)h + b'.$$

Soit $A_{\rho'} = \{\sigma \in \Sigma_{\rho'}(V, F_2^*; \mathcal{L}(E_1 \hat{\otimes} E_2)) / \sigma_{F_1 \perp} = 0\}$.

Nous avons montré que l'image $\pi(h)$ de h dans $A_{\rho'}$ est strictement positive (cf. [30], 7, §1). Donc il en est de même pour $\exp(-1/h)$. Or $((a \circ p) \hat{\otimes} 1) \exp(-1/h) \in \mathcal{S}_{\rho', \delta}^0$. ■

Ce lemme prouve que si $\sigma_1 \in \Sigma_{\rho'}(V, F_1^*; \mathcal{L}(E_1))$ est la classe de a_1 et $\sigma_2 \in \Sigma_{\rho'}(V, F_2^*; \mathcal{L}(E_1 \hat{\otimes} E_2))$, avec $\sigma_{2|F_1 \perp} = 0$ est la classe de a_2 alors $((a_1 \circ p) \hat{\otimes} 1) a_2 \in \mathcal{S}_{\rho', \delta}^0$ et la classe de $((a_1 \circ p) \hat{\otimes} 1) a_2$ dans $\Sigma_{\rho''}(V, F_2^*; \mathcal{L}(E_1 \hat{\otimes} E_2))$ ne dépend que de σ_1 et σ_2 ($\rho'' = \rho\rho'$). Notons la $(\sigma_1 \hat{\otimes} 1) \sigma_2$.

A.9.2. LEMME (cf. [11] lemma 1.8.) Soit $P \in \Psi_{\rho'}^*(V, F_1; \mathcal{L}(E_1))$ et $Q \in \Psi_{\rho'}^*(V, F_2; \mathcal{L}(E_1 \hat{\otimes} E_2))$ de symbole transverse $\sigma_{F_1 \perp}(Q) = 0$. Alors

$$(P \hat{\otimes} 1) Q \in \Psi_{\rho''}(V, F_2; \mathcal{L}(E_1 \hat{\otimes} E_2)) \quad \text{et} \quad \sigma((P \hat{\otimes} 1) Q) = (\sigma(P) \hat{\otimes} 1) \sigma(Q)$$

($\rho'' = \rho\rho'$ est supposé $> 1/2$).

Preuve. — On doit montrer que $\varphi(P \hat{\otimes} 1) Q \in \Psi_{\rho''}^*$, pour tout $\varphi \in C_0(V)$. Il suffit de le prouver pour $\varphi \in C_c^\infty$ avec support dans un ouvert trivialisant $\Omega \approx \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times Y$. Comme $\mathcal{X}(\mathcal{E}_1) \hat{\otimes} 1) Q \subseteq \mathcal{X}(\mathcal{E})$ (proposition A.8), il suffit de montrer que $(P \hat{\otimes} 1) Q \in \Psi_{\rho''}^*(\Omega, (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n); \mathcal{L}(E_1 \hat{\otimes} E_2))$ pour tout $P \in \Psi_{\rho'}^*(\Omega, \mathbb{R}^m; \mathcal{L}(E_1))$, et $Q \in \Psi_{\rho'}^*(\Omega, \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n; \mathcal{L}(E_1 \hat{\otimes} E_2))$ de symbole transverse nul. En utilisant la stricte positivité du symbole $\exp(-1/h)$ du lemme A.9.1, on peut supposer $Q = HQ'$ où $H = P_b$ où $b \in \mathcal{S}_{\rho', \delta}^0((\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)^2 \times Y, (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)^*)$ est donné par

$$b(x_1, x_2, x'_1, x'_2, y, \xi_1, \xi_2) = f'_2(x_1) f_2(x'_1, x_2, x'_2, y) \exp\left(-\left(1 + \frac{(1 + \|\xi_1\|^2 + \|\xi_2\|^2)^{\rho'}}{\|\xi_1\|^2}\right)\right)$$

$$f'_2 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m), f_2 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m \times (\mathbb{R}^n)^2 \times Y).$$

Il suffit alors de prouver que $(P \hat{\otimes} 1) H \in \Psi_{\rho''}^*(\Omega, \mathbb{R}^m; \mathcal{L}(E_1))$ et a le bon symbole. On peut aussi oublier le fibré E_1 , en le supposant par exemple trivial sur Ω et raisonnant pour chaque élément de matrice.

Par un argument de densité on peut supposer $P = P_a$ où

$$\tilde{a}(x_1, x_2, x'_1, y, \xi_1) = a(x_1, x_2, y, \xi_1) f_1(x'_1 - x_1),$$

$$f_1 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m), f_1(0) = 1 \quad \text{et} \quad a \in \mathcal{S}_{\rho', \delta}^0.$$

On peut en outre supposer que $f'_2 = 1$ sur le support de \tilde{a} .

Posons

$$\tilde{h}(\xi_1, \xi_2) = \exp\left(-\left(1 + \frac{(1 + \|\xi_1\|^2 + \|\xi_2\|^2)^{\rho'}}{\|\xi_1\|^2}\right)\right)$$

$$\begin{aligned}
((P \otimes 1) H)(g)(x_1, x_2, y) &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{2m+n} \int e^{i(\langle x_1 - x'_1, \xi_1 \rangle + \langle x'_1 - x''_1, \xi_1 \rangle + \langle x_2 - x'_2, \xi_2 \rangle)} a(x_1, x_2, y, \xi_1) \\
&\quad f_1(x'_1 - x_1) f_2(x'_1, x_2, x'_2, y) \tilde{h}(\xi'_1, \xi_2) g(x'_1, x'_2, y) dx'_1 dx'_2 d\xi'_1 d\xi_2 dx'_1 d\xi_1
\end{aligned}$$

Posons

$$\begin{aligned}
a'(x_1, x_2, y, \xi'_1) &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^m \int e^{i\langle x_1 - x'_1, \xi_1 - \xi'_1 \rangle} a(x_1, x_2, y, \xi_1) f(x'_1 - x_1) dx'_1 d\xi_1 \\
&= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^m \int a(x_1, x_2, y, \xi'_1 + \eta) \hat{f}(\eta) d\eta
\end{aligned}$$

de sorte que

$$\begin{aligned}
(P \otimes 1) H(g)(x_1, x_2, y) &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{m+n} \int e^{i(\langle x_1 - x'_1, \xi'_1 \rangle + \langle x_2 - x'_2, \xi_2 \rangle)} a'(x_1, x_2, y, \xi'_1) \\
&\quad \times f_2(x'_1, x_2, x'_2, y) \tilde{h}(\xi'_1, \xi_2) g(x'_1, x'_2, y) dx'_1 dx'_2 d\xi'_1 d\xi_2.
\end{aligned}$$

Montrons que $a' \in \mathcal{S}_{\rho, \delta}^0(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times Y, (\mathbb{R}^m)^*)$. Par dérivation sous le signe \int il suffit

d'estimer $\int (1 + \|\xi_1 + \eta\|)^r |\hat{f}(\eta)| d\eta$ pour $r \in \mathbb{R}$. Or on a

$(1 + \|\xi_1 + \eta\|)^r \leq (1 + \|\eta\|)^{|r|} (1 + \|\xi_1\|)^r$, et comme \hat{f} est à décroissance rapide

$$\int (1 + \|\xi_1 + \eta\|)^r |\hat{f}(\eta)| d\eta \leq k_r (1 + \|\xi_1\|)^r.$$

Donc $a' \in \mathcal{S}_{\rho, \delta}^0$. Mais alors $a' \tilde{h} \in \mathcal{S}_{\rho', \delta'}^0(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times Y, (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)^*)$ comme on l'a déjà noté à la fin de la preuve de A. 9. 1, et donc

$$c \in \mathcal{S}_{\rho'', \delta''}^0((\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)^2 \times Y; (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)^*)$$

où

$$c(x_1, x_2, x'_1, x'_2, y, \xi_1, \xi_2) a'(x_1, x_2, y, \xi_1) \tilde{h}(\xi_1, \xi_2) f_2(x'_1, x_2, x'_2, y).$$

Et donc $(P \otimes 1) Q = P_c \in \Psi_{\rho'', \delta''}^*$.

Notons enfin que

$$(a' - a)(x_1, x_2, y, \xi_1) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int (a(x_1, x_2, y, \xi_1 + \eta) - a(x_1, x_2, y, \xi_1)) \hat{f}(\eta) d\eta$$

Donc

$$\begin{aligned}
\|(a' - a)(x_1, x_2, y, \xi_1)\| &\leq \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int \|\eta\| |\hat{f}(\eta)| d\eta \int_0^1 K(1 + \|\xi_1 + t\eta\|)^{-\rho} dt \\
&\leq \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int \|\eta\| |\hat{f}(\eta)| d\eta \int_0^1 K(1 + \|\xi_1\|)^{-\rho} (1 + \|t\eta\|)^{\rho} dt \\
&\leq \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n K(1 + \|\xi_1\|)^{-\rho} \int \|\eta\| (1 + \|\eta\|)^{\rho} |\hat{f}(\eta)| d\eta.
\end{aligned}$$

Donc $a' - a \in C_0(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times Y \times (\mathbb{R}^m)^*)$ et donc par le lemme A.9.1 (a)

$$(a' - a)b \in C_0((\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)^2 \times Y \times (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)^*)$$

Donc $\sigma((P \hat{\otimes} 1)Q) = (\sigma(P) \hat{\otimes} 1)\sigma(Q)$. ■

De ce lemme nous déduisons la généralisation au cadre ρ, δ du fait que $P \hat{\otimes} 1$ est dans l'adhérence des pseudodifférentiels d'ordre $\alpha > 0$ si P est un pseudodifférentiel d'ordre α (cf. [3-I], p. 514 (5.4) ou [36], p. 270, Theorem 7).

A.9.3. COROLLAIRE. — Si $a \in \mathcal{S}_{\rho, \delta}^\alpha((\mathbb{R}^m)^2 \times \mathbb{R}^n \times Y, (\mathbb{R}^m)^*)$ et

$$b \in \mathcal{S}_{\rho, \delta}^{-\alpha}((\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)^2 \times Y, (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)^*) \text{ avec } \alpha > 0$$

alors $P_a P_b \in \Psi_{0, \rho}^*(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times Y, (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)^*)$ et $\sigma(P_a P_b)$ est la classe de $(a \circ p)b$ restreint à la diagonale où $p : (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)^* \rightarrow (\mathbb{R}^m)^*$ est la projection.

Preuve. — Soit $a' \in \mathcal{S}_{1,0}^\alpha((\mathbb{R}^m)^2 \times \mathbb{R}^n \times Y, (\mathbb{R}^m)^*)$ et $b' \in \mathcal{S}_{1,0}^{-\alpha}((\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)^2 \times Y, (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)^*)$ des symboles elliptiques au voisinage du support de a et b , homogènes en dehors d'un compact. Alors par [3. I] (5.4, p. 514) $(P_{a'} \hat{\otimes} 1)P_{b'} \in \Psi_{0,1}^*$ et son symbole principal est la restriction de $(a' \circ p)b'$ à la diagonale, et est donc une zéro connexion. On écrit alors

$$P_a = P_{a'} P_{a''} + P_c \quad (a'' \in \mathcal{S}_{\rho, \delta}^0, c \in \mathcal{S}_{\rho, \delta}^0)$$

et

$$P_b = P_{b'} P_{b''} + P_d \quad (b'' \in \mathcal{S}_{\rho, \delta}^0, d \in \mathcal{S}^{-\infty}).$$

Alors $(P_c \hat{\otimes} 1)P_b \in \mathcal{K}$ (car $P_b \in \mathcal{K}$) et $(P_{a''} P_{a'} \hat{\otimes} 1)P_d \in \mathcal{S}^{-\infty} \subseteq \mathcal{K}$. Enfin

$$(P_{a''} P_{a'} \hat{\otimes} 1)P_{b'} P_{b''} = (P_{a''} \hat{\otimes} 1)((P_{a'} \hat{\otimes} 1)P_{b'})P_{b''} \in \Psi_{0, \rho}^*$$

par A.9.2. ■

A.10. Le commutateur d'une connexion et d'un (pseudodifférentiel) $\hat{\otimes} 1$

Nous nous plaçons dans la même situation que ci-dessus :

A.10.1. LEMME (cf. [11] lemma 1.9). — Soit $P \in \Psi_\rho^*(V, F_1; \mathcal{L}(E_1))$ et $Q \in \Psi_\rho^*(F, F_2; \mathcal{L}(E_1 \hat{\otimes} E_2))$ tel que $\sigma(Q) = 1_{E_1} \hat{\otimes} \sigma'$ où $\sigma' \in \Sigma_\rho(V, F_2; \mathcal{L}(E_2))$ est tel que σ'_{F_1} soit G_1 invariant (cf. définition A.7.2). Si $\rho\rho' > 1/2$, alors $[P \hat{\otimes} 1, Q] \in \mathcal{K}_V(\mathcal{E})$ (i.e. $\forall \varphi \in C_0(V), \varphi[P \hat{\otimes} 1, Q] \in \mathcal{K}(\mathcal{E})$ et $[P \hat{\otimes} 1, Q]\varphi \in \mathcal{K}(\mathcal{E})$).

Preuve. — Soit $\Omega \approx \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times Y$ un ouvert trivialisant et $\varphi \in C_c(\Omega)$. On doit démontrer que $\varphi[P \hat{\otimes} 1, Q] \in \mathcal{K}(\mathcal{E})$ et comme $[\varphi, Q] \in \mathcal{K}(\mathcal{E})$, il suffit de montrer que $[\varphi P \hat{\otimes} 1, Q] \in \mathcal{K}(\mathcal{E})$. Remplaçons P par φP , comme $[\mathcal{K}(\mathcal{E}_1) \hat{\otimes} 1, Q] \subseteq \mathcal{K}(\mathcal{E})$ (proposition A.8) on peut supposer $P \in \Psi_{0, \rho}^*(\Omega, F_1; \mathcal{L}(E_1))$ et par un argument de densité que $P = P_a$ où $a \in \mathcal{S}_{\rho, \delta}^0((\mathbb{R}^m)^2 \times \mathbb{R}^n \times Y, (\mathbb{R}^m)^*; \mathcal{L}(E_1))$. Soit $Q' \in \Psi_\rho^*(\Omega, F_2; \mathcal{L}(E_1 \hat{\otimes} E_2))$ tel que $\sigma(Q')$ soit la restriction à Ω de $\sigma(Q)$. Comme $P \hat{\otimes} 1 = \varphi(P \hat{\otimes} 1)\varphi$ pour un $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ et que

$$\varphi Q' \in \Psi_{0, \rho}^*(\Omega, F_2; \mathcal{L}(E_1 \hat{\otimes} E_2)) \subseteq \Psi_{0, \rho}^*(V, F_2; \mathcal{L}(E_1 \hat{\otimes} E_2)), [P \hat{\otimes} 1, Q'] \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$$

et

$$[P\hat{\otimes}1, Q] - [P\hat{\otimes}1, Q'] = P\hat{\otimes}1(\varphi Q - \varphi Q') - (Q\varphi - Q'\varphi)(P\hat{\otimes}1) \in \mathcal{X}(\mathcal{E}).$$

Il suffit donc d'évaluer $[P\hat{\otimes}1, Q']$. Soient $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m)$ et $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n \times Y)$ tels que $P = fg$, $P' = P'fg$. Notons que $[P\hat{\otimes}1, Q'(1-fg)] \in \mathcal{X}(\mathcal{E})$.

Notons que $Q' = gQ'$ a encore un symbole transverse invariant et que, par le lemme A.9.2 $[P\hat{\otimes}1, Q']$ ne dépend modulo les compacts que du symbole transverse de Q' . Par un argument de densité on peut supposer que $\sigma_{F_1^\dagger}(fQ' - P_b) = 0$ où $b \in \mathcal{S}_{\rho', \delta'}^0((\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)^2 \times Y, (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)^*; \mathcal{L}(E_1 \hat{\otimes} E_2))$ est de la forme

$$b(x_1, x_2, x'_1, x'_2, y, \xi_1, \xi_2) = 1_{E_1} \hat{\otimes} f(x_1) \chi(x_1 - x'_1) b_2(x_2, x'_2, y, \xi_1, \xi_2)$$

où $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m)$ avec $\chi(0) = 1$ et $b_2 \in \mathcal{S}_{\rho', \delta'}^0((\mathbb{R}^n)^2 \times Y, (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)^*; \mathcal{L}(E_2))$.

Soit $b'(x_1, x_2, x'_1, x'_2, y, \xi_1, \xi_2) = 1_{E_1} \hat{\otimes} \chi(x_1 - x'_1) b_2(x_2, x'_2, y, \xi_1, \xi_2)$. Bien que b' ne soit pas à support compact, l'invariance par translations dans \mathbb{R}^m montre que l'opérateur $P_b : C_c^\infty(\Omega; E_1 \hat{\otimes} E_2) \rightarrow C^\infty(\Omega; E_1 \hat{\otimes} E_2)$ s'étend en un opérateur $P_b \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$ et que pour tout $f' \in C_c^\infty(\Omega)$ $f' P_b \in \Psi_{0, \rho}^*$ et a comme symbole $f' \sigma(Q')$, $P_b \in \Psi^*(\Omega, F; \mathcal{L}(E_1 \hat{\otimes} E_2))$ et $\sigma_{F_1^\dagger}(P_b) = \sigma_{F_1^\dagger}(Q')$. Il suffit donc de prouver que $[P_a \hat{\otimes} 1, P_b] \in \mathcal{X}(\mathcal{E})$.

Nous supposons a et b' homogènes pour la graduation de E_1 et E_2 , et que les fibrés E_1 et E_2 sont trivialisés le long de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$. On a :

$$\begin{aligned} P_b(P_a \hat{\otimes} 1)(g)(x_1, x_2, y) &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{2m+n} \int e^{i(\langle x_1 - x'_1, \xi_1 \rangle + \langle x'_1 - x'_1, \xi'_1 \rangle + \langle x_2 - x'_2, \xi_2 \rangle)} (-1)^{\partial a \partial b'} \\ &\{ a(x'_1, x'_1, x'_2, y, \xi'_1) \hat{\otimes} \chi(x_1 - x'_1) b_2(x_2, x'_2, y, \xi_1, \xi_2) \} \times g(x'_1, x'_2, y) dx'_1 d\xi'_1 dx'_2 d\xi_1 d\xi_2 \\ &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{2m+n} \int e^{i(\langle x_1 - x'_3, \xi_3 \rangle + \langle x'_3 - x'_1, \xi'_3 \rangle + \langle x_2 - x'_2, \xi_2 \rangle)} (-1)^{\partial a \partial b'} \\ &\times \{ a(x_1 + x'_1 - x'_3, x'_1, x'_2, y, \xi_3) \hat{\otimes} \chi(x'_3 - x'_1) b_2(x_2, x'_2, y, \xi_3, \xi_2) \} \\ &\times g(x'_1, x'_2, y) dx'_1 d\xi_3 dx'_3 dx'_2 d\xi_3 d\xi_2 \end{aligned}$$

où on a posé $x'_3 = x_1 + x'_1 - x'_1$, $\xi_3 = \xi_1$, $\xi'_3 = \xi'_1$. Donc

$$\begin{aligned} [P_a \hat{\otimes} 1, P_b](g)(x_1, x_2, y) &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{2m+n} \int e^{i(\langle x_1 - x'_1, \xi_1 \rangle + \langle x'_1 - x'_1, \xi'_1 \rangle + \langle x_2 - x'_2, \xi_2 \rangle)} \chi(x'_1 - x'_1) \\ &\{ [a(x_1, x'_1, x_2, y, \xi_1) - a(x_1 + x'_1 - x'_1, x'_1, x_2, y, \xi_1)] \hat{\otimes} b_2(x_2, x'_2, y, \xi_1, \xi_2) \} \\ &\times g(x'_1, x'_2, y) dx'_1 d\xi'_1 dx'_1 dx'_2 d\xi_1 d\xi_2. \end{aligned}$$

Soit $N \in \mathbb{N}$ à préciser plus bas et écrivons le développement de Taylor

$$\begin{aligned} a(x_1, x'_1, x_2, y, \xi_1) - a(x_1 + x'_1 - x'_1, x'_1, x_2, y, \xi_1) \\ = \sum_{k=1}^{N-1} \sum_j a_j^k(x_1, x'_1, x_2, y, \xi_1) p_j^k(x'_1 - x'_1, x'_2 - x_2) \end{aligned}$$

$$+ \sum_j a_j^N(x_1, x'_1, x''_1, x_2, x'_2, y, \xi_1) p_j^N(x'_1 - x_1, x'_2 - x_2)$$

où les p_j^k forment une base des polynômes homogènes de degré k et $a_j^k \in \mathcal{S}_{\rho, \delta}^{k\delta}$.

En intégrant par parties (intégrant par rapport à ξ'_1 et ξ_2 l'expression

$$p_j^k(x'_1 - x_1, x'_2 - x_2) e^{i(\langle x'_1 - x_1, \xi'_1 \rangle + \langle x_2 - x'_2, \xi_2 \rangle)}$$

et dérivant b_2) on trouve :

$$[P_a \hat{\otimes} 1, P_b] = \sum_{k=1}^{N-1} \sum_j (P_{a_j^k} \hat{\otimes} 1) P_{b_j^k} + \sum_j R_j^N \quad \text{où } b_j^k \in \mathcal{S}_{\rho', \delta'}^{-k\rho'}$$

et donc par le corollaire A.9.3 $(P_{a_j^k} \hat{\otimes} 1) P_{b_j^k} \in \mathcal{K}(\mathcal{E})$ et

$$(\mathbf{R}_j^N g)(x_1, x_2, y) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{2m+n} \int e^{i\varphi} \{ a_j^N \hat{\otimes} \chi(x_1 - x'_1) b_j^N(x_2, x'_2, y, \xi'_1, \xi_2) \} \\ \times g(x'_1, x_1, y) dx'_1 d\xi'_1 dx'_2 d\xi_2 d\xi_1 d\xi_2$$

où $a_j^N \in \mathcal{S}_{\rho, \delta}^{N\delta}$ et $b_j^N \in \mathcal{S}_{\rho', \delta'}^{-N\rho'}$ (notons que le support de a_j^N n'est pas compact mais $a_j^N \otimes \chi b_j^N$ est à support compact en $(x_1, x'_1, x'_2, x_2, x'_2, y)$). Mettons le χ dans le a_j^N et posons $z = (x_1, x'_1, x_2, x'_2, y)$.

On a, en intégrant par rapport à x'_1 :

$$(\mathbf{R}_j^N g)(x_1, x_2, y) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{2m+n} \int e^{i\varphi'(z, \xi_1, \xi'_1, \xi_2)} (a_j^N)^\wedge(z, \xi_1, \xi_1 - \xi'_1) \\ \hat{\otimes} b_j^N(z, \xi'_1, \xi_2) g(x'_1, x_2, y) dx'_1 dx'_2 d\xi_1 d\xi_2 d\xi'_1.$$

Dérivant a_j^N par rapport à x'_1 avant la transformation de Fourier on obtient : $\forall k \in \mathbb{N}, \exists C_k \in C_b(\mathbb{R}^n)$

$$\| (a_j^N)^\wedge(z, \xi_1, \xi_1 - \xi'_1) \| \leq C_k(x'_2) \frac{(1 + \|\xi_1\|)^{(k+N)\delta}}{(1 + \|\xi_1 - \xi'_1\|)^k}.$$

Montrons que pour N assez grand l'intégrale

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{2m+n} \int e^{i\varphi'} (a_j^N)^\wedge(z, \xi_1, \xi_1 - \xi'_1) \hat{\otimes} b_j^N(z, \xi'_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 d\xi'_1$$

est uniformément convergente, et converge donc vers

$$\psi(z) \in C_c((\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)^2 \times Y; \mathcal{L}(E_1 \hat{\otimes} E_2)).$$

Alors \mathbf{R}_j^N sera l'opérateur de convolution par ψ et donc compact.

Mais

$$\| b_j^N(z, \xi'_1, \xi_2) \| \leq \frac{C'}{(\|\xi'_1\|^2 + \|\xi_2\|^2 + 1)^{N\rho/2}}$$

et donc si

$$N > \frac{n}{\rho'}, \quad b_j^N = \int \| b_j^N(z, \xi_1', \xi_2) \| d\xi_2 \leq \frac{C''}{(\|\xi_1'\| + 1)^{N\rho' - n}}.$$

Sur la partie de $(\mathbb{R}^m)^* \times (\mathbb{R}^m)^*$ donnée par $\|\xi_1 - \xi_1'\| \leq \|\xi_1'\|$ on a $\|\xi_1\| \leq 2\|\xi_1'\|$ et $\|a_j^N b_j^N\| \leq \tilde{C}'' (1 + \|\xi_1'\|)^{N(\delta - \rho') + n}$ et donc pour $N > (2m + n)/(\rho' - \delta)$, $a_j^N b_j^N$ est uniformément intégrable.

Sur la partie donnée par $\|\xi_1 - \xi_1'\| \geq \|\xi_1'\|$ on a

$$\|\xi_1\| \leq 2\|\xi_1 - \xi_1'\| \quad \text{et} \quad \|(a_j^N) b_j^N\| < \tilde{c}'' (1 + \|\xi_1 - \xi_1'\|)^{(N+k)\delta - k}$$

qui est intégrable si $(N+k)\delta - k < 2m$ i.e. si $k > (2m + N\delta)/\rho$. Et donc pour $N > (2m + n)/(\rho' - \delta)$ l'intégrale

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{2m+n} \int e^{i\varphi} (a_j^N)^\wedge(z, \xi_1, \xi_1 - \xi_1') \hat{\otimes} b_j^N(z, \xi_1', \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_1'$$

est (absolument) uniformément convergente. ■

Des lemmes A. 9. 2 et A. 10. 1 il découle directement :

A. 10. 2. PROPOSITION. — Soit $P \in \Psi_\rho^*(V, F_1; \mathcal{L}(E_1))$ et $Q \in \Psi_\rho^*(V, F_2; \mathcal{L}(E_1 \hat{\otimes} E_2))$ tel que $\sigma_{F_1}^+(Q) = 1_{E_1} \hat{\otimes} \sigma'$ où $\sigma' \in \Sigma_\rho(V, (F_2/F_1)^*; \mathcal{L}(E_2))$ est G_1 invariant. Alors $[P \hat{\otimes} 1, Q] \in \Psi_\rho^*(V, F_2; \mathcal{L}(E_1 \hat{\otimes} E_2))$ et

$$\sigma([P \hat{\otimes} 1, Q]) = [\sigma(P) \otimes 1, \sigma(Q)] (\rho'' = \rho\rho' > 1/2).$$

Preuve. — Soit $\sigma = \sigma(Q) \in \Sigma_{\rho'}(V, F_2^*; \mathcal{L}(E_1 \hat{\otimes} E_2))$ et soit $b \in C_b(F_2^*; \mathcal{L}(E_1 \hat{\otimes} E_2))$ dans la classe σ . Soit $e : \mathcal{L}(E_1 \hat{\otimes} E_2) \rightarrow 1 \hat{\otimes} \mathcal{L}(E_2)$ l'espérance conditionnelle, $b' = b - e \circ b$ et $b'' = e \circ b$. Soit $Q' \in \Psi_\rho^*(V, F; \mathcal{L}(E_1 \hat{\otimes} E_2))$ de symbole la classe de b' . Alors le symbole de $Q'' = Q - Q'$ est la classe de b'' .

On a par A. 10. 1 $[P \hat{\otimes} 1, Q'] \in \mathcal{K}_V$ et par A. 9. 2 $[P \hat{\otimes} 1, Q] \in \Psi^*$ et a le bon symbole. ■

A. 11. Produit de Kasparov de deux opérateurs pseudodifférentiels transverses elliptiques

Il résulte immédiatement des propositions A. 8, A. 10. 2 et de [11] (theorem A. 3) :

A. 11. THÉORÈME. — Soit (V, F_1, F_2, F_3) une variété triplement feuilletée avec $F_1 \subseteq F_2 \subseteq F_3$. Soit (E_3, σ_3) un symbole transversalement elliptique pour (V, F_1, F_2) et (E_1, σ_1) un symbole transversalement elliptique pour (V, F_2, F_3) . Posons $E_2 = E_3 \hat{\otimes} E_1$. Soit $\sigma_2 \in \Sigma(V, (F_3/F_1)^*; \mathcal{L}(E_2))$ un symbole G_1 invariant et tel que

$$(a) \sigma_2|_{F_2} = 1_{E_3} \hat{\otimes} \sigma_1.$$

$$(b) [\sigma_3 \hat{\otimes} 1, \sigma_2] \geq 0.$$

Alors $\psi(E_2, \sigma_2)$ est un produit de Kasparov de $\psi(E_3, \sigma_3)$ par $\psi(E_1, \sigma_1)$. ■

Remarque. — Dans les conditions de ce théorème, un symbole σ_2 est appelé un cup-produit de σ_1 par σ_3 (cf. [11], définition 1. 6).

Terminons cet appendice par une remarque :

A.12. *Remarque.* — Les symboles que nous considérons à la section 4 sont de type $(\rho, 0)$. La classe des symboles de type $(\rho, 0)$ n'est pas invariante par difféomorphismes (cf. [25], remark, p. 85). Cependant les symboles que nous considérons restent de type $(\rho, 0)$ dans toute carte feuilletante. Beaucoup de preuves dans cet appendice sont plus simples pour des symboles de type $(\rho, 0)$. Notons aussi que pour ces symboles il suffit de supposer $\rho > 0$ (et non plus $\rho > 1/2$). En particulier si on travaillait avec des symboles $(\rho, 0)$, on n'aurait pas à supposer une condition supplémentaire pour le produit d'un opérateur pseudodifférentiel $\otimes 1$ par une 0 connexion (dans la partie A.9 on devait supposer outre $\rho > 1/2$ la condition $\rho\rho' > 1/2$).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. F. ATIYAH, *Elliptic Operators and Compact Groups* (Lecture Notes in Math., n° 401, Springer-Verlag, 1974).
- [2] M. F. ATIYAH, R. BOTT et A. SHAPIRO, *Clifford Modules* (Topology, vol. 3, 1964, p. 3-38).
- [3] M. F. ATIYAH et I. M. SINGER, *The Index of Elliptic Operators, I et III*, (Annals of Math., vol. 87, 1968, p. 484-530 et p. 546-604, IV, Annals of Math., vol. 93, 1971, p. 119-138).
- [4] P. BAUM et A. CONNES, *Geometric K-Theory for Lie Groups and Foliations Preprint I.H.E.S.*, 1982.
- [5] P. BAUM et A. CONNES, *Leafwise Homotopy Equivalence and Rational Pontrjagin Classes, Preprint, I.H.E.S.*, 1983.
- [6] R. BOTT, *On Characteristic Classes in the Framework of Gel'fand-Fuchs Cohomology* (Astérisque, vol. 32-33, 1976, p. 113-139).
- [7] A. CONNES, *Sur la théorie non commutative de l'intégration* (Lecture Notes in Math., n° 725, 1979, p. 19-143).
- [8] A. CONNES, *A Survey of Foliations and Operator Algebras in Operator Algebras and Applications* (Proc. Symp. in Pure Math., A.M.S., vol. 38, part. I, 1982, p. 521-628).
- [9] A. CONNES, *Non-Commutative Differential Geometry*, chapter III (à paraître).
- [10] A. CONNES, *Cyclic Cohomology and the Transverse Fundamental Class of a Foliation in Geometric Methods in Operator Algebras*, H. ARAKI and E. G. EFFROS éd., Pitman Research Notes in Math., n° 123, Longman/Wiley, 1986, p. 52-144).
- [11] A. CONNES et G. SKANDALIS, *The Longitudinal Index Theorem for Foliations* (Pub. of R.I.M.S., Kyoto, vol. 20, n° 6, 1984, p. 1139-1183).
- [12] J. CUNTZ, *K-Theoretic Amenability for Discrete Groups* (J. Reine ang. Math., vol. 344, 1983, p. 180-195).
- [13] J. CUNTZ et G. SKANDALIS, *Mapping Cones and Exact Sequences in KK-theory* (J. of Operator Theory, vol. 15, 1986, p. 163-180).
- [14] J. DIXMIER et A. DOUADY, *Champs continus d'espaces hilbertiens et de C^* -algèbres* (Bull. Soc. Math. Fr., t. 91, 1963, p. 227-284).

- [15] T. FACK et G. SKANDALIS, *Sur les représentations et idéaux de la C^* -algèbre d'un feuilletage* (*J. of Operator Theory*, vol. 8, 1983, p. 95-129).
- [16] I. M. GEL'FAND et D. FUCHS, *The Cohomology of the Lie Algebra of Formal Vector Fields* (*Izv. Ann. S.S.S.R.*, vol. 34, 1970, p. 327-342).
- [17] C. GODBILLON et J. VEY, *Un invariant des feuilletages de codimension 1* (*C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 273, 1971).
- [18] P. GREEN, *Equivariant K-theory and Crossed-product C^* -algebras*, in *Operator Algebras and Applications* (*Proc. Symp. in Pure Math.*, A.M.S., vol. 38, part. I, 1982, p. 337-338).
- [19] A. GROTHENDIECK, *Sur quelques points d'algèbre homologique* (*Tohoku Math. J.*, vol. 9, 1957, p. 119-221).
- [20] A. HAEFLIGER, *Variétés Feuilletées* (*Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, 16, 1962, p. 367-397).
- [21] A. HAEFLIGER, *Differentiable cohomology*, *Cours au C.I.M.E.*, 1976.
- [22] A. HAEFLIGER, *Groupoïde d'holonomie et classifiants* (*Astérisque*, vol. 116, 1984, p. 70-97).
- [23] J. HAYDEN et R. PLYMEN, *On the Invariants of Serre and Dixmier-Douady*, *Preprint I.H.E.S.*, 1983.
- [24] M. HILSUM et G. SKANDALIS, *Stabilité des C^* -algèbres de feuilletages* (*Ann. de l'Institut Fourier, Grenoble*, vol. 33, fasc. 3, 1983, p. 201-208).
- [25] L. HÖRMANDER, *Fourier Integral Operators, I* (*Acta Math.*, 127, 1971, p. 79-183).
- [26] L. HÖRMANDER, *On the Index of Pseudodifferential Operators*, *Elliptische Differential Gleichungen Band II*, Koll., Berlin, 1969.
- [27] L. HÖRMANDER, *The analysis of linear partial differential operators*, vol. I, II, III, IV, *Grundlehren der Math. Wis., Springer Verlag* (1983).
- [28] P. JULG, *K-théorie du produit croisé d'une C^* -algèbre par un groupe compact* (*Thèse de 3^e cycle*, Université Pierre-et-Marie-Curie, 1982).
- [29] M. KAROUBI, *K-Theory, an Introduction* (*Grundlehren der Math. Wis.*, Springer-Verlag, 1978).
- [30] G. G. KASPAROV, *Operator K-Functor and Extensions of C^* -algebras* (*Izv. Akad. Nauk. S.S.S.R.*, Ser. Math., vol. 44, 1980, p. 571-636).
- [31] G. G. KASPAROV, *K-theory, group C^* -algebras and higher signatures*, conspectus, part. 1.2, *Preprint, Chernogolovka*, 1981.
- [32] G. G. KASPAROV, *The Index of Invariant Elliptic Operators, K-Theory and Lie Group Representation* (*Dokl. Akad. Nauk, S.S.S.R.*, 1983, p. 533-537).
- [33] G. G. KASPAROV, *Lorentz Groups: K-Theory of Unitary Representations and Crossed Products* (*Dokl. Akad. Nauk S.S.S.R.*, vol. 275, 1984, p. 541-545; *Soviet Math. Dokl.*, vol. 29, 1984, p. 256-260).
- [34] B. LAWSON, *Foliations* (*Bull. of A.M.S.*, vol. 80, 1974, p. 369-418).
- [35] P. MULHY, J. RENAULT et D. WILLIAMS, *Equivalence and Isomorphisms of Groupoid C^* -Algebras*, *Preprint*, 1985.
- [36] R. S. PALAIS, *Seminar on the Atiyah-Singer Index Theorem* (*Annals of Math. Studies*, vol. 57, Princeton, 1965).
- [37] J. RENAULT, *A Groupoid Approach to C^* -Algebras* (*Lecture Notes in Math.*, n° 793, Springer-Verlag, 1980).
- [38] J. RENAULT, *Représentations des produits croisés d'algèbre de groupoïdes*, *Prépublication Université Pierre-et-Marie-Curie, Paris*, 1985.
- [39] C. ROGER, *Méthodes homotopiques et cohomologiques en théorie des feuilletages*, *Prépublication E.N.S.J.F.*, Paris.
- [40] D. RUELLE et D. SULLIVAN, *Currents, Flows and Diffeomorphisms* (*Topology*, vol. 14, 1975, p. 319-327).
- [41] G. SKANDALIS, *Some Remarks on KK-Theory* (*J. of Funct. Anal.*, vol. 56, n° 3, 1984, p. 337-347).
- [42] G. SKANDALIS, *Exact Sequences for the Kasparov Groups of Graded Algebras* (*Can. J. Math.*, vol. 37, n° 2, 1985, p. 193-216).
- [43] D. SULLIVAN, *Cycles and the Dynamical Studies of Foliated Manifolds* (*Invent. Math.*, vol. 36, 1976, p. 225-255).
- [44] H. E. WINKELKEMPER, *The Graph of a Foliation* (*Ann. Global Anal. and Geom.*, vol. 1, n° 3, 1983, p. 53-75).
- [45] R. J. ZIMMER, *On the von Neumann Algebra of an Ergodic Group Action* (*Proc. of the A.M.S.*, vol. 66, n° 2, 1977, p. 289-293).

- [46] L. ALVAREZ-GAUMÉ, *Supersymmetry and the Atiyah-Singer Index Theorem* (*Comm. Math. Phys.*, vol. 90, 1983, p. 161-173).
- [47] E. GETZLER, *Pseudodifferential Operators on Supermanifolds and the Atiyah-Singer Index Theorem* (*Comm. Math. Phys.*, vol. 92, 1983, p. 163-178).
- [48] E. WITTEN, *Supersymmetry and Morse Theory* (*J. Diff. Geom.*, vol. 17, 1982, p. 661-692).
- [49] G. G. KASPAROV, *Topological Invariants of Elliptic Operators I: K-homology* (*Math. U.S.S.R. Izv.*, vol. 9, 1975, p. 751-792).
- [50] H. WIDOM, *Families of Pseudo Differential Operators*, in *Topics in Functional Analysis I*. GOHBERG et H. KAC éd. (*Adv. in Math.*, supp. ser. n° 3, 1978).
- [51] H. WIDOM, *A Complete Symbolic Calculus for Pseudodifferential Operators* (*Bull. Sci. Math.*, vol. 104, 1980, p. 19-63).
- [52] G. SKANDALIS, *Une notion de nucléarité en K-théorie* (d'après J. Cuntz), *Prépublication*, 1986.

(Manuscrit reçu le 13 octobre 1986,
révisé le 16 mars 1987).

M. HILSUM,
G. SKANDALIS,
Collège de France, Annexe,
Équipe d'A. Connes,
3, rue d'Ulm,
75005 Paris.
