References

1. Arveson, W.: The harmonic analysis of automorphism groups, Operator algebras and applications, *Proc. Symposia Pure Math.* **38** (1982), part I, 199–269.
2. Connes, A.: Non commutative differential geometry, *Publ. Math. IHES* No. 62 (1985), 257–360.
3. Connes, A. et Cuntz, J.: Quasi homomorphismes, cohomologie cyclique et positivité, *Comm. Math. Phys.* **114**, 515–526 (1988).
4. Connes, A.: Compact metric spaces, Fredholm modules and hyperfiniteness, Preprint (1987).
5. Cuntz, J.: A new look at *KK* theory, *K-Theory* **1** (1987), 31–51.
6. Jaffe, A., Lesniewski, A., Weitsman, J.: Index of a family of Dirac operators on loop space, *Comm. Math. Phys.* **112** (1987), 75–88.
7. Jones, J. D. S.: Cyclic homology and equivariant homology, *Invent. Math.* **87** (1987), 403–424.
8. Kassel, C.: Cyclic homology, comodules and mixed complexes, *J. Algebra* **107** (1987), 195–216.
9. Schwartz, L.: *Théorie des distributions*, Paris, Hermann (1950).
10. Simon, B.: *Trace Ideals and their Applications*, London Math. Soc. Lecture Notes 35, Cambridge Univ. Press (1979).
11. Zekri, R.: A new description of Kasparov's theory of C^* algebra extensions, CPT 86/P. 1986 Marseille-Luminy.

Une Notion de Nucléarité en K-Théorie

(d'après J. Cuntz)

GEORGES SKANDALIS

Laboratoire de Mathématiques Fondamentales, Université Pierre et Marie Curie, 4, Place Jussieu, 75252 Paris, France

(Received: 5 January 1988)

Résumé. Nous définissons une notion de nucléarité en K-théorie pour des C^*-algèbres, moins restrictive que la nucléarité et analogue à la moyennabilité en K-théorie de J. Cuntz. Nous montrons que les groupes de Kasparov des algèbres nucléaires en K-théorie se comportent vis-à-vis des produits tensoriels et des suites exactes comme ceux des algèbres nucléaires. Un exemple d'algèbre non nucléaire en K-théorie a quelques conséquences intéressantes.

Abstract. We define a notion of K-theoretic nuclearity for C^*-algebras. Less restrictive than nuclearity, this notion is analogous to J. Cuntz's K-theoretic amenability. We prove that the Kasparov groups of K-theoretically nuclear C^*-algebras behave like those of nuclear algebras with respect to tensor products and exact sequences. An example of a non-K-theoretically nuclear C^*-algebra has some interesting consequences.

Keywords. Kasparov theory, C^*-algebras, nuclearity, exact sequences, property T.

0. Introduction

Le point de départ de ce travail est un article de J. Cuntz ([6]), où est définie une notion de moyennabilité en K-théorie pour un groupe dénombrable. Il y est démontré que si G est un groupe moyennable en K-théorie et A est une G-algèbre alors l'application $\lambda\colon A \rtimes G \to A \rtimes_{\mathrm{red}} G$ est une équivalence de K-théorie (i.e. la classe de λ dans le groupe de Kasparov $KK(A \rtimes G, A \rtimes_{\mathrm{red}} G)$ est inversible) et le noyau $\ker \lambda$ est K-contractile. Cette notion a été étendue par Julg et Valette au cas d'un groupe localement compact [17].

Suivant l'idée de Cuntz, nous définissons ici une notion de nucléarité en K-théorie pour une C^*-algèbre et démontrons que si A est une algèbre nucléaire en K-théorie et B une C^*-algèbre quelconque alors l'application $p_{A,B}\colon A \hat{\otimes}_{\max} B \to A \hat{\otimes}_{\min} B$ est une équivalence de K-théorie et le noyau $\mathrm{Ker}(p_{A,B})$ est K-contractile.

Une autre propriété importante des C^*-algèbres nucléaires en K-théorie est leur bon comportement vis-à-vis des extensions de C^*-algèbres, i.e. la généralisation suivante d'un résultat de Kasparov ([19], §7 Theorems 2,3): si A est une C^*-algèbre nucléaire en K-théorie le foncteur $B \to KK(A,B)$ est demi-exact (i.e. une suite exacte $0 \to J \to B \to B/J \to 0$ donne lieu à une suite exacte hexagonale de groupes $KK(A,\cdot)$) et le foncteur $A \to KK(A,B)$ restreint aux algèbres nucléaires en K-théorie est demi-exact.

Toute C^*-algèbre nucléaire est nucléaire en K-théorie. La réciproque n'est cependant pas vraie: pour toute C*-algèbre A, l'algèbre $A([0,1[) = A \otimes C_0([0,1[)$ est nucléaire en K-théorie (parce que 'contractile'). En outre, si G est un groupe moyennable en K-théorie, les produits croisés $A \rtimes G$ et $A \rtimes_{\text{red}} G$ d'une algèbre nucléaire A par G sont nucléaires en K-théorie. De plus, la nucléarité en K-théorie est préservée par équivalence de K-théorie, produits tensoriels 'min' et 'max', extensions semi-scindées.

Il existe cependant des algèbres non nucléaires en K-théorie. Soit en effet Γ un sous-groupe discret de covolume fini de $\mathrm{Sp}(n,1)$ ($n \geqslant 2$). On sait à l'aide d'un résultat de Kostant [24] que Γ a la propriété T de Kazhdan. Utilisant la propriété T et une généralisation d'un résultat d'Akemann et Ostrand [1], nous démontrons que $C^*_{\text{red}}(\Gamma)$ n'est pas nucléaire en K-théorie. Ce résultat a quelques conséquences importantes, une en particulier liée à l'élément fondamental 'γ' de Kasparov [20].

Nous commençons ce travail en définissant une notion de bimodule nucléaire par quelques propriétés équivalentes (théorème 1.5, définition 1.6).

Nous présentons dans le deuxième paragraphe un bifoncteur 'KK_{nuc}' qui nous est techniquement utile par la suite et démontrons la demi-exactitude du foncteur $KK_{\text{nuc}}(A,\cdot)$ (définition 2.1 et proposition 2.7).

Dans le troisième paragraphe, nous définissons la nucléarité en K-théorie: une C^*-algèbre A est nucléaire en K-théorie si l'unité 1_A de l'anneau $KK(A,A)$ se définit sur un bimodule nucléaire (définition 3.1). Nous donnons des exemples d'algèbres nucléaires en K-théorie et démontrons les résultats sur les produits tensoriels et suites exactes mentionnés plus haut (proposition 3.5; proposition 3.8 et théorèmes 3.6 et 3.9).

Le quatrième paragraphe est consacré à l'exemple, cité ci-dessus, d'algèbre non nucléaire en K-théorie, (théorème 4.1) et à ses conséquences (corollaire 4.2 et 4.3). Cet exemple repose sur une généralisation (théorème 4.4) d'un résultat d'Akemann et Ostrand, qui a elle-même quelques conséquences discutées à la fin du paragraphe.

Nous concluons par trois remarques: la première portant sur le cas équivariant, la seconde sur la formule des coefficients universels de Rosenberg et Schochet [27] et la dernière sur le cas non séparable.

Jusqu'à la dernière remarque, toutes les C^*-algèbres *seront supposées séparables.*

1. Bimodules Nucléaires

Dans ce paragraphe nous étudions la notion de (A, B) bimodule nucléaire sur laquelle est basé ce travail.

Commençons en rappelant quelques définitions:

1.1. DEFINITIONS (cf. par exemple [18]). Soient A et B deux C^*-algèbres et $\varphi\colon A \to B$ une application complètement positive.

(a) L'application φ est dite factorisable si elle admet une factorisation $\varphi = \tau \circ \sigma$ où σ: $A \to M_n(\mathbb{C})$ et $\tau\colon M_n(\mathbb{C}) \to B$ sont complètement positives.

(b) L'application φ est dite (normiquement) nucléaire si φ est limite *simple normique* d'applications complètement positives factorisables.

(c) Si B est une algèbre de von Neumann, φ est dite *fortement* nucléaire si elle est limite *simple forte* d'applications factorisables.

(d) Si B est l'algèbre des multiplicateurs de la C^*-algèbre J ($B = M(J)$), φ est dite *strictement* nucléaire, si elle est limite pour la topologie *simple stricte* d'applications complètement positives factorisables.

L'énoncé qui suit, ainsi que sa démonstration, est une variante de l'équivalence entre diverses définitions de nucléarité pour les C^*-algèbres (cf.[4, 14, 25, 34]).

1.2 PROPOSITION (cf. [4]). *Soit A une C^*-algèbre unitale et soit φ une application complètement positive et unitale de A à valeurs dans la C^*-algèbre B (resp. l'algèbre de von Neumann B, l'algèbre $B = M(J)$ des multiplicateurs de J). Les propriétés suivantes sont équivalentes:*

(i) *L'application φ est normiquement (resp. fortement, strictement) nucléaire*

(ii) *Pour toute C^*-algèbre D l'application $\varphi \otimes \mathrm{id}$ de $A \otimes_{\max} D$ à valeurs dans $B \otimes_{\max} D$ (resp. $B \otimes_{\text{nor}} D, M(J \otimes_{\max} D)$) se factorise à travers $A \otimes_{\min} D$.*

(Rappelons que les représentations définissant le produit tensoriel normal $B \otimes_{\text{nor}} D$ sont les paires de représentations π_B, π_D, commutant entre elles, π_B étant normale.)

Preuve. (i) $\Rightarrow$ (ii). Si φ est factorisable on a une factorisation

$$A \otimes_{\max} D \to A \otimes_{\min} D \xrightarrow{\sigma \otimes \mathrm{id}} M_n(\mathbb{C}) \otimes_{\min} D = M_n(\mathbb{C}) \otimes_{\max} D \xrightarrow{\tau \otimes \mathrm{id}} B \otimes_{\max} D$$

Ecrivons alors $\varphi = \lim \tau_i \circ \sigma_i$. Alors le noyau de $\varphi \otimes \mathrm{id} = \lim (\tau_i \circ \sigma_i) \otimes \mathrm{id}$ contient le noyau de la projection $A \otimes_{\max} D \to A \otimes_{\min} D$.

Pour démontrer (ii) $\Rightarrow$ (i) nous utilisons le résultat suivant:

1.3. LEMME. *Si $\varphi\colon A \to B$ vérifie* (ii) *alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, tout $a_1, \ldots, a_n \in A$, $\omega_1, \ldots, \omega_n \in B^*$ (resp. $\omega_i \in B_*$, i.e. ω_i est normale, $\omega_i \in J^* \subseteq B^*$, i.e. ω_i est strictement continue) et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une application factorisable ψ telle que*

$$|\omega_i(\varphi(a_i)) - \omega_i(\psi(a_i))| < \varepsilon, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Preuve. On peut supposer les $\omega_i \geqslant 0$. Soit $\omega = \Sigma \omega_i$. Alors il existe $d_1, \ldots, d_n \in \pi_\omega(B)'$ avec $\omega_i(b) = \langle \xi_\omega, \pi_\omega(b) d_i \xi_\omega \rangle$ (cf. [12]. Proposition 2.5.1). Soit D la sous algèbre de $\pi_\omega(B)'$ engendrée par $d_1, \ldots, d_n$. Considérons l'état α sur $A \otimes D$ donné par $\alpha(a \otimes d) = \langle \xi_\omega, \pi_\omega(\varphi(a)) d \xi_\omega \rangle$. Par hypothèse c'est un état sur $A \otimes_{\min} D$.

Soit π_0: $A \to \mathscr{L}(H_0)$ une représentation fidèle de A. Alors, la représentation de $A \otimes_{\min} D$ dans $H_0 \otimes H_\omega$ étant fidèle, il existe $\xi_1, \ldots, \xi_p \in H_0 \otimes H_\omega$ avec

$$|\alpha(a_i \otimes d_i) - \sum_{j=1}^{p} \langle \xi_j, (\pi_0(a_i) \otimes d_i) \xi_j \rangle| < \varepsilon/2$$

(cf. [12] Proposition 3.9.2). Remplaçant H_0 par $\mathbb{C}^p \otimes H_0$ et π_0 par $1 \otimes \pi_0$, on obtient $\xi \in H_0 \otimes H_\omega$ avec

$$|\alpha(a_i \otimes d_i) - \langle \xi, (\pi_0(a_i) \otimes d_i)\xi \rangle| < \varepsilon/2.$$

Comme ξ_ω est totalisateur dans H_ω pour B, le produit tensoriel algébrique de H_0 par $\pi_\omega(B)\xi_\omega$ est dense dans $H_0 \otimes H_\omega$ et donc il existe

$$N \in \mathbb{N}, \quad e_1, \ldots, e_N \in H_0, \quad b_1, \ldots, b_N \in B$$

tels que si

$$\eta = \sum_{j=1}^{N} e_j \otimes \pi_\omega(b_j)\xi_\omega$$

on ait:

$$|\langle \xi, (\pi_0(a_i) \otimes d_i)\xi \rangle - \langle \eta, (\pi_0(a_i) \otimes d_i)\eta \rangle| < \varepsilon/2.$$

Soit $\sigma: A \to M_N(\mathbb{C})$ donnée par

$$(\sigma(a))_{j,k} = \langle e_j, \pi_0(a)e_k \rangle, \qquad \tau: M_N(\mathbb{C}) \to B$$

donnée par

$$\tau((m_{j,k})) = \sum_{j,k} m_{j,k} b_j^* b_k \quad \text{et} \quad \psi = \tau \circ \sigma.$$

Notons qu'on a $\alpha(\varphi(a) \otimes d_i)) = \omega_i(\varphi(a))$ et

$$\begin{aligned}\langle \eta, (\pi_0(a) \otimes d_i)\eta \rangle &= \sum_{j,k} \langle e_j, \pi_0(a)e_k \rangle \langle \pi_\omega(b_j)\xi_\omega, \pi_\omega(b_k) d_i \xi_\omega \rangle \\ &= \sum_{j,k} (\sigma(a))_{j,k} \omega_i(b_j^* b_k) \\ &= \omega_i(\psi(a)).\end{aligned}$$

Et donc, pour tout i on a

$$|\omega_i(\varphi(a_i)) - \omega_i(\psi(a_i))| < \varepsilon.$$

□

La fin de la preuve de (ii) ⇒ (i) de la proposition 1.2 est une application du théorème de Hahn–Banach.

Fin de la preuve de 1.2. Nous devons démontrer que (si (ii) est vérifié) pour tout $a_1, \ldots, a_n \in A$ (resp. $a_1, \ldots, a_n \in A$ et $\xi_1, \ldots, \xi_n \in H$ si B agit dans $H, a_1, \ldots, a_n \in A$ et $b_1, \ldots, b_n \in J$) et $\varepsilon > 0$ il existe ψ factorisable avec $\|(\varphi - \psi)(a_j)\| < \varepsilon$

$$(\text{resp. } \|(\varphi - \psi)(a_j) \cdot \xi_j\| < \varepsilon, \ \|(\varphi - \psi)(a_j)b_j\| < \varepsilon).$$

Soit $F_{A,B}$ le cône convexe des applications complètement positives factorisables de A dans B et soit

$$C = \{(\psi(a_i))_{i=1,\ldots,n} / \psi \in F_{A,B}\} \subseteq B^n$$

(resp.

$$C = \{(\psi(a_i)\xi_i)_{i=1,\ldots,n} / \psi \in F_{A,B}\} \subseteq H^n,$$

$$C = \{(\psi(a_i)b_i)_{i=1,\ldots,n} / \psi \in F_{A,B}\} \subseteq J^n)$$

c'est un cône convexe de B^n (resp. H^n, J^n). Le lemme 1.3 signifie que $(\varphi(a_i))_{i=1,\ldots,n}$ (resp.

$$(\varphi(a_i)\xi_i)_{i=1,\ldots,n}, \qquad (\varphi(a_i)b_i)_{i=1,\ldots,n})$$

est faiblement adhérant à C, et donc normiquement par le théorème de Hahn–Banach.

□

Remarquons qu'il suffit de prendre pour φ l'identité de A dans la proposition 1.2, pour retrouver l'équivalence entre

(i) l'identité de A est (normiquement) nucléaire,
(ii) l'inclusion de A dans A^{**} est fortement nucléaire,
(iii) $A \otimes_{\min} B = A \otimes_{\max} B$ pour toute algèbre B.

(cf. [4]).

Nous arrivons maintenant au sujet principal de ce paragraphe. Soient A et B deux C^*-algèbres. Rappelons qu'un A, B bimodule est un C^*-module hilbertien dénombrablement engendré $\mathscr{E}$ sur B, muni d'une action de A à travers un $*$-homomorphisme $A \to \mathscr{L}(\mathscr{E})$ (cf. [28] Définition 2.1).

Si $\mathscr{E}_j$ est un C^*-module hilbertien sur $B_j (j = 1, 2)$ Kasparov a défini le produit tensoriel $\mathscr{E}_1 \otimes \mathscr{E}_2$ qui est un C^*-module hilbertien sur $B_1 \otimes_{\min} B_2$ ([19], 9 §2). La même construction permet de définir le produit tensoriel 'max' de $\mathscr{E}_1$ par $\mathscr{E}_2$:

1.4. DEFINITION. (a) Le C^*-module hilbertien $\mathscr{E}_1 \otimes_{\max} \mathscr{E}_2$ sur $B_1 \otimes_{\max} B_2$ est le complété du produit tensoriel algébrique $\mathscr{E}_1 \otimes \mathscr{E}_2$ pour le produit scalaire sur $B_1 \otimes_{\max} B_2$ donné par

$$\langle \xi_1 \otimes \xi_2, \eta_1 \otimes \eta_2 \rangle = \langle \xi_1, \eta_1 \rangle \otimes \langle \xi_2, \eta_2 \rangle \in B_1 \otimes_{\max} B_2.$$

(b) Si A_j agit dans $\mathscr{E}_j$, $A_1 \otimes_{\max} A_2$ agit dans $\mathscr{E}_1 \otimes_{\max} \mathscr{E}_2$.
(c) Le produit tensoriel défini par Kasparov sera noté $\mathscr{E}_1 \otimes_{\min} \mathscr{E}_2$.

On a

$$\mathscr{E}_1 \otimes_{\min} \mathscr{E}_2 = (\mathscr{E}_1 \otimes_{\max} \mathscr{E}_2) \otimes_{B_1 \otimes_{\max} B_2} B_1 \otimes_{\min} B_2.$$

Le (b) signifie qu'on a un homomorphisme naturel $\mathscr{L}(\mathscr{E}_1) \otimes_{\max} \mathscr{L}(\mathscr{E}_2) \to \mathscr{L}(\mathscr{E}_1 \otimes_{\max} \mathscr{E}_2)$. Notons qu'en général cet homomorphisme n'est pas injectif.

Rappelons (cf. [18], Theorem 1) que pour tout C^*-module hilbertien $\mathscr{E}$ on a: $\mathscr{L}(\mathscr{E}) = M(\mathscr{K}(\mathscr{E}))$.

1.5. THEOREME (cf. [18], Theorem 5). *Soient A et B deux C^*-algèbres (séparables) et* *soit $\mathscr{E}$ un A,B bimodule. Les propriétés suivantes sont équivalentes:*

(i) *Pour toute C^*-algèbre D, l'application $A \otimes_{\max} D \to \mathscr{L}(\mathscr{E} \otimes_{\max} D)$ se factorise à travers $A \otimes_{\min} D$.*

(ii) *L'application $A \to \mathscr{L}(\mathscr{E})$ est strictement nucléaire.*

(iii) *Pour tout $\xi_1, \ldots, \xi_n \in \mathscr{E}$ l'application $a \to \langle \xi_i, a\xi_j \rangle$ de A dans $M_n(B)$ est (normiquement) nucléaire.*

(iv) *Pour toute représentation $\pi: \tilde{A} \to \mathscr{L}(H)$ telle que $\pi^{-1}(\mathscr{K}) = \{0\}$ il existe une suite $u_n \in \mathscr{L}(\mathscr{E}, H \otimes B)$ telle que pour tout n*

$$a - u_n^*(\pi(a) \otimes 1)u_n \in \mathscr{K}(\mathscr{E}), \quad u_n^* u_n = 1 \ \text{et} \ \lim_{n \to \infty} u_n^*(\pi(a) \otimes 1)u_n = a$$

(pour tout $a \in A$)

(v) *Pour toute π comme en* (iv), *il existe une isométrie $u \in \mathscr{L}(H \otimes \mathscr{E}, H \otimes B)$ telle que pour tout $a \in A$ $1 \otimes a - u^*(\pi(a) \otimes 1)u \in \mathscr{K}(H \otimes \mathscr{E})$.*

(vi) *Il existe $\pi: A \to \mathscr{L}(H)$ et une isométrie $u \in \mathscr{L}(H \otimes \mathscr{E}, H \otimes B)$ telle que pour tout $a \in A$ $1 \otimes a - u^*(\pi(a) \otimes 1)u \in \mathscr{K}(H \otimes \mathscr{E})$.*

($\tilde{A}$ désigne l'algèbre A à laquelle on a adjoint une unité et H l'espace de Hilbert séparable de dimension infinie.)

Preuve. L'équivalence (i)$\Leftrightarrow$(ii) résulte de la proposition 1.2.

(ii)$\Rightarrow$(iii): Soit ψ: $\mathscr{L}(\mathscr{E}) \to M_n(B)$ donné par $\psi(T) = (\langle \xi_j, T\xi_k \rangle)_{j,k}$.

Il suffit de remarquer que si φ_i converge vers une application complètement positive φ pour la topologie simple stricte, alors $\psi \circ \varphi_i$ converge vers $\psi \circ \varphi$ pour la topologie simple normique.

(iii)$\Rightarrow$(iv) résulte de la démonstration de la généralisation par Kasparov d'un théorème de Voiculescu (cf. [18] démonstration du théorème 5).

(iv)$\Rightarrow$(vi): Soit π comme en (iv) et soit $\pi': A \to \mathscr{L}(l^2(\mathbb{N}) \otimes H)$ $\pi' = 1 \otimes \pi$. Soit $u_n \in \mathscr{L}(\mathscr{E}, H \otimes B)$ vérifiant $u_n^* u_n = 1$,

$$a - u_n^*(\pi(a) \otimes 1)u_n \in \mathscr{K}(\mathscr{E}) \quad \text{et} \quad \lim_{n \to \infty} u_n^*(\pi(a) \otimes 1)u_n = a.$$

Soit $u \in \mathscr{L}(l^2(\mathbb{N}) \otimes \mathscr{E}, l^2(\mathbb{N}) \otimes H \otimes B)$ donné par

$$(u\xi)(n) = u_n \xi(n) \quad (\xi \in l^2(\mathbb{N}) \otimes \mathscr{E} = l^2(\mathbb{N}; \mathscr{E})).$$

Il est alors clair que $1 \otimes a - u^*(\pi'(a) \otimes 1)u \in \mathscr{K}(l^2(\mathbb{N}) \otimes \mathscr{E})$.

(vi)$\Rightarrow$(i): Soit D une C^*-algèbre et ρ: $A \otimes_{\max} D \to \mathscr{L}(\mathscr{E} \otimes_{\max} D)$,

$$j: \ \mathscr{L}(\mathscr{E} \otimes_{\max} D) \to \mathscr{L}(H \otimes \mathscr{E} \otimes_{\max} D)$$

et

$$q: \ \mathscr{L}(H \otimes \mathscr{E} \otimes_{\max} D) \to \mathscr{L}(H \otimes \mathscr{E} \otimes_{\max} D)/\mathscr{K}(H \otimes \mathscr{E} \otimes_{\max} D)$$

les applications naturelles.

Considérons la composée

$$\rho': A \otimes_{\min} D \xrightarrow{\pi \otimes \mathrm{id}_D} \mathscr{L}(H \otimes D) \to \mathscr{L}(H \otimes B \otimes_{\max} D).$$

Si (vi) est vérifié il existe $u \in \mathscr{L}(H \otimes \mathscr{E}, H \otimes B)$ tel que pour tout $x \in A \otimes_{\max} D$

$$q \circ j \circ \rho(x) = q((u^* \otimes 1)\rho'(x)(u \otimes 1)).$$

Donc $q \circ j \circ \rho$ se factorise à travers $A \otimes_{\min} D$ et comme $q \circ j$ est injective ρ elle-même se factorise à travers $A \otimes_{\min} D$.

(v)$\Rightarrow$(vi) est élémentaire.

(i)$\Rightarrow$(v): Si $\mathscr{E}$ vérifie (i) $H \otimes \mathscr{E}$ muni de l'action $a \to 1 \otimes a$ de A vérifie aussi (i), et par (i)$\Rightarrow$(iv) $H \otimes \mathscr{E}$ vérifie (iv)) et donc $\mathscr{E}$ vérifie (v). □

1.6. DEFINITION. Le A,B bimodule $\mathscr{E}$ sera dit nucléaire s'il satisfait les propriétés équivalentes du théorème 1.5.

1.7. *Remarque.* Il est immédiat que le A,A bimodule A est nucléaire si et seulement si l'algèbre A est nucléaire. Plus généralement, si A ou B est nucléaire, tout A,B bimodule est nucléaire (conditions (i) ou (iii) du théorème 1.5).

Les deux prochains résultats, bien qu'élémentaires, seront utiles dans ce qui suit:

1.8. PROPOSITION. *Soient A,B,C trois C^*-algèbres, $\mathscr{E}$ un A,B bimodule et $\mathscr{E}'$ un B,C bimodule. Alors si $\mathscr{E}$ ou $\mathscr{E}'$ est nucléaire, le A,C bimodule $\mathscr{E} \otimes_B \mathscr{E}'$ l'est.*

Preuve. Soit D une C^*-algèbre. Si $\mathscr{E}$ est nucléaire on a la composition

$$A \otimes_{\min} D \to \mathscr{L}(\mathscr{E} \otimes_{\max} D) \to \mathscr{L}((\mathscr{E} \otimes_B \mathscr{E}') \otimes_{\max} D).$$

Si $\mathscr{E}'$ est nucléaire, on a

$$\begin{aligned}(\mathscr{E} \otimes_B \mathscr{E}') \otimes_{\max} D &= (\mathscr{E} \otimes_{\max} D) \otimes_{B \otimes_{\max} D} (\mathscr{E}' \otimes_{\max} D)\\ &= (\mathscr{E} \otimes_{\min} D) \otimes_{B \otimes_{\min} D} (\mathscr{E}' \otimes_{\max} D)\end{aligned}$$

□

1.9. LEMME. *Si $\mathscr{E}_j$ est un (A_j, B_j) bimodule nucléaire $j = 1,2$ alors $\mathscr{E}_1 \otimes_{\max} \mathscr{E}_2$ est un $A_1 \otimes_{\min} A_2, B_1 \otimes_{\max} B_2$ bimodule nucléaire.*

Preuve. Utilisons la propriété (i) du théorème 1.5. Soit D une C^*-algèbre. Notons que $(B_1 \otimes_{\max} D) \otimes_{\min} \tilde{A}_2$ est un quotient de $B_1 \otimes_{\max} (\tilde{A}_2 \otimes_{\min} D)$. Donc $B_1 \otimes_{\max} \mathscr{E}_2 \otimes_{\max} D$ est un $B_1 \otimes_{\max} (\tilde{A}_2 \otimes_{\min} D)$, $B_1 \otimes_{\max} B_2 \otimes_{\max} D$ bimodule. Et donc

$$\mathscr{E}_1 \otimes_{\max} \mathscr{E}_2 \otimes_{\max} D = (\mathscr{E}_1 \otimes_{\max} (\tilde{A}_2 \otimes_{\min} D)) \otimes_{B_1 \otimes_{\max} (\tilde{A}_2 \otimes_{\min} D)} B_1 \otimes_{\max} \mathscr{E}_2 \otimes_{\max} D$$

est un $A_1 \otimes_{\min} A_2 \otimes_{\min} D, B_1 \otimes_{\max} B_2 \otimes_{\max} D$ bimodule. □

1.10. *Remarque.* Tout ce qui précède reste vrai dans le cas des C^*-algèbres $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ graduées. Ainsi on peut définir le produit tensoriel gradué 'max' $\mathscr{E}_1 \hat{\otimes}_{\max} \mathscr{E}_2$ de deux C^*-modules hilbertiens. Aussi on peut définir la nucléarité pour les bimodules gradués:

un A, B bimodule gradué $\mathscr{E}$ est nucléaire si le bimodule trivialement gradué sous-jacent est nucléaire. De plus il existe un A, B bimodule gradué nucléaire $\mathscr{E}_u$ tel que pour tout bimodule nucléaire $\mathscr{E}$ et tout espace de Hilbert gradué séparable H, il existe une isométrie *u de degré zéro* avec $u^* au - 1_H \otimes a \in \mathscr{K}(H \otimes \mathscr{E})$. On en déduit aisément qu'il existe un *unitaire* $u \in \mathscr{L}(H \hat{\otimes} \mathscr{E} \oplus \mathscr{E}_u, \mathscr{E}_u)$ de degré zéro qui entrelace les actions de A modulo les compacts.

Pour construire un tel $\mathscr{E}_u$ il suffit de prendre une représentation fidèle $\pi: A \to \mathscr{L}(H)$ préservant le degré. Soit alors H' un espace de Hilbert séparable avec $\dim H'^{(0)} = \dim H'^{(1)} = +\infty$. On peut alors prendre $\mathscr{E}_u = H \hat{\otimes} H' \hat{\otimes} B$ muni de l'action de A $a \to \pi(a) \hat{\otimes} 1 \hat{\otimes} 1$ – cf. [18], Theorem 5, avec $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

2. Le Bifoncteur 'KK_{nuc}'

Dans ce paragraphe nous construisons un bifoncteur 'KK_{nuc}'. Bien que celui-ci ne semble pas d'un grand intérêt propre, il constitue un bon cadre pour nos résultats et nous sera techniquement utile dans la suite.

2.1. DÉFINITION (cf. [19] §4, définitions 1,2,3). Soient A et B deux C^* – algèbres graduées (séparables)

(a) $\mathfrak{E}_{\text{nuc}}(A, B)$ désigne l'ensemble des A, B bimodules de Kasparov $(\mathscr{E}. F)$ où $\mathscr{E}$ est un A, B bimodule nucléaire.
(b) $\mathscr{D}_{\text{nuc}}(A, B) = \mathfrak{E}_{\text{nuc}}(A, B) \bigcap \mathscr{D}(A, B)$.
(c) $KK_{\text{nuc}}(A, \text{B})$ désigne le groupe des classes d'homotopie d'éléments de $\mathfrak{E}_{\text{nuc}}(A, B)$, une homotopie étant un élément de $\mathfrak{E}_{\text{nuc}}(A, B([0,1]))$.
(d) $\theta: KK_{\text{nuc}}(A, B) \to KK(A, B)$ est le foncteur d'oubli donné par $\theta(\mathscr{E}, F) = (\mathscr{E}, F)$.

Notons que si A ou B est nucléaire, $KK_{\text{nuc}}(A, B) = KK(A, B)$ (remarque 1.7).

Nous rassemblons certaines propriétés de KK_{nuc} dans la proposition suivante. Nous n'en donnons pas de démonstration. Toutes ces propriétés se déduisent des énoncés analogues pour les groupes de Kasparov (à l'aide dela proposition 1.8).

2.2. PROPOSITION. (a) *Le bifoncteur KK_{nuc} est invariant par homotopie en A et en B* (*cf.* [19], §4 *Theorem* 3).

(b) *Le produit de Kasparov définit des applications bilinéaires*

$$\otimes_B: KK_{\text{nuc}}(A, B) \times KK(B, C) \to KK_{\text{nuc}}(A, C)$$

et

$$\otimes_B: KK(A, B) \times KK_{\text{nuc}}(B, C) \to KK_{\text{nuc}}(A, C)$$

telles que

$$\theta(x \otimes_B y) = \theta(x) \otimes_B y, \qquad \theta(y \otimes_B x) = y \otimes_B \theta(x);$$

$$1_A \otimes_A x = x \otimes_B 1_B = x, \qquad \theta(x_1) \otimes_B x_2 = x_1 \otimes_B \theta(x_2);$$

$$y_1 \otimes (y_2 \otimes x) = (y_1 \otimes y_2) \otimes x, \qquad (x \otimes y_1) \otimes y_2 = x \otimes (y_1 \otimes y_2)$$

et

$$(y_1 \otimes x) \otimes y_2 = y_1 \otimes (x \otimes y_2)$$

(*où x, x_1, x_2 sont des éléments d'un groupe 'KK_{nuc}' et y, y_1, y_2 d'un groupe KK*) (*cf.* [19], §4 *Theorem* 4).

(c) *Si $(\mathscr{E}_1, F_1)$ et $(\mathscr{E}_2, F_2)$ définissent le même élément de $KK_{\text{nuc}}(A, B)$, il existe $(\mathscr{E}'_1, F'_1)$ et $(\mathscr{E}'_2, F'_2) \in \mathscr{D}_{\text{nuc}}(A, B)$ avec $(\mathscr{E}_1 \otimes \mathscr{E}'_1, F_1 \otimes F'_1)$ et $(\mathscr{E}_2 \otimes \mathscr{E}'_2, F_2 \otimes F'_2)$ opératoriellement homotopes* ([19], §6 *Theorem* 1). □

La partie (b) de la proposition 2.2 définit l'analogue en 'KK_{nuc}' de la composition en théorie de Kasparov (ou produit de Kasparov 'interne'). Nous allons construire l'analogue du produit de Kasparov 'externe' (c'est-à-dire de '$\otimes_{\mathbb{C}}$'). Nous avons besoin d'une remarque:

2.3. *Remarque.* Soient A, B, D des C^*-algèbres graduées (D avec unité approchée dénombrable) et soit $(\mathscr{E}, F)$ un (A, B) bimodule de Kasparov.

Alors $(\mathscr{E} \hat{\otimes}_{\max} D, F \hat{\otimes} 1)$ est un $(A \hat{\otimes}_{\max} D, B \hat{\otimes}_{\max} D)$ bimodule de Kasparov. Sa classe dans $KK(A \hat{\otimes}_{\max} D, B \hat{\otimes}_{\max} D)$ ne dépend bien sûr que de celle de $(\mathscr{E}, F)$ dans $KK(A, B)$. Notons la $\tau_{D,\max}[(\mathscr{E}, F)]$.

Rappelons que Kasparov définit

$$\tau_D[(\mathscr{E}, F)] \in KK(A \hat{\otimes}_{\min} D, B \hat{\otimes}_{\min} D) - \text{par } \tau_D[(\mathscr{E}, F)] = [(\mathscr{E} \hat{\otimes}_{\min} D, F \hat{\otimes} 1)].$$

Nous noterons $\tau_{D,\min}$ au lieu de τ_D pour éviter toute confusion.

Soient

$$p_{A,D}: A \hat{\otimes}_{\max} D \to A \hat{\otimes}_{\min} D \quad \text{et} \quad p_{B,D}: B \hat{\otimes}_{\max} D \to B \hat{\otimes}_{\min} D$$

les homomorphismes naturels. On a pour tout $x \in KK(A, B)$,

$$p_{B,D*}(\tau_{D,\max}(x)) = p^*_{A,D}(\tau_{D,\min}(x)) \in KK(A \hat{\otimes}_{\max} D, B \hat{\otimes}_{\min} D).$$

De plus $\tau_{D,\max}(1_A) = 1_{A \otimes_{\max} D}$ et pour tout $x \in KK(A, B)$,

$$y \in KK(B, C), \quad \tau_{D,\max}(x \otimes_B y) = \tau_{D,\max}(x) \otimes_{B \hat{\otimes}_{\max} D} \tau_{D,\max}(y).$$

(cf. [19] §4 Theorem 4).

Notons aussi $A \hat{\otimes}_{\text{rel}} D = \text{Ker}(p_{A,D})$. Si $\mathscr{E}$ est un C^*-module hilbertien sur B, posons

$$\mathscr{E} \hat{\otimes}_{\text{rel}} D = \{\xi \in \mathscr{E} \hat{\otimes}_{\max} D / p_{B,D}(\langle \xi, \xi \rangle) = 0\};$$

c'est un C^*-module hilbertien sur $B \hat{\otimes}_{\text{rel}} D$. Comme $B \hat{\otimes}_{\text{rel}} D$ est un idéal de $B \hat{\otimes}_{\max} D$, pour tout $T \in \mathscr{L}(\mathscr{E} \hat{\otimes}_{\max} D)$ on a $T(\mathscr{E} \hat{\otimes}_{\text{rel}} D) \subseteq \mathscr{E} \hat{\otimes}_{\text{rel}} D$. Si $\mathscr{E}$ est un A, B bimodule pour tout $x \in A \hat{\otimes}_{\text{rel}} D$ on a $x(\mathscr{E} \hat{\otimes}_{\max} D) \subseteq \mathscr{E} \hat{\otimes}_{\text{rel}} D$ et donc $x \cdot \mathscr{K}(\mathscr{E} \hat{\otimes}_{\max} D) \subseteq \mathscr{K}(\mathscr{E} \hat{\otimes}_{\text{rel}} D)$. On en déduit que $(\mathscr{E} \hat{\otimes}_{\text{rel}} D, F \hat{\otimes} 1)$ est un $(A \hat{\otimes}_{\text{rel}} D, B \hat{\otimes}_{\text{rel}} D)$ bimodule de Kasparov. Sa classe dans $KK(A \hat{\otimes}_{\text{rel}} D, B \hat{\otimes}_{\text{rel}} D)$ ne dépend que de celle de $(\mathscr{E}. F)$ dans $KK(A, B)$. Notons la $\tau_{D,\text{rel}}[(\mathscr{E}, F)]$.

On a $\tau_{D,\text{rel}}(1_A) = 1_{A \otimes_{\text{rel}} D}$ et pour $x \in KK(A, B)$, $y \in KK(B, C)$ on a

$$\tau_{D,\text{rel}}(x \hat{\otimes}_B y) = \tau_{D,\text{rel}}(x) \otimes_{B \hat{\otimes}_{\text{rel}} D} \tau_{D,\text{rel}}(y).$$

2.4. PROPOSITION. (a) *Pour toute algèbre D (séparable) et tout $(\mathscr{E},F)\in\mathfrak{E}_{\mathrm{nuc}}(A,B)$, $(\mathscr{E}\hat{\otimes}_{\max}D, F\hat{\otimes}1)$ est un $(A\hat{\otimes}_{\min}D, B\hat{\otimes}_{\max}D)$ bimodule de Kasparov. Sa classe dans $KK(A\hat{\otimes}_{\min}D, B\hat{\otimes}_{\max}D)$ ne dépend que de celle de $(\mathscr{E},F)$ dans $KK_{\mathrm{nuc}}(A,B)$. Nous la noterons $\tau_D[(\mathscr{E},F)]$. On a, pour tout $x\in KK_{\mathrm{nuc}}(A,B)$*

$$p^*_{A,D}(\tau_D(x))=\tau_{D,\max}(\theta(x)),\qquad p_{B,D*}(\tau_D(x))=\tau_{D,\min}(\theta(x)).\quad \tau_{D,\mathrm{rel}}(\theta(x))=0.$$

(b) *On a une application bilinéaire*

$$\otimes_{\mathbb{C}}\colon KK_{\mathrm{nuc}}(A_1,B_1)\times KK_{\mathrm{nuc}}(A_2,B_2)\to KK_{\mathrm{nuc}}(A_1\hat{\otimes}_{\min}A_2,B_1\hat{\otimes}_{\max}B_2)$$

telle que

$$\begin{aligned}\theta(x_1\otimes_{\mathbb{C}}x_2)&=\tau_{A_2}(x_1)\otimes_{B_1\hat{\otimes}_{\max}A_2}\tau_{B_1,\max}(\theta(x_2))\\&=\tau_{A_2,\min}(\theta(x_1))\otimes_{B_1\hat{\otimes}_{\min}A_2}\tau_{B_1}(x_2)\end{aligned}$$

pour tout $x_j\in KK_{\mathrm{nuc}}(A_j,B_j)$ $(j=1,2)$.

Preuve. (a) résulte de la définition des bimodules nucléaires (propriété (i) de 1.5). (b) résulte du lemme 1.9. □

Notre prochain but est de prouver que le foncteur $B\to KK_{\mathrm{nuc}}(A,B)$ est demi-exact (proposition 2.7). Nous aurons besoin d'un lemme facile.

2.5. LEMME. *Soient A et B deux C^*-algèbres $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ graduées et $(\mathscr{E}_1,F_1)$, $(\mathscr{E}_2,F_2)$ deux A,B bimodules de Kasparov.*

Soit $u\in\mathscr{L}(\mathscr{E}_1,\mathscr{E}_2)$ un unitaire de degré zéro entrelaçant les actions de A modulo les compacts. Alors les bimodules de Kasparov $(\mathscr{E}_1,F_1)\oplus(\mathscr{E}_2,F_2)$ et $(\mathscr{E}_1,u^*F_2u)\oplus(\mathscr{E}_2,uF_1u^*)$ sont opératoriellement homotopes.

Preuve. Soit

$$U_\theta=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta u^*\\ \sin\theta u & \cos\theta\end{bmatrix}\in\mathscr{L}(\mathscr{E}_1\oplus\mathscr{E}_2).$$

Alors

$$U_\theta(F_1\oplus F_2)U_\theta^*,\quad \theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$$

est l'homotopie cherchée. □

Soient A et B deux C^*-algèbres $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ graduées séparables.
Soit $\pi\colon\tilde{A}\to\mathscr{L}(H)$ une représentation fidèle de $\tilde{A}$ préservant le degré, dans l'espace de Hilbert gradué séparable H. Soit H' un espace de Hilbert gradué tel que $H'^{(0)}$ et $H'^{(1)}$ soient tous deux de dimension infinie (dénombrable).

Soit $\mathscr{E}_u$ le A,B bimodule $H\hat{\otimes}H'\hat{\otimes}B$ (où A agit par $\pi\hat{\otimes}1\hat{\otimes}1$).

Soit $\varepsilon\in\mathscr{L}(H')$ avec, $\partial\varepsilon=1$, $\varepsilon=\varepsilon^*$, $\varepsilon^2=1$.

2.6. PROPOSITION. (a) *Pour tout $x\in KK_{\mathrm{nuc}}(A,B)$ il existe $F\in\mathscr{L}(\mathscr{E}_u)$ tel que $(\mathscr{E}_u,F)$ soit un bimodule de Kasparov représentant x (dans KK_{nuc}).*

(b) *Si F_1 et $F_2\in\mathscr{L}(\mathscr{E}_u)$ sont tels que $(\mathscr{E}_u,F_1)$ et $(\mathscr{E}_u,F_2)$ sont des A,B bimodules de Kasparov définissant le même élément de $KK_{\mathrm{nuc}}(A,B)$ alors $(\mathscr{E}_u,F_1)\oplus(\mathscr{E}_u,1\hat{\otimes}\varepsilon\hat{\otimes}1)$ et $(\mathscr{E}_u,F_2)\oplus(\mathscr{E}_u,1\hat{\otimes}\varepsilon\hat{\otimes}1)$ sont opératoriellement homotopes.*

Preuve. (a) Soit $(\mathscr{E},F)$ un bimodule de Kasparov avec $\mathscr{E}$ nucléaire alors $\mathscr{E}\hat{\otimes}H'$ est un $A\hat{\otimes}\mathscr{C}_1,B$ bimodule de Kasparov nucléaire où $\mathscr{C}_1$ est la première algèbre de Clifford (i.e. l'algèbre $\mathbb{C}+\varepsilon\mathbb{C}\subseteq\mathscr{L}(H')$). Soit aussi $T\in\mathscr{L}(H')$, $\partial T=1$ $T=T^*$ et $T^2=1-p_0$ où p_0 est un projecteur de dimension 1 et d'image dans $H'^{(0)}$.

Comme le $\tilde{A}\hat{\otimes}\mathscr{C}_1,B$ bimodule $\mathscr{E}_u$ vérifie les conditions de la remarque 1.10, il existe un unitaire $u\in\mathscr{L}(\mathscr{E}\hat{\otimes}H'\oplus\mathscr{E}_u,\mathscr{E}_u)$ de degré zéro entrelaçant les actions de $\tilde{A}\hat{\otimes}\mathscr{C}_1$ modulo les compacts.

Soient $(\mathscr{E}_1,F_1)$ et $(\mathscr{E}_2,F_2)$ les A,B bimodules de Kasparov

$$(\mathscr{E}_2,F_2)=(\mathscr{E}_u,1\hat{\otimes}\varepsilon\hat{\otimes}1)\quad\text{et}\quad(\mathscr{E}_1,F_1)=(\mathscr{E}\hat{\otimes}H',F\hat{\otimes}p_0+1\hat{\otimes}T)\oplus(\mathscr{E}_2,F_2).$$

Alors $(\mathscr{E}_1,F_1)$ et $(\mathscr{E},F)$ définissent le même élément de $KK_{\mathrm{nuc}}(A,B)$ et $(\mathscr{E}_2,F_2)\in\mathscr{D}_{\mathrm{nuc}}(A,B)$. De plus, comme u entrelace modulo les compacts les actions de $\mathscr{C}_1$, $(\mathscr{E}_1,u^*F_2u)$ est opératoriellement homotope à l'élément dégénéré $(\mathscr{E}_1,1\hat{\otimes}\varepsilon)$. Donc par le lemme 2.5 $(\mathscr{E},F)$ et $(\mathscr{E}_2,uF_1u^*)=(\mathscr{E}_u,uF_1u^*)$ définissent le même élément de $KK_{\mathrm{nuc}}(A,B)$.

(b) Par la proposition 2.2.(c) il existe $(\mathscr{E},F)\in\mathscr{D}_{\mathrm{nuc}}(A,B)$ avec $(\mathscr{E}_u\oplus\mathscr{E},F_1\oplus F)$ et $(\mathscr{E}_u\oplus\mathscr{E},F_2\oplus F)$ opératoriellement homotopes. Comme $(\mathscr{E},F)$ est dégénéré, $\mathscr{E}$ est un $A\hat{\otimes}\mathscr{C}_1$, B bimodule (par $\varepsilon\to F$). Il est clair que c'est un bimodule nucléaire. Soit alors $u\in\mathscr{L}(\mathscr{E}\oplus\mathscr{E}_u,\mathscr{E}_u)^{(0)}$ entrelaçant modulo les compacts les actions de $A\hat{\otimes}\mathscr{C}_1$. Soit $F^t\in\mathscr{L}(\mathscr{E}_u\oplus\mathscr{E})$ une homotopie entre $F_1\oplus F$ et $F_2\oplus F$. Posons

$$G^t=F^t\oplus1\hat{\otimes}\varepsilon\hat{\otimes}1\in\mathscr{L}(\mathscr{E}_u\oplus\mathscr{E}\oplus\mathscr{E}_u)\quad\text{et}$$

$$U=1\oplus u\in\mathscr{L}(\mathscr{E}_u\oplus\mathscr{E}\oplus\mathscr{E}_u,\mathscr{E}_u\oplus\mathscr{E}_u).$$

Alors UG_tU^* est une homotopie opératorielle entre $(\mathscr{E}_u\oplus\mathscr{E}_u,F_1\oplus F')$ et $(\mathscr{E}_u\oplus\mathscr{E}_u,F_2\oplus F')$ où $F'=u(F\oplus1\hat{\otimes}\varepsilon\hat{\otimes}1)u^*\in\mathscr{L}(\mathscr{E}_u)$.

Comme u entrelace les actions de $A\hat{\otimes}\mathscr{C}_1$ modulo les compacts $A\cdot(F'-1\hat{\otimes}\varepsilon\hat{\otimes}1)\subseteq\mathscr{K}(\mathscr{E}_u)$ et donc $(\mathscr{E}_u,F')$ et $(\mathscr{E}_u,1\hat{\otimes}\varepsilon\hat{\otimes}1)$ sont opératoriellement homotopes. □

Nous sommes maintenant en mesure de prouver la demi-exactitude du foncteur $B\to KK_{\mathrm{nuc}}(A,B)$.

2.7. PROPOSITION. *Soient A et B des C^*-algèbres séparables graduées et $0\to J\to B\xrightarrow{p}B/J\to0$ une suite exacte d'algèbres graduèes. On a alors une suite exacte*

$$\ldots\to KK_{\mathrm{nuc}}(A,B/J(\mathbb{R}^{n+1}))\to KK_{\mathrm{nuc}}(A,J(\mathbb{R}^n))\to KK_{\mathrm{nuc}}(A,B(\mathbb{R}^n))\to$$
$$\to KK_{\mathrm{nuc}}(A,B/J(\mathbb{R}^n))\to\ldots$$

Preuve. Par le lemme 5 du §7 de [19], il suffit de montrer l'exactitude en B. Soit $\mathscr{E}_u$ le A,B bimodule comme ci-dessus et $\mathscr{E}'_u=\mathscr{E}_u\hat{\otimes}_B(B/J)$. Soit $x\in KK_{\mathrm{nuc}}(A,B)$ d'après 2.6.a,

x est représenté par $(\mathscr{E}_u, F)$. Si $p_*(x) = 0$,

$$(\mathscr{E}'_u, F) \oplus (\mathscr{E}'_u, 1 \hat{\otimes} \varepsilon \hat{\otimes} 1) \quad \text{et} \quad (\mathscr{E}'_u, 1 \hat{\otimes} \varepsilon \hat{\otimes} 1) \oplus (\mathscr{E}'_u, 1 \hat{\otimes} \varepsilon \hat{\otimes} 1)$$

sont opératoriellement homotopes. Alors par le lemme 3.3 et la preuve du lemme 3.2 de [30], $x \in j_*(KK_{\text{nuc}}(A, J))$ (le lemme 3.2 dit que $\theta(x) \in j_*(KK(A, J))$-cependant il est clair que le A, J bimodule $\mathscr{E}'$ et le $A, B[0, 1]$ bimodule $\tilde{\mathscr{E}}$ de la preuve de 3.2 sont nucléaires). □

2.8. *Remarque.* Il résulte de la proposition 2.6 la généralisation suivante d'un résultat de Valette ([35] – ce résultat généralisait un résultat de Paschke [26]):

Soient A, B deux algèbres *trivialement graduées* séparables et soit $\pi: A \to \mathscr{L}(H)$ une représentation telle que $\pi^{-1}(\mathscr{K}) = \{0\}$. Soit

$$\mathscr{A} = \{T \in \mathscr{L}(H \otimes B) / \forall a \in A,\ [T, \pi(a) \otimes 1] \in \mathscr{K}(H) \otimes B\}$$

et

$$\mathscr{J} = \{T \in \mathscr{A} / T(\pi(a) \otimes 1) \in \mathscr{K}(H) \otimes B,\ \forall a \in A\}.$$

Alors

$$KK_{\text{nuc}}(A, B) = K_1(\mathscr{A}/\mathscr{J}) \quad \text{et} \quad KK_{\text{nuc}}(A, B \hat{\otimes} \mathscr{C}_1) = K_0(\mathscr{A}/\mathscr{J}).$$

En particulier si A ou B est nucléaire en K-théorie (cf. §3) $KK(A, B) = K_1(\mathscr{A}/\mathscr{J})$ et $KK^1(A, B) = K_0(\mathscr{A}/\mathscr{J})$.

Notons que si A est unitale et $\pi(1) = 1$ et si A ou B est nucléaire en K-théorie on a avec les notations de [31], $\text{Ext}_s(A, B)^{-1} = K_0(\mathscr{A})$ comme le montre le 'lemme des cinq' appliqué aux suites exactes

$$\begin{array}{ccccccccc}
K_1(\mathscr{A}/\mathscr{J}) & \to & K_0(\mathscr{J}) & \to & K_0(\mathscr{A}) & \longrightarrow & K_0(\mathscr{A}/\mathscr{J}) & \longrightarrow & K_{-1}(\mathscr{J}) \\
\| & & \| & & \downarrow{\scriptstyle\varphi} & & \| & & \| \\
KK(A, B) & \to & K_0(B) & \to & \text{Ext}_s(A, B)^{-1} & \to & KK^1(A, B) & \to & K_{-1}(B)
\end{array}$$

(cf. [31]). Ici $\mathscr{J} = \mathscr{K}(H) \otimes B$ et, si p est un projecteur de $M_n(\mathscr{A})$, $\psi(p)$ est l'extension unitale $\varphi(p): A \to \mathscr{L}(\mathscr{E}_p)/\mathscr{K}(\mathscr{E}_p)$ où $\mathscr{E}_p = p(\mathbb{C}^n \otimes H \otimes B)$.

3. Algèbres nucléaires en K-théorie

Soit A une C^*-algèbre (séparable) graduée.

3.1. DÉFINITION. Nous dirons que A est nucléaire en K-théorie si il existe un A, A bimodule nucléaire $\mathscr{E}$ et $F \in \mathscr{L}(\mathscr{E})$ tels que $(\mathscr{E}, F)$ soit un bimodule de Kasparov de classe 1_A dans $KK(A, A)$.

En termes du foncteur KK_{nuc}, cela signifie qu'il existe $u \in KK_{\text{nuc}}(A, A)$ avec $\theta(u) = 1_A$.

3.2. PROPOSITION. *Les propriétés suivantes sont équivalentes:*

(i) *A est nucléaire en K-théorie.*

(ii) *Pour toute algèbre (séparable) $B, \theta: KK_{\text{nuc}}(A, B) \to KK(A, B)$ est un isomorphisme*

(iii) *Pour toute C^*-algèbre (séparable) $B, \theta: KK_{\text{nuc}}(B, A) \to KK(B, A)$ est un isomorphisme.*

Preuve. Il est clair que chacune des propriétés (ii) et (iii) implique (i) (en prenant $B = A$).

Supposons que (i) soit vérifié et soit $u \in KK_{\text{nuc}}(A, A)$ avec $\theta(u) = 1_A$. Alors les applications $u \otimes_A \cdot: KK(A, B) \to KK_{\text{nuc}}(A, B)$ et $\cdot \otimes_A u: KK(B, A) \to KK_{\text{nuc}}(B, A)$ sont inverses de θ par la proposition 2.2b. □

La proposition (élémentaire) suivante nous permet de construire beaucoup d'algèbres nucléaires en K-théorie.

3.3. PROPOSITION. (a) *Si A est nucléaire, elle est nucléaire en K-théorie.*

(b) *Si A est K-(sous) équivalente à B et B est nucléaire en K-théorie alors A est nucléaire en K-théorie.*

(On dit que A est K-sous équivalente à B s'il existe $x \in KK(A, B)$ et $y \in KK(B, A)$ avec $1_A = x \otimes_B y$).

Preuve. (a) Résulte de la remarque 1.7.

(b) Comme $\theta: KK_{\text{nuc}}(A, B) \to KK(A, B)$ est surjective $x = \theta(x')$ et $1_A = \theta(x' \otimes_B y)$ (proposition 2.2b). □

3.4. EXEMPLES. (a) Si A est K-contractile (cf. [8], Proposition 5.4) alors A est évidemment nucléaire en K-théorie. En particulier pour toute C^*-algèbre graduée A, $A([0, 1[)$ est nucléaire en K-théorie. Plus généralement si B est K-contractile $A \hat{\otimes}_{\min} B$, $A \hat{\otimes}_{\max} B$ et $A \hat{\otimes}_{\text{rel}} B$ sont nucléaires en K-théorie car K-contractiles.

(b) L'algèbre $A_1 \oplus A_2$ est nucléaire en K-théorie si et seulement si A_1 et A_2 le sont. Plus généralement si $0 \to J \to A \to A/J \to 0$ est une suite exacte *scindée* alors A est nucléaire en K-théorie si et seulement si J et A/J le sont (comme A et $J \oplus A/J$ sont K-équivalentes).

(c) Soit G un groupe localement compact et A une G-algèbre. Nous dirons que A est nucléaire en K-théorie équivariante si l'élément $1_A \in KK_G(A, A)$ est représentable sur un A, A bimodule nucléaire (en particulier une algèbre nucléaire est nucléaire en K-théorie équivariante pour toute action de groupe). Alors si G est une groupe localement compact moyennable en K-théorie au sens de Cuntz (cf. [6] et [17], définition 1.2) et A est une G algèbre nucléaire en K-théorie équivariante alors les algèbres $A \rtimes G$ et $A \rtimes_{\text{red}} G$ sont nucléaires en K-théorie.

En effet $A \rtimes G$ et $A \rtimes_{\text{red}} G$ étant K-équivalentes (cf. [6], Theorem 2.1 et [17], Proposition 3.4) il suffit de prouver que $A \rtimes G$ est nucléaire en K-théorie. Soit (H_1, F_1)

un représentant de $1 \in KK_G(\mathbb{C},\mathbb{C})$ avec la représentation de G dans H faiblement contenue dans la régulière ([17], définition 1.2) et $(\mathscr{E}_2, F_2)$ un représentant de $1_A \in KK_G(A, A)$ avec $\mathscr{E}_2$ nucléaire. On a $1_{A \rtimes G} = (1 \otimes_{\mathbb{C}} 1_A) \rtimes G$ (cf. [20]) et donc $1_{A \rtimes G}$ est représenté par $(\mathscr{E}, F)$ où $\mathscr{E} = (H_1 \hat{\otimes} \mathscr{E}_2) \rtimes G$.

Soit D une C^*-algèbre qu'on considère comme G-algèbre pour l'action triviale. Notons que

$$\begin{aligned}\mathscr{E} \hat{\otimes}_{\max} D &= (H_1 \hat{\otimes} \mathscr{E}_2 \hat{\otimes}_{\max} D) \rtimes G \\ &= [(H_1 \hat{\otimes} A \hat{\otimes}_{\min} D) \hat{\otimes}_{A \hat{\otimes}_{\min} D} (\mathscr{E}_2 \hat{\otimes}_{\max} D)] \rtimes G \\ &= (H_1 \hat{\otimes} (A \hat{\otimes}_{\min} D)) \rtimes G \hat{\otimes}_{(A \hat{\otimes}_{\min} D) \rtimes G} (\mathscr{E}_2 \hat{\otimes}_{\max} D) \rtimes G.\end{aligned}$$

Or comme l'ont déjà remarqué Julg et Valette (cf. [17], preuve de 3.4) $(H_1 \hat{\otimes} (A \hat{\otimes}_{\min} D)) \rtimes G$ est un $(A \hat{\otimes}_{\min} D) \rtimes_{\text{red}} G, (A \hat{\otimes}_{\min} D) \rtimes G$ bimodule. Mais $(A \hat{\otimes}_{\min} D) \rtimes_{\text{red}} G = (A \rtimes_{\text{red}} G) \hat{\otimes}_{\min} D$ est un quotient de $(A \rtimes G) \hat{\otimes}_{\min} D$. Donc $\mathscr{E}$ est un bimodule nucléaire.

Les algèbres nucléaires en K-théorie ont de bonnes propriétés vis-à-vis des produits tensoriels (3.5a) et des extensions (3.6, 3.7, 3.9). De plus ces constructions permettent d'obtenir de nouvelles algèbres nucléaires en K-théorie (3.5b et 3.8).

3.5. PROPOSITION. *Soient A et B deux C^*-algèbres graduées.*

(a) *Si A est nucléaire en K-théorie $p_{A,B}: A \hat{\otimes}_{\max} B \to A \hat{\otimes}_{\min} B$ est inversible en K-théorie et $A \hat{\otimes}_{\text{rel}} B = \operatorname{Ker}(p_{A,B})$ est K-contractile.*

(b) *Si A et B sont nucléaires en K-théorie $A \hat{\otimes}_{\min} B$ et $A \hat{\otimes}_{\max} B$ sont nucléaires en K-théorie.*

Preuve. (a) découle de la proposition 2.4a et de la remarque 2.3.

(b) découle de la proposition 2.4b □

Le prochain résultat généralise un résultat de Kasparov:

3.6. THÉORÈME (cf. [19] §7, Theorem 2). *Si A est une algèbre nucléaire en K-théorie le foncteur $KK(A,.)$ est 'demi-exact'*

Preuve. Résulte de la proposition 2.7. □

3.7. PROPOSITION. *Si J, B et B/J sont nucléaires en K-théorie on a la suite exacte*

$$\cdots \to KK(A, B/J(\mathbb{R}^{n+1})) \to KK(A, J(\mathbb{R}^n)) \to KK(A, B(\mathbb{R}^n)) \to$$
$$\to KK(A, B/J(\mathbb{R}^n)) \to \cdots$$

Preuve. Résulte de 2.7. □

3.8. PROPOSITION. *Soit $0 \to I \to A \to A/I \to 0$ une suite exacte semi-scindée (i.e. admettant un relèvement complètement positif). Si deux des algèbres I, A et A/I sont nucléaires en K-théorie la troisième l'est.*

Preuve. On a pour B séparable les diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccccccccc} \to KK_{\text{nuc}}(B,I) & \to & KK_{\text{nuc}}(B,A) & \to & KK_{\text{nuc}}(B,A/I) & \to & KK_{\text{nuc}}(B, I \hat{\otimes} \mathscr{C}_1) & \to \\ \downarrow \theta & & \downarrow \theta & & \downarrow \theta & & \downarrow \theta & \\ \to KK(B,I) & \to & KK(B,A) & \to & KK(B,A/I) & \to & KK(B, I \hat{\otimes} \mathscr{C}_1) & \to \end{array}$$

La suite du haut est exacte par la proposition 2.7.

Celle du bas est exacte par [9] ou [30]. On conclut alors par le 'lemme des cinq' et la proposition 3.2. □

3.9. THÉORÈME (cf. [19] §7 Theorem 3). *Si $0 \to I \to A \xrightarrow{p} A/I \to 0$ est une suite exacte d'algèbres nucléaires en K-théorie, alors pour toute algèbre B on a une suite exacte*

$$\ldots \to KK(A/I, B) \to KK(A,B) \to KK(I,B) \to KK^1(A/I, B) \to \cdots$$

Preuve. Utilisant la suite exacte semi-scindée $0 \to A/I(]0,1[) \to C_p \to A \to 0 \to$ et la proposition 3.8 on déduit que C_p est nucléaire en K-théorie. Appliquant à la suite exacte $0 \to I \xrightarrow{e} C_p \to A/I([0,1[) \to 0$ le théorème 3.6 on obtient que $e_*: KK(C_p, I) \to KK(C_p, C_p)$ est isomorphisme. Soit $x \in KK(C_p, I)$ avec $e_*(x) = x \otimes [e] = 1_{C_p}$. Comme I est aussi nucléaire en K-théorie $e_*: KK(I,I) \to KK(I, C_p)$ est injective. Or

$$e_*([e] \otimes x) = [e] \otimes (x \otimes [e]) = [e] = e_*(1_I)$$

donc $[e] \otimes x = 1_I$ et $[e]$ est inversible en K-théorie.

Le résultat se déduit alors de la 'suite exacte de Puppe' (cf. [9]). □

3.10. *Remarque.* Du théorème 3.6 il découle que si A est nucléaire en K-théorie, on peut construire un homomorphisme naturel de semi-groupes $\operatorname{Ext}(A,B) \to KK^1(A,B)$ de la manière suivante: Soit $x \in \operatorname{Ext}(A,B)$ donné par la suite exacte

$$0 \to \mathscr{K} \hat{\otimes} B \to D \xrightarrow{p} A \to 0 \quad \text{et} \quad e: \mathscr{K} \hat{\otimes} B \to C_p$$

l'inclusion naturelle. D'après la suite exacte $0 \to \mathscr{K} \hat{\otimes} B \xrightarrow{e} C_p \to A([0,1[) \to 0$ et le théorème 3.6, l'application $e_*: KK^1(A, \mathscr{K} \hat{\otimes} B) \to KK^1(A, C_p)$ est un isomorphisme. Soit $\beta_A \in KK^1(A, A(]0,1[)$ l'élément de Bott, et $j: A(]0,1[) \to C_p$ l'inclusion naturelle. On pose

$$\Phi(x) = (e_*)^{-1}(j_*(\beta_A)) \in KK^1(A,B).$$

Cet homomorphisme prolonge l'homomorphisme de groupes $\operatorname{Ext}(A,B)^{-1} \to KK^1(A,B)$ de [30].

Dans le cas où A et B sont trivialement graduées (et en considérant le 'Ext' non gradué) l'homomorphisme Φ est surjectif comme sa restriction à $\operatorname{Ext}(A,B)^{-1}$ est l'isomorphisme de [19]. Cependant Φ n'est injectif que si toute extension de A par $\mathscr{K} \otimes B$ est 'semi-scindée', i.e. si $\operatorname{Ext}(A,B) = \operatorname{Ext}(A,B)^{-1}$. Je ne sais pas si Φ devient injectif si dans $\operatorname{Ext}(A,B)$ on inclut l'homotopie dans les relations d'équivalence, autrement dit si toute extension est homotope à une extension 'semi-scindée'.

4. Exemple d'une algèbre non nucléaire en K-théorie

Le principal résultat de ce paragraphe est:

4.1. THÉORÈME. *Soit G un groupe de Lie connexe simple de rang un et soit Γ un sous-groupe discret infini de G, ayant la propriété T de Kazhdan* (cf. [23, 10]). *Alors $C^*_{\mathrm{red}}(\Gamma)$ n'est pas nucléaire en K-théorie.*

Rappelons (cf. [24]) que G a la propriété T si et seulement si G est localement isomorphe à $\mathrm{Sp}(n, 1)$ ou à F_4*, et qu'alors tout sous-groupe de covolume fini a la propriété T (cf. [23]).

Avant de démontrer ce théorème, tirons-en quelques conséquences:

4.2. COROLLAIRE. *Dans les conditions du théorème 4.1, l'algèbre $C^*_{\mathrm{red}}(\Gamma)$ n'est K-équivalente à aucune algèbre nucléaire.* □

Soit K un sous-groupe compact maximal de G et soient $\alpha \in KK_G(C_\tau(G/K), \mathbb{C})$, $\beta \in KK_G(\mathbb{C}, C_\tau(G/K))$ et $\gamma = \beta \otimes \alpha$ les éléments construits par Kasparov dans [20], §5. Notons

$$\alpha_{\Gamma,\mathrm{red}} \in KK(C_\tau(G/K) \rtimes \Gamma, C^*_{\mathrm{red}}(\Gamma)), \qquad \beta_{\Gamma,\mathrm{red}} \in KK(C^*_{\mathrm{red}}(\Gamma), \quad C_\tau(G/K) \rtimes \Gamma),$$

$$\gamma_{\Gamma,\mathrm{red}} = \beta_{\Gamma,\mathrm{red}} \otimes \alpha_{\Gamma,\mathrm{red}}$$

les éléments obtenus à partir d'α, β et γ par restriction à Γ puis par produit croisé réduit (cf. [20]).

4.3. COROLLAIRE. (a) *$\alpha_{\Gamma,\mathrm{red}}$ et $\beta_{\Gamma,\mathrm{red}}$ ne sont pas K-inversibles.* (b) $\gamma_{\Gamma,\mathrm{red}} \neq 1_{C^*_{\mathrm{red}}(\Gamma)}$. □

Ce corollaire, immédiate conséquence de 4.2 et de la nucléarité de $C_\tau(G/K) \rtimes \Gamma$, contredit une conjecture, plus ou moins répandue, selon laquelle pour tout groupe de Lie connexe G et toute G algèbre A on $\gamma_{A,\mathrm{red}} = 1_{A \rtimes \mathrm{red} G}$ (où $\gamma_{A,\mathrm{red}} = \tau_A(\gamma) \rtimes_{\mathrm{red}} G$) autrement dit (avec une hypothèse de K-orientation) que $A \rtimes_{\mathrm{red}} G$ et $A \rtimes K$ sont K-équivalentes. (Voir aussi la remarque 4.10).

La démonstration du théorème 4.1 repose sur la généralisation suivante d'un résultat d'Akemann et Ostrand [1].

Introduisons quelques notations: si Γ est un groupe discret, notons

$$p_\Gamma: C^*_{\mathrm{red}}(\Gamma) \otimes_{\max} C^*_{\mathrm{red}}(\Gamma) \to C^*_{\mathrm{red}}(\Gamma) \otimes_{\min} C^*_{\mathrm{red}}(\Gamma) = C^*_{\mathrm{red}}(\Gamma \times \Gamma)$$

l'homomorphisme naturel; π_Γ: $C^*_{\mathrm{red}}(\Gamma) \otimes_{\max} C^*_{\mathrm{red}}(\Gamma) \to \mathscr{L}(l^2(\Gamma))$ désigne la représentation donnée par $\pi_\Gamma(x \otimes y) = \lambda(x)\rho(y)$ où λ et ρ sont les représentations régulières gauche et droite.

4.4. THÉORÈME. *Soit G un groupe de Lie connexe simple et de rang 1 et soit Γ un sous-groupe discret de G. Alors, avec les notations ci-dessus $\pi_\Gamma(\mathrm{Ker}\, p_\Gamma) \subseteq \mathscr{K}(l^2(\Gamma))$.*

*Sinon il y a dans G une fonction de type négatif *propre* et aucun sous-groupe discret infini de G n'a la propriété T cf. [15], §7 et [11], §V.

Avant de démontrer ce théorème en adaptant à notre cadre la démonstration d'Akemann et Ostrand, nous en déduisons le théorème 4.1. Celui-ci est une conséquence immédiate de la proposition 3.5 et de:

4.5. COROLLAIRE. *Soit Γ comme en 4.1. Alors avec les notations ci-dessus, p_Γ n'induit pas un isomorphisme en K-théorie. En particulier la classe de p_Γ en KK-théorie n'est pas inversible.*

Preuve. Par la suite exacte de K-théorie, il est équivalent de dire que $K_*(\mathrm{Ker}\, p_\Gamma) \neq 0$. Par le théorème 4.4, comme un projecteur non nul de $\mathscr{K}$ définit un élément non nul de $K_0(\mathscr{K})$, il suffit de construire un projecteur $f \in \mathrm{Ker}(p_\Gamma)$ avec $\pi_\Gamma(f) \neq 0$.

Soit $\Delta: C^*(\Gamma) \to C^*_{\mathrm{red}}(\Gamma) \otimes_{\max} C^*_{\mathrm{red}}(\Gamma)$ l'application diagonale ($\Delta(u_g) = u_g \otimes u_g$) et soit $f_0 \in C^*(\Gamma)$ le projecteur correspondant à la représentation triviale (tel que $\sigma(f_0)$ soit le projecteur sur l'espace des vecteurs $\sigma(\Gamma)$ invariants pour toute représentation σ; par la propriété T, $f_0 \in C^*(\Gamma)$ – cf. [6], Remark 2.7). Posons $f = \Delta(f_0)$. Comme Γ n'est pas moyennable et que $p_\Gamma \circ \Delta$ définit sur $C^*(\Gamma)$ la norme de $C^*_{\mathrm{red}}(\Gamma)$, $p_\Gamma(f) = 0$. Comme $\pi_\Gamma \circ \Delta$ est la représentation adjointe de Γ et que e_1 est invariant par cette représentation $\pi_\Gamma(f) \neq 0$ (ici $(e_g) g \in \Gamma$ désigne la base canonique de $l^2(\Gamma)$). □

Pour démontrer le théorème 4.4 nous aurons besoin d'un lemme. Le G espace G/K est muni d'une métrique riemannienne G-invariante de courbure sectionnelle strictement négative. Pour a et b deux points de G/K, posons

$$F_{a,b} = \{x \in G/K, d(x, [a,b]) < 1\}$$

où $d(x,[a,b])$ désigne la distance de x au segment géodésique $[a,b]$ joignant a à b.

4.6. LEMME. *Soient a et a' deux points de G/K. Alors la fonction $b \mapsto \mathrm{vol}\,(F_{a,b} \Delta F_{a',b})$ est bornée sur G/K.*

Preuve. Comme a et a' jouent des rôles symétriques il suffit de majorer $\mathrm{vol}(F_{a,b} \setminus F_{a',b})$. Fixons b et notons $x_t \in [a,b]$ et $x'_t \in [a',b]$ les points tels que

$$d(x_t, b) = d(x'_t, b) = t \quad (0 \leqslant t \leqslant \min\{d(a,b), d(a',b)\}).$$

Il existe alors deux constantes $c > 0$ (ne dépendant que du maximum de la courbure sectionnelle) et $l \geqslant d(a,a')$ (indépndante de b) telles que

$$d(x_t, x'_t) \leqslant \exp(c(t - d(a,b) + l)). \tag{1}$$

Nous utilisons des coordonnées cylindriques autour de la géodésique $[a,b]$: soit $X_0 \in \mathrm{Lie}\,(G)$ le générateur de la translation hyperbolique le long de $[b,a]$ (de sorte que, en particulier, $\exp(tX_0)(b) = x_t$) et soit $E \subseteq T_b(G/K)$ l'orthogonal de l'image de X_0.

Soit $\Phi: E \times \mathbb{R} \to G/K$ le difféomorphisme donné par $\Phi(X,t) = \exp(tX_0)(\exp_b X)$. Il est clair que la forme volume de G/K est dans ces coordonnées de la forme $\varphi(X)\, \mathrm{d}v(X) \wedge \mathrm{d}t\, (\varphi \in C^\infty(E))$.

Soit

$$V = \{(X,t) \in E \times \mathbb{R}/t \geqslant 0 \text{ et } \|X\| < 1\text{-}\exp c(t - d(a,b) + l)\}.$$

Par (1) $\Phi(V) \subseteq F_{a,b} \cap F_{a',b}$. Donc

$$\mathrm{vol}(F_{a,b} \backslash F_{a',b}) \leqslant \mathrm{vol}(F_{a,b} \backslash \Phi(V)).$$

Or

$$\mathrm{vol}(F_{a,b} \backslash \Phi(V)) = \tfrac{1}{2}\mathrm{vol}(B(a,1)) + \tfrac{1}{2}\mathrm{vol}(B(b,1)) + \mathrm{vol}(\Phi(V'))$$

où

$$B(x,1) = \{\, y/d(x,y) < 1\}$$

et

$$V' = \{(X,t),\ 0 \leqslant t \leqslant d(a,b)$$

et

$$1 - \exp c(t - d(a,b) + l) \leqslant \|X\| < 1\},$$

d'après la figure 1.

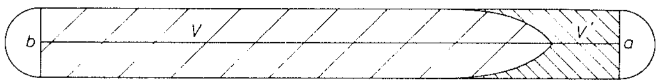

Fig. 1.

On a $\mathrm{vol}(B(a,1)) = \mathrm{vol}(B(b,1))$ et

$$\mathrm{vol}(\Phi(V')) = \int_{X < 1} \varphi(X)\, \mathrm{d}v(X) \int_{A(X)} \mathrm{d}t$$

où

$$A(X) = \{t \,|\, 0 \leqslant t \leqslant d(a,b) \text{ et } 1\text{-}\exp c(t - d(a,b) + l) \leqslant \|X\|\}$$

$$= \{t \,|\, d(a,b) \geqslant t \geqslant d(a,b) - l + \frac{1}{c}\log(1 - \|X\|) \text{ et } t \geqslant 0\}.$$

Donc

$$\mathrm{vol}\ \Phi(V') \leqslant \int_{X \leqslant 1} \varphi(X)\left[l - \frac{\log(1 - \|X\|)}{c} \right] \mathrm{d}v(X).$$

La quantité de droite est finie, indépendante de b et de la direction $[b,a]$, car G agit transitivement sur les directions. □

Preuve du théorème 4.4. Il suffit de construire une application complètement positive $\varphi: C^*_{\mathrm{red}}(\Gamma \times \Gamma) \to \mathscr{L}(l^2(\Gamma))$ et de montrer que pour tout

$$x \in C^*_{\mathrm{red}}(\Gamma) \otimes_{\max} C^*_{\mathrm{red}}(\Gamma), \qquad \varphi \circ p_\Gamma(x) - \pi_\Gamma(x) \in \mathscr{K}(l^2(\Gamma)).$$

Soit π_0 la représentation de $C^*_{\mathrm{red}}(\Gamma \times \Gamma)$ dans $L^2(G/K \times \Gamma)$ associée à l'action propre de $\Gamma \times \Gamma$ dans $G/K \times \Gamma$ donnée par $(g_1, g_2)(x,g) = (g_1(x), g_1 g g_2^{-1})$.

Soit x_0 un point de G/K et soit $U: l^2(\Gamma) \to L^2(G/K \times \Gamma)$ l'isométrie donnée par $U(e_g) = \chi_g \otimes e_g$ où $\chi_g \in L^2(G/K)$, $\chi_g = \|\chi'_g\|^{-1}\chi'_g$ et χ'_g est la fonction caractéristque de $F_{x_0, g(x_0)}$.

Il suffit de montrer que pour tout

$$x \in C^*_{\mathrm{red}}(\Gamma) \otimes_{\max} C^*_{\mathrm{red}}(\Gamma), \qquad U\pi_\Gamma(x) - \pi_0(p_\Gamma(x))U \in \mathscr{K}$$

(on pose alors $\varphi(y) = U^*\pi_0(y)U$).

Pour $h \in \Gamma$, posons

$$T_h = U\pi_\Gamma(h,1) - \pi_0(h,1)U \quad \textit{et} \quad T'_h = U\pi_\Gamma(1,h) - \pi_0(1,h)U.$$

Comme l'ensemble

$$\{(x,y) \in \mathscr{L}(L^2(\Gamma)) \oplus \mathscr{L}(L^2(G/K \times \Gamma)), Ux - yU \in \mathscr{K} \text{ et } Ux^* - y^*U \in \mathscr{K}\}$$

est une C^*-algèbre, il suffit de montrer que T_h et T'_h sont compacts pour tout $h \in \Gamma$, ou (comme $T_h^* T_h$ et $T_h'^* T'_h$ sont diagonaux dans la base e_g) que

$$\lim_{g \to \infty} \|T_h e_g\| = \lim_{g \to \infty} \|T'_h e_g\| = 0.$$

On a

$$T_h(e_g) = (h\chi_g - \chi_{hg}) \otimes e_{hg} \quad \text{et} \quad T'_h(e_g) = -(\chi_g - \chi_{gh^{-1}}) \otimes e_{gh^{-1}}.$$

Notons que par définition de $\chi_g, g^{-1}\chi_g = \chi_{g^{-1}}$ et donc

$$\|T'_h e_g\| = \|\chi_g - \chi_{gh^{-1}}\| = \|hg^{-1}(\chi_g - \chi_{gh^{-1}})$$
$$= \|h\chi_{g^{-1}} - \chi_{hg^{-1}}\| = \|T_h e_{g^{-1}}\|.$$

Il suffit donc de montrer que $\lim_{g \to \infty}\|T_h e_g\| = 0$. Or

$$\|T_h e_g\| = \|\, h\chi_g - \chi_{hg}\| = \|\, \|\chi'_g\|^{-1} h\chi'_g - \|\chi'_{hg}\|^{-1}\chi'_{hg}\|$$
$$\leqslant \|\chi'_g\|^{-1}\|h\chi'_g - \chi'_{hg}\| + \left|\|\chi'_g\|^{-1} - \|\chi'_{hg}\|^{-1}\right|\|\chi'_{hg}\|$$
$$\leqslant 2\|\chi'_g\|^{-1}\|h\chi'_g - \chi'_{hg}\|.$$

Or $h\chi'_g$ est la fonction caractéristique de $F_{h(x_0), hg(x_0)}$ et χ'_{hg} celle de $F_{x_0, hg(x_0)}$. Par le lemme 4.6 $\|h\chi'_g - \chi'_{hg}\|$ est bornée indépendamment de g. Et comme Γ est discret $\lim_{g \to \infty} d(x_0, g(x_0)) = +\infty$ et donc $\lim_{g \to \infty}\|\chi'_g\| = +\infty$. □

4.6. *Remarque.* Nous savons (3.4c) que si Γ est moyennable en K-théorie $C^*_{\mathrm{red}}(\Gamma)$ est nucléaire en K-théorie. Le théorème 4.1 apporte une réciproque partielle. Je ne sais pas si cette réciproque est vraie en général et même quand on suppose que Γ a la propriété T. Notons que la conclusion du théorème 4.4 peut être fausse en rang supérieur: si dans Γ il y a un sous-groupe infini Γ_1 de centralisateur Γ_2 non moyenable, alors

$\pi_\Gamma(\mathrm{Ker}\, p_\Gamma) \nsubseteq \mathscr{K}(l^2(\Gamma))$. En effet, soit α la représentation adjointe de Γ_2 dans $l^2(\Gamma)$. Comme Γ_2 n'est pas moyennable il existe $x \in C^*(\Gamma_2)$ avec $\lambda(x) = 0$ et $t(x) = 1$ où λ est la représentation régulière de Γ et t la triviale. Alors $\alpha(x) \in \pi_p(\mathrm{Ker}\, p_\Gamma)$ et comme pour tout $g \in \Gamma_1$ $\alpha(x)e_g = e_g$, $x \notin \mathscr{K}(l^2(\Gamma))$.

En particulier, pour $\Gamma = Sl_4(\mathbb{Z})$ on peut prendre

$$\Gamma_1 = \begin{pmatrix} Sl_2(\mathbb{Z}) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors

$$\Gamma_2 \supseteq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Sl_2(\mathbb{Z}) \end{pmatrix}.$$

Le théorème 4.4 implique facilement.

4.7. COROLLAIRE. *Soit Γ un sous-groupe discret d'un groupe de Lie simple connexe de rang un. Si les classes de conjugaison de $\Gamma\backslash\{1\}$ sont infinies (propriété CCI) et que Γ n'est par moyennable alors $C^*(\lambda(\Gamma), \rho(\Gamma))$ contient les compacts de $l^2(\Gamma)$ et le quotient par les compacts est naturellement isomorphe à $C^*_{\mathrm{red}}(\Gamma \times \Gamma)$. Autrement dit on a une suite exacte*

$$0 \to \mathscr{K}(l^2(\Gamma)) \xrightarrow{i} C^*(\lambda(\Gamma), \rho(\Gamma)) \xrightarrow{h} C^*_{\mathrm{red}}(\Gamma \times \Gamma) \to 0.$$

Ici λ et ρ désignent les représentations régulières gauche et droite de Γ dans $l^2(\Gamma)$. Si Γ est un groupe libre, on retrouve le résultat [1] (theorems 1, 3, lemma 4) d'Akmann et Ostrand.

Preuve. Le commutant de $C^*(\lambda(\Gamma), \rho(\Gamma))$ dans $\mathscr{L}(l^2(\Gamma))$ est $\lambda(\Gamma)' \cap \rho(\Gamma)' = \mathbb{C}$ et donc $C^*(\lambda(\Gamma), \rho(\Gamma))$ est faiblement dense dans $\mathscr{L}(l^2(\Gamma))$. Pour voir qu'elle contient les compacts il suffit de voir que $C^*(\lambda(\Gamma), \rho(\Gamma)) \cap \mathscr{K} \neq 0$ et par le théorème 4.4 que $\pi_\Gamma(\mathrm{Ker}\, p_\Gamma) \neq 0$. Soit $\alpha\colon C^*(\Gamma) \to \mathscr{L}(l^2(\Gamma))$ la représentation adjointe. Elle n'est pas faiblement contenue dans la régulière et il existe donc $x \in C^*(\Gamma)$ d'image nulle dans $C^*_{\mathrm{red}}(\Gamma)$ tel que $\alpha(x) \neq 0$. Mais alors $\Delta(x) \in \mathrm{Ker}(p_\Gamma)$ où $\Delta\colon C^*(\Gamma) \to C^*_{\mathrm{red}}(\Gamma) \otimes_{\max} C^*_{\mathrm{red}}(\Gamma)$ est l'application diagonale et $\pi_\Gamma(\Delta(x)) = \alpha(x) \neq 0$.

Soit M le facteur engendré par la représentation régulière gauche de Γ. L'image B de $C^*(M, M')$ dans l'algèbre de Calkin de $l^2(\Gamma)$ définit une C^* semi-norme sur $M \otimes_{\mathrm{alg}} M'$ et comme les C^*-algèbres M et M' sont simples on obtient (cf. [32], [33], corollary IV 4.21) un homomorphisme naturel $h\colon B \to M \otimes_{\min} M'$. La restricton de h à $C^*(\lambda(\Gamma), \rho(\Gamma))/\mathscr{K}(l^2(\Gamma))$ est un isomorphisme sur $C^*_{\mathrm{red}}(\Gamma \times \Gamma)$ par le théorème 4.4. □

On en déduit immédiatement:

4.8. COROLLAIRE. *Si Γ est comme en 4.7, le facteur $\lambda(\Gamma)''$ n'a pas la propriété gamma de Murray et von Neumann.*

Preuve. Dans [5] (Théorème 2.1) A. Connes a démontré que le facteur M a la propriété gamma si et seulement si $C^*(M, M') \cap \mathscr{K} = \{0\}$. Le résultat découle alors de 4.7. □

4.9. *Remarque.* Il y a beaucoup d'exemples de groupes Γ comme en 4.7 (cf. [3], Théorème 5(a) et (b) et corollaire 3 (i)) pour lesquels on sait que Γ n'est pas intérieurement moyennable (cf. [13]). Pour ces groupes, le corollaire 4.8 et partie du corollaire 4.7 se déduisent de [13] (Theorem, p. 485) et [16] (Théorème 1 condition (P)).

Il y a aussi beaucoup de groupes Γ comme en 4.7 pour lesquels $C^*_{\mathrm{red}}(\Gamma)$ est simple (cf. [16]). On n'a pas besoin dans ce cas de passer par le facteur M pour construire l'homomorphisme $C^*(\lambda(\Gamma), \rho(\Gamma)) \to C^*_{\mathrm{red}}(\Gamma \times \Gamma)$ du corollaire 4.7.

4.10. *Remarque.* Il serait utile de décider si l'homomorphisme p_Γ induit une surjection en K-théorie (corollaire 4.5). En effet si $p_{\Gamma *}$ n'était pas surjectif, l'homomorphisme $C^*(\Gamma \times \Gamma) \to C^*_{\mathrm{red}}(\Gamma \times \Gamma)$ n'induirait pas une surjection en K-théorie et on déduirait facilement que l'homomorphisme $\mu\colon K_{*,\mathrm{top}}(\Gamma \times \Gamma) \to K_*(C^*_{\mathrm{red}}(\Gamma \times \Gamma))$ de Baum et Connes (cf. [2]) et l'homomorphisme

$$\partial_{C_0(G \times G/\Gamma \times \Gamma)}\colon K_*^{K \times K}(C_0((G \times G/\Gamma \times \Gamma) \times V)) \to K_*(C^*_{\mathrm{red}}(\Gamma))$$

de Kasparov (cf. [21] Conjecture 1) ne sont pas surjectifs.

Notons que dans les conditions du corollaire 4.7 l'homomorphisme h_* est surjectif si et seulement si dans $C^*(\lambda(\Gamma))$ (et dans $M_n(C^*(\lambda(\Gamma), \rho(\Gamma)))$) il n'y a aucun opérateur de Fredholm d'indice non nul. En particulier, si Γ est moyennable en K-théorie (c'est le cas si $G = SO_0(n, 1)$ par un résultat de Kasparov [22]) il n'y a dans $C^*(\lambda(\Gamma), \rho(\Gamma))$ aucun opérateur de Fredholm d'indice non nul (en fait dans ce cas la suite exacte semi-scindée

$$0 \to \mathscr{K} \to C^*(\lambda(\Gamma), \rho(\Gamma)) \to C^*_{\mathrm{red}}(\Gamma \times \Gamma) \to 0$$

définit l'élément nul dans $\mathrm{Ext}(C^*_{\mathrm{red}}(\Gamma \times \Gamma))^{-1}$, comme son image dans $\mathrm{Ext}(C^*(\Gamma \times \Gamma))^{-1}$ est clairement nulle, et il existe donc un homomorphisme $C^*_{\mathrm{red}}(\Gamma \times \Gamma) \to C^*(\lambda(\Gamma), \rho(\Gamma))$ qui scinde cette suite exacte).

5. Remarques finales

Nous faisons dans ce paragraphe trois remarques: la première porte sur le cas équivariant, la deuxième concerne la 'formule des coefficients universels' de Rosenberg et Schochet et la troisième les algèbres non séparables.

Le cas équivariant

5.1. Soit G un groupe *compact*, et A une G-algèbre. Le C^*-système dynamique (A, G) est dit moyennable en K-théorie si $1_A \in KK_G(A, A)$ est représentable sur un A, A bimodule nucléaire. Sous cette hypothèse, pour toute G-algèbre B, $p_{A,B}\colon A \hat{\otimes}_{\max} B \to A \hat{\otimes}_{\min} B$ est inversible en K-théorie équivariante, et, d'après la généralisation par Kasparov du théorème de Voiculescu [18], le foncteur $KK_G(A, \cdot)$ est demi-exact. Tous nos résultats et démonsrations s'adaptent aisément à ce cadre.

5.2. Soit (A, G, α) un C^*-système dynamique avec G localement compact. Soit H un espace de Hilbert muni d'un représentation covariante, telle que la représentation de A soit fidèle et soit H' un espace de Hilbert gradué tel que $H'^{(0)}$et $H'^{(1)}$ soient de dimension infinie (dénombrable). Soit $\mathscr{E}_u$ le A, A bimodule équivariant $L^2(G) \otimes H \hat{\otimes} H' \hat{\otimes} A$ (où A n'agit que dans H à gauche et dans A à droite et G agit diagonalement). Alors le système (A, G, α) est dit moyennable en K-théorie s'il existe $F \in \mathscr{L}(\mathscr{E}_u)$ tel que $(\mathscr{E}_u, F)$ représente 1_A dans $KK_G(A, A)$. Utilisant la généralisation par Kasparov du théorème de Voiculescu on voit, dans le cas où G est compact, la cohérence des définitions de 5.1 et 5.2. On obtient comme en 5.1 que si (A, G, α) est moyennable en K-théorie $p_{A,B}$ est inversible en K-théorie équivariante et $KK_G(A, .)$ est demi-exact. Une caractérisation analogue au théorème 1.5 des bimodules qui se plongent stablement dans $\mathscr{E}_u$ (1.5(v)) de facon G-continue et équivariante modulo les compacts, permettrait de construire beaucoup de système dynamiques 'K-moyennables'. Une conjecture naturelle et qui ne devrait pas être très difficile à vérifier est que si G est moyennable en K-théorie et A est nucléaire en K-théorie G-équivariante (voir exemple 3.5c) alors (A, G) est moyennable en K-théorie.

Sur la 'Formule des Coefficients Universels' de Rosenberg et Schochet

Rappelons que pour des algèbres A et B (séparables – trivialement graduées) la formule des coefficients universels de Rosenberg et Schochet (cf. [27]) est la suite exacte:

$$0 \to \mathrm{Ext}(K_*(A), \quad K_*(B)) \to KK_*(A, B) \xrightarrow{\gamma} \mathrm{Hom}(K_*(A), \quad K_*(B)) \to 0.$$

La proposition qui suit rappelle quelques résultats de [27].

5.3. PROPOSITION [27]. *Soit A une C^*-algèbre séparable. Il y a équivalence entre:*

(i) *Pour toute algèbre B, la formule des coefficients universels est vérifiée.*
(ii) *A est équivalente en K-théorie à une algèbre abélienne.*
(iii) *Pour toute algèbre B avec $K_*(B) = 0$, $KK(A, B) = 0$.*

Preuve. (ii) $\Rightarrow$ (i) cf. [27] Theorem 4.1 et Proposition 7.1.

(i) $\Rightarrow$ (iii) est trivial.

(iii) $\Rightarrow$ (ii): Par la proposition 7.4 de [27] il existe une C^*-algèbre abélienne A_0 et un isomorphisme de degré zéro $\varphi: K_*(A_0) \to K_*(A)$. Par (ii) $\Rightarrow$ (i) il existe $x \in KK(A_0, A)$ avec $\gamma(x) = \varphi$. Représentons x par la suite exacte $0 \to A \otimes \mathscr{K}(\mathbb{R}) \to B \to A_0 \to 0$. Comme φ est un isomorphisme en K-théorie $K_*(B) = 0$ par la suite exacte de K-théorie, et donc $KK_*(A, B) = 0$ par hypothèse.

Par la suite exacte hexagonale appliquée à une extension semi-scindée [9, 30] $\cdot \otimes x: KK(A, A_0) \to KK(A, A)$ est un isomorphisme. Soit $y \in KK(A, A_0)$ avec $y \otimes x = 1_A$. Représentant y par une suite exacte et appliquant ce qui précède à A_0 qui vérifie (iii) par (ii) $\Rightarrow$ (i) $\Rightarrow$ (iii) on voit que y est inversible à gauche et donc $x \otimes y = 1_{A_0}$. □

Il est immédiat ((ii) et proposition 3.3) que si A vérifie la formule des coefficients

universels, elle est nucléaire en K-théorie. En particulier le paragraphe IV fournit un contre-exemple, le premier à ma connaissance, d'une algèbre ne satisfaisant pas la formule des coefficients universels. Par la caractérisation (iii) on construit alors une C^*-algèbre B telle que $K_*(B) = 0$ et $KK(A, B) \neq 0$ donc $KK(B, B) \neq 0$ (en fait, par la construction de B et la proposition 3.8, B n'est pas nucléaire en K-théorie).

Par la caractérisation (ii), on obtient que si A_1 et A_2 vérifient la formule des coefficients universels alors les algèbres (K-équivalentes) $A_1 \otimes_{\min} A_2$ et $A_1 \otimes_{\max} A_2$ la vérifient aussi (cf. [27]). La caractérisaton (iii) implique immédiatement que si A est K-sous équivalente à une algèbre A' satisfaisant la formule des coefficients universels, alors A la satisfait aussi.

Si $0 \to I \to A \to A/I \to 0$ est une suite exacte d'algèbres nucléaires en K-théorie, et si deux des algèbres I, A et A/I vérifient la formule des coefficients universels il en va de même pour la troisième (par la caractérisation (iii) et le théorème 3.9). Il en va de même si on supose la suite exacte semi-scindée sans, a priori, supposer les algèbres nucléaires en K-théorie (elles le seront par la caractérisation (ii)) – cf. [27].

Il résulte immédiatement de la caractérisation (iii)

5.4. COROLLAIRE. *Soit A une C^*-algèbre séparable. Si pour toute algèbre B la 'formule de Küneth' de Rosenberg et Schochet (cf. [27]) est vérifiée, alors il en va de même pour la 'formule des coefficients universels'.* □

Le Cas non Séparable

Dans tout ce qui précède nous avons supposé que toutes les algèbres étaient séparables. Nous proposons maintenant une définition de $KK(A, B)$ dans le cas non séparable qui a un meilleur comportement vis-à-vis du produit de Kasparov que la définition de Kasparov:

5.5. DÉFINITION. Si A n'est pas séparable on pose

$$KK_{\mathrm{sep}}(A, B) = \varprojlim_{\substack{A_1 \subseteq A \\ A_1 \text{ séparable}}} KK(A_1, B).$$

On a bien évidemment un homomorphisme naturel $\Phi: KK(A, B) \to KK_{\mathrm{sep}}(A, B)$.

5.6. PROPOSITION. *On a un produit de Kasparov*

$$\otimes_{\mathrm{sep}}: KK_{\mathrm{sep}}(A, B) \times KK_{\mathrm{sep}}(B, C)$$

vérifiant toutes les propriétés du produit de Kasparov, coïncidant avec celui-ci dans le cas séparable.

De plus si A est séparable $x \in KK(A, B)$ et $y \in KK(B, C)$

$$x \otimes y = x \otimes_{\mathrm{sep}} \Phi(y).$$

Preuve. Soit $x \in KK_{\text{sep}}(A,B)$, $y \in KK_{\text{sep}}(B,C)$ et A_1 une sous-algèbre séparable de A. Nous calculons $x \otimes_{\text{sep}} y$ localisé en A_1. Comme pour l'algèbre séparable A_1,

$$KK(A_1,B) = \lim_{\substack{\longrightarrow \\ B_1 \text{ séparable}}} KK(A_1,B_1)$$

(cf. [29] Remark 3.2), il existe une sous-algèbre séparable B_1 de B telle que le localisé x_{A_1} de x à A_1 soit le poussé en avant d'un $x_1 \in KK(A_1,B_1)$ par l'inclusion $B_1 \to B$. On pose alors $(x \otimes y)_{A_1} = x_1 \otimes y_{B_1}$. Nous devons maintenant montrer que cette construction ne dépend pas de B_1 et que si $A_2 \subseteq A_1$, la restriction de $(x \otimes y)_{A_1}$ à A_2 est $(x \otimes y)_{A_2}$. Il suffit donc de prouver que si B_1 et B_2 sont deux sous-algèbres séparables de B et $x_1 \in KK(A_1,B_1)$, $x_2 \in KK(A_2,B_2)$ sont comme ci-dessus $x_2 \otimes y_{B_2} = (x_1 \otimes y_{B_1})|_{A_2}$.

Comme $KK(A_2,B)$ est la limite inductive de $KK(A_2,B')$ B' séparable, il existe $B_3 \subseteq B$ séparable tel que $(B_1 \cup B_2) \subseteq B_3$ et que les restrictons et poussées en avant de x_1 et x_2 dans $KK(A_2,B_3)$ coïncident. Le résultat découle alors de la fonctorialité du produit de Kasparov et des égalités

$$y_{B_j} = y_{B_3}|B_j, \quad j = 1,2.$$

Les propriétés de $\otimes_{\text{sep}}$ découlent du cas séparable. □

L'avantage de cette définition est que KK_{sep} jouit de toutes les propriétés qui proviennent du produit de Kasparov (périodicité de Bott, isomorphisme de Thom, suite exacte de 'Puppe', suite exacte hexagonale dans un cas nucléaire en K-théorie ou (localement) semi-scindé etc...). Bien que la généralité 'A et B séparables' soit nettement suffisante dans les cas concrets, il y a certaines algèbres 'universelles' et donc non séparables, qu'on peut ainsi traiter de la même facon que les algèbres séparables. Par exemple: l'algèbre de Calkin; les algèbres notées $\mathscr{A}$ et $\mathscr{A}/\mathscr{J}$ dans 2.8; soit B une C^*-algèbre et $F \in \mathscr{L}(H_B)$ tel que $F^2 = 1$ et $\partial F = 1$. Soit $\mathscr{B} = \{T \in \mathscr{L}(H_B), [T,F] \in \mathscr{K}(H_B)\}$. Alors un élément de $KK(A,B)$ est un homomorphisme de A dans $\mathscr{B}$: l'algèbre $C^*(\Gamma_q)$ où Γ_q est le groupoïde d'Haefliger des germes de difféomorphismes de $\mathbb{R}^q$ etc... Toutes ces algèbres ont des 'K-homologies' (ou des 'K-homologies à coefficients') d'un grand intérêt.

Bibliographie

1. Akemann, C. A. and Ostrand, P. A.: On a tensor product C^*-algebra associated with the free group on two generators, *J. Math. Soc. Japan* **27** (4) (1975), 589–599.
2. Baum, P. and Connes, A.: Geometric K-theory for Lie groups and foliations, preprint IHES (1982).
3. Bedos, E. et de la Harpe, P.: Moyennabilité intérieure des groupes: définitions et exemples, prépublication Université de Genève (1984).
4. Choi, M. D. and Effros, E. G.: Nuclear C^*-algebras and the approximation property, *Amer. J. Math.* **100** (1978), 61–79.
5. Connes, A.: Classification of injective factors, *Ann. Math.* **104** (1976), 73–115.
6. Cuntz, J.: K-theoretic amenability for discrete groups, *J. Reine ang Math.* **344** (1983), 180–195.
7. Cuntz, J.: Generalized homomorphisms between C^*-algebras and KK-theory, in *Dynamics and Processes*, Springer Lect. Notes in Math. 1031, pp. 31–45.
8. Cuntz, J.: K-theory and C^*-algebras, in *Proc. Conf. K-Theory Beilefeld* (1982). Springer Lect. Notes in Math.
9. Cuntz, J. and Skandalis, G.: Mapping cones and exact sequences in KK theory, à paraître dans *J. Op. Theory.*
10. Delaroche, C. et Kirilov, A. A.: Sur les relations entre l'espace dual d'un groupe et la structure de ses sous-groupes fermés, Séminaire Bourbaki 343 (1968).
11. Delorme, P.: 1-Cohomologie des représentations unitaires des groupes de Lie semi-simples et résolubles, *Bull. SMF* **105**, Fasc. 3 (1977), 281–336.
12. Dixmier, J.: *Les C^*-algèbres et leurs représentations*, Gauthier-Villars, Paris (1969).
13. Effros, E. G.: Property Γ and inner amenability, *Proc. AMS* **47** (1975), 483–486.
14. Effros, E. G. and Lance, C.: Tensor products of operator algebras, *Adv. Math.* **25** (1977), 1–34.
15. Faraut, J. et Harzallah, K.: Distances Hilbertiennes invariantes sur un espace homogène, *Ann. Inst. Fourier* **24**, 3, XIV, (1974), 171–217.
16. de la Harpe, P.: Reduced C^*-algebras of discrete groups which are simple with a unique trace, preprint (1983).
17. Julg, P. and Valette, A.: K-amenability for $SL_2(\mathbb{Q}_p)$, and the action on the associated tree, *J. Funct. Anal.* **58** (1984), 194–215.
18. Kasparov, G. G.: Hilert C^*-modules: Theorems of Stinespring and Voiculescu, *J. Op. Theory* **4** (1980), 133–150.
19. Kasparov, G. G.: The operator K-functor and extensions of C^*-algebras, *Math. U.S.S.R. Izv* **16** (1981) No. 3, 513–572, (English Translation).
20. Kasparov, G. G.: K-theory, group C^*-algebras and higher signatures, (conspectus) Part 1–2, preprint Chenogolov.
21. Kasparov, G. G.: Operator K-theory and its applications: Elliptic operators, group representations, higher signatures, C^*-extensions, preprint, Chernogolovka (1983).
22. Kasparov, G. G.: Lorentz groups: K-theory of unitary representation and crossed products, preprint Chornogolovka (1983).
23. Kazhdan, D.: Connection of the dual space of a group with the structure of its closed subgroups, *Funct. Anal. Appl.* **1** (1967), 63–65.
24. Kostant, B.: On the existence and irreducibility of certain series of representations, *Bull. AMS* **75** (1969), 627–642.
25. Lance, C.: Tensor products and nuclear C^*-algebras, in *Operator Algebras and Applications*, Proc. of Symp. in Pure Math. 38, AMS (1982), pp. 379–399.
26. Paschke, W. L.: K-theory for commutants in the Calkin algebra, *Pacific J. Math.* **95** (1981), 427–434.
27. Rosenberg, J. and Schochet, C.: The Küneth theorem and the universal coefficient theorem for Kasparov's generaized K-functor, preprint.
28. Skandalis, G.: Some remarks on Kasparov theory, *J. Funct. Anal.* **56** 337–347, (1984).
29. Skandalis, G.: On the group of extensions relative to a semifinite factor, *J. Op. Theory*, **13** (1985), 255–263.
30. Skandalis, G.: Exact sequences for the Kasparov groups of graded algebras, *Can. J. Math.*, **37** (1985), 193–216.
31. Skandalis, G.: On the strong Ext bifunctor, preprint.
32. Takesaki, M.: On the cross-norm of the direct product of C^*-algebras, *Tôhoku Math. J.* **16** (1964), 111–122.
33. Takesaki, M.: *Theory of Operator Algebras I*, Springer Verlag, New York, Heidelberg, Berlin (1979).
34. Torpe, A. M.,: Notes on nuclear C^*-algebras and injective von Neumann algebras, Preprint (1981).
35. Valette, A.: A remark on the Kasparov Goups $\mathrm{Ext}^i(A,B)$, *Pacific J. Math* **108** No. (1983).
36. Voiculescu, D.: A non-commutative Weyl–von Neumann theorem, *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.* **21** (1976), 97–113.