C. R. Acad. Sci. Paris, t. 313, Série I, p. 939-941, 1991

Analyse fonctionnelle/*Functional Analysis*

Le bifoncteur de Kasparov n'est pas exact

Georges SKANDALIS

Résumé — Nous construisons une extension de C*-algèbres pour laquelle la suite exacte à six termes en théorie de Kasparov n'a pas lieu. Il en résulte que le bifoncteur de Kasparov diffère, en général, de celui de Connes et Higson.

Kasparov's bifunctor is not exact

Abstract — *We construct a* C*-*algebra extension which does not satisfy the six-term exact sequence in Kasparov's theory. As a consequence, we prove that Kasparov's bifunctor is different from Connes-Higson's.*

Kasparov a démontré l'existence de suites exactes hexagonales pour son bifoncteur, sous des hypothèses de nucléarité (*cf.* [5]). Dans [10], [3] et [11] les mêmes suites exactes sont obtenues sous des hypothèses un peu affaiblies : dans [10] et [3] elles sont remplacées par une hypothèse d'existence d'un relèvement complètement positif et dans [11] par une notion de nucléarité en K-théorie, plus faible que la nucléarité. Il est naturel de se demander si ces suites exactes ont toujours lieu. Nous montrons que ce n'est pas le cas.

Une autre formulation de la question traitée est la suivante : à deux C*-algèbres, N. Higson [4] associe un groupe E(A, B) et un homomorphisme naturel

$$\mathrm{KK}(A, B) \to \mathrm{E}(A, B) \quad (^1).$$

Par construction, le bifoncteur E possède des suites exactes hexagonales pour toute extension de C*-algèbres. Notre exemple démontre donc que l'homomorphisme $\mathrm{KK}(A, B) \to \mathrm{E}(A, B)$ n'est pas toujours un isomorphisme. Il est en fait facile de produire une C*-algèbre A telle que $\mathrm{KK}(A, A) \neq 0$ mais $\mathrm{E}(A, A) = 0$.

Dans notre construction nous utilisons un sous-groupe discret Γ de $\mathrm{Sp}(n, 1)$. Les trois propriétés suivantes de ce groupe sont cruciales dans notre construction :

(*a*) le groupe Γ possède la propriété T de Kazhdan ([6], [8]).

(*b*) le groupe $\mathrm{Sp}(n, 1)$ est de rang 1; on peut donc utiliser la généralisation [11] d'un résultat d'Akemann et Ostrand [1].

(*c*) le groupe Γ est résiduellement fini [9]; ceci nous permet d'invoquer un résultat de E. Kirchberg [7] basé sur une construction de S. Wasserman [12].

Les propriétés (*a*) et (*b*) ont été utilisées dans [11] pour montrer que la C*-algèbre $C^*(\Gamma)$ du groupe Γ (ainsi que sa C*-algèbre réduite) n'est pas nucléaire en K-théorie.

Le résultat principal de cette Note est :

THÉORÈME. — *Soit* G *un groupe de Lie réel connexe simple de rang* 1 *et soit* Γ *un sous-groupe discret infini de* G *possédant la propriété* T *de Kazhdan. Notons*

$$q: \quad C^*(\Gamma) \to C^*_r(\Gamma)$$

la surjection canonique, J *son noyau,* C_q *son cône et* $e: J \to C_q$ *l'homomorphisme d'« excision ». L'élément* $[e] \in \mathrm{KK}(J, C_q)$ *associé à e n'est pas inversible.*

Reppelons (*cf.* [6]) que G a la propriété T si et seulement si G est localement isomorphe à $\mathrm{Sp}(n, 1)$ ou à F_4 et qu'alors tout sous-groupe discret de covolume fini possède la propriété T [8].

Note présentée par Alain CONNES.

0764-4442/91/03130939 $ 2.00

Comme l'image de $[e]$ dans le groupe $\mathrm{E}(\mathrm{J}, \mathrm{C}_q)$ est inversible [4], il en résulte que les bifoncteurs E et KK sont distincts. En outre, notons C_e le cône de l'homomorphisme d'« excision » e. On a :

COROLLAIRE. — *L'algèbre* C_e *n'est pas* K-*contractile* (i.e. *le groupe* $\mathrm{KK}(\mathrm{C}_e, \mathrm{C}_e)$ *n'est pas le groupe nul*), *mais* C_e *est* E-*contactile* (i.e. *le groupe* $\mathrm{E}(\mathrm{C}_e, \mathrm{C}_e)$ *est le groupe nul*).

En effet, d'après la suite exacte de Puppe [3], un homomorphisme de C*-algèbres définit un élément inversible en KK-théorie (resp. en E-théorie) si et seulement si son cône est K-contractile (resp. E-contractile).

Notons $\pi : \mathrm{C}^*(\Gamma \times \Gamma) \to \mathscr{L}(l^2(\Gamma))$ la représentation telle que $\pi(u_{g,h}) = \lambda_g \rho_h$ $(g, h \in \Gamma)$ et Q l'application quotient de $\mathscr{L}(l^2(\Gamma))$ dans l'algèbre de Calkin correspondante.

La démonstration de ce théorème est basée sur les deux faits suivants :

LEMME 1 (S. Wasserman [12], Kirchberg [7]). — *La représentation* π *est une représentation de* $\mathrm{C}^*(\Gamma) \otimes_{\min} \mathrm{C}^*(\Gamma)$.

Autrement dit π s'annule sur le noyau de l'homomorphisme canonique de $\mathrm{C}^*(\Gamma \times \Gamma)$ sur $\mathrm{C}^*(\Gamma) \otimes_{\min} \mathrm{C}^*(\Gamma)$.

LEMME 2 [11]. — *L'homomorphisme* $\mathrm{Q} \circ \pi$ *se définit sur* $\mathrm{C}_r^*(\Gamma) \otimes_{\min} \mathrm{C}_r^*(\Gamma)$.

Démontrons le théorème :

Si $[e]$ était inversible, e induirait, pour toute C*-algèbre B, un isomorphisme entre

$$\mathrm{K}_i(\mathrm{J} \otimes_{\min} \mathrm{B}) \quad \text{et} \quad \mathrm{K}_i(\mathrm{C}_q \otimes_{\min} \mathrm{B}).$$

Notons I le noyau de l'homomorphisme $q_\mathrm{B} : \mathrm{C}^*(\Gamma) \otimes_{\min} \mathrm{B} \to \mathrm{C}_r^*(\Gamma) \otimes_{\min} \mathrm{B}$. Par excision en K_i on a $\mathrm{K}_i(\mathrm{I}) = \mathrm{K}_i(\mathrm{C}_q \otimes_{\min} \mathrm{B})$ (comme $\mathrm{C}_{q_\mathrm{B}} = \mathrm{C}_q \otimes_{\min} \mathrm{B}$). Donc les groupes de K-théorie de $\mathrm{I}/(\mathrm{J} \otimes_{\min} \mathrm{B})$ seraient nuls.

Prenons $\mathrm{B} = \mathrm{C}^*(\Gamma)$. Par les lemmes 1 et 2, π définit un homomorphisme de I dans $\mathscr{K}(l^2(\Gamma))$, qui est clairement nul sur $\mathrm{J} \otimes_{\min} \mathrm{C}^*(\Gamma)$.

Enfin, notons $\Delta : \mathrm{C}^*(\Gamma) \to \mathrm{C}^*(\Gamma) \otimes_{\min} \mathrm{C}^*(\Gamma)$ l'homomorphisme diagonal. Comme le produit tensoriel de la représentation régulière par une représentation quelconque est un multiple de la représentation régulière, on a aussi un homomorphisme

$$\Delta' : \mathrm{C}_r^*(\Gamma) \to \mathrm{C}_r^*(\Gamma) \otimes_{\min} \mathrm{C}^*(\Gamma),$$

autrement dit $\Delta(\mathrm{J})$ est inclus dans I.

Comme le groupe Γ possède la propriété T de Kazhdan, il existe une projection $p \in \mathrm{C}^*(\Gamma)$ telle que, pour toute représentation σ de Γ, $\sigma(p)$ soit le projecteur sur l'espace des vecteurs invariants par $\sigma(\Gamma)$. Comme Γ est infini, la représentation régulière gauche ne possède pas de vecteurs invariants; donc $p \in \mathrm{J}$. L'image de $\Delta(p)$ dans le quotient définit un élément x de $\mathrm{K}_0(\mathrm{I}/(\mathrm{J} \otimes_{\min} \mathrm{B}))$; comme $\pi \circ \Delta$ est la représentation adjointe de Γ qui contient la représentation triviale, $\pi \circ \Delta(p)$ est un projecteur non nul de $\mathscr{K}(l^2(\Gamma))$; il s'ensuit que l'image de x par π est un élément non nul de $\mathrm{K}_0(\mathscr{K}(l^2(\Gamma)))$; en particulier $x \neq 0$.

Remarque. — Remarquons que $\Delta(p)$ est un élément de $\mathrm{K}_0(\mathrm{I})$ dont l'image dans $\mathrm{K}_0(\mathrm{I}/(\mathrm{J} \otimes_{\min} \mathrm{B}))$ n'est pas nulle. Il s'ensuit que l'homomorphisme $\mathrm{J} \otimes_{\min} \mathrm{B} \to \mathrm{I}$ n'induit pas une surjection en K-théorie; donc l'homomorphisme $\mathrm{J} \otimes_{\min} \mathrm{B} \to \mathrm{C}_q \otimes_{\min} \mathrm{B}$ n'induit pas non plus une surjection en K-théorie. Il s'ensuit qu'il n'existe pas de $u \in \mathrm{KK}(\mathrm{C}_q, \mathrm{J})$ tel que $e_*(u) = 1_{\mathrm{C}_q}$. En particulier, le foncteur $\mathrm{KK}(\mathrm{C}_q, .)$ n'est pas exact. D'après la suite exacte de Puppe [3], il s'ensuit que l'un au moins des deux foncteurs $\mathrm{KK}(\mathrm{C}^*(\Gamma), .)$ ou $\mathrm{KK}(\mathrm{C}_r^*(\Gamma), .)$ n'est pas exact. Il est naturel de se demander lequel.

([1]) *Cf.* [2] pour une présentation concrète du bifoncteur (A, B) → E(A, B).

Note remise le 29 octobre 1991, acceptée le 31 octobre 1991.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] C. A. AKEMANN et P. A. OSTRAND, *J. Math. Soc. Japan*, 27, (4), 1975, p. 589-599.

[2] A. CONNES et N. HIGSON, Déformations, morphismes asymptotiques et K-théorie bivariante, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 313, série I, 1991 (à paraître).

[3] J. CUNTZ et G. SKANDALIS, *J. Operator Theory*, 15, 1975, p. 163-180.

[4] N. HIGSON, *Categories of fractions and excision in KK-theory*, Preprint.

[5] G. G. KASPAROV, *Izv. Akad. Nauk S.S.S.R. Ser. Mat.*, 44, 1980, p. 571-636 (en russe); trad., 16, 1981, p. 513-572.

[6] D. KAZHDAN, *Funct. Anal. Appl.*, 1, 1967, p. 63-65.

[7] E. KIRCHBERG, *J. Operator Theory*, 10, 1983, p. 3-8.

[8] B. KOSTANT, *Bull. A.M.S.*, 75, 1969, p. 627-642.

[9] A. I. MAL'CEV, *Amer. Math. Soc. Transl.*, 45, 1965, p. 1-18.

[10] G. SKANDALIS, *Can. J. Math.*, 37, 1985, p. 193-216.

[11] G. SKANDALIS, *K-Theory*, 1, 1988, p. 549-573.

[12] S. WASSERMAN, *J. Funct. Anal.*, 23, 1976, p. 239-254.

Université Paris-VII, U.F.R. de Mathématiques, U.R.A. n° 212,
couloir 45-55, 5e étage, 2, *place Jussieu*, 75251 *Paris Cedex* 05.