J. reine angew. Math. **423** (1992), 73—99

Journal für die reine und angewandte Mathematik

Invariance par homotopie de la signature à coefficients dans un fibré presque plat

(d'après Connes-Gromov-Moscovici)

Par *Michel Hilsum* et *Georges Skandalis* à Paris

Introduction

Soient V une variété compacte orientée de classe C^∞, π son groupe fondamental et σ_V la classe de l'opérateur de signature dans le groupe de K-homologie $K_*(V)$. La conjecture de Novikov énonce l'invariance par homotopie de l'image de σ_V dans $K_0(B\pi) \otimes \mathbb{Q}$ (où $K_0(B\pi)$ est la K-homologie à support compact – cf. e.g. [15]) par l'application classifiante $f: V \to B\pi$, c'est-à-dire l'égalité, modulo la torsion, de $(f \circ g)_*(\sigma_W)$ avec $f_*(\sigma_V)$, où $g: W \to V$ est une équivalence d'homotopie de variétés compactes orientées.

Cette conjecture a été démontrée pour diverses classes naturelles de groupes π, en utilisant plusieurs méthodes différentes (pour une discussion historique de cette conjecture et une bibliographie étendue, voir [15], [16] et [6]). Dans [6], A. Connes, M. Gromov et H. Moscovici introduisent une méthode nouvelle qui permet de démontrer la conjecture de Novikov pour une classe de groupes contenant tous les cas précédemment établis ainsi que de nombreux cas nouveaux.

Un outil essentiel dans la démonstration de [6] (ainsi que pour plusieurs constructions antérieures) est la signature symétrique de Mishchenko: donnons nous une triangulation de V. Mishchenko a montré que la forme d'intersection sur les simplexes de cette triangulation définit alors un élément d'un groupe de Witt $L(\mathbb{C}[\pi])$ de l'anneau $\mathbb{C}[\pi]$ appelé signature symétrique de V et a prouvé que cet élément est invariant par homotopie ([17]).

La méthode de [6] est la suivante: on y définit une notion de fibré presque plat sur une variété; on démontre que la signature à coefficients dans un fibré presque plat est un invariant d'homotopie; or, pour les groupes mentionnés plus haut les classes de fibrés presque plats séparent les points de $K_0(B\pi) \otimes \mathbb{Q}$ (cf. [6], § 6).

L'invariance par homotopie de la signature à coefficients dans un fibré presque plat est démontré de la manière suivante dans [6]:

a) à un fibré presque plat on associe une »presque représentation« du groupe fondamental π;

b) l'image par une presque représentation de la signature symétrique de Mishchenko est une matrice à coefficients complexes, inversible, autoadjointe dont la signature s'obtient par une formule cohomologie cyclique entière de Connes ([5], [7]);

c) enfin, un théorème de l'indice établit l'égalité entre la signature à coefficients dans le fibré presque plat du départ et la signature de cet opérateur autoadjoint.

Dans cet article nous proposons une démonstration directe de l'invariance de la signature à coefficients dans un fibré presque plat: si $f: W \to V$ est une équivalence d'homotopie préservant l'orientation et E un fibré suffisamment plat, nous comparons directement les opérateurs de signature de V et W à coefficients dans les fibrés E et $f^* E$.

Un avantage de notre méthode, est qu'elle permet des coefficients dans une C^*-algèbre; en particulier, prenant des fibrés plats, on obtient une nouvelle démonstration de l'invariance par homotopie de l'élément de la K-théorie de la C^*-algèbre du groupe π défini par l'opérateur de signature. Ce résultat est dû à Kasparov ([14], [16]) et Mishchenko ([18], [20]) (cf. aussi [13]) mais toutes ces démonstrations sont basées sur la signature symétrique de Mishchenko.

De plus, notre méthode se généralise sans peine au cas des feuilletages. Plus précisément, soient V et W deux variétés compactes orientées munies de feuilletages et $f: W \to V$ une équivalence d'homotopie feuilletée au sens de Baum-Connes ([3]). Si E est un fibré sur V presque plat le long du feuilletage, alors la signature de W à coefficients dans $f^* E$ est égale à celle de V à coefficients dans E. Il serait, il nous semble, difficile, de démontrer ce résultat par une méthode de triangulation.

Prenant des fibrés plats longitudinalement, on obtient une démonstration de l'invariance par homotopie longitudinale de la signature à valeurs dans les C^*-algèbres des feuilletages, résultat énoncé dans [3].

La principale difficulté que nous rencontrons est la suivante: si $f: W \to V$ est une application de classe C^∞, l'application induite f^* au niveau des formes de classe C^∞, n'est pas un opérateur fermable pour L^2. Nous résolvons cette difficulté en considérant une submersion $p: W \times B^k \to V$ telle que $p(x, 0) = f(x)$, où B^k est une boule de dimension suffisamment grande; pour $t \in B^k$, on définit l'application $p_t: W \to V$ en posant

$$p_t(x) = p(x, t);$$

la formule $T = \int p_t^* \, dt$ définit alors un opérateur continu.

Signalons enfin que dans notre construction il est crucial d'utiliser les bimodules de Kasparov non bornés de S. Baaj et P. Julg (cf. [2]). En effet, une connexion presque plate ∇ commute »presque« à f^* donc à l'opérateur T: c'est là le pas essentiel dans notre argument; le »rendu borné« i.e. l'opérateur $\nabla(1 + \nabla^* \nabla)^{1/2}$ ne commute pas en général à f^* (on pourrait considérer l'opérateur ∇ comme un opérateur borné entre espaces de Sobolev convenables [13]; cependant les estimations des normes seraient alors plus difficiles à établir).

L'organisation de ce travail est la suivante:

Au premier paragraphe, nous définissons des cycles $(\mathscr{E}, Q, D)$ sur une C^*-algèbre A, où $\mathscr{E}$ est un C^*-module hilbertien sur A, Q une forme A-sesquilinéaire sur $\mathscr{E}$ et D un opérateur régulier de carré nul (définition 1.5); nous montrons comment à un cycle on associe un élément de $K_0(A)$. Ce paragraphe reprend en grande partie des idées de [13] en les généralisant au cas des opérateurs non bornés.

Au deuxième paragraphe, nous établissons quelques lemmes techniques sur l'égalité d'éléments de $K_0(A)$ associés à deux cycles.

Au troisième paragraphe, nous particularisons au cas de l'opérateur de dérivation extérieure à coefficients dans un fibré plat en A modules sur une variété V et démontrons l'invariance par homotopie de cette construction (cf. [14], [16], [18], [20], [13]). Il nous a semblé instructif, et utile pour la compréhension du cas presque plat, d'en inclure ici une démonstration complète.

Le cas des fibrés presque plats est considéré au quatrième paragraphe et le cas des feuilletages au cinquième.

1. Formes quadratiques et bimodules de Kasparov (cf. [13])

Dans ce paragraphe nous donnons la construction de certains éléments de K-théorie associés à des triplets $(\mathscr{E}, Q, D)$ où $\mathscr{E}$ est un C^*-module hilbertien, Q est une forme quadratique sur $\mathscr{E}$ et D est un opérateur de $\mathscr{E}$. La principale différence de présentation avec [13] est que nous serons particulièrement intéressés au cas où l'opérateur D est non borné.

Soit A une C^*-algebre. Soit $\mathscr{E}$ un A-module à droite.

1.1. Définition. On suppose donnés sur $\mathscr{E}$ deux produits scalaires $\langle\,,\rangle_1$ et $\langle\,,\rangle_2$ tels que $\mathscr{E}$ soit un A-module hilbertien pour chacun d'entre eux. Nous dirons que ces deux produits scalaires sont *compatibles* s'il existe un opérateur A-linéaire et inversible T tel que pour tout $\xi, \zeta \in \mathscr{E}$ on ait $\langle \xi, \zeta\rangle_2 = \langle \xi, T\zeta\rangle_1$.

1.2. Propriétés et exemples. a) Si les produits scalaires $\langle\,,\rangle_1$ et $\langle\,,\rangle_2$ sont compatibles, l'opérateur T est uniquement déterminé par la condition de la définition; il est automatiquement inversible, autoadjoint et positif pour chacun des produits scalaires. Les adjoints X_1^* et X_2^* d'un opérateur X pour $\langle\,,\rangle_1$ et pour $\langle\,,\rangle_2$ se déduisent l'un de l'autre par la formule: $X_2^* = T^{-1} X_1^* T$; en particulier les algèbres $\mathscr{L}(\mathscr{E})$ et $\mathscr{K}(\mathscr{E})$ sont les mêmes pour deux produits scalaires compatibles (cf. [13], Proposition 1.7). Les sous-espaces de $\mathscr{E}$ ayant un complément orthogonal sont les mêmes pour deux produits scalaires compatibles: ce sont les images des idempotents de $\mathscr{L}(\mathscr{E})$. En particulier, deux produits scalaires compatibles ont mêmes opérateurs densément définis *réguliers* (au sens de [2]).

b) Il existe des produits scalaires non compatibles: sur le $C[0,1]$-module

$$\mathscr{E} = C[0,1] \oplus C]0,1[$$

notons $\langle\,,\rangle_1$ le produit scalaire naturel et posons $\langle\xi,\zeta\rangle_2 = \langle T\xi, T\zeta\rangle_1$ où $T(f,g) = (f-g,g)$. L'opérateur $P:(f,g) \to (f-g,0)$ est autoadjoint pour $\langle\,,\rangle_2$; il n'a pas d'adjoint pour $\langle\,,\rangle_1$. Donc $\mathscr{L}(\mathscr{E})$ dépend dans ce cas du produit scalaire. Soit $e=(1,0)\in\mathscr{E}$; alors P est le projecteur de rang un $\theta_{e,e}$ pour $\langle\,,\rangle_2$; donc $\mathscr{K}(\mathscr{E})$ dépend du produit scalaire. Notons enfin que l'image $\mathscr{E}'$ de $1-P$ est le graphe de l'inclusion $i: C]0,1[\to C[0,1]$. Comme celle-ci n'a pas d'adjoint, $\mathscr{E}'$ n'a pas de complément orthogonal pour $\langle\,,\rangle_1$.

c) L'ensemble des produits scalaires sur $\mathscr{E}$ compatibles à un produit scalaire donné est un sous-cône convexe du cône des produits scalaires sur $\mathscr{E}$.

Soit $\mathscr{E}$ un A-module à droite. On appellera *forme quadratique sur* $\mathscr{E}$ une application $\mathbb{C}$-sesquilinéaire Q de $\mathscr{E}\times\mathscr{E}$ dans A telle que pour tout $\xi,\zeta\in\mathscr{E}$ et tout $a\in A$ on ait $Q(\xi,\zeta)=Q(\zeta,\xi)^*$ et $Q(\xi,\zeta a)=Q(\xi,\zeta)a$.

1.3. Définition. On dire que la forme quadratique Q est *régulière* s'il existe un opérateur A-linéaire bijectif T de $\mathscr{E}$ sur lui même, tel que la forme sesquilinéaire $\langle\,,\rangle$ donnée par $\langle\xi,\zeta\rangle = Q(\xi, T\zeta)$ $(\xi,\zeta\in\mathscr{E})$ est un produit scalaire pour lequel $\mathscr{E}$ est un A-module hilbertien.

Un opérateur T sur $\mathscr{E}$ est dit *compatible à Q* s'il vérifie la condition ci-dessus; un produit scalaire sur $\mathscr{E}$ est dit *compatible à Q* s'il est de la forme $\langle\xi,\zeta\rangle = Q(\xi,T\zeta)$ pour un opérateur compatible T.

Voyons quelques propriétés des formes quadratiques régulières.

1.4. Lemme. *Soit Q une forme quadratique*:

a) *Deux produits scalaires compatibles à Q sont compatibles entre eux* (*déf.* 1.1).

b) *S'il existe un opérateur compatible, alors il en existe un de carré* 1.

Preuve. a) Soient $\langle\,,\rangle_1$ et $\langle\,,\rangle_2$ des produits scalaires associés à T_1 et T_2 respectivement. Pour $\xi,\zeta\in\mathscr{E}$ on a $\langle\xi,\zeta\rangle_2 = \langle\xi,(T_1^{-1}T_2)\zeta\rangle_1$.

b) Notons $\langle\,,\rangle$ le produit scalaire associé à T. Il est clair que l'opérateur T^{-1} est autoadjoint pour ce produit scalaire; soit P son module. Il est clair que TP convient. □

Un produit scalaire de la forme $\langle\xi,\zeta\rangle = Q(T\xi,\zeta)$ avec $T^2=1$ sera dit *associé à Q*.

La partie a) du lemme 1.4 montre que la structure de C^*-module hilbertien sur $\mathscr{E}$ est pour une grande partie décrite par la forme quadratique régulière Q; en particulier, la topologie de $\mathscr{E}$, les algèbres $\mathscr{L}(\mathscr{E})$ et $\mathscr{K}(\mathscr{E})$ ne dépendent que de Q. Pour tout $S\in\mathscr{L}(\mathscr{E})$, il existe un unique opérateur S', appelé *adjoint de S pour Q*, tel que $\forall\,\xi,\zeta\in\mathscr{E}$ on ait

$$Q(S\xi,\zeta) = Q(\xi, S'\zeta);$$

si T est un opérateur compatible à Q et S^* est l'adjoint de S pour le produit scalaire correspondant, on a $S' = TS^*T^{-1}$.

De même les opérateurs non bornés réguliers de $\mathscr{E}$, ne dépendent que de Q. Si X est un tel opérateur, l'adjoint de X pour Q est encore donné par la formule $X' = TX^*T^{-1}$. Notons qu'on a alors pour $\xi \in \operatorname{dom} X'$ et $\zeta \in \operatorname{dom} X$, $Q(\xi, X\zeta) = Q(X'\xi, \zeta)$.

La partie b) exprime que toute forme quadratique fortement non dégénérée admet une décomposition polaire.

Nous présentons maintenant les principaux objets d'étude de ce paragraphe. Il est commode de les étudier parallèlement dans le cas borné et dans le cas non borné.

1.5. Définition. 1) On note $\mathbf{L}_b(A)$ l'ensemble des triplets $(\mathscr{E}, Q, D)$ où $\mathscr{E}$ est un A-module, Q est une forme quadratique fortement non dégénérée sur $\mathscr{E}$ et $D \in \mathscr{L}(\mathscr{E})$ vérifie:

a) $D' + D \in \mathscr{K}(\mathscr{E})$;

b) $D^2 \in \mathscr{K}(\mathscr{E})$;

c) $\exists s, t \in \mathscr{L}(\mathscr{E})$ avec $sD + Dt - 1 \in \mathscr{K}(\mathscr{E})$.

2) On note $\mathbf{L}_{nb}(A)$ l'ensemble des triplets $(\mathscr{E}, Q, D)$ où $\mathscr{E}$ est un A-module, Q est une forme quadratique fortement non dégénérée sur $\mathscr{E}$ et D est un opérateur régulier de $\mathscr{E}$ et vérifie:

a) $D' + D \in \mathscr{L}(\mathscr{E})$;

b) $\operatorname{im} D \subset \operatorname{dom} D$ et $D^2 \in \mathscr{L}(\mathscr{E})$;

c) $\exists s, t \in \mathscr{K}(\mathscr{E})$ avec $sD \in \mathscr{L}(\mathscr{E})$, $\operatorname{im} t \subset \operatorname{dom} D$, $Dt \in \mathscr{L}(\mathscr{E})$ et $sD + Dt - 1 \in \mathscr{K}(\mathscr{E})$.

Remarque. Les conditions $D^2, sD \in \mathscr{L}(\mathscr{E})$ signifient qu'il existe $a, b \in \mathscr{L}(\mathscr{E})$ avec $D^2\xi = a\xi$, $sD\xi = b\xi$ $\forall \xi \in \operatorname{dom} D$.

Nous allons maintenant construire une application $\Psi : \mathbf{L}(A) \to K_0(A)$.

1.6. Proposition. 1) *Soit* $(\mathscr{E}, Q, D) \in \mathbf{L}_b(A)$. *Alors* $D + D^*$ *est inversible modulo* $\mathscr{K}(\mathscr{E})$, *où* D^* *est l'adjoint de D pour un produit scalaire compatible à* Q.

2) *Soit* $(\mathscr{E}, Q, D) \in \mathbf{L}_{nb}(A)$. *Alors l'opérateur* $D + D^*$ *est auto-adjoint* (*sur son domaine* $\operatorname{dom} D \cap \operatorname{dom} D^*$), *régulier et à résolvante dans* $\mathscr{K}(\mathscr{E})$ *où* D^* *est l'adjoint de D pour un produit scalaire compatible à* Q.

Preuve. 1) On se place dans l'algèbre $\mathscr{L}(\mathscr{E})/\mathscr{K}(\mathscr{E})$. Posons $e = sD$, $f = Dt$; e et f sont des idempotents et on a $fDe = D$; soit p le projecteur tel que $pe = p$ et $ep = e$. On a alors $D = (1-p)Dp$. Il existe alors $a = ps(1-p)$ tel que $aD = p$ et $b = pt(1-p)$ tel que $Db = 1 - p$; mais alors $a = aDb = b$; on en déduit que $(D + D^*)^{-1} = a + a^*$.

Pour démontrer la partie 2) nous aurons besoin d'un lemme:

1.7. Lemme. a) *Soit D un opérateur densément défini agissant sur le C^*-module hilbertien $\mathscr{E}$ et soit $t \in \mathscr{L}(\mathscr{E})$. Si* $\operatorname{im} t \subset \operatorname{dom} D^*$ *alors* $D^* t \in \mathscr{L}(\mathscr{E})$.

b) *Soit D un opérateur régulier agissant sur le C^*-module hilbertien $\mathscr{E}$ et soit $t \in \mathscr{L}(\mathscr{E})$. Si $tD \in \mathscr{L}(\mathscr{E})$ alors* $\operatorname{im} t^* \subset \operatorname{dom} D^*$ *et* $D^* t^* = (tD)^*$.

c) *Soient D_1 et D_2 deux opérateurs réguliers agissant sur le C^*-module hilbertien $\mathscr{E}$. Si $D_1 : \operatorname{dom} D_1 \to \mathscr{E}$ est bijectif et $\operatorname{dom} D_1 \subset \operatorname{dom} D_2$, alors $D_2 D_1^{-1} \in \mathscr{L}(\mathscr{E})$.*

Preuve. a) L'opérateur $D^* t$ est fermé (car t est continu) et partout défini, donc continu par le théorème du graphe fermé. Comme son adjoint est densément défini, $D^* t \in \mathscr{L}(\mathscr{E})$.

b) Soit $T \in \mathscr{L}(\mathscr{E})$ avec $tD\xi = T\xi$, $\forall \xi \in \operatorname{dom} D$. Pour $\xi \in \operatorname{dom} D$ et $\zeta \in \mathscr{E}$,

$$\langle D\xi, t^*\zeta \rangle = \langle \xi, T^*\zeta \rangle$$

donc $t^*\zeta \in \operatorname{dom} D^*$ et $D^* t^* \zeta = T^* \xi$.

c) L'opérateur $D_1(1 + D_1^* D_1)^{-1/2} \in \mathscr{L}(\mathscr{E})$ est inversible; donc $D_1^{-1} \in \mathscr{L}(\mathscr{E})$ et c) résulte donc de a). □

Preuve du 2) *de la proposition* 1.6. a) Supposons d'abord que $D^2 = 0$. Par [10], lemme 2.2, $D + D^*$ est autoadjoint et régulier. Montrons qu'il est à résolvante compacte. On écrit $sD + Dt = 1 - k$ $(s, t, k \in \mathscr{K}(\mathscr{E}))$; comme $sDDt = 0$, sD est un idempotent modulo $\mathscr{K}(\mathscr{E})$; soit $q \in \mathscr{L}(\mathscr{E})$ tel que $q = q^*$, $q^2 - q \in \mathscr{K}(\mathscr{E})$, $qsD - q \in \mathscr{K}(\mathscr{E})$ et

$$sDq - sD \in \mathscr{K}(\mathscr{E})$$

(dans l'algèbre $\mathscr{L}(\mathscr{E})/\mathscr{K}(\mathscr{E})$ q est le projecteur qui a même noyau que l'idempotent sD), donc $Dt(1-q) - Dt \in \mathscr{K}(\mathscr{E})$; d'où $1 - \big(qsD + Dt(1-q)\big) \in \mathscr{K}(\mathscr{E})$ et donc

$$\ell = 1 - D^* s^* q - Dt(1-q) \in \mathscr{K}(\mathscr{E}).$$

Comme $\operatorname{dom}(D + D^*) = \operatorname{dom} D \cap \operatorname{dom} D^*$, il existe $\alpha, \beta \in \mathscr{L}(\mathscr{E})$ tels que

$$D = \alpha(i + D + D^*)^*$$

et $D^* = \beta(i + D + D^*)^*$ (lemme 1.7). Donc

$$(i + D + D^*)^{-1} = (i + D + D^*)^{-1}\ell + \big(\alpha^* s^* q + \beta^* t(1-q)\big) \in \mathscr{K}(\mathscr{E}).$$

b) Si $D = D_0 + a$ où $D_0^2 = 0$ et $a \in \mathscr{L}(\mathscr{E})$, comme $(D + D^*) = (D_0 + D_0^*) + (a + a^*)$ les propriétés de $D + D^*$ se déduisent immédiatement de celles de $(D_0 + D_0^*)$. En effet, comme $\|(\lambda i + D_0 + D_0^*)^{-1}\| \leqq \lambda^{-1}$,

$$(\lambda i + D + D^*) = (\lambda i + D_0 + D_0^*)\big(1 + (\lambda i + D_0 + D_0^*)^{-1}(a + a^*)\big)$$

est surjectif pour $\lambda \in \mathbb{R}$ assez grand. Son inverse est compact comme $(\lambda i + D_0 + D_0^*)^{-1}$ l'est.

c) Pour le cas général, soit $(\mathscr{E}, Q, D) \in \mathbf{L}_{nb}(A)$ et soit D_1 et D_2 les opérateurs réguliers de $\mathscr{E} \oplus \mathscr{E}$ donnés par les matrices:

$$D_1 = \begin{bmatrix} D & D^2 \\ -1 & -D \end{bmatrix}; \quad D_2 = \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & -D \end{bmatrix}.$$

On a alors $D_1^2 = 0$ (notons que $\operatorname{im} D_1 \subset \operatorname{dom} D_1 = \operatorname{dom} D \oplus \operatorname{dom} D$ puisque

$$D^2(\operatorname{dom} D) \subset \operatorname{dom} D).$$

Il est clair que $(\mathscr{E} \oplus \mathscr{E}, Q \oplus (-Q), D_2) \in \mathbf{L}_{nb}(A)$. Donc $(\mathscr{E} \oplus \mathscr{E}, Q \oplus (-Q), D_1) \in \mathbf{L}_{nb}(A)$. Par le cas a) on conclut que $D_1 + D_1^*$ est auto-adjoint et régulier et à résolvante dans $\mathscr{K}(\mathscr{E} \oplus \mathscr{E})$; par le cas b) il résulte que $D_2 + D_2^*$ est auto-adjoint et régulier et à résolvante dans $\mathscr{K}(\mathscr{E} \oplus \mathscr{E})$; il est alors immédiat que $D + D^*$ a les mêmes propriétés. □

La proposition 1.6 définit une application $\Psi : \mathbf{L}(A) \to K_0(A)$ de la façon suivante: soient $(\mathscr{E}, Q, D) \in \mathbf{L}_b(A)$ et $T \in \mathscr{L}(\mathscr{E})$ un opérateur compatible à Q tel que $T^2 = 1$ (lemme 1.4. b)); munissons $\mathscr{E}$ de la graduation associée à T; alors, comme $D^* = TD'T$, l'opérateur $D + D^*$ est de degré 1 modulo $\mathscr{K}(\mathscr{E})$. Soit F un opérateur de degré 1 tel que

$$(D + D^*) - F|D + D^*| \in \mathscr{K}(\mathscr{E});$$

alors $(\mathscr{E}, F)$ est un $\mathbb{C}, A$ bimodule de Kasparov.

Soit $(\mathscr{E}, Q, D) \in \mathbf{L}_{nb}(A)$. Alors $(\mathscr{E}, (D + D^*)^{(1)})$ est un $\mathbb{C}, A$ bimodule de Kasparov non borné au sens de [2] (où $\mathscr{E}$ est gradué par un opérateur T comme dans le cas borné).

L'ensemble des T compatibles de carré 1 étant clairement connexe, cette application est bien définie.

1.8. Proposition. *Soit $(\mathscr{E}, Q, D)$ un élément de $\mathbf{L}_{nb}(A)$ tel $D' = -D$. Munissons $\mathscr{E}$ d'un produit scalaire associé à Q et posons $q = D(1 + D^*D)^{-1/2}$. Alors $(\mathscr{E}, Q, q)$ est un élément de $\mathbf{L}_b(A)$ et $\Psi(\mathscr{E}, Q, D) = \Psi(\mathscr{E}, Q, q)$.*

Preuve. Posons $q_1 = D(1 + (D + D^*)^2)^{-1/2}$, $q_2(1 + (D + D^*)^2)^{-1/2} D$. Par le lemme 1.7, $q_1 \in \mathscr{L}(\mathscr{E})$ et $q_2 \in \mathscr{L}(\mathscr{E})$. Vérifions que $q - q_1 \in \mathscr{K}(\mathscr{E})$. On a:

$$\begin{aligned} q - q_1 &= \int_0^{+\infty} \frac{dw}{\sqrt{w}} D[(1 + w + D^*D)^{-1} - (1 + w + (D + D^*)^2)^{-1}] \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{dw}{\sqrt{w}} (1 + w + D^*D)^{-1} [D(D^2 + D^{*2}) + D^2 D^*] (1 + w + (D + D^*)^2)^{-1}. \end{aligned}$$

Comme D^2 et D^{*2} sont bornés, que $(1 + w + (D + D^*)^2)^{-1/2}$ est compact, l'intégrant est compact et sa norme est majorée par $kw^{-1/2}(1 + w)^{-3/2}$ $(k \in \mathbb{R})$; cette intégrale converge donc dans $\mathscr{K}(\mathscr{E})$.

De même $q - q_2 \in \mathcal{K}(\mathcal{E})$. Comme $q_2 q_1 \in \mathcal{K}(\mathcal{E})$, il en résulte que $q^2 \in \mathcal{K}(\mathcal{E})$. Donc $(\mathcal{E}, Q, q) \in \mathbf{L}_b(A)$. Or $(D + D^*)\bigl(1 + (D + D^*)^2\bigr)^{-1/2} = q_1 + q_2^*$; enfin, comme

$$(q_1 + q_2^*) - (q + q^*) \in \mathcal{K}(\mathcal{E}),$$

on en déduit immédiatement l'égalité $\Psi(\mathcal{E}, Q, D) = \Psi(\mathcal{E}, Q, q)$. □

1.9. Proposition. *Soit $(\mathcal{E}, Q, D)$ un élément de $\mathbf{L}_b(A)$ (resp. $\mathbf{L}_{nb}(A)$).*

a) *Si* $\ker D = \operatorname{im} D$ *et* $D' = -D$ *alors* $\Psi(\mathcal{E}, Q, D) = 0$.

b) $\Psi(\mathcal{E}, -Q, -D) = -\Psi(\mathcal{E}, Q, D)$ (*remarquons que* $\Psi(\mathcal{E}, Q, D) = \Psi(\mathcal{E}, Q, -D)$).

Preuve. a) Par la proposition 1.8 il suffit de traiter le cas borné (comme $\ker q = \ker D$ et $\operatorname{im} q = \operatorname{im} D$). Il suffit de démontrer que (pour un produit scalaire associé à Q) $D + D^*$ est inversible.

Rappelons (cf. [19], [13]), que si $T \in \mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{E}')$ est surjectif, alors TT^* est inversible. En effet, par le théorème de l'application ouverte, il existe $k \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall \xi' \in \mathcal{E}'$, $\exists \xi \in \mathcal{E}$ avec $\|\xi\| \leqq k\|\xi'\|$ et $T\xi = \xi'$. Pour tout $\xi \in \mathcal{E}'$, $\|\xi\| \leqq 1$ et tout $\alpha > 0$ il existe $\xi_\alpha \in \mathcal{E}'$ avec $\|\xi_\alpha\| \leqq 1$ et $\langle \xi, \xi_\alpha \rangle = \langle \xi, \xi \rangle^{(1+\alpha)/2}$ (la suite $\xi(n^{-1} + \langle \xi, \xi \rangle)^{(\alpha-1)/2}$ converge). Soit $\zeta_\alpha \in \mathcal{E}$, $\|\zeta_\alpha\| \leqq k$ tel que $\xi_\alpha = T\zeta_\alpha$. On a:

$$\langle T^*\xi, T^*\xi \rangle \geqq k^{-2} \langle T^*\xi, \zeta_\alpha \rangle \langle \zeta_\alpha, T^*\xi \rangle = k^{-2} \langle \xi, \xi \rangle^{1+\alpha}.$$

Ceci étant vrai pour tout $\alpha > 0$, on en déduit que $TT^* \geqq k^{-2}$.

Posons alors $\mathcal{E}' = \ker D$ et soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{E}')$ l'élément induit de D. Alors T est surjectif donc TT^* est inversible. Donc 0 est isolé dans le spectre de $T^*T = D^*D$. Soit $\mathcal{E}''$ l'orthogonal de $\mathcal{E}'$ dans $\mathcal{E}$. On a $\mathcal{E}'' \oplus \mathcal{E}' = \mathcal{E}$. De plus DD^* est inversible sur $\mathcal{E}'$ et D^*D sur $\mathcal{E}''$. On en déduit que $DD^* + D^*D$ est inversible.

b) résulte de ce que, une fois choisi le produit scalaire associé, changer Q en $-Q$ revient à changer la graduation en son opposé; changer Q en $-Q$ revient à changer F en $-F$. □

La proposition suivante est un analogue dans notre cadre de la comparaison des cohomologies C^∞ et L^2.

1.10. Proposition. *Soit $(\mathcal{E}, Q, D) \in \mathbf{L}_{nb}(A)$ tel que $D^2 = 0$ et $D + D' = 0$. Munissons $\mathcal{E}$ d'un produit scalaire associé et notons $\mathcal{E}^\infty = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} (\operatorname{dom}(D + D^*)^k)$. On a $\mathcal{E}^\infty \subset \operatorname{dom} D$ et $D(\mathcal{E}^\infty) \subset \mathcal{E}^\infty$. Soit $D^\infty : \mathcal{E}^\infty \to \mathcal{E}^\infty$ la restriction de D. L'application naturelle*

$$\theta : \ker(D^\infty)/\operatorname{im}(D^\infty) \to \ker D/\operatorname{im} D$$

est bijective.

Preuve. On a $\operatorname{dom}(D + D^*) = \operatorname{dom} D \cap \operatorname{dom} D^*$ (cf. [10], lemme 2.2). En particulier $\mathcal{E}^\infty \subset \operatorname{dom} D$. On vérifie par récurrence que $\operatorname{dom}(D + D^*)^k = \operatorname{dom}(|D|^k) \cap \operatorname{dom}(|D^*|^k)$. Donc $D(\mathcal{E}^\infty) \subset \mathcal{E}^\infty$.

Soit $x \in \operatorname{dom} D$ tel que $Dx \in \mathscr{E}^\infty$. Posons $y = \exp(-DD^*)x$. Montrons que $y \in \mathscr{E}^\infty$ et que $y - x \in \operatorname{im} D$. Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$ tel que $\exp(-t) = tf(t) + 1$. On a

$$y - x = DD^* f(DD^*)x \in \operatorname{im} D.$$

On a $Dy = Dx \in \mathscr{E}^\infty$ et $D^* y = D^* \exp(-DD^* - D^* D)x$. Donc $D^* y \in \mathscr{E}^\infty$. Donc $y \in \mathscr{E}^\infty$.

Si $x \in \ker D$, et y comme ci-dessus, la classe de x dans $\ker D/\operatorname{im} D$ est l'image de celle de y dans $\ker(D^\infty)/\operatorname{im}(D^\infty)$ et θ est surjective. Si la classe de $z \in \ker(D^\infty)$ est dans le noyau de θ, il existe $x \in \operatorname{dom} D$ tel que $Dx = z \in \mathscr{E}^\infty$; soit alors y comme ci-dessus; on a

$$z = Dy \in \operatorname{im}(D^\infty). \qquad \square$$

1.11. Remarque. Soit $(\mathscr{E}, Q, D) \in \mathbf{L}_{nb}(A)$ tel que $D^2 = 0$; soit $T \in \mathscr{L}(\mathscr{E})$ tel que $T^2 = 0$, $\operatorname{im} T \subset \operatorname{dom} D$ et $TD + DT = 0$. Munissons $\mathscr{E}$ d'un produit scalaire tel que

$$(T + T^*)\mathscr{E} \subset \mathscr{E}^\infty = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \left(\operatorname{dom}(D + D^*)^k\right).$$

Alors pour tout $p, q \in \mathbb{N}$, $(D + D^*)^p (T + T^*)(D + D^*)^q \in \mathscr{L}(\mathscr{E})$; donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\operatorname{dom}(D + T + D^* + T^*)^k = \operatorname{dom}(D + D^*)^k$ et $(D + T + D^* + T^*)^k - (D + D^*)^k \in \mathscr{L}(\mathscr{E})$. En particulier, $\mathscr{E}^\infty(D + T) = \mathscr{E}^\infty(D)$ i.e.

$$\bigcap_{k \in \mathbb{N}} \left(\operatorname{dom}(D + T + D^* + T^*)^k\right) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \left(\operatorname{dom}(D + D^*)^k\right).$$

1.12. Remarques. On peut munir $\mathbf{L}_b(A)$ de la relation d'équivalence donnée par l'homotopie; le quotient est le groupe de chirugie de A; il est isomorphe à $K_0(A)$.

On peut de même construire un groupe de chirurgie $\mathbf{L}$ impair isomorphe à K_1:

On considère des $(\mathscr{E}, Q, D)$ où $\mathscr{E}$ est un A-module $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-gradué, Q est une forme quadratique fortement non dégénérée sur $\mathscr{E}$ et $D \in \mathscr{L}(\mathscr{E})$ vérifie:

a) $D' = -D$;

b) $D^2 \in \mathscr{K}(\mathscr{E})$;

c) $\exists s, t \in \mathscr{L}(\mathscr{E})$ avec $sD + Dt - 1 \in \mathscr{K}(\mathscr{E})$;

d) D est de degré 1.

On demande de plus que Q soit de degré 1 pour la graduation c'est-à-dire que

$$Q(\xi, \zeta) = 0$$

si $\partial \xi = \partial \zeta$.

L'application de $\mathbf{L}_1(A)$ à valeurs dans $K_1(A)$ est définie de la façon suivante:

Il existe des opérateurs compatibles de degré 0 et de carré 1. Soient T un tel opérateur et ε l'opérateur de graduation. L'opérateur autoadjoint elliptique $D + D^*$ (proposition 1.6) anticommute aux deux opérateurs de graduation T et ε; il commute donc à leur produit. Comme T et ε commutent entre eux, on a $(T\varepsilon)^2 = 1$; posons $P = (1 + T\varepsilon)/2$, $\mathscr{E}' = P\mathscr{E}$ et soit F la restriction de $D + D^*$ à $\mathscr{E}'$; c'est un opérateur autoadjoint elliptique et définit donc un élément de $K_1(A)$.

2. Quelques lemmes techniques

Dans ce paragraphe nous donnons quelques conditions suffisantes pour que deux éléments de $\mathbf{L}(A)$ définissent le même élément de K-théorie. Ces conditions, souvent assez techniques seront utilisées dans les paragraphes suivants.

Le lemme technique suivant nous servira au § 3:

2.1. Lemme. *Soient $(\mathscr{E}_i, Q_i, D_i)$ $(i = 1, 2)$ deux éléments de $\mathbf{L}_{nb}(A)$ et soit $T \in \mathscr{L}(\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2)$. On suppose que $D_i' = -D_i$, $D_i^2 = 0$ et qu'on a*:

a) $T(\operatorname{dom} D_1) \subset \operatorname{dom} D_2$, $TD_1 = D_2 T$;

b) *T induit un isomorphisme* $T: \ker D_1/\operatorname{im} D_1 \to \ker D_2/\operatorname{im} D_2$;

c) *il existe $y \in \mathscr{L}(\mathscr{E}_1)$ tel que $y(\operatorname{dom} D_1) \subset \operatorname{dom} D_1$ et $1 - T'T = D_1 y + y D_1$*;

d) *il existe $\varepsilon \in \mathscr{L}(\mathscr{E}_1)$ tel que $\varepsilon(\operatorname{dom} D_1) \subset \operatorname{dom} D_1$, $\varepsilon D_1 = -D_1 \varepsilon$, $\varepsilon^2 = 1$, $\varepsilon = \varepsilon'$, ε commute à $(1 - T'T)$.*

Alors $\Psi(\mathscr{E}_1, Q_1, D_1) = \Psi(\mathscr{E}_2, Q_2, D_2)$.

Preuve. Remarquons d'abord que l'on peut supposer $y = -y'$. En effet, pour $\xi, \zeta \in \operatorname{dom} D_1$, on a $(y'\xi, D_1\zeta) = \big(\xi, (1 - T'T)\zeta\big) - (D_1\xi, y\zeta)$, et donc

$$y'(\operatorname{dom} D_1) \subset \operatorname{dom} D_1 .$$

L'égalité est encore satisfaite avec y' et on peut donc remplacer y par $(y - y')/2$.

Posons $(\mathscr{E}, Q, D) = (\mathscr{E}_1, Q_1, D_1) \oplus (\mathscr{E}_2, -Q_2, -D_2)$. Par la proposition 1.9, il suffit de montrer que $\Psi(\mathscr{E}, Q, D) = 0$.

Pour $t \in [0, 1]$ on définit R_t, $L_t \in \mathscr{L}(\mathscr{E})$ et l'opérateur régulier ∇_t sur $\mathscr{E}$ par leurs matrices:

$$R_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ itT\varepsilon & 1 \end{bmatrix}, \quad L_t = \begin{bmatrix} 1 - T'T & (i\varepsilon + ty)T' \\ T(i\varepsilon + ty) & 1 \end{bmatrix}, \quad \nabla_t = \begin{bmatrix} D_1 & tT' \\ 0 & -D_2 \end{bmatrix}.$$

On définit aussi les formes quadratiques B_t, C_t $(t \in [0, 1])$ en posant

$$B_t(\xi, \zeta) = Q(R_t\xi, R_t\zeta) \quad \text{et} \quad C_t(\xi, \zeta) = Q(L_t\xi, \zeta).$$

Comme D commute à R_t, $(\mathscr{E}, B_t, D) \in \mathbf{L}_{nb}(A)$.

Comme $L_0 = R_1' R_1$ est inversible, il existe $\alpha > 0$ tel que pour $t \in [0, \alpha]$, L_t est inversible. On vérifie que ∇_t est antiautoadjointe pour C_t, donc $(\mathscr{E}, C_t, \nabla_t) \in \mathbf{L}_{nb}(A)$ $(t \in [0, \alpha])$. Il est alors clair que $(\mathscr{E}, B_t, D) \in \mathbf{L}_{nb}(A([0,1]))$ et $(\mathscr{E}, C_t, \nabla_t) \in \mathbf{L}_{nb}(A([0,\alpha]))$. Comme de plus $(\mathscr{E}, B_1, D) = (\mathscr{E}, C_0, \nabla_0)$, on en déduit que $(\mathscr{E}, B_0, D)$ et $(\mathscr{E}, C_\alpha, \nabla_\alpha)$ ont même image par Ψ. Par c), l'application induite par T' de $\ker D_2/\mathrm{im}\, D_2$ à $\ker D_1/\mathrm{im}\, D_1$ est un inverse à droite de T et est donc bijectif par b). Il en résulte alors que $\ker \nabla_\alpha = \mathrm{im}\, \nabla_\alpha$ et $\Psi(\mathscr{E}, C_\alpha, \nabla_\alpha) = 0$. □

Dans le cas des fibrés presque plats nous n'aurons plus la condition $D^2 = 0$. Nous aurons besoin de quelques estimations:

2.2. Lemme. *Soient α et K deux nombres réels positifs tels que $4\alpha K^2 < 1$. Soit ∇ un opérateur régulier du C^*-module hilbertien $\mathscr{E}$ tel que $\mathrm{im}\,\nabla \subset \mathrm{dom}\,\nabla$, $\|\nabla^2\| \leqq \alpha^2$ et supposons qu'il existe $x, y \in \mathscr{L}(\mathscr{E})$, y inversible tels que $x\,\mathrm{dom}\,\nabla \subset \mathrm{dom}\,\nabla$, $x\nabla + \nabla x = y$, $\|x\| \leqq K$ et $\|y^{-1}\| \leqq K$. Alors $\nabla + \nabla^*$ admet un inverse borné de norme inférieure ou égale à $K^2/(1 - 4\alpha K^2)$.*

Preuve. Définissons un opérateur régulier D de $\mathscr{E} \oplus \mathscr{E}$ donné par la matrice:

$$D = \begin{bmatrix} \nabla & \nabla^2/\alpha \\ -\alpha & -\nabla \end{bmatrix}$$

et soient $X = x \oplus (-x)$ et $Y = y \oplus y \big(\in \mathscr{L}(\mathscr{E} \oplus \mathscr{E})\big)$. Alors $\|DX + XD - Y\| \leqq 2\alpha K$ donc $DX + XD$ est inversible et $\|(DX + XD)^{-1}\| \leqq K/(1 - 2\alpha K^2)$. Posons $K' = K^2/(1 - 2\alpha K^2)$. Comme $D^2 = 0$, on en déduit que $D + D^*$ est inversible et que $\|(D + D^*)^{-1}\| \leqq K'$. Comme $\|\{\nabla \oplus (-\nabla)\} + \{\nabla \oplus (-\nabla)\}^* - (D + D^*)\| \leqq 2\alpha$, il découle que $\nabla + \nabla^*$ admet un inverse de norme inférieure ou égale à $K(1 - 2\alpha K') = K^2/(1 - 4\alpha K^2)$. □

2.3. Lemme. *Soient α et K deux nombres réels positifs tels que $K \geqq 1$ et $5\alpha K^5 < 1$. Soit $(\mathscr{E}, Q, D)$ un élément de $\mathbf{L}_{nb}(A)$ et supposons que $\mathscr{E}$ est muni d'un produit scalaire compatible $\langle .,. \rangle$. Soit $T \in \mathscr{L}(\mathscr{E})$ l'opérateur tel que $Q(\xi, \zeta) = \langle \xi, T\zeta \rangle$ $(\xi, \zeta \in \mathscr{E})$. On suppose que $\|D^2\| \leqq \alpha^2$, $\|D' + D\| < \alpha$; il existe $x, y \in \mathscr{L}(\mathscr{E})$, y inversible tels que $x\,\mathrm{dom}\, D \subset \mathrm{dom}\, D$, $Dx \in \mathscr{L}(\mathscr{E})$, $xD + Dx = y$, $\|x\| \leqq K$ et $\|y^{-1}\| \leqq K$ et $\|T\|\,\|T^{-1}\| \leqq K^2$. Alors*

$$\Psi(\mathscr{E}, Q, D) = 0\,.$$

Preuve. Définissons un produit scalaire associé à Q en posant $(\xi, \zeta) = \langle \xi, |T|\zeta \rangle$ $(\xi, \zeta \in \mathscr{E})$. Si $z \in \mathscr{L}(\mathscr{E})$ la norme de z pour ce produit scalaire est majorée par

$$(\|T\|\,\|T^{-1}\|)^{1/2}\|z\| \leqq K\|z\|\,.$$

Munissons $\mathscr{E}$ du produit scalaire $(.,.)$. On a donc $\|D^2\| \leqq K\alpha^2$, $\|D' + D\| < K\alpha$, $\|x\| \leqq K^2$ et $\|y^{-1}\| \leqq K^2$. Par le lemme 2.2, $D + D^*$ est inversible et

$$\|(D + D^*)^{-1}\| \leqq K^4/(1 - 4\alpha K^{3/2})\,.$$

Comme $\|(D+D^*)^{(0)}\| \leqq \|D'+D\|$, il s'ensuit que

$$\|(D+D^*)-(D+D^*)^{(1)}\|\,\|(D+D^*)^{-1}\|<1$$

et $(D+D^*)^{(1)}$ est inversible. □

2.4. Lemme. *Soient $(\mathscr{E}_i, Q_i, D_i)$ $(i=1,2)$ deux éléments de $\mathbf{L}_{nb}(A)$ tels que $D_i' = -D_i$. Munissons les modules $\mathscr{E}_i$ de produits scalaires associés à Q_i. Soit $T \in \mathscr{L}(\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2)$ et α et K deux scalaires positifs. Supposons qu'on ait:*

a) $\|D_i^2\| \leqq \alpha^2$, $\|T\| \leqq K$, $T(\operatorname{dom} D_1) \subset \operatorname{dom} D_2$ *et* $\|TD_1 - D_2 T\| \leqq \alpha^2$;

b) *il existe* $y \in \mathscr{L}(\mathscr{E}_1)$ *tel que* $\|y\| \leqq K$, $y(\operatorname{dom} D_1) \subset \operatorname{dom} D_1$ *et*

$$\|1 - T'T - D_1 y - y D_1\| \leqq \alpha^2;$$

c) *il existe* $\varepsilon \in \mathscr{L}(\mathscr{E}_1)$ *tel que* $\varepsilon(\operatorname{dom} D_1) \subset \operatorname{dom} D_1$, $\varepsilon D_1 = -D_1 \varepsilon$, $\varepsilon^2 = 1$, $\varepsilon = \varepsilon'$, ε *commute à* $(1 - T'T)$;

d) *il existe* $z \in \mathscr{L}(\mathscr{E}_2)$ *tel que* $\|z\| \leqq K$, $z(\operatorname{dom} D_2) \subset \operatorname{dom} D_2$ *et*

$$\|1 - TT' - D_2 z - z D_2\| \leqq \alpha^2.$$

Si de plus $(2K)^{25}\alpha \leqq 1$ et $K \geqq 1$, alors $\Psi(\mathscr{E}_1, Q_1, D_1) = \Psi(\mathscr{E}_2, Q_2, D_2)$.

Preuve. On peut supposer comme dans le lemme 2.1 que $y = -y'$ et $z = -z'$, puisque les inégalités de b) sont satisfaites par $(y-y')/2$ et $(z-z')/2$.

Posons $(\mathscr{E}, Q, D) = (\mathscr{E}_1, Q_1, D_1) \oplus (\mathscr{E}_2, -Q_2, -D_2)$. Par la proposition 1.9, il suffit de montrer que $\Psi(\mathscr{E}, Q, D) = 0$.

Pour $t \in [0,1]$ on définit R_t, $L_t \in \mathscr{L}(\mathscr{E})$ et l'opérateur régulier ∇_t sur $\mathscr{E}$ par leurs matrices:

$$R_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ itT\varepsilon & 1 \end{bmatrix}, \quad L_t = \begin{bmatrix} 1 - T'T & (i\varepsilon + ty)T' \\ T(i\varepsilon + ty) & 1 \end{bmatrix}, \quad \nabla_t = \begin{bmatrix} D_1 & tT' \\ 0 & -D_2 \end{bmatrix}.$$

On définit aussi les formes quadratiques B_t, C_t $(t \in [0,1])$ en posant

$$B_t(\xi, \zeta) = Q(R_t \xi, R_t \zeta)$$

et $C_t(\xi, \zeta) = Q(L_t \xi, \zeta)$.

Soit D^t l'adjoint de D pour la forme B_t. On a

$$D^t = (R_t' R_t)^{-1} D' (R_t' R_t) = -(R_t' R_t)^{-1} D (R_t' R_t).$$

En estimant le commutateur de R_t avec D, on trouve que $D + D^t \in \mathscr{L}(\mathscr{E})$ et

$$\|D + D^t\| \leqq \alpha(2 + 2K + K^2).$$

En particulier, $(\mathscr{E}, B_t, D) \in \mathbf{L}_{nb}(A)$.

Comme $L_0 = R_1' R_1$, il est inversible et $\|L_0^{-1}\| \leqq (1 + K)^2$; donc L_t est inversible pour $t \in [0, K^{-2}(1 + K)^{-2}[$. Posons $a = K^{-2}(1 + K)^{-2}/2$. Alors $\|L_a^{-1}\| \leqq 2(1 + K)^2$. L'adjoint de ∇_t pour la forme C_t est $L_t^{-1} \nabla_t' L_t$. On a $\nabla_t' L_t + L_t \nabla_t = \begin{bmatrix} b & -c_t' \\ c_t & 0 \end{bmatrix}$ où $b = D_1 T' T - T' T D_1$ et $c_t = -tT(1 - T'T) + D_2 T(i\varepsilon + ty) + T(i\varepsilon + ty) D_1$.

Or $b = (D_1 T' - T' D_2) T + T'(D_2 T - T D_1) \in \mathscr{L}(\mathscr{E}_1)$ et

$$c_t = (D_2 T - T D_1)(i\varepsilon + ty) - tT(1 - T'T - D_1 y - y D_1) \in \mathscr{L}(\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2)$$

donc $(\mathscr{E}, C_t, \nabla_t) \in \mathbf{L}_{nb}(A)$ $(t \in [0, a])$. Il est alors clair que $(\mathscr{E}, B_t, D) \in \mathbf{L}_{nb}(A([0,1]))$ et $(\mathscr{E}, C_t, \nabla_t) \in \mathbf{L}_{nb}(A([0, a]))$. Comme de plus $(\mathscr{E}, B_1, D) = (\mathscr{E}, C_0, \nabla_0)$, on en déduit que $\Psi(\mathscr{E}, B_0, D) = \Psi(\mathscr{E}, C_a, \nabla_a)$.

Posons $K' = K(1 + 2K^2(1 + K)^2) \leqq 9K^5$ et $\alpha' = 2^{1/2}\alpha$. Si $K \geqq 1$ et $(2K)^{25}\alpha \leqq 1$, alors $5\alpha' K'^5 < 1$.

Il est clair que $\|\nabla_a^2\| \leqq 2\alpha^2 = \alpha'^2$; l'adjoint de ∇_a pour la forme C_a est $L_a^{-1} \nabla_a' L_a$ et on a:

$$\begin{aligned} \|\nabla_a + L_a^{-1} \nabla_a' L_a\| &\leqq \|L_a^{-1}\| (\|b\| + \|c_a\|) \leqq 2(1 + K)^2 (2\alpha^2 K + \alpha^2(1 + 2aK)) \\ &\leqq 4\alpha^2 (1 + K)^3 \leqq \alpha'. \end{aligned}$$

Posons $X = \begin{bmatrix} y & 0 \\ a^{-1} T & -z \end{bmatrix}$. On a $\nabla_a X + X \nabla_a = \begin{bmatrix} D_1 y + T'T + y D_1 & ayT' - aT'z \\ a^{-1}(T D_1 - D_2 T) & D_2 z + TT' + z D_2 \end{bmatrix}$.

Si $3\alpha K(K + 1) \leqq 1$, alors $\|(\nabla_a X + X \nabla_a) - 1\| \leqq 1/2$ donc $(\nabla_a X + X \nabla_a)$ est inversible et $\|(\nabla_a X + X \nabla_a)^{-1}\| \leqq 2 \leqq K'$.

Enfin $\|X\| \leqq K + 2K^3(1 + K)^2 = K'$. On est alors dans les hypothèses du lemme 2.3; donc $\Psi(\mathscr{E}, C_a, \nabla_a) = 0$. □

2.5. Proposition. *Il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ satisfaisant à la propriété suivante:*

Soient $(\mathscr{E}_i, Q_i, D_i)$ $(i = 1, 2)$ deux éléments de $\mathbf{L}_{nb}(A)$, et soient $T, y, \varepsilon, \alpha$ et K vérifiant les hypothèses a), b) *et* c) *du lemme* 2.3 *et*

d$'$) *il existe $S \in \mathscr{L}(\mathscr{E}_2, \mathscr{E}_1)$ et $z \in \mathscr{L}(\mathscr{E}_2)$ tels que $\|S\| \leqq K$, $\|z\| \leqq K$,*

$$S(\operatorname{dom} D_2) \subset \operatorname{dom} D_1,$$

$z(\operatorname{dom} D_2) \subset \operatorname{dom} D_2$, $\|S D_2 - D_1 S\| \leqq \alpha^2$ *et* $\|1 - TS - D_2 z - z D_2\| \leqq \alpha^2$.

Si de plus $P(K)\alpha^2 \leqq 1$ *et* $K \geqq 1$, *alors* $\Psi(\mathscr{E}_1, Q_1, D_1) = \Psi(\mathscr{E}_2, Q_2, D_2)$.

Preuve. Soit $Z = z - TT'z + TyS$. On a $\|Z\| \leqq K + 2K^3$. Posons

$$B = 1 - TS - D_2 z - zD_2 \quad \text{et} \quad C = 1 - T'T - D_1 y - yD_1.$$

On a:

$$\begin{aligned} TySD_2 + D_2 TyS &= (D_2 T - TD_1) yS + T(1 - T'T)S - TCS - Ty(D_1 S - SD_2), \\ TT'zD_2 + D_2 TT'z &= (D_2 T - TD_1) T'z + T(D_1 T' - T'D_2)z + TT'(1 - TS - B) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} TT' - 1 + ZD_2 + D_2 Z &= TT' - 1 + zD_2 + D_2 z - (TT'zD_2 + D_2 TT'z) + TySD_2 + D_2 TyS \\ &= (TT' - 1)C(D_2 T - TD_1)(T'z + yS) - T(D_1 T' - T'D_2)z \\ &\quad - TBS + Ty(D_1 S - SD_2). \end{aligned}$$

Donc $\|TT' - 1 + ZD_2 + D_2 Z\| \leqq \alpha^2(1 + 6K^2)$.

La proposition résulte immédiatement du lemme 2.5; on peut poser

$$P(X) = (1 + 6X^2)\big(2X(1 + 2X^2)\big)^{50}. \qquad \square$$

2.6. Remarque. Le formalisme adopté ici est adapté à opérateur de signature sur une variété compacte orientée comme nous le verrons au paragraphe suivant. Il est possible et bien plus facile de faire le travail correspondant pour l'opérateur de de Rham-Euler. Les objets de base dans ce cadre sont des triplets $(\mathscr{E}, \varepsilon, d)$ où $\mathscr{E}$ est un C^*-module hilbertien, $\varepsilon \in \mathscr{L}(\mathscr{E})$, $\varepsilon^2 = 1$, et d est un opérateur régulier tel que $\varepsilon d = -d\varepsilon$, et qui satisfait les conditions b) et c) de la définition 1.5 (en version bornée et non bornée). A un tel élément on associe un élément de $K_0(A)$ en choisissant un produit scalaire pour lequel ε est autoadjoint et donne donc une graduation pour $\mathscr{E}$. L'opérateur $d + d^*$ est elliptique et de degré 1 et définit l'élément de K_0 voulu. Une équivalence d'homotopie entre $(\mathscr{E}, \varepsilon, d)$ et $(\mathscr{E}', \varepsilon', d')$ est alors un opérateur $T \in \mathscr{L}(\mathscr{E}, \mathscr{E}')$ tel que $T\varepsilon = \varepsilon' T$, $Td = d'T$ et que T induise un isomorphisme: $\ker d/\operatorname{im} d \to \ker d'/\operatorname{im} d'$. Il est alors immédiat que, comme l'opérateur $d'' = \begin{bmatrix} d & 0 \\ T & -d' \end{bmatrix}$ satisfait $\ker d'' = \operatorname{im} d''$, les deux éléments de $K_0(A)$ associés coïncident.

3. Invariance par homotopie de la signature à coefficients dans un fibré plat

Dans ce paragraphe nous nous spécialisons à l'opérateur de signature sur une variété (à coefficients dans un fibré plat): si V est une variété compacte *orientée* et E est un fibré dont les fibres sont des modules projectifs de type fini sur une C^*-algèbre A, la signature de V à coefficients dans E est un élément de $\mathbf{L}_{nb}(A)$ et définit donc un élément $\psi(E)$ de $K_0(A)$. Soit

$f: W \to V$ une équivalence d'homotopie orientée et E un fibré plat sur V. Dans ce paragraphe nous donnons une démonstration de l'égalité $\psi(f^* E) = \psi(E)$.

Commençons par rappeler la construction de l'élément de $\mathbf{L}_{nb}(A)$ associé à la signature de V à coefficients dans un A-fibré sur V.

3.1. Construction de l'élément de $\mathbf{L}_{nb}(A)$ associé à un A-fibré. Soit A une C^*-algèbre unifère. Soit V une variété compacte orientée de classe C^∞ de dimension n paire et E un fibré de classe C^∞ sur V dont la fibre est un C^*-module hilbertien E_0 sur A. Soit $\mathscr{E} = \mathscr{E}(E)$ le C^*-module hilbertien sur A complété de $C^\infty(V; \wedge_C T^* V \otimes E)$ pour le produit scalaire donné par:

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \int \langle \alpha(x), \beta(x) \rangle .$$

On a choisi une structure riemannienne sur V, ce qui détermine une structure de A-module hilbertien sur $\wedge_C T_x^* V \otimes E_x$, puis on a intégré en utilisant la forme volume. Notons que, bien que le produit scalaire dépende de la structure riemannienne, le A-module $\mathscr{E}$ n'en dépend pas, puisque la variété V est compacte.

Pour $\xi, \zeta \in \wedge_C T_x^* V \otimes E_x$, on définit $\xi^* \wedge \zeta \in \wedge_C T_x^* V \otimes A$ par la formule:

$$(\alpha \otimes e)^* \wedge (\beta \otimes f) = \bar{\alpha} \wedge \beta \otimes \langle e, f \rangle .$$

On pose alors pour $\xi, \zeta \in \mathscr{E}$:

$$Q(\xi, \zeta) = i^{p(n-p)} \int \xi_x^* \wedge \zeta_x$$

(dans cette formule, en utilisant l'orientation de V, on intègre les sections du fibré

$$\wedge_C^n T^* V \otimes A$$

des formes volume à coefficients dans A et ξ est une forme à coefficients dans E homogène de degré p).

La forme quadratique Q est régulière. Pour chaque structure riemannienne, l'opérateur $*$ de Hodge définit l'opérateur compatible T (définition 1.3) par la formule

$$(T\alpha)_x = i^{-\partial\alpha(n-\partial\alpha)} (* \otimes \mathrm{id}_E)(\alpha_x) .$$

Une connexion *antisymétrique* ∇ sur E définit alors un opérateur régulier D_E (par la formule $D_E(\xi) = i^{\partial\xi} \nabla \xi$) de $\mathscr{E}$ tel que:

a) $\forall \omega \in C^\infty(V; \wedge T^* V)$, $\xi \in \operatorname{dom} D_E$, $\omega \wedge \xi \in \operatorname{dom} D_E$ et

$$D_E(\omega \wedge \xi) = i^{\partial\xi + \partial\omega} d\omega \wedge \xi + i^{-\partial\omega} \omega \wedge D_E \xi ;$$

b) $D_E' = -D_E$ (où D_E' est l'adjoint de D_E pour Q);

c) $\operatorname{im} D_E \subset \operatorname{dom} D_E$ et $R = D_E^2 \in \mathscr{L}(\mathscr{E})$.

Pour construire un tel ∇ et donc D_E, on écrit $E_x = p_x(\mathscr{H}_A)$ où $x \to p_x$ est une application différentiable de V dans l'espace des projecteurs (orthogonaux) de $\mathscr{L}(\mathscr{H}_A)$ et on pose

$$(\nabla \xi)_x = (\mathrm{id}_{\wedge T_x^* V} \otimes p_x)\big((d \otimes \mathrm{id}_{\mathscr{H}_A})\xi\big)_x .$$

On a évidemment (cf. e.g. [21]):

3.1. Proposition. *Si E_0 est projectif et de type fini sur A, alors $(\mathscr{E}, Q, D_E)$ est un élément de $\mathbf{L}_{nb}(A)$. La classe $\Psi(\mathscr{E}, Q, D_E)$ ne dépend pas de la connexion. On la notera $\psi(E)$. Soit $L_V \in KK\big(C(V), \mathbb{C}\big)$ la classe de l'opérateur de signature de V et $[E] \in K_0\big(A \otimes C(V)\big)$ la classe du fibré E. On a $\psi(E) = [E] \otimes_{C(V)} L_V$.*

Preuve. Notons d'abord que les assertions $(\mathscr{E}, Q, D_E) \in \mathbf{L}_{nb}(A)$ et $\psi(E) = [E] \otimes_{C(V)} L_V$ ne dépendent pas de la connexion ∇ comme (par la propriété a)) la différence de deux connexions est dans $\mathscr{L}(\mathscr{E})$. Si le fibré E et la connexion sont triviaux, il est clair que $D_E + D_E^*$ est l'opérateur de signature de V à coefficients dans E_0. Dans le cas général, on peut écrire $E = pF$, où F est un fibré trivial de fibre F_0 et $p: V \to \mathscr{L}(F_0)$ est une application de classe C^∞. On peut donc prendre $D_E = pD_F p$, et il est clair que $\Psi(\mathscr{E}, Q, D_E)$ est le produit de Kasparov de $L_V \otimes F_0$ avec p. □

3.2. Le cas des fibrés plats. Soient A une C^*-algèbre unifère, V une variété compacte de classe C^∞ et E un fibré sur V dont la fibre est un module projectif de type fini E_0 sur A. Nous dirons que le fibré E est un fibré plat unitaire, s'il est muni d'un produit scalaire et d'une connexion plate antisymétrique. En d'autres termes c'est un fibré provenant d'une représentation unitaire du groupe fondamental de W sur E_0.

Si $f: W \to V$ est une application continue alors $f^* E$ est un fibré plat unitaire sur W. A toute homotopie reliant les applications $f, f': W \to V$ correspond un isomorphisme des fibrés plats unitaires $f^* E$ et $f^* E$. Soit d une connexion plate antisymétrique sur E; notons D_E l'opérateur donné par $D_E \xi = i^{\partial \xi} d$; les opérateurs $D_{f'^* E}$ associés à l'image réciproque de la connexion d par f et f' respectivement, se correspondent par cet isomorphisme.

Soit $f: W \to V$ une application de classe C^∞. L'application linéaire associée

$$f^* : C^\infty(V;\ \wedge_{\mathbb{C}} T^* V \otimes E) \to C^\infty(W;\ \wedge_{\mathbb{C}} T^* W \otimes f^* E)$$

ne se prolonge en général pas en un opérateur borné de $\mathscr{E}(E) \to \mathscr{E}\big(f^*(E)\big)$ (f^* n'est en général même pas fermable). Cependant, si f est une submersion, il est facile d'obtenir un tel prolongement.

Pour une forme ω de classe C^∞ on définit l'opérateur e_ω par la formule $e_\omega(\alpha) = \alpha \wedge \omega$.

3.2. Lemme. *Soient X et Y deux variétés riemanniennes compactes.*

a) *Soient $h: X \to Y$ une application de classe C^∞ et ω une forme de classe C^∞ sur X. Notons S le support de ω et supposons que h soit une submersion au voisinage de S. Alors $e_\omega h^* : \mathscr{E}(F) \to \mathscr{E}\big(h^*(F)\big)$ est un opérateur de $\mathscr{L}\big(\mathscr{E}(F), \mathscr{E}\big(h^*(F)\big)\big)$. De plus la norme de $e_\omega h^*$ peut être majorée indépendamment du fibré F.*

b) *Soient $h: X \times [0,1] \to Y$ une application de classe C^∞ et ω une forme fermée de classe C^∞ sur X. Notons S le support de ω et supposons que h (resp. h_0 et h_1) soit une submersion au voisinage de $S \times [0,1]$ (resp. de S). Si ∇ est une connexion unitaire plate sur un fibré en C^*-modules F sur Y, alors il existe un opérateur $y \in \mathscr{L}(\mathscr{E}(F), \mathscr{E}(h_0^*(F)))$ tel que*

$$e_\omega h_1^* - e_\omega h_0^* = h_0^*(\nabla) y + y\nabla .$$

Preuve. L'énoncé a) est local on peut donc supposer $X = Z \times Y$ et F trivial; dans ce cas la démonstration est immédiate.

b) Pour $\omega' \in \mathscr{E}(F)$ on pose $y(\omega') = \int_0^1 i_{\partial/\partial t}(e_\omega h^*(\omega'))\,dt.$ □

Nous noterons $h_{I,\alpha}$ l'adjoint pour Q de $e_\alpha h^*$; il est obtenu par intégration sur les fibres: si ψ est une fonction continue à support compact sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ et $h: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ est la première projection, $(h_{I,\psi})(f\,dx_J \wedge dy_K) = g\,dx_J$, pour $J \subset \{1, \ldots, n\}$, $K \subset \{1, \ldots, k\}$ où $g(x) = i^{(n-p)k} \int \psi(x,y) f(x,y)\,dy_K$ (p est le cardinal de J; notons que $g = 0$ si $K \neq \{1, \ldots, k\}$).

Soit V une variété compacte orientée, A une C^*-algèbre et E un fibré plat unitaire en A-modules projectifs de type fini sur V.

3.3. Théorème (cf. [14], [18], [20], [15], [13]). *Soient V et W deux variétés compactes orientées. Soit $f: W \to V$ une équivalence d'homotopie. Alors pour toute C^*-algèbre A et tout fibré plat unitaire en A-modules projectifs de type fini E sur V on a $\psi(E) = \psi(f^* E)$.*

Preuve. Pour $k \in \mathbb{N}$, soit B^k la boule unité ouverte de $\mathbb{R}^k$. Soient X et Y deux variétés compactes orientées, F un fibré plat unitaire en A-modules projectifs de type fini sur X, $p: Y \times B^k \to X$ une submersion et v une forme volume de masse 1 sur B^k. Notons $q: X \times B^k \to X$, $r: X \times B^k \to B^k$ les projections, $\omega = r^*(v)$ et $p_0: X \to Y$ la restriction à $X \times \{0\}$ de p; enfin posons $T_{p,v} = q_I \circ e_\omega \circ p^* \in \mathscr{L}(\mathscr{E}(F), \mathscr{E}(p_0^*(F)))$.

3.4. Lemme. a) *Soit $p': X \times B^\ell \to Y$ une autre submersion et v' une forme volume d'intégrale 1 sur B^ℓ. Si les application qui à $x \in X$ associent respectivement $p(x,0)$ et $p'(x,0)$ sont homotopes, il existe $y \in \mathscr{L}(\mathscr{E}(F), \mathscr{E}(p_0^*(F)))$ tel que $Dy + yD = T_{p,v} - T_{p',v'}$.*

b) *Soient $p': Z \times B^\ell \to X$ une submersion et v' une forme volume de masse 1 sur B^ℓ. Soit $p'': Z \times B^\ell \times B^k \to Y$ donnée par $p''(z,s,t) = p(p'(z,s),t)$ et $v'' = v' \times v$. On a $T_{p',v'} T_{p,v} = T_{p'',v''}$.*

Preuve. Remarquons d'abord que, comme le support de v est compact, il existe $\varphi \in C_c^\infty(B^k)$ tel que $\varphi v = v$; $T_{p,v}$ est en fait défini par $T = q_{I,\varphi} \circ e_\omega p^*$ (on considère $X \times B^k$ comme une sous-variété ouverte de $X \times S^k$).

a) Il existe une submersion $P: X \times B^k \times B^\ell \times B^r \times [0,1] \to Y$ telle que

$$P(x,s,t,u,0) = p(x,s)$$

et $P(x,s,t,u,1) = p'(x,t)$. Soit v'' une forme volume d'intégrale 1 à support compact dans B^r et définissons $P_i: X \times B^k \times B^\ell \times B^r \to Y$ $(i = 0,1)$ par

$$P_i(z) = P(z,i) \quad (z \in X \times B^k \times B^\ell \times B^r).$$

Or on a $T_{p,v} = T_{P_0, v \times v' \times v''}$ et $T_{p',v'} = T_{P_1, v \times v' \times v''}$. Donc le a) résulte du lemme 3.2.

b) Soient $\tilde{p}: Z \times B^k \times B^\ell \to X \times B^k$, $\tilde{q}: Z \times B^k \times B^\ell \to Z \times B^\ell$, et $q': Z \times B^\ell \to Z$ les applications données par $\tilde{p}(z,s,t) = \big(p'(z,s),t\big)$, $\tilde{q}(z,s,t) = (z,s)$, $q'(z,t) = z$. Soient encore ω'' la forme sur $Z \times B^k \times B^\ell$ image réciproque de v'' par la projection

$$Z \times B^k \times B^\ell \to B^k \times B^\ell,$$

et ω_1 l'image réciproque de v' par la projection $Z \times B^k \times B^\ell \to B^\ell$. On a l'égalité $T_{p'',v''} = q'_I \circ \tilde{q}_I \circ e_{\omega_1} \circ \tilde{p}^* \circ e_\omega \circ p^*$ et il suffit donc de remarquer que

$$\tilde{q}_I \circ e_{\omega_1} \circ \tilde{p}^* = e_{\omega'} \circ p'^* \circ q_I. \qquad \square$$

Fin de la preuve du théorème 3.3. Soit $j: V \to \mathbb{R}^k$ un plongement, U un voisinage tubulaire de $j(V)$ et $\pi: U \to V$ la projection associée. On suppose que $j(V) + B^k \subset U$. Soient $p: W \times B^k \to V$ la submersion donnée par $p(x,t) = \pi\big(f(x)+t\big)$ $(x \in W, t \in B^k)$ et v une forme volume de masse 1 sur B^k. Avec les notations ci-dessus, posons

$$T = T_{p,v} \in \mathscr{L}\big(\mathscr{E}(E), \mathscr{E}(f^*E)\big).$$

Il est clair que q_I, e_ω et p^* préservent le domaine de D et commutent à D (e_ω commute à D car ω est fermée). On en déduit que $T \operatorname{dom} D \subset \operatorname{dom} D$ et $TD = DT$.

Soit $\varepsilon \in \mathscr{L}\big(\mathscr{E}(F)\big)$ donné par $\varepsilon(\alpha) = (-1)^{\partial\alpha}\alpha$. Il vérifie clairement l'hypothèse d) du lemme 2.1.

L'hypothèse b) résulte du lemme 3.4.

Vérifions enfin la condition c).

Soient q_1 et q_2 les projections de $W \times B^k \times B^k$ sur $W \times B^k$ données par

$$q_j(x,t_1,t_2) = (x,t_j).$$

On a $(q_I \circ e_\omega)' \circ q_I \circ e_\omega = i^{-k^2}(e_{q_1^*(\omega)} \circ q_2^*)' \circ e_{q_2^*(\omega)} \circ q_1^*$. Or

$$i^{-k^2}(e_{q_1^*(\omega)} \circ q_2^*)' \circ e_{q_2^*(\omega)} \circ q_2^* = e_\omega.$$

Donc modulo les bords, $(q_I \circ e_\omega)' \circ q_I \circ e_\omega$ est égal à e_ω (lemme 3.3).

Soient $p_1 : V \times B^k \to V$ et $p_2 : V \times B^k \to B^k$ les projections et posons $\omega' = \mathrm{pr}_2^*(\nu)$. Notons $\tilde{\pi} : V \times B_k \to V$ la submersion donnée par $\tilde{\pi}(x, t) = \pi(x + t)$. Comme l'image par f du cycle fondamental de V est le cycle fondamental de W, pour toute paire α, β de formes différentielles C^∞ à support compact sur $V \times B^k$ à coefficient dans E, on a

$$Q\big((f \times \mathrm{id})^* \alpha, (f \times \mathrm{id})^* \beta\big) = Q(\alpha, \beta).$$

On en déduit l'égalité $p_I \circ e_\omega \circ p^* = \tilde{\pi}_I \circ e_{\omega'} \circ \tilde{\pi}^*$. Comme $\tilde{\pi}$ est homotope à travers des submersions à p_1, on a modulo les bords $\tilde{\pi}_I \circ e_{\omega'} \circ \tilde{\pi}^* = p_{1I} \circ e_{\omega'} \circ p_1^*$ (lemme 3.3).

Il est clair que $p_{1I} \circ e_{\omega'} \circ p_1^*$ est l'identité.

Or $T'T = p_I \circ (q_I \circ e_\omega)' \circ q_I \circ e_\omega \circ p^*$. Donc modulo les bords $T'T$ est égal à l'identité. □

4. Fibrés presque plats

Commençons par rappeler les notions de connexion et de fibré α-plats (cf. [6]):

4.1. Définition. Soient $\alpha > 0$ un nombre réel, A une C^*-algèbre, E_0 un C^*-module hilbertien sur A, V une variété riemannienne compacte et E un fibré sur V modelé sur E_0. Soit ∇ une connexion unitaire sur E et $\theta = \nabla^2 \in C^\infty(V;\ \wedge^2 T^* V \otimes E)$ sa courbure. La connexion ∇ est dite α-plate si $\|\theta\| < \alpha$. S'il existe une connexion unitaire α-plate ∇ sur E nous dirons que E est un fibré α-plat. Un fibré F en A-modules projectifs de type fini sur V est dit α-plat, s'il admet une structure de fibré α-plat en C^*-modules hilbertiens.

Rappelons que la norme de la courbure est la norme "sup", c'est-à-dire la norme de θ vu comme opérateur sur le $C(V) \otimes A$-module hilbertien $C(V; E \otimes \wedge T^* V)$. Celle-ci coïncide avec la norme de θ vu comme opérateur sur le A-module hilbertien $\mathscr{E}(E)$ (avec les notations du § 3).

Soit V une variété compacte orientée, A une C^*-algèbre et E un fibré en A-modules projectifs de type fini sur V. Rappelons que $\psi(E) \in K_*(A)$ désigne l'indice de l'opérateur de signature de V à coefficients dans E.

4.2. Théorème (cf. [6]). *Soient V et W deux variétés riemanniennes compactes orientées. Soit $f: W \to V$ une équivalence d'homotopie. Alors il existe $\alpha > 0$ tel que pour toute C^*-algèbre A et tout fibré α-plat en A-modules projectifs de type fini E sur V on a $\psi(E) = \psi(f^* E)$.*

L'idée de la démonstration est la même que pour le théorème 3.3. Nous aurons besoin de quelques lemmes pour pouvoir appliquer la proposition 2.5.

Soient X et Y deux variétés compactes et $f: X \times [0, 1] \to Y$ une application de classe C^∞. Notons $f_t : X \to Y$ l'application donnée par $f_t(x) = f(x, t)$. Soit E un fibré en C^*-modules sur Y et ∇ une connexion sur E. Grâce à $f^*(\nabla)$ nous identifions $f_1^*(E)$ à $f_0^*(E)$. Alors $f_0^*(\nabla)$ et $f_1^*(\nabla)$ sont deux connexions sur le fibré $f_0^*(E)$. Si la connexion ∇ est plate $f_0^*(\nabla)$ et $f_1^*(\nabla)$ coïncident, mais, en général elles sont distinctes. Cependant $f_0^*(\nabla) - f_1^*(\nabla)$ est un opérateur borné du C^*-module hilbertien $\mathscr{E}(E)$ dont il est facile d'estimer la norme:

4.3. Lemme. *Soient X et Y deux variétés riemanniennes compactes et $f: X \times [0,1] \to Y$ une application de classe C^∞. Alors, il existe un nombre réel $K > 0$ tel que pour toute connexion unitaire ∇ sur un fibré en C^*-modules hilbertiens sur Y on ait $\|f_0^*(\nabla) - f_1^*(\nabla)\| \leqq K\|\nabla^2\|$.*

Preuve. Soit $m = \sup\{\|df_x\|, x \times X \times [0,1]\}$. Fixons nous un recouvrement de Y par des ouverts Ω et des difféomorphismes $\varphi : B^n \to \Omega$ où B^n est la boule unité de $\mathbb{R}^n$. Il existe un recouvrement fini de $X \times [0,1]$ par N produits $U \times [a,b]$ où U est un ouvert de X tels que $f(U \times [a,b])$ soit inclus dans un Ω. Il suffit de majorer la forme $f_a^*(\nabla) - f_b^*(\nabla)$ sur U. Soit E un fibré en C^*-modules sur Y et ∇ une connexion sur E. Alors ∇ définit une trivialisation sur les rayons des boules B^n et il existe une unique trivialisation de E sur Ω respectant ces trivialisations. Soit d la connexion plate associée. Posons $\Gamma = \nabla - d$. Notons ξ le champ de vecteurs radial $\partial/\partial r$ de $\Omega - \{\varphi(0)\}$. Pour tout champ de vecteurs ζ commutant à ξ on a $\nabla^2(\xi, \zeta) = (d\Gamma + \Gamma \wedge \Gamma)(\xi, \zeta) = \xi\Gamma(\zeta)$ car $\Gamma(\xi)$ est identiquement nul. Comme Γ est nulle en $\varphi(0)$, on en déduit une majoration $\|\Gamma\| \leqq m'\|\nabla^2\|$ où $m' > 0$ est une constante qui ne dépend que de la métrique riemannienne sur Ω. Or $f_a^*(d) = f_b^*(d)$ donc, sur U on a

$$\|f_a^*(\nabla) - f_b^*(\nabla)\| \leqq 2mm'\|\nabla^2\|$$

car $\Gamma = \nabla - d$ étant une 1-forme sur Ω on a $\|f_a^*(\nabla) - f_a^*(d)\| \leqq m\|\Gamma\|$. Enfin

$$\|f_0^*(\nabla) - f_1^*(\nabla)\| \leqq 2Nmm'\|\nabla^2\|. \qquad \square$$

Pour une forme ω de classe C^∞ on note encore e_ω l'opérateur défini par la formule $e_\omega(\alpha) = \alpha \wedge \omega$.

4.4. Lemme. *Soient X et Y deux variétés riemanniennes compactes.*

a) *Soient $h: X \to Y$ une application de classe C^∞ et ω une forme de classe C^∞ sur X. Notons S le support de ω et supposons que h soit une submersion au voisinage de S. Alors $e_\omega h^* : \mathscr{E}(F) \to \mathscr{E}(h^*(F))$ est un opérateur de $\mathscr{L}(\mathscr{E}(F), \mathscr{E}(h^*F))$. De plus la norme de $e_\omega h^*$ peut être majorée indépendamment du fibré F. Soient ∇ une connexion sur E et ∇' sur h^*F; alors l'image par $e_\omega h^*$ du domaine de ∇ est contenue dans le domaine de ∇' et*

$$\nabla' e_\omega h^* - e_\omega h^* \nabla \in \mathscr{L}(\mathscr{E}(F), \mathscr{E}(h^*(F))).$$

b) *Soient $h: X \times [0,1] \to Y$ une application de classe C^∞ et ω une forme fermée de classe C^∞ sur X. Notons S le support de ω et supposons que h (resp. h_0 et h_1) soit une submersion au voisinage de $S \times [0,1]$ (resp. de S). Alors, il existe $K > 0$ tel que pour toute connexion unitaire ∇ sur un fibré en C^*-modules hilbertiens F sur Y, il existe*

$$y \in \mathscr{L}(\mathscr{E}(F), \mathscr{E}(h_0^*(F)))$$

satisfaisant à $\|y\| < K$ et $\|e_\omega h_1^* - e_\omega h_0^* - h_0^*(\nabla)y - y\nabla\| \leqq K\|\nabla^2\|$.

Preuve. L'énoncé a) est local on peut donc supposer $X = Z \times Y$ et F trivial; dans ce cas la démonstration est immédiate. Remarquons que le domaine d'une connexion ne dépend pas de la connexion et que la différence de deux connexions est un opérateur borné.

b) Pour $\omega' \in \mathscr{E}(F)$ on pose $y(\omega') = \int_0^1 i_{\partial/\partial t}(e_\omega h^*(\omega'))\,dt$. Un majorant K de la norme de y ne dépend que de h et de la géométrie de X et Y et pas de la connexion unitaire ∇. Soit $h' : X \times [0,1] \to Y$ l'application donnée par $h'(x,t) = h(x,0)$. On a

$$e_\omega h_1^* - e_\omega h_0^* = h_0^*(\nabla)y + y\nabla + z$$

où $z \in \mathscr{L}\big(\mathscr{E}(F), \mathscr{E}(h_0^*(F))\big)$ est donné par

$$z(\omega') = \int_0^1 i_{\partial/\partial t}\big(e_\omega\big(h'^*(\nabla) - h^*(\nabla)\big)h^*(\omega')\big)\,dt\,.$$

Le résultat découle alors du lemme précédent. □

Reprenons les notations du § 3:

Supposons les variétés X et Y orientées; notons Q la forme quadratique sur $\mathscr{E}(F)$ et $\mathscr{E}\big(h_0^*(F)\big)$ associée à l'intégrale des formes volume. Notons $h_{I,\omega}$ l'adjoint pour Q de $e_\omega h^*$. Pour $k \in \mathbb{N}$, soit B^k la boule unité ouverte de $\mathbb{R}^k$.

Soient X et Y deux variétés riemanniennes compactes orientées $p : X \times B^k \to Y$ une submersion et υ une forme volume de masse 1 sur B^k. Notons

$$q : X \times B^k \to X, \quad r : X \times B^k \to B^k$$

les projections, $\omega = r^*(\upsilon)$ et $f : X \to Y$ la restriction à $X \times \{0\}$ de p. Soient F un fibré en A-modules hilbertiens sur Y et ∇ une connexion unitaire sur F. Les applications p et $f \circ q$ étant canoniquement homotopes, on identifie au moyen de ∇ les fibrés p^*F et q^*f^*F. Posons enfin $T_{p,\upsilon} = T_{p,\upsilon}(F,\nabla) = q_I \circ e_\omega \circ p^* \in \mathscr{L}\big(\mathscr{E}(F), \mathscr{E}(f^*F)\big)$.

4.5. Lemme. a) *Soient $p' : X \times B^\ell \to Y$ une autre submersion et υ' une forme volume d'intégrale 1 sur B^ℓ. Supposons que les applications qui à $x \in X$ associent respectivement $f(x) = p(x,0)$ et $f'(x) = p'(x,0)$ soient homotopes. Alors, il existe $K > 0$ tel que pour tout couple (F,∇) comme ci-dessus, il existe $y \in \mathscr{L}\big(\mathscr{E}(F), \mathscr{E}(f^*F)\big)$ satisfaisant à $\|y\| \leqq K$*

$$\|\nabla y + y\nabla + T_{p,\upsilon}(F,\nabla) - T_{p',\upsilon'}(F,\nabla)\| \leqq K\|\nabla^2\|\,.$$

b) *Soient $p' : Z \times B^\ell \to X$ une submersion et υ' une forme volume de masse 1 sur B^ℓ. Soit $p'' : Z \times B^\ell \times B^k \to Y$ donnée par $p''(z,s,t) = p\big(p'(z,s),t\big)$ et $\upsilon'' = \upsilon' \times \upsilon$. Alors, il existe $K > 0$ tel que pour tout couple (F,∇) on ait*

$$\|T_{p',\upsilon'}(f^*F, f^*\nabla)\,T_{p,\upsilon}(F,\nabla) - T_{p'',\upsilon''}(F,\nabla)\| \leqq K\|\nabla^2\|\,.$$

Preuve. La démonstration de a) est la même que celle du lemme 3.4.a) grâce au lemme 4.4.

b) Notons $h : Z \to Y$ l'application telle que $h(z) = p''(z,0,0)$ et $q'' : Z \times B^k \times B^\ell \to Z$ la projection. Considérons les deux homotopies H et $\bar{H}$ reliant les applications $h \circ q''$ à p''

données par $H(z, s, t, \lambda) = p''(z, \lambda s, \lambda t)$ et $\bar{H}(z, s, t, \lambda) = p''(z, \sup(0{,}2\lambda - 1)s, \inf(1{,}2\lambda)t)$. Elles définissent des opérateurs unitaires $U, \bar{U} \in \mathscr{L}(\mathscr{E}(p''^* F), \mathscr{E}(q''^* h^* F))$. On a

$$T_{p'',v''} = q_I'' \circ U \circ e_\omega \circ p''^*.$$

Posons aussi $\bar{T}_{p'',v''} = q_I'' \circ \bar{U} \circ e_\omega \circ p''^* \in \mathscr{L}(\mathscr{E}(F), \mathscr{E}(h^* F))$. Comme en 3.4.b) on a

$$T_{p',v'} T_{p,v} = \bar{T}_{p'',v''}.$$

Or $\| U - \bar{U} \| \leqq m \| \nabla^2 \|$ où m est le maximum pour $(z, s, t) \in Z \times B^k \times B^\ell$ de l'aire du triangle $\{p''(z, \lambda s, \mu t), 0 \leqq \lambda \leqq \mu \leqq 1\}$. □

Preuve du théorème 4.2. Soit $j: V \to \mathbb{R}^k$ un plongement, U un voisinage tubulaire de $j(V)$ et $\pi: U \to V$ la projection associée. On suppose que $j(V) + B^k \subset U$. Soient $p: W \times B^k \to V$ la submersion donnée par $p(x, t) = \pi(f(x) + t)$ $(x \in W, t \in B^k)$ et v une forme volume de masse 1 sur B^k. Avec les notations ci-dessus, posons

$$T = T_{p,v} \in \mathscr{L}(\mathscr{E}(E), \mathscr{E}(f^* E)).$$

Montrons que si $\| \nabla^2 \|$ est suffisamment petit, les hypothèses de la proposition 2.5 sont satisfaites pour $(\mathscr{E}(E), Q, D_E)$ et $(\mathscr{E}(f^* E), Q, D_{f^*E})$ définis en 3.1.

Soit φ une fonction de classe C^∞ à support compact sur $V \times B^k$ telle que $\varphi\omega = \omega$. Par le lemme 4.4.a), on peut majorer $\| e_\omega p^* \|$ et $\| q_{I,\varphi} \| = \| e_\varphi q^* \|$, donc $\| T \|$ indépendamment de (E, ∇). On a $p^* \circ \nabla = p^*(\nabla) \circ p^*$, $q^* \circ f^* \nabla = (f \circ q)^* \nabla \circ q^*$, $e_\omega \circ p^* \nabla = p^* \nabla \circ e_\omega$ car ω est fermée. On en déduit (lemme 4.4.b)) que $T \operatorname{dom} \nabla \subset \operatorname{dom} f^* \nabla$ et que

$$\| T\nabla - (f^* \nabla) T \| \leqq \| \nabla^2 \|$$

pour un scalaire $m > 0$ convenable, indépendant de (E, ∇). Ceci montre que l'hypothèse a) est satisfaite.

Soit $\varepsilon \in \mathscr{L}(\mathscr{E}(F))$ donné par $\varepsilon(\omega) = (-1)^{\partial\omega} \omega$. Il vérifie clairement l'hypothèse c) de la proposition 2.5.

Soit $p': V \times B^\ell \to W$ une submersion telle que l'application $g: V \to W$ telle que $g(x) = p'(x, 0)$ soit un inverse d'homotopie de f. A l'aide d'une homotopie reliant $f \circ g$ à l'identité on identifie les fibrés E et $g^* f^* E$. Soit v' une forme volume de masse 1 sur B^ℓ et posons $S = T_{g,v'} \in \mathscr{L}(\mathscr{E}(E), \mathscr{E}(f^* E))$. Par le lemme 4.5, il existe z satisfaisant à l'hypothèse d') de la proposition 2.5.

Soient enfin q_1 et q_2 les projections de $W \times B^k \times B^k$ sur $W \times B^k$ données par

$$q_j(x, t_1, t_2) = (x, t_j), \quad p_1: V \times B^k \to V$$

la projection et $\tilde{\pi}: V \times B^k \to V$ la submersion donnée par $\tilde{\pi}(x, t) = \pi(x + t)$. Comme dans la démonstration du théorème 3.3, il suffit, pour établir l'hypothèse b) de la proposition 2.5, de comparer q_1^* à q_2^* et p_1^* à $\tilde{\pi}^*$. Cela est possible grâce au lemme 4.4.b). □

Remarque. La même démonstration marche dans le cas des variétés lipschitziennes, à l'aide de l'opérateur de signature de Teleman (cf. [22], [9]). La seule difficulté est de bien définir les fibrés en C^*-modules presque plats. La manière la plus pratique est de se fixer un recouvrement (U_i) par des ouverts de carte. On dit alors qu'un fibré est α-plat (relativement à une métrique et au recouvrement U_i), s'il existe une trivialisation sur chaque U_i telle que les changement de cartes soient lipschitziens de rapport α. A une partition de l'unité lipschitzienne φ_i relative à U_i correspond alors une connexion α-plate $\nabla = \sum_i \varphi_i d_i$ où d_i est la connexion plate associée à la trivialisation sur U_i. Avec les modifications adéquates, les lemmes 4.3, 4.4 et 4.5, donc le théorème 4.2, restent vrais (voir [21] pour une discussion dans le cas des fibrés plats).

5. Le cas des feuilletages

Dans ce paragraphe nous montrons comment notre méthode se généralise au cadre des feuilletages. Plus précisément nous montrons que la classe de la signature longitudinale d'un feuilletage orienté (longitudinalement) est invariante par équivalence d'homotopie feuilletée (cf. [3]).

Soit F un feuilletage sur la variété compacte V de classe C^∞. Il sera commode de noter $C^*_\pi(V, F)$ la C^*-algèbre pleine (au lieu de la C^*-algèbre réduite) du *groupoïde d'homotopie* π du feuilletage (cf. [3]) (l'invariance par homotopie dans la K-théorie de la C^*-algèbre pleine entraine bien sûr l'invariance par homotopie dans la K-théorie de la C^*-algèbre réduite).

Nous supposerons aussi que le feuilletage F est orienté (longitudinalement), de dimension n paire. Soit Ω^α le fibré des densités d'ordre α sur F. Comme F est orienté, Ω^{-1} est isomorphe à $\wedge^n F$.

L'algèbre $C(V)$ agit par opérateurs de multiplication sur $C^*_\pi(V, F)$. Soit E un fibré vectoriel hermitien sur V; on définit un C^*-module hilbertien $\mathscr{E}(V, F, E)$ sur $C^*_\pi(V, F)$ en posant $\mathscr{E}(V, F, E) = C(V; E \otimes \wedge_C F^* \otimes \Omega^{-1/2}) \otimes_{C(V)} C^*_\pi(V, F)$.

Pour $x \in V$, $\alpha, \beta \in E_x$ et $\xi, \zeta \in \wedge_C F^*_x \otimes \Omega_x^{-1/2}$, posons $(\alpha \otimes \xi, \beta \otimes \zeta) = \langle \alpha, \beta \rangle \bar{\xi} \wedge \zeta$; c'est un élément de $\wedge_C F^*_x \otimes \Omega_x^{-1}$; notons $q_x(\alpha \otimes \xi, \beta \otimes \zeta) \in \mathbb{C}$ sa composante dans $\wedge^n_C F^*_x \otimes \Omega_x^{-1}$, qui est canoniquement isomorphe à $\mathbb{C}$. On définit une forme quadratique régulière q sur $C(V; E \otimes \wedge_C F^* \otimes \Omega^{-1/2})$ à valeurs dans $C(V)$ en posant pour

$$\xi, \zeta \in C(V; E \otimes \wedge_C F^* \otimes \Omega^{-1/2})$$

et $x \in V$, $q(\xi, \zeta)(x) = q_x(\xi_x, \zeta_x)$. On pose alors pour

$$\xi \otimes a, \zeta \otimes b \in C(V; E \otimes \wedge_C F^* \otimes \Omega^{-1/2}) \otimes_{\mathrm{alg}} C^*_\pi(V, F):$$
$$Q(\xi \otimes a, \zeta \otimes b) = a^* q(\xi, \zeta) b .$$

La forme quadratique Q est régulière. Pour chaque structure riemannienne, l'opérateur $*_F$ de Hodge longitudinal vérifie $q_x(\xi, \zeta) = \langle *_F \xi, \zeta \rangle$ et définit donc l'opérateur compatible T (définition 1.3) par la formule:

$$(T\alpha)_x = i^{-\partial\alpha(n-\partial\alpha)} (*_F \otimes \mathrm{id}_{C^*(V,F)})(\alpha_x).$$

Notons que $\mathscr{E}(V, F, E)$ est obtenu par complétion de

$$C_c^\infty\big(\pi; r^*(E \otimes \wedge_{\mathbb{C}} F^*) \otimes s^* \Omega^{1/2}\big).$$

Pour ξ et ζ dans $C_c^\infty\big(\pi; r^*(E \otimes \wedge_{\mathbb{C}} F^*) \otimes s^* \Omega^{1/2}\big)$, on a encore:

$$Q(\xi, \zeta)(\gamma) = \int \big(\xi(\gamma'), \zeta(\gamma'\gamma)\big) \in (r^* \Omega^{1/2})_\gamma \otimes (s^* \Omega^{1/2})_\gamma.$$

Cette intégrale est prise sur la variété $M = \pi_{r(\gamma)} = \{\gamma'; s(\gamma') = r(\gamma)\}$; notons que $\big(\xi(\gamma'), \zeta(\gamma'\gamma)\big) \in (r^* \Omega^{1/2})_\gamma \otimes (s^* \Omega^{1/2})_\gamma \otimes \wedge T^* M$.

Soit ∇_0 une connexion sur le fibré hermitien E. L'action de ∇_0 le long des fibres de la submersion $s : \pi \to V$ définit un opérateur ∇ sur $C_c^\infty\big(\pi; r^*(E \otimes \wedge_{\mathbb{C}} F^*) \otimes s^* \Omega^{1/2}\big)$. Cet opérateur est fermable; on note encore ∇ sa fermeture; c'est un opérateur régulier du C^*-module $\mathscr{E}(V, F, E)$. La restriction à F de la courbure

$$\theta_0 = \nabla_0^2 \in C^\infty\big(V, \mathrm{End}(E) \otimes \wedge T^* V\big)$$

de ∇_0 est un opérateur $\theta \in C^\infty\big(V, \mathrm{End}(E) \otimes \wedge T^* V\big)$; il définit donc un opérateur, noté encore θ de $\mathscr{E}(V, F, E)$; alors $\mathrm{Im}\, \nabla \subset \mathrm{dom}\, \nabla$ et $\nabla^2 = \theta$.

Posons alors $D_E \xi = i^{\partial \xi} \nabla \xi$. C'est un opérateur régulier du C^*-module $\mathscr{E}(V, F)$. Le triplet $\big(\mathscr{E}(V, F, E), Q, D_E\big)$ est un élément de $\mathbf{L}_{nb}\big(C_\pi^*(V, F)\big)$. Sa classe dans $K_0\big(C_\pi^*(V, F)\big)$ est la haute signature analytique longitudinale du feuilletage (V, F) à coefficients dans E, et est noté $\psi(V, F, E)$.

Rappelons qu'une *homotopie feuilletée* est une homotopie $(h_t)_{t \in [0,1]} : W \to V$ telle que pour tout point $x \in W$, $h_t(x)$ reste sur une même feuille de V (cf. [3]).

Soit F (resp. H) un feuilletage sur la variété compacte V (resp. W) de classe C^∞.

Soit $f : W \to V$ une application de classe C^∞. Rappelons (cf. [3]) que f est appelée une *équivalence d'homotopie feuilletée* s'il existe une application $g : V \to W$ telle que:

a) l'image par f (resp. g) de toute feuille de W (resp. V) est contenue dans une feuille de V (resp. W);

b) il existe une homotopie feuilletée reliant $g \circ f$ (resp. $f \circ g$) à l'identité.

Rappelons qu'une équivalence d'homotopie feuilletée $f : W \to V$ de classe C^∞ est toujours transverse à F. Le graphe de f définit un $C_\pi^*(W, H) - C_\pi^*(V, F)$ bimodule $\mathscr{E}_f$

([8]). Le bimodule $\mathscr{E}_f$ définit une équivalence de Morita entre les C^*-algèbres $C^*_\pi(W, H)$ et $C^*_\pi(V, F)$; son bimodule inverse est $\mathscr{E}_g$ où g est un inverse d'homotopie feuilletée de f. Les C^*-algèbres $C^*_\pi(V, F)$ et $C^*_\pi(W, H)$ sont donc isomorphes ([11]).

5.1. Définition. Soient (V, F) une variété riemannienne feuilletée, $\alpha > 0$ un nombre réel, E un fibré hermitien sur V et ∇_0 une connexion unitaire sur E. Notons

$$\theta_0 = \nabla_0^2 \in C^\infty(V; \wedge^2 T^* V \otimes \mathrm{End}(E))$$

sa courbure. La connexion ∇_0 est dite α-plate le long de F si la restriction

$$\theta \in C^\infty(V, \mathrm{End}(E) \otimes \wedge T^* F)$$

à F de la courbure satisfait $\|\theta\| < \alpha$. S'il existe une connexion unitaire α-plate le long de F nous dirons que E est un fibré α-plat le long de F.

Le principal résultat de ce paragraphe est:

5.2. Théorème. *Soient (V, F) et (W, H) deux variétés riemanniennes feuilletées longitudinalement orientées. Soit $f\colon W \to V$ une équivalence d'homotopie feuilletée préservant l'orientation longitudinale. Alors il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout fibré hermitien E sur V α-plat le long de F les hautes signatures analytiques longitudinales $\psi(V, F, E)$ et $\psi(W, H, f^* E)$ se correspondent par l'équivalence de Mòrita associée à f.*

Preuve. On définit le $C^*_\pi(V, F)$-module $\mathscr{E}(f, E)$ en posant:

$$\mathscr{E}(f, E) = \mathscr{E}(W, H, f^* E) \otimes_{C^*_\pi(W, H)} \mathscr{E}_f = C(W; f^* E \otimes \wedge_{\mathbb{C}} H^* \otimes \Omega^{-1/2}) \otimes_{C(W)} \mathscr{E}_f\,.$$

On définit encore une forme quadratique régulière Q_f sur $\mathscr{E}(f, E)$ en posant pour $\xi \otimes a, \zeta \otimes b \in C(W; f^* E \otimes \wedge_{\mathbb{C}} H^* \otimes \Omega^{-1/2}) \otimes_{\mathrm{alg}} \mathscr{E}_f$:

$$Q_f(\xi \otimes a, \zeta \otimes b) = \langle a, q(\xi, \zeta) b\rangle\,.$$

Le C^*-module hilbertien $\mathscr{E}(f, E)$ est encore obtenu par complétion de

$$C_c^\infty(\pi(f); r^*(f^* E \otimes \wedge_{\mathbb{C}} H^*) \otimes s^* \Omega^{1/2})\,.$$

Ici $\pi(f)$ désigne le graphe de f: c'est le produit fibré $W \times_V \pi$ au dessus des applications f et r; pour $(x, \gamma) \in W \times_V \pi$, on a posé $r(x, \gamma) = x$, $s(x, \gamma) = s(\gamma)$.

L'action de $f^* \nabla_0$ le long des fibres de la submersion $s\colon \pi(f) \to V$ définit un opérateur ∇_f sur $C_c^\infty(\pi(f); r^* \wedge_{\mathbb{C}} F^* \otimes s^* \Omega^{1/2})$. Cet opérateur est fermable; on note encore ∇_f sa fermeture; c'est un opérateur régulier du C^*-module $\mathscr{E}(f, E)$. On pose alors $D_f \xi = i^{\partial \xi} \nabla_f \xi$. C'est un opérateur régulier du C^*-module $\mathscr{E}(f, E)$. Le triplet $(\mathscr{E}(f, E), Q, D_f)$ est un élément de $\mathbf{L}_{nb}(C^*_\pi(V, F))$. Notons $\psi(f, F, E)$ sa classe dans $K_0(C^*_\pi(V, F))$. C'est l'image de $\psi(W, H, f^* E)$ par l'équivalence de Morita associée à f. Pour établir le théorème 5.2 il suffit de montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout fibré hermitien E sur V α-plat le long de F $\psi(f, F, E) = \psi(V, F, E)$.

La deuxième projection induit une application f^π de classe C^∞ de $\pi(f)$ dans π; on en déduit une application notée f^* de $C_c^\infty(\pi; r^*(E \otimes \wedge_{\mathbb{C}} F^*) \otimes s^* \Omega^{1/2})$ à valeurs dans

$$C_c^\infty(\pi(f); r^*(E \otimes \wedge_{\mathbb{C}} H^*) \otimes s^* \Omega^{1/2})$$

(si le graphe π est séparé, comme $W \times_V \pi$ est une partie fermée de $W \times \pi$ et que W est compacte, f^π est propre). Notons que l'application f^* vue comme opérateur de $\mathscr{E}(V, E)$ vers $\mathscr{E}(f, E)$ n'est en général même pas fermable.

Soient $k \in \mathbb{N}$ et $p: V \times B^k \to V$ une application de classe C^∞ dont la restriction à $\{x\} \times B^k \to V$ soit une submersion de B^k dans la feuille de x. (Pour construire une telle application, on peut par exemple partir d'un plongement $i: V \to \mathbb{R}^k$; pour $x \in V$ et $y \in \mathbb{R}^k$ suffisamment proche de x, soit $p_{0,x}(y)$ le projeté de y dans la plaque de x; cette application est définie pour $\|x - y\| < \lambda$; on pose alors $p(x, t) = p_{0,x}(x + \lambda t)$ $(x \in V, t \in \mathbb{R}^k)$.)

On définit alors la submersion $p_f: W \times B^k \to V$ en posant $p_f(x, t) = p(f(x), t)$. Comme aux § 3 et 4, on pose $T = q_I \circ e_\omega \circ p_f^*$ où $q: W \times B^k \to W$ est la projection. On montre alors, comme au § 4, que si le fibré E est α-plat avec α suffisamment petit, l'opérateur T satisfait les hypothèses du corollaire 2.5. □

Comme on considère la C^*-algèbre pleine du groupoïde d'homotopie, l'homomorphismes du groupoïde d'homotopie sur le groupoïde d'holonomie, induit un homomorphisme naturel $C_\pi^*(V, F) \to C^*(V, F)$. L'image par cet homomorphisme de $\psi(V, F, E)$ est la signature longitudinale de (V, F) à coefficients dans E. On a donc:

5.3. Corollaire. *Soient (V, F) et (W, H) deux variétés riemanniennes feuilletées longitudinalement orientées. Soit $f: W \to V$ une équivalence d'homotopie feuilletée préservant l'orientation longitudinale. Alors il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout fibré hermitien E sur V α-plat le long de F les signatures longitudinales de (V, F) à coefficients dans E et de (W, H) à coefficients dans f^*E se correspondent par l'équivalence de Morita associée à f.* □

L'opérateur de signature transverse définit un élément de $KK(C^*(V, F), \mathbb{C})$. L'image par cet élément de l'opérateur de signature longitudinale $D \in KK(C(V), C^*(V, F))$ est l'opérateur de signature ordinaire (cf. [12], cf. aussi [4]). On a donc:

5.4. Corollaire. *Soient (V, F) et (W, H) deux variétés riemanniennes feuilletées orientées. Soit $f: W \to V$ une équivalence d'homotopie feuilletée préservant l'orientation. Alors il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout fibré hermitien E sur V α-plat le long de F les signatures de V à coefficents dans E et de W à coefficents dans f^*E sont égales.*

Preuve. Si le feuilletage F est orientable, il en va de même pour H et, par un choix convenable des orientations, on peut supposer que f préserve les orientations longitudinale et transverse. Le corollaire 5.4 découle alors immédiatement de 5.3.

Dans le cas général, soient (V', F') et (W', H') les revêtements à deux feuillets de V et W d'orientation des fibrés F et H et $f': W' \to V'$ l'équivalence d'homotopie feuilletée correspondante. Elle préserve les orientations longitudinale et transverse. Si E est un fibré sur V et E' le fibré associé sur V', la signature de V' à coefficents dans E' est le double de la signature de V à coefficents dans E, d'où le résultat. □

Bibliographie

[1] *S. Baaj*, Multiplicateurs non bornés, Thèse, Univ. P. et M. Curie, Paris 1980.

[2] *S. Baaj* and *P. Julg*, Théorie bivariante de Kasparov et opérateurs non bornés dans les C^*-modules hilbertiens, C.R.A.S. Paris **296** (I) (1983), 875–878.

[3] *P. Baum* and *A. Connes*, Leafwise homotopy equivalence and rational Pontrjagin classes, Foliations, Adv. stud. pure Math. **5** (1985), 1–14.

[4] *A. Connes*, Cyclic cohomology and the transverse fundamental class of a foliation, in: Geometric methods in operator algebras, Pitnam Res. Notes Math. Ser. **123** (1986), 52–144.

[5] *A. Connes*, Entire cyclic cohomology of Banach algebras and the character of θ-summable Fredholm modules, K-theory **1** (1988), 519–548.

[6] *A. Connes, M. Gromov* et *H. Moscovici*, Conjecture de Novikov et fibrés presque plats, C.R.A.S. Paris **310** (I) (1990), 273–277.

[7] *A. Connes* and *H. Moscovici*, Cyclic cohomology, the Novikov conjecture and fundamental groups, Topology **29** n° 3 (1990), 345–388.

[8] *A. Connes* and *G. Skandalis*, The longitudinal index theorem for foliations, Publ. of RIMS Kyoto **20** n° 6 (1984), 1139–1183.

[9] *M. Hilsum*, The signature operator of Lipschitz manifolds and unbounded Kasparov bimodules, in: Operator Algebras and their Connections with Topology and Ergodic Theory, Lect. Notes Math. **1132** (1985), 254–288.

[10] *M. Hilsum*, Fonctorialité en K-théorie bivariante pour les variétés lipschitziennes, K-theory **3** (1989), 401–440.

[11] *M. Hilsum* et *G. Skandalis*, Stabilité des C^*-algèbres de feuilletages, Ann. Inst. Fourier **33** fasc. 3 (1983), 201–208.

[12] *M. Hilsum* et *G. Skandalis*, Morphismes K-orientés d'espaces de feuilles et fonctorialité en théorie de Kasparov, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. (4) **20** (1987), 325–390.

[13] *J. Kaminker* and *J. G. Miller*, Homotopy invariance of the analytic signature operators over C^*-algebras, J. Op. Th. **14** (1985), 113–127.

[14] *G. G. Kasparov*, Topological invariants of elliptic operators I: K-homology, Izv. Akad. Nauk. S.S.S.R. Ser. Mat. **39** (1975), 796–838; English transl. in Math. U.S.S.R. Izv. **9** (1975), 751–792.

[15] *G. G. Kasparov*, Equivariant KK-theory and the Novikov conjecture, Inv. Math. **91** (1988), 147–201; cf. aussi: K-theory, group C^*-algebras and higher signatures, Conspectus Parts 1 and 2, preprint Chernogolovka 1981.

[16] *G. G. Kasparov*, Operator K-theory and its applications: elliptic operators, group representations, higher signatures, C^*-extensions, in: Proc. I.C.M. conf. Warsaw 1983, PWN Elsevier (1984), 987–1000.

[17] *A. S. Mishchenko*, Homotopy invariance of non simply connected manifolds, I: Rational invariance, Math. USSR Izv. **4** (1970), 509–519; traduit de Izv. Akad. Nauk, SSSR Ser. Math. **34** (1970), 501–514.

[18] *A. S. Mishchenko*, C^*-algebras and K-theory, Lect. Notes Math. **763** (1979), 262–274.

[19] *A. S. Mishchenko*, Banach algebras, pseudodifferential operators and their applications, Russian Math. Surveys **34** n° 6 (1979), 77–91.

[20] *A. S. Mishchenko* and *Yu. P. Solov'jev*, Representations of Banach algebras and Hirzebruch type formulae, Math. USSR-Sbornic **39** (1980) n° 2, 189–205; traduit de Mat. Sbornic **111** (1980), 209–226.

[21] *J. Rosenberg* and *S. Weinberger*, Higher G-indices (on smooth and Lipschitz manifolds) and applications, Preprint.

[22] *N. Teleman*, The index of the signature operator on Lipschitz manifolds, Publ. Math. IHES **58** (1983), 39–78.

Collège de France, Annexe, 3, rue d'Ulm, 75 005 Paris

Eingegangen 20. Dezember 1990