ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

SAAD BAAJ
GEORGES SKANDALIS

Unitaires multiplicatifs et dualité pour les produits croisés de C^*-algèbres

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 26, nº 4 (1993), p. 425-488.
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1993_4_26_4_425_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 26, 1993, p. 425 à 488.

UNITAIRES MULTIPLICATIFS ET DUALITÉ POUR LES PRODUITS CROISÉS DE C*-ALGÈBRES

PAR SAAD BAAJ ET GEORGES SKANDALIS

ABSTRACT. — Let H be a Hilbert space. A unitary operator $V \in \mathscr{L}(H \otimes H)$ is said to be multiplicative if it satisfies the pentagone equation $V_{12} V_{13} V_{23} = V_{23} V_{12}$. In many papers concerned on operator algebras with duality ([13], [44], [17], [6], [19], [11]), a multiplicative unitary plays a fundamental role. In this paper we look for additional conditions that a multiplicative unitary should satisfy in order to correspond to a "locally compact quantum group". We introduce two conditions: "regularity" and "irreducibility". To any multiplicative unitary satisfying these conditions we associate two pairwise dual Hopf C*-algebras. Moreover, we establish Takesaki-Takai duality results, using an adaptation of the method of [5].

If the Hilbert space is finite dimensional or if the unitary V satisfies a commutativity condition, regularity and irreducibility are automatic. If the unitary V is of compact or discrete type, its regularity implies its irreducibility.

Introduction

La dualité de Pontrjagyn associe à tout groupe localement compact commutatif, un groupe dual et étudie les propriétés de cette correspondance. Depuis une cinquantaine d'années, plusieurs généralisations au cadre non commutatif de cette dualité ont été étudiées (*voir* [4] et références bibliographiques). Ces travaux ont d'abord consisté à définir une dualité pour des groupes non commutatifs (compacts [47], [20] puis localement compacts [40], [12], [13]); par la suite ont été introduits des objets généralisant à la fois les groupes et leurs objets duaux. Ces nouveaux objets peuvent être appelés dans un langage moderne « groupes quantiques ».

En termes d'algèbres d'opérateurs, la dualité de Pontrjagyn prend la forme de la dualité de Takesaki-Takai ([44], [42]) basée sur la construction des produits croisés. Après plusieurs années d'efforts de nombreux spécialistes, une axiomatique a été dégagée ([12], [13], [44], [49], [17], [6]) et les résultats de dualité ont été établis ([45], [21], [22], [31], [41], [5], [11], [7]) pour les algèbres de von Neumann assujetties à ces axiomes appelées algèbres de Kac von Neumann. Dans un travail fondamental récent ([53-56]), Woronowicz a défini des « pseudogroupes compacts matriciels » qui, bien que n'étant pas des algèbres de Kac ont des propriétés de dualité. Il en va de même pour de nouveaux exemples de « groupes quantiques » construits plus récemment par Podles-Woronowicz [34] et Majid [27]. Nous nous proposons dans ce travail de définir un cadre simple, contenant comme cas particuliers les algèbres de Kac, les « pseudogroupes compacts matriciels » et les exemples de [34] et [27]. Dans ce cadre, la dualité de Takesaki-Takai s'obtient aisément.

Soit H un espace de Hilbert et $V \in \mathscr{L}(H \otimes H)$ un opérateur unitaire. Nous dirons que V est multiplicatif (sur H) s'il vérifie la relation « pentagonale » $V_{12} V_{13} V_{23} = V_{23} V_{12}$. Cette relation pentagonale reflète l'associativité du produit tensoriel des représentations des « groupes quantiques » (*cf.* [26], [30]). Dans plusieurs articles consacrés aux algèbres d'opérateurs munies de dualité que l'on peut considérer comme des « groupes quantiques localement compacts » (*cf.* e.g. [13], [44], [17], [6], [19], [11]), un unitaire multiplicatif joue un rôle fondamental; il est en fait clair, et plus ou moins explicite selon les auteurs, que cet unitaire décrit toute la situation.

Il est très naturel de chercher quelles conditions supplémentaires doit satisfaire un unitaire multiplicatif pour correspondre à un « groupe quantique localement compact ». En étudiant ce problème, nous avons été conduits à considérer deux conditions que nous appelons « régularité » et « irréductibilité ». Nous montrons qu'à un unitaire multiplicatif régulier on peut associer deux C*-algèbres de Hopf en dualité; si de plus l'unitaire est irréductible, on établit, en adaptant la méthode de [5], des résultats de dualité à la Takesaki-Takai, généralisant ceux de [42], [50], [18].

De plus, nous montrons que si l'espace de Hilbert H est de dimension finie, ou si l'unitaire multiplicatif V a une propriété de commutativité, la régularité et (à la multiplicité près) l'irréductibilité sont automatiques. Si l'unitaire multiplicatif régulier V est de type compact ou discret, autrement dit si le « groupe quantique » associé est compact ou discret, il est automatiquement irréductible (à la multiplicité près).

Cependant, il existe des unitaires multiplicatifs qui ne satisfont pas à ces propriétés : au groupe des déplacements quantiques de Woronowicz, on peut naturellement associer deux unitaires multiplicatifs, tous deux non réguliers, un irréductible et un non irréductible. Un autre exemple de construction d'unitaires multiplicatifs avec les mêmes propriétés sera esquissé dans le paragraphe [8]. Ces exemples seront développés ailleurs. Cependant, nous ne savons pas si la régularité d'un unitaire multiplicatif implique son irréductibilité.

Une autre vertu de nos résultats est de montrer que pour les « groupes quantiques localement compacts », la théorie de la mesure détermine la topologie. Nous montrons en particulier (remarque 3.11) qu'à une algèbre de Kac-von Neumann (avec la terminologie de [6]), correspond une (unique) C*-algèbre de Kac (au sens de [50]). Ce résultat est à rapprocher du fameux théoréme de Weil ([52], *cf.* aussi Mackey [24]) : un « groupe quantique mesurable » avec une classe de mesure invariante, porte une unique structure de « groupe quantique localement compact ».

L'organisation de ce travail est la suivante :

Dans le premier paragraphe nous donnons les définitions et premières propriétés des unitaires multiplicatifs ainsi que quelques exemples que nous suivrons tout au long des paragraphes suivants. En particulier nous montrons comment à un unitaire multiplicatif sur H correspondent deux sous-algèbres de $\mathscr{L}(H)$.

Dans le deuxième nous montrons que les unitaires multiplicatifs commutatifs sont (à la multiplicité près) les unitaires fondamentaux des groupes localement compacts.

Dans le troisième paragraphe nous introduisons la condition de régularité; nous montrons que les algèbres associées à un unitaire multiplicatif régulier sont des C*-algèbres de Hopf.

Dans le quatrième paragraphe nous montrons que les unitaires multiplicatifs réguliers de type compact sont (à la multiplicité près) les unitaires fondamentaux des « pseudogroupes compacts » de Woronowicz. Nous en déduisons que les unitaires multiplicatifs sur un espace de Hilbert de dimension finie sont (à la multiplicité près) les unitaires fondamentaux des algèbres de Kac de dimension finie.

Dans le cinquième paragraphe nous donnons quelques constructions liées aux « pseudogroupes » de Woronowicz qui impliquent que les unitaires multiplicatifs associés sont irréductibles. Cette condition d'irréductibilité, introduite et étudiée au sixième paragraphe, nous permet au septième de démontrer la bidualité de Takesaki-Takai.

Enfin, dans le huitième paragraphe, en utilisant des idées de [46], [28], [29], nous étudions la notion de couples assortis de systèmes de Kac ce qui nous permet de construire plusieurs exemples d'unitaires multiplicatifs réguliers et irréductibles. Ainsi, nous montrons que le cadre des unitaires multiplicatifs réguliers et irréductibles est stable par la construction du double quantique de Drinfeld [4] ce qui permet de retrouver les exemples de [34] et construisons l'unitaire multiplicatif régulier et irréductible correspondant aux exemples de [27].

Dans l'appendice nous discutons les notions de représentations pour les unitaires multiplicatifs.

Les résultats de bidualité sont donnés dans le cadre des produits croisés de C*-algèbres. Les résultats analogues pour les produits croisés d'algèbres de von Neumann se démontrent de manière analogue. Notons enfin que les résultats de dualité de [2] se généralisent aisément au cadre des unitaires multiplicatifs: si S et $\hat{S}$ désignent les deux C*-algèbres de Hopf associées à un unitaire multiplicatif régulier et irréductible, il existe un isomorphisme naturel entre la K-théorie bivariante équivariante pour S et la K-théorie bivariante équivariante pour $\hat{S}$.

Nous remercions M. Rosso, M. Enock et M. B. Landstad d'avoir attiré notre attention sur les articles [34], [27] et [11].

0. Rappels et notations

Commençons par introduire quelques notations. Tous les espaces de Hilbert que nous considérerons seront supposés séparables.

Notations. — Soit H un espace de Hilbert. Pour $\xi \in H$ on définit

$$\theta_\xi,\ \theta'_\xi \in \mathscr{L}(H,\ H \otimes H)$$

par

$$\theta_\xi(\eta) = \xi \otimes \eta \qquad \text{et} \qquad \theta'_\xi(\eta) = \eta \otimes \xi.$$

On définit $\theta_{i,\xi} \in \mathscr{L}(H \otimes H, H \otimes H \otimes H)$ ($i=1$, 2 ou 3) en posant $\theta_{1,\xi}(\eta \otimes \zeta) = \xi \otimes \eta \otimes \zeta$, $\theta_{2,\xi}(\eta \otimes \zeta) = \eta \otimes \xi \otimes \zeta$ et $\theta_{3,\xi}(\eta \otimes \zeta) = \eta \otimes \zeta \otimes \xi$.

Pour $T \in \mathscr{L}(H \otimes H)$ on définit T_{12}, T_{13}, $T_{23} \in \mathscr{L}(H \otimes H \otimes H)$ par $T_{12}\theta_{3,\xi} = \theta_{3,\xi}T$, $T_{13}\theta_{2,\xi} = \theta_{2,\xi}T$ et $T_{23}\theta_{1,\xi} = \theta_{1,\xi}T$. Nous utiliserons dans la suite des généralisations de ces notations: pour $T \in \mathscr{L}(H \otimes H)$, $T_{21} = \Sigma T \Sigma$ où $\Sigma \in \mathscr{L}(H \otimes H)$ est donné par $\Sigma(\xi \otimes \eta) = \eta \otimes \xi$; pour un produit tensoriel de plus de trois copies de H e.g. pour $T \in \mathscr{L}(H \otimes H)$ et $\{i, j\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$, on définit $T_{ij} \in \mathscr{L}(H \otimes H \otimes H \otimes H)$; pour des produits tensoriels d'espaces de Hilbert distincts: e.g. si $\{i, j\} \subset \{1, 2, 3\}$ et $T \in \mathscr{L}(H_i \otimes H_j)$, $T_{ij} \in \mathscr{L}(H_1 \otimes H_2 \otimes H_3)$; nous pourrons aussi supposer que les H_i sont des C*-modules Hilbertiens...

Pour $T \in \mathscr{L}(H \otimes H)$ et $\omega \in \mathscr{L}(H)_*$ on définit $(\mathrm{id} \otimes \omega)(T)$ et $(\omega \otimes \mathrm{id})(T)$ par les formules:

$$\langle \xi, (\mathrm{id} \otimes \omega)(T)\eta \rangle = \omega(\theta_\xi^* T \theta_\eta), \qquad \langle \xi, (\omega \otimes \mathrm{id})(T)\eta \rangle = \omega(\theta_\xi'^* T \theta_\eta').$$

Soit A une C*-algèbre, $\tilde{A}$ la C*-algèbre obtenue à partir de A par adjonction d'un élément unité et M(A) la C*-algèbre des multiplicateurs de A (*cf.* [33], 3.12). Si J est un idéal bilatère fermé de A, soit $M(A; J) = \{m \in M(A)/mA + Am \subset J\}$. Il est clair que M(A; J) est une sous-C*-algèbre de M(A) que l'homomorphisme de restriction de M(A) dans M(J) identifie à une sous-C*-algèbre de M(J). Un homomorphisme de C*-algèbres $\pi : A \to M(B)$ est dit non dégénéré si, pour une unité approchée (e_i) de A, $\pi(e_i)$ converge vers 1 pour la topologie stricte. Dans ce cas, π se prolonge de façon unique en un homomorphisme noté encore $\pi : M(A) \to M(B)$ continu pour les topologies strictes et vérifiant $\pi(1) = 1$ (dans [50] un tel homomorphisme est appelé spécial).

Nous aurons besoin de quelques rappels concernant les algèbres de Hopf.

0.1. Définition. — *Une* C*-*algèbre de Hopf est un couple* (A, δ) *où* A *est une* C*-*algèbre et* $\delta : A \to M(\tilde{A} \otimes A + A \otimes \tilde{A};\ A \otimes A)$ *est un *-homomorphisme non dégénéré, appelé le coproduit de A, tel que le diagramme suivant soit commutatif*:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\delta} & M(A \otimes A) \\ {\scriptstyle \delta}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_A \otimes \delta} \\ M(A \otimes A) & \xrightarrow{\delta \otimes \mathrm{id}_A} & M(A \otimes A \otimes A) \end{array}$$

L'algèbre de Hopf A *est dite simplifiable à droite* (*resp. à gauche*) *si* $\delta(A)(1 \otimes A)$ (*resp.* $\delta(A)(A \otimes 1)$) *est total dans* $A \otimes A$. *Elle est dite bisimplifiable si elle est simplifiable à gauche et à droite* (*les produits tensoriels considérés sont des produits tensoriels « min »*).

Remarquons que cette définition diffère légèrement de la définition 1.1 de [2].

0.2. DÉFINITION. — *On appelle coaction d'une* C*-*algèbre de Hopf* (A, δ) *dans une* C*-*algèbre* B *un* *-*homomorphisme non dégénéré* $\delta_B : B \to M(\tilde{B} \otimes A; B \otimes A)$ *tel que le diagramme suivant soit commutatif*:

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\delta_B} & M(B \otimes A) \\ {\scriptstyle \delta_B}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle id_B \otimes \delta} \\ M(B \otimes A) & \xrightarrow{\delta_B \otimes id_A} & M(B \otimes A \otimes A) \end{array}$$

Une C*-*algèbre* B *munie d'une coaction* δ_B *de la* C*-*algèbre de Hopf* A *est appelée une* A-*algèbre si* δ_B *est injective et si* $\delta_B(B)(1 \otimes A)$ *est total dans* $B \otimes A$.

0.3. DÉFINITION. — *Soit* A *une* C*-*algèbre de Hopf. Une coreprésentation unitaire de* A *dans l'espace de Hilbert (ou* C*-*module)* H *est un unitaire* $u \in \mathscr{L}(H \otimes A)$ *tel que* $(id \otimes \delta)(u) = u_{12} u_{13}$; *autrement dit, à travers l'identification*

$$(H \otimes A) \otimes_\delta (A \otimes A) \cong H \otimes A \otimes A \text{ on a } u \otimes_\delta 1 = u_{12} u_{13}.$$

Soit B *une* C*-*algèbre munie d'une coaction* δ_B *de la* C*-*algèbre de Hopf* A. *Une représentation covariante de* (B, δ_B) *est une paire* (π, u) *où* π *est une représentation non dégénérée de* B *et* u *est une coreprésentation unitaire de* A *dans le même espace de Hilbert* H *telles que* $\forall b \in B$, $(\pi \otimes id)\, \delta_B(b) = u(\pi(b) \otimes 1) u^*$.

Rappelons la notion de cocycle associée à une coaction d'une C*-algèbre de Hopf.

0.4. DÉFINITION. — *Soit* B *une* C*-*algèbre munie d'une coaction* δ_B *de la* C*-*algèbre de Hopf* A. *On dit que l'unitaire* $u \in M(B \otimes A)$ *est un cocycle pour la coaction* δ_B *si*

$$u_{12}(\delta_B \otimes id_A)(u) = (id_B \otimes \delta)(u).$$

Si u est un cocycle pour δ_B, l'application $\delta_{B,u} : B \to M(B \otimes A)$ donnée par $\delta_{B,u}(x) = u\, \delta_B(x)\, u^*$ satisfait $(\delta_{B,u} \otimes id_A)\, \delta_{B,u} = (id_B \otimes \delta)\, \delta_{B,u}$.

Rappelons enfin la notion de morphisme de C*-algèbres de Hopf.

0.5. DÉFINITION. — *Soient* (S, δ) *et* (S′, δ′) *deux* C*-*algèbres de Hopf. On appelle morphisme d'algèbres de Hopf de* (S, δ) *dans* (S′, δ′), *un* *-*homomorphisme non dégénéré*: $\phi : S \to M(S')$ *tel que le diagramme suivant soit commutatif*:

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\delta} & M(S \otimes S) \\ {\scriptstyle \phi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \phi \otimes \phi} \\ M(S') & \xrightarrow{\delta'} & M(S' \otimes S'). \end{array}$$

1. Définitions

Dans ce paragraphe nous donnons la définition des unitaires multiplicatifs et quelques propriétés de ces opérateurs. La relation pentagonale définissant ces unitaires est déjà apparue, sous des formes variées, dans [25], [13], [44], [17], [6], [19], [30]. Nous renvoyons à [30] pour une discussion des significations de cette relation.

1.1. DÉFINITION. — *Soit* H *un espace de Hilbert et* $V \in \mathscr{L}(H \otimes H)$ *un opérateur unitaire. Nous dirons que* V *est multiplicatif s'il vérifie la relation pentagonale* :

$$V_{12} V_{13} V_{23} = V_{23} V_{12}.$$

1.2. *Exemples*. — 1) • L'identité $1 \in \mathscr{L}(H \otimes H)$ est un unitaire multiplicatif.

• Si V est un unitaire multiplicatif sur H et $U \in \mathscr{L}(H, H')$ est un unitaire, alors $W = (U \otimes U) V (U^* \otimes U^*)$ est un unitaire multiplicatif sur H′. Nous dirons alors que les unitaires multiplicatifs V et W sont équivalents.

• Si V est un unitaire multiplicatif et $\Sigma \in \mathscr{L}(H \otimes H)$ est la volte : $\Sigma(\xi \otimes \eta) = \eta \otimes \xi$, l'unitaire $\Sigma V^* \Sigma$ est aussi multiplicatif. Deux unitaires multiplicatifs V et W sont dits opposés si V et $\Sigma W^* \Sigma$ sont équivalents.

• Si V et W sont deux unitaires multiplicatifs sur H et K respectivement, alors $V_{13} W_{24} \in \mathscr{L}(H \otimes K \otimes H \otimes K)$ est clairement un unitaire multiplicatif sur $H \otimes K$. L'unitaire $V_{13} W_{24}$ sera appelé produit tensoriel de V par W et (abusivement) noté $V \otimes W$. On remarque que les unitaires multiplicatifs $V \otimes W$ et $W \otimes V$ sont équivalents.

2) Soit G un groupe localement compact et soit dg une mesure de Haar à droite sur G. La formule $V_G(\xi)(s, t) = \xi(st, t)$ définit un unitaire multiplicatif.

3) Soit W l'unitaire fondamental d'une algèbre de Kac-von Neumann au sens de [6], proposition 2.1.1. Alors l'unitaire $V = W^*$ est multiplicatif (*cf.* [6] proposition 3.1.7-*cf.* aussi [13] et [17]).

4) Si (A, δ) est une C*-algèbre de Hopf (unifère) et ϕ est une mesure de Haar à droite sur A, alors l'opérateur V_ϕ donné par $V_\phi(\pi_\phi(x)\xi_\phi \otimes \eta) = (\pi_\phi \otimes \pi_\phi)(\delta(x))(\xi_\phi \otimes \eta)$ définit une isométrie de $H_\phi \otimes H_\phi$ qui vérifie la relation pentagonale. En particulier si V_ϕ est surjectif, c'est un unitaire multiplicatif. Signalons que par [54], théorème 4.9, si A est une C*-algèbre de Woronowicz (*cf.* terminologie du § 4), V_ϕ est surjectif.

5) Soit (A, δ) une C*-algèbre de Hopf. Le coproduit δ est une coaction de A dans elle-même. Soit alors (π, u) une représentation covariante dans l'espace de Hilbert H pour cette coaction : $\pi : A \to \mathscr{L}(H)$ est une *-représentation et $u \in \mathscr{L}(H \otimes A)$ un unitaire tel que : $(\mathrm{id} \otimes \delta)(u) = u_{12} u_{13}$ et $\forall a \in A$, $(\pi \otimes \mathrm{id}) \circ \delta(a) = u(\pi(a) \otimes 1) u^*$ (*cf.* déf. 0.3). Posons $V = (\mathrm{id} \otimes \pi)(u)$; il est clair que les deux relations ci-dessus entraînent que V est un unitaire multiplicatif.

6) Une autre façon d'interpréter la relation pentagonale est la suivante :

Soit A une algèbre de Hopf de dimension finie; notons E l'algèbre des endomorphismes de l'espace vectoriel A. Identifions E à $A^* \otimes A$ et notons $v \in A^* \otimes A$ l'image de l'identité. Notons L l'action de A dans A par multiplication à gauche. Pour $x \in A^*$ et $a \in A$, posons $\rho(x) a = (\mathrm{id} \otimes x) \delta(a)$. Alors L et ρ sont des homomorphismes d'algèbres de A et A^* dans E. Rappelons que le produit de A^* est donné par la formule :

$$\langle xy, a \rangle = \langle (x \otimes y), \delta(a) \rangle \, (x, y \in A^*, a \in A).$$

PROPOSITION. — *a*) *Soit* $a \in \mathrm{A}$ *et* $x \in \mathrm{A}^*$; *écrivons* $\delta(a) = \Sigma_i a_i \otimes b_i$. *On a alors* $\rho(x)\mathrm{L}(a) = \Sigma_i \mathrm{L}(a_i)\rho(xb_i)$.

b) *Pour* $a \in \mathrm{A}$ *on a* $(\rho \otimes \mathrm{id})(v)(\mathrm{L}(a) \otimes 1) = (\mathrm{L} \otimes \mathrm{id})(\delta(a))(\rho \otimes \mathrm{id})(v)$ (*dans* $\mathrm{E} \otimes \mathrm{A}$).

c) *On a l'égalité* $(\mathrm{id} \otimes \delta)(v) = v_{12} v_{13}$.

d) *On a*:

$$((\mathrm{id} \otimes \mathrm{L})(v))_{12} v_{13} ((\rho \otimes \mathrm{id}(v))_{23} = ((\rho \otimes \mathrm{id})(v))_{23} ((\mathrm{id} \otimes \mathrm{L})(v))_{12}$$

(dans $\mathrm{A}^* \otimes \mathrm{E} \otimes \mathrm{A}$).

Preuve. — *a*) Pour $b \in \mathrm{A}$ on a:

$$\begin{aligned}\rho(x)\mathrm{L}(a)b &= (\mathrm{id} \otimes x)\delta(ab) = (\mathrm{id} \otimes x)(\Sigma_i (a_i \otimes b_i)\delta(b)) = \Sigma_i a_i (\mathrm{id} \otimes x)((1 \otimes b_i)\delta(b)) \\ &= \Sigma_i a_i (\mathrm{id} \otimes xb_i)\delta(b) = \Sigma_i \mathrm{L}(a_i)\rho(xb_i)b\end{aligned}$$

b) Posons $\delta(a) = \Sigma_i a_i \otimes b_i$. Pour $x \in \mathrm{A}^*$, $(\mathrm{id} \otimes x)(v) = x$ d'où

$$(\mathrm{id} \otimes x)((\rho \otimes \mathrm{id})(v)) = \rho(x).$$

Donc

$$(\mathrm{id} \otimes x)((\rho \otimes \mathrm{id})(\mathrm{v})(\mathrm{L}(a) \otimes 1)) = \rho(x)\mathrm{L}(a)$$

et

$$(\mathrm{id} \otimes x)((\mathrm{L} \otimes \mathrm{id})(\delta(a))(\rho \otimes \mathrm{id})(v)) = \Sigma_i \mathrm{L}(a_i)\rho(xb_i) \text{ sont égaux par } a).$$

c) Soient $x, y \in \mathrm{A}^*$ et $a \in \mathrm{A} = \mathrm{A}^{**}$. On a $(a \otimes \mathrm{id})(v) = a$, $(\mathrm{id} \otimes x)(v) = x$ et $(\mathrm{id} \otimes y)(v) = y$. Donc

$$\langle a \otimes x \otimes y, (\mathrm{id} \otimes \delta)(v) \rangle = \langle x \otimes y, \delta(a) \rangle = \langle xy, a \rangle$$

et

$$\langle a \otimes x \otimes y, v_{12} v_{13} \rangle = \langle (\mathrm{id} \otimes x)(v)(\mathrm{id} \otimes y)(v), a \rangle = \langle xy, a \rangle.$$

d) Par *b*) $((\rho \otimes \mathrm{id})(v))_{23} ((\mathrm{id} \otimes \mathrm{L})(v))_{12} = (\mathrm{id} \otimes \mathrm{L} \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes \delta)(v)\ ((\rho \otimes \mathrm{id})(v))_{23}$, ce qui par *c*) est égal à $((\mathrm{id} \otimes \mathrm{L})(v))_{12} v_{13} ((\rho \otimes \mathrm{id})(v))_{23}$. ■

COROLLAIRE. — *L'opérateur* $\mathrm{V} = (\rho \otimes \mathrm{L})(v)$ *vérifie la relation pentagonale.* ■

Supposons de plus que A est unifère et co-unifère de sorte que les homomorphismes L et ρ sont injectifs.

PROPOSITION. — *Notons* 1 *l'unité et* ε *la co-unité de* A.

a) *Supposons que* V, *donc* v, *est inversible. L'application* $\kappa : \mathrm{A} \to \mathrm{A}$ *définie par* $\kappa(a) = (a \otimes \mathrm{id})(v^{-1})$ $(a \in \mathrm{A})$ *est l'antipode de* A *i.e. on a, pour tout*

$$a \in \mathrm{A}, \quad m(\mathrm{id} \otimes \kappa)\delta(a) = m(\kappa \otimes \mathrm{id})\delta(a) = \varepsilon(a)1.$$

b) *Réciproquement, si l'algèbre de Hopf* A *admet une antipode, alors* v *est inversible.*

Preuve. — *a*) Pour $a \in \mathrm{A}$, on a $\delta(a) = (a \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id})(v_{12} v_{13})$ donc

$$(\mathrm{id} \otimes \kappa)\delta(a) = (a \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id})(v_{12} v_{13}^{-1})$$

et $m\,(\mathrm{id}\otimes\kappa)\,\delta\,(a)=(a\otimes m)\,(v_{12}v_{13}^{-1})=(a\otimes\mathrm{id})(\varepsilon\otimes 1)=\varepsilon(a)1$. De même

$$(\kappa\otimes\mathrm{id})\,\delta\,(a)=(a\otimes\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})\,(v_{12}^{-1}v_{13})$$

et $m(\kappa\otimes\mathrm{id})\,\delta\,(a)=(a\otimes m)\,(v_{12}^{-1}v_{13})=\varepsilon\,(a)\,1$.

b) est clair. (*cf.* [1]) ■

Remarquons que, par le *d*) de la proposition précédente, l'antipode κ vérifie $\kappa\,(ab)=\kappa\,(b)\,\kappa\,(a)$.

Passons à l'étude des unitaires multiplicatifs. Soit H un espace de Hilbert et soit $V\in\mathscr{L}(H\otimes H)$ un unitaire multiplicatif.

1.3. Définition. — *Si* ω *est une forme linéaire continue sur* $\mathscr{L}(H)$ *on définit* $L(\omega)\in\mathscr{L}(H)$ *et* $\rho(\omega)\in\mathscr{L}(H)$ *par les formules*: $L(\omega)=(\omega\otimes\mathrm{id})(V)$ *et* $\rho(\omega)=(\mathrm{id}\otimes\omega)\,V$. *On pose* $A(V)=\{L(\omega)/\omega\in\mathscr{L}(H)_*\}\subset\mathscr{L}(H)$ *et* $\hat{A}(V)=\{\rho(\omega)/\omega\in\mathscr{L}(H)_*\}\subset\mathscr{L}(H)$. *Les espaces* $A(V)$ *et* $\hat{A}(V)$ *sont en dualité par la formule*:

$$\langle L(\omega),\ \rho(\omega')\rangle=(\omega\otimes\omega')(V)=\omega(\rho(\omega'))=\omega'(L(\omega))$$

On a:

1.4. Proposition. — *Les sous-espaces vectoriels* $A(V)$ *et* $\hat{A}(V)$ *sont des sous-algèbres de* $\mathscr{L}(H)$. *Les espaces* $A(V)H$ *et* $\hat{A}(V)H$ *sont totaux dans* H.

Preuve. — Soient ω et ω' deux formes linéaires normales sur $\mathscr{L}(H)$. Soit $\psi\in\mathscr{L}(H)_*$ définie par $\psi(T)=(\omega\otimes\omega')(V^*(1\otimes T)V)$. On a:

$$\begin{aligned}L(\omega)\,L(\omega')&=(\omega\otimes\mathrm{id})(V)(\omega'\otimes\mathrm{id})(V)=(\omega\otimes\omega'\otimes\mathrm{id})(V_{13}V_{23})\\&=(\omega\otimes\omega'\otimes\mathrm{id})(V_{12}^*V_{23}V_{12})=(\psi\otimes\mathrm{id})(V)=L(\psi).\end{aligned}$$

De même si ψ' est définie par $\psi'(T)=(\omega\otimes\omega')(V(T\otimes 1)V^*)$, on a: $\rho(\omega)\,\rho(\omega')=\rho(\psi')$.

Soient $\xi,\eta\in H$, $\xi\neq 0$ et $\eta\neq 0$; comme $V^*(\xi\otimes\eta)\neq 0$, il existe $\alpha,\beta\in H$ tels que $\langle\xi\otimes\eta,\ V(\alpha\otimes\beta)\rangle\neq 0$. Donc $L(\omega_{\xi,\alpha})\,\beta$ n'est pas orthogonal à η et $\rho(\omega_{\eta,\beta})\,\alpha$ n'est pas orthogonal à ξ. ■

1.5. Définition. — *Soit* V *un unitaire multiplicatif. On appelle algèbre réduite de* V *l'algèbre* S *adhérence* (*normique*) *dans* $\mathscr{L}(H)$ *de* $A(V)$. *De même on appelle algèbre réduite duale de* V *l'algèbre* $\hat{S}$ *adhérence* (*normique*) *dans* $\mathscr{L}(H)$ *de* $\hat{A}(V)$.

Remarque. — Il est clair que l'espace vectoriel engendré par les formes ψ apparaissant dans la démonstration de 1.4 est normiquement dense dans $\mathscr{L}(H)_*$; l'espace vectoriel fermé engendré par $\{xy/x\in A(V),\ y\in A(V)\}$ est donc S; on voit de même, que l'espace vectoriel fermé engendré par $\{xy/x\in\hat{A}(V),\ y\in\hat{A}(V)\}$ est $\hat{S}$.

1.6. Proposition. — *Notons* $C^*(S)$ *et* $C^*(\hat{S})$ *les* C^*-*algèbres engendrées* (*dans* $\mathscr{L}(H)$) *par* S *et* $\hat{S}$. *Alors* V *appartient au bicommutant de* $C^*(\hat{S})\otimes C^*(S)$.

Preuve. — Soit $T\in\mathscr{L}(H\otimes H)$. Pour

$$\omega\in\mathscr{L}(H)_*,\ (\mathrm{id}\otimes\omega\otimes\mathrm{id})([T_{13},\ V_{23}])=[T,\ 1\otimes L(\omega)],$$

donc T commute avec $1 \otimes S$ si et seulement si $[T_{13}, V_{23}]=0$. De même, T commute avec $\hat{S} \otimes 1$ si et seulement si $[T_{13}, V_{12}]=0$. Si T commute à $\hat{S} \otimes S$ alors T commute avec $1 \otimes S$ et avec $\hat{S} \otimes 1$ (proposition 1.4), et T_{13} commute avec V_{12} et V_{23} donc avec $V_{13}=V_{12}^* V_{23} V_{12} V_{23}^*$. ■

Remarquons qu'on a en fait prouvé que $V \in (\hat{S} \otimes S)''$.

1.7. DÉFINITION. — *Soit* V *un unitaire multiplicatif. Nous dirons que* V *est de type compact si l'algèbre* S *est unifère. Nous dirons que* V *est de type discret si l'algèbre* $\hat{S}$ *est unifère.*

1.8. DÉFINITION. — *Soit* V *un unitaire multiplicatif sur l'espace de Hilbert* H. *Un vecteur* $e \in H$ *tel que* $V\theta_e=\theta_e$ *est dit fixe. Il est dit cofixe si* $V\theta'_e=\theta'_e$.

Autrement dit, le vecteur e est fixe si et seulement si $\forall \xi \in H$, $V(e \otimes \xi)=e \otimes \xi$ et cofixe si $\forall \xi \in H$, $V(\xi \otimes e)=\xi \otimes e$.

1.9. PROPOSITION. — *Soit* e *un vecteur fixe* (*resp. cofixe*) *de norme* 1 *et* ϕ *l'état vectoriel associé à* e ($\phi(T)=\langle e, Te\rangle$). *On a* $L(\phi)=1$ *et* $\rho(\phi)$ *est le projecteur sur l'espace* H_0 *des vecteurs fixes* (*resp.* $\rho(\phi)=1$ *et* $L(\phi)$ *est le projecteur sur l'espace* H^0 *des vecteurs cofixes*).

Preuve. — Soit e un vecteur fixe de norme 1 et ϕ l'état vectoriel associé. L'égalité $L(\phi)=1$ est immédiate. Comme $V^*(e \otimes e)=e \otimes e$, l'état ψ' donné par $\psi'(T)=(\phi \otimes \phi)(V(T \otimes 1)V^*)$ coïncide avec ϕ donc $\rho(\phi)$ est un idempotent de $\mathscr{L}(H)$ (proposition 1.4) et comme $\|\rho(\phi)\| \leqq 1$, $\rho(\phi)$ est un projecteur. Pour $\xi \in H$, $\rho(\phi)\xi=\xi$ si et seulement si $\langle \xi, \rho(\phi)\xi\rangle=\|\xi\|^2$ or $\langle \xi, \rho(\phi)\xi\rangle=\langle \xi \otimes e, V(\xi \otimes e)\rangle$; donc l'image de $\rho(\phi)$ est $\{\xi \in H / V(\xi \otimes e)=\xi \otimes e\}$. Finalement, si $V(\xi \otimes e)=\xi \otimes e$, $\forall \eta \in H$, $(\xi \otimes e \otimes \eta)$ est fixe par V_{12} et par V_{23} donc par $V_{13}=V_{12}^* V_{23} V_{12} V_{23}^*$.

Les énoncés relatifs aux vecteurs cofixes se déduisent de ceux relatifs aux vecteurs fixes en remplaçant V par $\Sigma V^* \Sigma$. ■

1.10. PROPOSITION. — *Soit* V *un unitaire multiplicatif sur l'espace de Hilbert séparable* H. *Alors l'unitaire multiplicatif* V *est de type compact* (*resp. discret*) *si et seulement si l'espace des vecteurs fixes* (*resp. cofixes*) *est non nul.*

Preuve. — Si e est un vecteur fixe de norme 1, comme d'après la proposition 1.9 (et avec ses notations) $L(\phi)=1$, $1 \in A(V)$ et S est donc unifère.

Réciproquement supposons S unifère; comme son action dans H est non dégénérée (proposition 1.4), l'unité de S est l'opérateur identité $1 \in \mathscr{L}(H)$. Il existe alors une forme $\omega \in \mathscr{L}(H)_*$, telle que $\|L(\omega)-1\| \leqq 1/2$. On a alors pour tout état normal ψ, $|\omega(\rho(\psi))|=|\psi(L(\omega))| \geqq 1/2$. Fixons un état normal fidèle ψ. Définissons l'état ψ^n par récurrence sur l'entier $n \geqq 1$, en posant $\psi^1=\psi$ et $\psi^{n+1}(x)=\psi \otimes \psi^n(V(x \otimes 1)V^*)$ et $\psi_n=1/n \sum_{1 \leqq k \leqq n} \psi^k$. On a $\rho(\psi^n)=\rho(\psi)^n$ (proposition 1.4). Posons $T=\rho(\psi)$. On a $\|T\| \leqq 1$ et $(1-T)\rho(\psi_n)=1/n(T-T^{n+1})$ tend vers 0 en norme. Si $1-T$ était injectif, il existerait une forme ω' telle que $\|\omega-\omega'(1-T)\| \leqq 1/4$. Comme $|\omega(\rho(\psi_n))| \geqq 1/2$, cela est imposible; donc il existe e, $\|e\|=1$ tel que $Te=e$. Soit ϕ l'état vectoriel associé à e; on a $\phi(T)=1$, donc $\psi(L(\phi))=1$; comme ψ est fidèle et que $\|L(\phi)\| \leqq 1$, cela n'est possible que si $L(\phi)=1$. Il en résulte clairement que e est fixe. ■

Dans les exemples ci-dessus, nous voyons que:

– $1 \in \mathscr{L}(H \otimes H)$ est de type compact et discret; $\Sigma V^* \Sigma$ est de type compact (resp. discret) si et seulement si V est de type discret (resp. compact); le produit tensoriel de deux unitaires multiplicatifs de type compact (resp. discret) est de type compact (resp. discret) (exemple 1.2.1).

– Si G est un groupe compact, la fonction constante 1 est fixe pour V_G et V_G est de type compact; si G est discret la fonction e_1 est cofixe pour V_G, donc V_G est de type discret (exemple 1.2.2).

– Si dans l'exemple 1.2.4, la mesure de Haar ϕ est un état, le vecteur ξ_ϕ est fixe.

1.11. *Remarques*. – *a*) Soit $f \in H$ un vecteur de norme 1 tel que $V(f \otimes f) = f \otimes f$ et ψ l'état vectoriel associé. On a alors $L(\psi)^2 = L(\psi)$ et $\rho(\psi)^2 = \rho(\psi)$; comme de plus $\| L(\psi) \| = \| \rho(\psi) \| = 1$, $L(\psi)$ et $\rho(\psi)$ sont des projecteurs.

b) Dans les paragraphes suivants nous étudierons des cas où les algèbres S et $\hat{S}$ sont involutives. Nous ne savons pas si c'est le cas en général. Notons cependant que si ψ et ψ' sont deux formes telles que $L(\psi)^* = L(\psi')$, pour toute paire ω, ω' de formes, on a:

$$L(\rho(\omega)\psi\rho(\omega'))^* = L(\rho(\omega^*)\psi'\rho(\omega'^*))$$

De même, si ψ et ψ' sont deux formes telles que $\rho(\psi)^* = \rho(\psi')$, pour toute paire ω, ω' de formes, on a:

$$\rho(L(\omega)\psi L(\omega'))^* = \rho(L(\omega^*)\psi' L(\omega'^*))$$

Par exemple, si e est un vecteur fixe de norme 1 et ϕ l'état vectoriel associé, comme $\rho(\phi)$ est autoadjoint, l'adjoint de $\rho(x \phi y)$ est dans $\hat{S}$ pour toute paire $x, y \in S$. Si de plus les espaces $\{xe, x \in S\}$ et $\{x^* e, x \in S\}$ sont denses dans H, alors $\hat{S}$ est une sous-C*-algèbre de $\mathscr{L}(H)$.

2. Unitaires multiplicatifs commutatifs

Nous étudions dans ce paragraphe le cas particulier des unitaires multiplicatifs commutatifs pour lesquels nous montrons qu'ils correspondent aux groupes localement compacts. Ce résultat généralise des théorèmes de [52], [24], [40], [13], [43], [49], [6], [54].

Soit V un unitaire multiplicatif sur H.

2.1. Définition. – *Nous dirons que* V *est commutatif si* V_{13} *et* V_{23} *commutent. Nous dirons que* V *est cocommutatif si* V_{12} *et* V_{13} *commutent.*

L'unitaire multiplicatif V_G (exemple 1.2.2) est commutatif. Nous allons montrer que tout unitaire multiplicatif commutatif est (à multiplicité près) de cette forme.

Notons que l'unitaire multiplicatif V est commutatif (resp. cocommutatif) si et seulement si l'algèbre S (resp. $\hat{S}$) est abélienne.

Si V est commutatif, V_{13} et V_{23}^* commutent et donc $C^*(S)$ est abélienne.

2.2. THÉORÈME. — *Soit* V *un unitaire multiplicatif commutatif et soit* G *le spectre de la* C^**-algèbre abélienne* $C^*(S)$. *Alors* G *est un groupe localement compact et il existe un espace de Hilbert* K *tel que* V *soit équivalent à l'unitaire multiplicatif* $V_G \otimes 1_{K \otimes K}$ (*cf.* 1.2).

Preuve. — Utilisant la représentation notée π de $C^*(S) = C_0(G)$ dans H on écrit $H = \int_G^\oplus K_g \, d\mu(g)$. Pour $g \in G$, l'application $\omega \to L(\omega)(g)$ est linéaire et continue. Il existe donc un opérateur $\rho_g \in \mathscr{L}(H)$ tel que $\omega(\rho_g) = L(\omega)(g)$ $(\forall \omega \in \mathscr{L}(H)_*)$. L'application $g \to \rho_g$ est ultrafaiblement continue.

Dans la décomposition $H \otimes H = \int_G^\oplus H \otimes K_g \, d\mu(g)$, on a $V = \int_G^\oplus \rho_g \otimes 1_{K_g} \, d\mu(g)$, comme on le voit en appliquant $\omega \otimes \mathrm{id}$ aux deux membres de cette égalité. On en déduit que μ-presque partout ρ_g est unitaire. Soit D l'ensemble (de mesure 1) des $g \in G$ tels que ρ_g est unitaire.

On a :

$$V_{12} V_{13} V_{23} = \int_G^\oplus V(\rho_g \otimes \rho_g) \otimes 1_{K_g} \, d\mu(g) \qquad \text{et} \qquad V_{23} V_{12} = \int_G^\oplus (1 \otimes \rho_g) V \otimes 1_{K_g} \, d\mu(g).$$

On en déduit que (presque partout et par continuité partout) $V(\rho_g \otimes \rho_g) = (1 \otimes \rho_g) V$. Appliquant $(\omega \otimes \mathrm{id})$ aux deux membres de cette égalité on trouve : $\rho_g L(\omega) = L(\rho_g \omega) \rho_g$.

Soit $g \in D$; on a $\rho_g L(\omega) \rho_g^* = L(\rho_g \omega)$ et $\rho_g^* L(\omega) \rho_g = L(\rho_g^* \omega)$. Il en résulte que l'unitaire ρ_g normalise $C^*(S)$; il existe alors un homéomorphisme noté $h \to hg$ de G tel que $\forall f \in C_0(G) = C^*(S)$ on ait $(\rho_g \pi(f) \rho_g^*) = \pi(gf)$ où $gf(h) = f(hg)$. Cómme $L(\omega)(hg) = L(\rho_g \omega)(h)$ on a $\omega(\rho_{hg}) = \omega(\rho_h \rho_g)$ et $\rho_{hg} = \rho_h \rho_g$. En particulier, D est un groupe.

Posons $T = \{ \rho_g / g \in G \} \cup \{0\}$. Comme l'application $\phi : G^+ = G \cup \{\infty\} \to T$ donnée par $\phi(g) = \rho_g$ et $\phi(\infty) = 0$ est ultrafaiblement continue, T est un compact ultrafaible de $\mathscr{L}(H)$ et ϕ est un homéomorphisme. Pour $y \in T$, comme $x \to yx$ est continue, que $yx \in T$ pour $x \in \phi(D)$ et que $\phi(D)$ est dense, $T^2 = T$. De même T est autoadjoint. On en déduit que G^+ est muni d'une loi de produit séparément continue $g, h \to gh$ telle que $\forall g, h \in G^+$, $\phi(gh) = \phi(g) \phi(h)$.

Pour $g \in G$ notons α_g le $*$-endomorphisme de $C^*(S)$ donné par $\alpha_g(f)(h) = f(hg)$. On a $\alpha_g(L(\omega)) = L(\rho_g \omega)$. Donc, pour $g \in D$, ρ_g entrelace π et $\pi \circ \alpha_g$. En particulier, la mesure $\alpha_g(\mu)$ est équivalente à μ (pour $g \in D$). Notons $\delta(h, g)$ la dérivée de Radon-Nikodym $d(\alpha_g(\mu))/d\mu(h)$. Soit $j : G \to G$ l'application donnée par $\rho_{jg} = \rho_g^*$. Notons $m = \mu * j(\mu)$ la mesure sur G donnée par $m(f) = \int f(xy) \, d\mu(x) \, d(j(\mu))(y) = \int \alpha_{jy}(\mu)(f) \, d\mu(y)$. Comme chacune des mesures $\alpha_{jy}(\mu)$ $(y \in D)$ est équivalente à μ, il en va de même pour m. En particulier, la classe de μ est invariante par j, donc aussi par les translations à gauche $h \to gh$ $(g \in D)$.

Soit $g \in \mathrm{D}$. Comme l'unitaire ρ_g entrelace π et $\pi \circ \alpha_g$, pour $\xi = \int_{\mathrm{G}}^{\oplus} \xi_h \, d\mu(h)$, $\rho_g(\xi)$ est de la forme $\rho_g(\xi) = \int_{\mathrm{G}}^{\oplus} \rho_{h,g} \xi_{hg} \delta(h, g^{-1})^{1/2} d\mu(h)$ où $\rho_{h,g} : \mathrm{K}_{hg} \to \mathrm{K}_h$ est, pour presque tout h un unitaire. L'égalité $\rho_{gg'} = \rho_g \rho_{g'}$ implique que pour presque tout h on a $\rho_{h,g} \rho_{hg,g'} = \rho_{h,gg'}$.

L'ensemble E des triplets $(g, g', h) \in \mathrm{D}^3$ tels que $\rho_{h,g}$ soit unitaire et qu'on ait $\rho_{h,g} \rho_{hg,g'} = \rho_{h,gg'}$ étant conégligeable, il existe $h \in \mathrm{D}$ tel que pour presque tout g, g' on ait $(g, g', h) \in \mathrm{E}$. Posons alors $\mathrm{K} = \mathrm{K}_h$; identifions alors $\mathrm{H} = \int^{\oplus} \mathrm{K}_g \, d\mu(g)$ à $\mathrm{L}^2(\mathrm{G}; \mu) \otimes \mathrm{K}$ au moyen de l'unitaire $\mathrm{U} = \int^{\oplus} \rho_{h, h^{-1} g} \, d\mu(g)$. Alors, pour presque tout $g \in \mathrm{D}$, ρ_g est donné par $\rho_g(\xi)(g') = \delta(g', g^{-1})^{1/2} \xi(g'g)$.

Donnons nous une structure réelle sur K et définissons l'opérateur antilinéaire J sur H par $\mathrm{J}(\xi)(g) = \overline{\xi(g)}$. Alors $\mathrm{J}\rho_g = \rho_g \mathrm{J}$ pour presque tout, et par continuité pour tout $g \in \mathrm{G}$. Pour $\alpha, \beta \in \mathrm{H}$ et $g \in \mathrm{G}$, $\mathrm{L}(\omega_{\mathrm{J}\alpha, \mathrm{J}\beta})(g) = \langle \mathrm{J}\alpha, \rho_g \mathrm{J}\beta \rangle = \langle \rho_g \beta, \alpha \rangle$; comme l'involution de $\mathrm{C}_0(\mathrm{G})$ est la conjugaison complexe, $\mathrm{L}(\omega_{\alpha,\beta})^*(g) = \omega_{\beta,\alpha}(\rho_g^*) = \langle \rho_g \beta, \alpha \rangle$. Donc $\mathrm{L}(\omega_{\mathrm{J}\alpha, \mathrm{J}\beta}) = \mathrm{L}(\omega_{\alpha,\beta})^*$.

En particulier, S est une C*-algèbre. L'égalité $\rho_g \mathrm{L}(\omega) = \mathrm{L}(\rho_g \omega) \rho_g$ montre que, pour tout $g \in \mathrm{G}$, ρ_g entrelace π et $\pi \circ \alpha_g$. Si $g \notin \mathrm{D}$ et $h \in \mathrm{D}$, alors $hg \notin \mathrm{D}$ donc μ et $\alpha_g(\mu)$ sont inéquivalentes. Donc $\rho_g = 0$ et $\mathrm{L}(\omega)(g) = 0$ ce qui est absurde. Donc $\mathrm{G} = \mathrm{D}$. Comme les topologies ultrafaible et *-forte coïncident sur le groupe des unitaires, G est un groupe localement compact.

Enfin, dans la décomposition $\mathrm{H} = \mathrm{L}^2(\mathrm{G}; \mu) \otimes \mathrm{K}$, V s'identifie à l'unitaire multiplicatif $\mathrm{V}_{\mathrm{G}} \otimes 1_{\mathrm{K} \otimes \mathrm{K}}$. ■

2.3. *Remarques.* — 1. L'unitaire multiplicatif V est cocommutatif si et seulement si $\Sigma \mathrm{V}^* \Sigma$ est commutatif. Le théorème 2.2 classifie donc aussi les unitaires multiplicatifs cocommutatifs.

2. Soit G un groupe mesurable muni d'une classe de mesure quasi invariante par translation à droite. Soit μ une mesure dans cette classe et notons $f(s, t)$ la fonction mesurable sur $\mathrm{G} \times \mathrm{G}$ telle que $\int \phi(sr, t) \, d\mu \times \mu(s, t) = \int \phi(s, t) f(s, t) \, d\mu \times \mu(s, t)$. La formule $\mathrm{V}\xi(s, t) = \xi(st, t) f(st, t)^{-1/2}$ définit clairement un unitaire multiplicatif commutatif sur $\mathrm{H} = \mathrm{L}^2(\mathrm{G}, \mu)$. On en déduit que G admet une (unique) structure de groupe localement compact compatible avec sa structure mesurable. Nous retrouvons donc ainsi le théorème de Weil ([52]; *cf.* Mackey [24]).

3. Comme on associe canoniquement un unitaire multiplicatif à une algèbre de Kac et à un « pseudogroupe compact » de Woronowicz (exemples 1.2), le théorème 2.2 montre qu'une algèbre de Kac commutative, est l'algèbre de Kac d'un groupe localement compact (*cf.* [13] et [43]) et qu'une algèbre de Kac cocommutative, est l'algèbre de Kac duale d'un groupe localement compact (*cf.* [49] et [6]); de même si l'algèbre de Hopf sous-jacente à un « pseudogroupe compact » de Woronowicz est commutative (resp. cocommutative),

c'est l'algèbre de Hopf C(G) (resp. C* (G) (1)) où G est un groupe compact (resp. discret) (*cf.* [54] théorèmes 1.5 and 1.7).

3. Unitaires multiplicatifs réguliers

Dans ce paragraphe on introduit une notion de régularité pour les unitaires multiplicatifs et montrons que si V est un unitaire multiplicatif régulier, les algèbres S et $\hat{S}$ définies au premier paragraphe sont des C*-algèbres de Hopf (théorème 3.8). Nous déduisons en outre de la régularité de V l'existence de l'antipode qui est un antihomomorphisme densément défini κ.

Commençons par le résultat élémentaire suivant :

3.1. Lemme. — *Soient* H *et* K *deux espaces de Hilbert et* $X \subset \mathcal{L}(H \otimes K)$. *Alors les adhérences dans* $\mathcal{L}(H \otimes K)$ *des espaces vectoriels engendrés par*

$$\{(1 \otimes h) x (1 \otimes k),\ x \in X,\ h,\ k \in \mathcal{K}(K)\}$$

et $\{(\mathrm{id} \otimes \omega)(x) \otimes k,\ x \in X,\ k \in \mathcal{K}(K),\ \omega \in \mathcal{L}(K)_*\}$ *coïncident.*

Preuve. — Pour $h = \theta_{\xi, \xi'}$, $k = \theta_{\eta, \eta'}$ et $x \in X$, on a

$$(1 \otimes h) x (1 \otimes k) = (\mathrm{id} \otimes \omega_{\xi', \eta})(x) \otimes \theta_{\xi, \eta'}. \quad \blacksquare$$

Soit V un unitaire multiplicatif. On pose $\mathcal{C}(V) = \{(\mathrm{id} \otimes \omega)(\Sigma V),\ \omega \in \mathcal{L}(H)_*\}$.

3.2. Proposition. — *a*) *$\mathcal{C}(V)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(H)$.*

b) *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *L'adhérence de $\mathcal{C}(V)$ dans $\mathcal{L}(H)$ est $\mathcal{K}(H)$.*

(ii) *L'adhérence de l'espace vectoriel engendré par* $\{(x \otimes 1) V (1 \otimes y),\ x,\ y \in \mathcal{K}(H)\}$ *dans* $\mathcal{L}(H \otimes H)$ *est* $\mathcal{K}(H \otimes H)$.

Preuve. — *a*) Pour ω, $\omega' \in \mathcal{L}(H)_*$ on a $(\mathrm{id} \otimes \omega)(\Sigma V)\ (\mathrm{id} \otimes \omega')(\Sigma V) = (\mathrm{id} \otimes \omega' \otimes \omega)(\Sigma_{13} V_{13} \Sigma_{12} V_{12})$. Or $\Sigma_{13} V_{13} \Sigma_{12} V_{12} = \Sigma_{13}\ \Sigma_{12} V_{23} V_{12} = \Sigma_{23} \Sigma_{13} V_{12}\ V_{13} V_{23} = \Sigma_{23} V_{32}\ \Sigma_{13} V_{13} V_{23} = V_{23}\ \Sigma_{23} \Sigma_{13} V_{13} V_{23}$. Posons $\psi(x) = (\omega' \otimes \omega)(V \Sigma (1 \otimes x) V)$. On a donc $(\mathrm{id} \otimes \omega)(\Sigma V)(\mathrm{id} \otimes \omega')(\Sigma V) = (\mathrm{id} \otimes \psi)(\Sigma V)$.

b) (ii) est équivalente à : l'adhérence de l'espace vectoriel engendré par $\{\Sigma (x \otimes 1) V (1 \otimes y),\ x,\ y \in \mathcal{K}(H)\}$ dans $\mathcal{L}(H \otimes H)$ est $\mathcal{K}(H \otimes H)$. Comme

$$\Sigma (x \otimes 1) V (1 \otimes y) = (1 \otimes x) \Sigma V (1 \otimes y),$$

l'équivalence résulte du lemme 3.1. $\blacksquare$

---

(1) Plus précisément, de telles algèbres de Hopf sont classifiées par *a*) un groupe discret; *b*) la classe d'équivalence faible d'une représentation unitaire fidèle π telle que $\pi \otimes \pi$ soit faiblement contenue dans π (*cf.* appendice A, remarque A. 11.*a*).

Remarque. — Il est clair que l'espace vectoriel engendré par les formes ψ de la démonstration de 3.2 *a*) est normiquement dense dans $\mathscr{L}(\mathrm{H})_*$; il en résulte que l'espace vectoriel fermé engendré par $\{xy/x \in \mathscr{C}(\mathrm{V}),\ y \in \mathscr{C}(\mathrm{V})\}$ est égal à l'adhérence normique de $\mathscr{C}(\mathrm{V})$.

On est alors en mesure de définir les unitaires multiplicatifs réguliers.

3.3. DÉFINITION. — *L'unitaire multiplicatif* V *est dit régulier si l'adhérence de* $\mathscr{C}(\mathrm{V})$ *dans* $\mathscr{L}(\mathrm{H})$ *est* $\mathscr{K}(\mathrm{H})$.

On a $\mathscr{C}(\Sigma \mathrm{V}^* \Sigma) = \mathscr{C}(\mathrm{V})^*$ car $(\mathrm{id} \otimes \omega)(\Sigma\Sigma \mathrm{V}^* \Sigma) = (\mathrm{id} \otimes \omega^*)(\Sigma \mathrm{V})^*$. Donc si V est régulier $\Sigma \mathrm{V}^* \Sigma$ l'est. Si deux unitaires multiplicatifs sont équivalents ou opposés et que l'un est régulier, l'autre l'est.

Reprenons les exemples 1.2.

3.4. *Exemples.* — 1. Pour $\omega = \omega_{\xi, \eta}$, $(\mathrm{id} \otimes \omega)(\Sigma) = \theta_{\eta, \xi}$ car

$$\langle \alpha, (\mathrm{id} \otimes \omega)(\Sigma) \beta \rangle = \langle \alpha \otimes \xi, \eta \otimes \beta \rangle.$$

Donc, si la forme ω est donnée par $\omega(x) = \mathrm{Tr}(\mathrm{T}x)$ $(\mathrm{T} \in \mathscr{L}^1(\mathrm{H}))$ on a $(\mathrm{id} \otimes \omega)(\Sigma) = \mathrm{T}$. On en déduit que $1 \in \mathscr{L}(\mathrm{H} \otimes \mathrm{H})$ est régulier.

2. On vérifie aisément que l'unitaire multiplicatif V_G associé à un groupe localement compact G est régulier (cela résulte d'ailleurs de l'exemple suivant).

3. Supposons qu'il existe un opérateur unitaire J de H dans l'espace de Hilbert conjugué $\bar{\mathrm{H}}$ tel que $\mathrm{J}^* \overline{\mathrm{L}(\omega)} \mathrm{J} = \mathrm{L}(\omega^*)$. Soit ω la forme donnée par

$$\omega(x) = \mathrm{Tr}(\mathrm{T}x) \ (\mathrm{T} \in \mathscr{L}^1(\mathrm{H})).$$

Considérons T comme élément de $\mathscr{L}^2(\mathrm{H}) = \bar{\mathrm{H}} \otimes \mathrm{H}$. Soit alors W l'unitaire de $\bar{\mathrm{H}} \otimes \mathrm{H}$: $\mathrm{W} = (1 \otimes \mathrm{J}^*) \bar{\mathrm{V}} (1 \otimes \mathrm{J})$. L'élément $(\mathrm{id} \otimes \omega)(\Sigma \mathrm{V})$ est alors WT vu comme éléments de $\mathscr{L}^2(\mathrm{H}) \subset \mathscr{L}(\mathrm{H})$. En effet, il,suffit de vérifier que

$$\langle \alpha, (\mathrm{id} \otimes \omega_{\xi, \eta})(\Sigma \mathrm{V}) \beta \rangle = \langle \bar{\beta} \otimes \alpha, \mathrm{W}(\bar{\xi} \otimes \eta) \rangle.$$

Or

$$\langle \bar{\beta} \otimes \alpha, \mathrm{W}(\bar{\xi} \otimes \eta) \rangle = \langle \bar{\beta} \otimes \mathrm{J}\alpha, \bar{\mathrm{V}}(\bar{\xi} \otimes \mathrm{J}\eta) \rangle = \langle \mathrm{V}(\xi \otimes \bar{\mathrm{J}}\bar{\eta}), \beta \otimes \bar{\mathrm{J}}\bar{\alpha} \rangle.$$

Posant $\omega = \omega_{\beta, \xi}$ on a donc

$$\begin{aligned} \langle \bar{\beta} \otimes \alpha, \mathrm{W}(\bar{\xi} \otimes \eta) \rangle &= \langle \mathrm{L}(\omega) \overline{\mathrm{J}\eta}, \overline{\mathrm{J}\alpha} \rangle \\ &= \langle \mathrm{J}\alpha, \overline{\mathrm{L}(\omega)} \mathrm{J}\eta \rangle = \langle \alpha, \mathrm{L}(\omega^*) \eta \rangle = \langle \xi \otimes \alpha, \mathrm{V}(\beta \otimes \eta) \rangle. \end{aligned}$$

On en déduit immédiatement que l'unitaire multiplicatif V est alors régulier.

En particulier, si $\mathrm{V} = \mathrm{W}^*$ où W est l'unitaire fondamental d'une algèbre de Kac-von Neumann au sens de [6], on déduit de [6], lemme 2.2.3, que V est régulier.

3.4.4. PROPOSITION. — *a*) *Soit* V *un unitaire multiplicatif. Si* V *est un multiplicateur de* $\mathscr{K}(\mathrm{H}) \otimes \mathscr{L}(\mathrm{H})$ (*resp. de* $\mathscr{L}(\mathrm{H}) \otimes \mathscr{K}(\mathrm{H})$ *alors* $\mathscr{C}(\mathrm{V}) \subset \mathscr{K}(\mathrm{H})$.

b) Soit A *une* C*-*algèbre de Hopf unifère simplifiable à droite* (*définition* 0.1) *munie d'une mesure de Haar à droite* ϕ *satisfaisant* $\forall x \in \mathrm{A},\ \phi(x^* x)=0 \Leftrightarrow \phi(xx^*)=0$. *Notons* $(\mathrm{H}_\phi, \pi_\phi, \xi_\phi)$ *la construction GNS associée. Alors l'opérateur* $\mathrm{V}_\phi \in \mathscr{L}(\mathrm{H}_\phi \otimes \mathrm{H}_\phi)$ *donné par* $\mathrm{V}_\phi(\pi_\phi(x)\xi_\phi \otimes \eta)=(\pi_\phi \otimes \pi_\phi)\circ\delta(x)(\xi_\phi \otimes \eta)$ *est un unitaire multiplicatif régulier.*

Preuve. — *a*) Pour

$$x, y \in \mathscr{K}(\mathrm{H}), \qquad (x \otimes 1)\mathrm{V} \in \mathscr{K}(\mathrm{H}) \otimes \mathscr{L}(\mathrm{H})$$

donc $(x \otimes 1)\mathrm{V}(1 \otimes y) \in \mathscr{K}(\mathrm{H} \otimes \mathrm{H})$. L'assertion « resp. » découle en remplaçant V par $\Sigma \mathrm{V}^* \Sigma$.

b) L'opérateur V_ϕ est isométrique; son image contient

$$\{(\pi_\phi \otimes \pi_\phi)(\delta(x)(1 \otimes y))(\xi_\phi \otimes \xi_\phi)/x, y \in \mathrm{A}\};$$

c'est donc un unitaire. C'est clairement un unitaire multiplicatif.

Notons V l'unitaire V_ϕ et e le vecteur ξ_ϕ. Il est clair que V est un multiplicateur de $\mathscr{K}(\mathrm{H}) \otimes \pi_\phi(\mathrm{A})$ donc, comme A est unifère, de $\mathscr{K}(\mathrm{H}) \otimes \mathscr{L}(\mathrm{H})$. Donc, par *a*), $\mathscr{C}(\mathrm{V}) \subset \mathscr{K}(\mathrm{H})$.

On a $(\mathrm{id} \otimes \omega_{e, \xi})(\Sigma \mathrm{V})=\theta_{\xi, e}$. Pour conclure, il suffit de démontrer que $\forall \xi \in \mathrm{H}_\phi$, $\xi \neq 0$, $\exists x \in \mathscr{C}(\mathrm{V})$ avec $\langle e, x\xi\rangle \neq 0$. L'espace $\{x^* e/x \in \mathscr{C}(\mathrm{V})\}$ est alors dense dans H_ϕ; si $x \in \mathscr{C}(\mathrm{V})$ et $\eta \in \mathrm{H}_\phi$, $\theta_{\eta, e}x=\theta_{\eta, x^*e} \in \mathscr{C}(\mathrm{V})$ et $\mathscr{C}(\mathrm{V})$ est dense dans $\mathscr{K}(\mathrm{H})$.

Soit $\xi \in \mathrm{H}_\phi$; $\forall \alpha, \beta \in \mathrm{H}_\phi$, $\langle e, (\mathrm{id} \otimes \omega_{\alpha, \beta})(\Sigma \mathrm{V})\xi\rangle=\langle e, \mathrm{L}(\omega_{\alpha, \xi})\beta\rangle$. Si $\forall x \in \mathscr{C}(\mathrm{V})$, $\langle e, x\xi\rangle=0$, $\forall \alpha \in \mathrm{H}_\phi$, $\mathrm{L}(\omega_{\alpha, \xi})^* e=0$; or $\mathrm{L}(\omega_{\alpha, \xi}) \in \pi_\phi(\mathrm{A})$; posant $\mathrm{L}(\omega_{\alpha, \xi})=\pi_\phi(a)$, on a $\phi(aa^*)=0$ donc $\phi(a^* a)=0$. Donc, $\forall \alpha \in \mathrm{H}_\phi$, $\mathrm{L}(\omega_{\alpha, \xi})e=0$ *i. e.* $\mathrm{V}(\xi \otimes e)=0$ et $\xi=0$. ■

En particulier, il résulte de [54] (theorem 4.9, theorem 5.6, 6°), que si A est la C*-algèbre de Hopf sous-jacente à un « pseudogroupe compact matriciel » de Woronowicz, l'unitaire multiplicatif associé est régulier. Comme de plus, A est simplifiable à gauche ([54], Theorem 4.9), on a $\mathrm{S}=\pi_\phi(\mathrm{A})$.

PROPOSITION 3.5. — *Si* V *est un unitaire multiplicatif régulier, les algèbres* S *et* $\hat{\mathrm{S}}$ *associées sont autoadjointes.*

Preuve. — Notons E l'espace vectoriel engendré par

$$\{(\omega \otimes \omega' \otimes \mathrm{id})(\Sigma_{12} \mathrm{V}_{23}^* \mathrm{V}_{12} \mathrm{V}_{13})^*, \omega, \omega' \in \mathscr{L}(\mathrm{H})_*\}.$$

Comme $\Sigma_{12} \mathrm{V}_{23}^* \mathrm{V}_{12} \mathrm{V}_{13}=\Sigma_{12} \mathrm{V}_{12} \mathrm{V}_{23}^*$, l'adhérence normique de E dans $\mathscr{L}(\mathrm{H})$ est S. Or $\Sigma_{12} \mathrm{V}_{23}^* \mathrm{V}_{12} \mathrm{V}_{13}=\mathrm{V}_{13}^* \Sigma_{12} \mathrm{V}_{12} \mathrm{V}_{13}$. Donc

$$(\omega \otimes \omega' \otimes \mathrm{id})(\Sigma_{12} \mathrm{V}_{23}^* \mathrm{V}_{12} \mathrm{V}_{13})=(\omega \otimes \mathrm{id})(\mathrm{V}^*(y \otimes 1)\mathrm{V}) \qquad \text{où} \quad y=(\mathrm{id} \otimes \omega')(\Sigma \mathrm{V}).$$

On en déduit que l'adhérence de E dans $\mathscr{L}(\mathrm{H})$ est l'espace vectoriel fermé engendré par $\{(\omega \otimes \mathrm{id})(\mathrm{V}^*(y \otimes 1)\mathrm{V}), \omega \in \mathscr{L}(\mathrm{H})_*, y \in \mathscr{K}(\mathrm{H})\}$ qui est clairement autoadjoint. Comme $\Sigma \mathrm{V}^* \Sigma$ est régulier, on en déduit que $\hat{\mathrm{S}}=\mathrm{S}(\Sigma \mathrm{V}^* \Sigma)^*$ est autoadjointe. ■

PROPOSITION 3.6. — *Soit* V *un unitaire multiplicatif régulier,* S *et* $\hat{S}$ *les* C*-*algèbres associées. On a*:

a) $V \in M(\mathcal{K}(H) \otimes S)$ *et* $V \in M(\hat{S} \otimes \mathcal{K}(H))$.

b) *L'adhérence de l'espace vectoriel engendré par* $\{(x \otimes 1) V (1 \otimes y)/x \in \mathcal{K}(H), y \in S\}$ *est* $\mathcal{K}(H) \otimes S$*; celle de l'espace vectoriel engendré par* $\{(x \otimes 1) V (1 \otimes y)/x \in \hat{S}, y \in \mathcal{K}(H)\}$ *est* $\hat{S} \otimes \mathcal{K}(H)$.

c) $V \in M(\hat{S} \otimes S)$.

d) *L'adhérence de l'espace vectoriel engendré par* $\{(x \otimes 1) V (1 \otimes y)/x \in \hat{S}, y \in S\}$ *est* $\hat{S} \otimes S$.

Preuve. — *a*) Soient $x, y \in \mathcal{K}(H)$ et $\omega \in \mathcal{L}(H)_*$. On a $V(x \otimes L(y\omega)) = (\mathrm{id} \otimes \omega \otimes \mathrm{id})((V_{13} V_{23})(x \otimes y \otimes 1)) = (\mathrm{id} \otimes \omega \otimes \mathrm{id})((V_{12}^* V_{23} V_{12})(x \otimes y \otimes 1))$. Comme

$$V(x \otimes y) \in \mathcal{K}(H \otimes H), V(x \otimes L(y\omega))$$

est dans l'adhérence de l'espace vectoriel engendré par

$$(\mathrm{id} \otimes \omega \otimes \mathrm{id})((V_{12}^* V_{23})(a \otimes b \otimes 1))\, a, b \in \mathcal{K}(H).$$

Écrivons $\omega = \omega' c$, $c \in \mathcal{K}(H)$, on a

$$(\mathrm{id} \otimes \omega \otimes \mathrm{id})((V_{12}^* V_{23})(a \otimes b \otimes 1))$$
$$= (\mathrm{id} \otimes b\omega' \otimes 1)((1 \otimes c \otimes 1) V_{12}^* (a \otimes 1 \otimes 1) V_{23}) \in \mathcal{K}(H) \otimes S$$

(par 3.2 *b*)).

De plus $(x \otimes L(\omega^* y^*)^*) V = (\mathrm{id} \otimes \omega \otimes \mathrm{id})(V_{23}^* (x \otimes y \otimes 1) V_{13})$ est dans l'adhérence normique de l'espace vectoriel engendré par

$$(\mathrm{id} \otimes \omega \otimes \mathrm{id})(V_{23}^* (a \otimes 1 \otimes 1) V_{12} (1 \otimes b \otimes 1) V_{13}) \qquad a, b \in \mathcal{K}(H).$$

Or

$$(\mathrm{id} \otimes \omega \otimes \mathrm{id})(V_{23}^* (a \otimes 1 \otimes 1) V_{12} (1 \otimes b \otimes 1) V_{13}) = (\mathrm{id} \otimes b\omega \otimes \mathrm{id})((a \otimes 1 \otimes 1) V_{12} V_{23}^*)$$

Écrivant $b\omega = \omega' c$, $c \in \mathcal{K}(H)$ comme $(a \otimes c) V \in \mathcal{K}(H \otimes H)$,

$$(\mathrm{id} \otimes b\omega \otimes \mathrm{id})((a \otimes 1 \otimes 1) V_{12} V_{23}^*) \in \mathcal{K}(H) \otimes S$$

(on utilise la proposition 3.5).

Pour montrer que $V \in M(\hat{S} \otimes \mathcal{K}(H))$, il suffit de remplacer V par $\Sigma V^* \Sigma$.

b) Pour $a, b \in \mathcal{K}(H)$, $\omega \in \mathcal{L}(H)_*$ et $y = L(\omega a)$ on a :

$$(b \otimes 1) V (1 \otimes y) = (\mathrm{id} \otimes \omega \otimes \mathrm{id})((b \otimes a \otimes 1) V_{13} V_{23})$$
$$= (\mathrm{id} \otimes \omega \otimes \mathrm{id})(((b \otimes a) V^* \otimes 1) V_{23} V_{12})$$

L'adhérence de l'espace engendré par $\{(b \otimes a) V^*/a, b \in \mathcal{K}(H)\}$ est $\mathcal{K}(H) \otimes \mathcal{K}(H)$; il suffit de montrer que l'adhérence de l'espace engendré par

$$\{(\mathrm{id} \otimes \omega \otimes \mathrm{id})((a \otimes 1 \otimes 1) V_{23} V_{12}), a \in \mathcal{K}(H), \omega \in \mathcal{L}(H)_*\}\ i.e.$$

par
$$\{(\mathrm{id}\otimes b\omega\otimes \mathrm{id})((a\otimes 1\otimes 1)V_{23}V_{12}), a,\ b\in\mathscr{K}(H),\ \omega\in\mathscr{L}(H)_*\}$$

est $\mathscr{K}(H)\otimes S$. Comme
$$(\mathrm{id}\otimes b\omega\otimes \mathrm{id})((a\otimes 1\otimes 1)V_{23}V_{12})=(\mathrm{id}\otimes\omega\otimes\mathrm{id})(V_{23}((a\otimes 1)V(1\otimes b))_{12})$$

le résultat découle de 3.2 *b*).

La deuxième assertion résulte de celle-ci en remplaçant V par $\Sigma V^*\Sigma$.

c) Comme V_{12} et V_{23} sont des multiplicateurs de $\hat{S}\otimes\mathscr{K}(H)\otimes S$ il en va de même pour V_{13}.

d) Il suffit de montrer que l'adhérence de l'espace engendré par
$$\{(x\otimes a\otimes 1)V_{13}(1\otimes b\otimes y)/x\in\hat{S},\ a,\ b\in\mathscr{K}(H),\ y\in S\}$$

est $\hat{S}\otimes\mathscr{K}(H)\otimes S$. Écrivant $V_{13}=V_{12}^*V_{23}V_{12}V_{23}^*$, il suffit de montrer que l'adhérence de l'espace engendré par
$$\{(x\otimes a\otimes 1)V_{23}V_{12}(1\otimes b\otimes y)/x\in\hat{S},\ a,\ b\in\mathscr{K}(H),\ y\in S\}$$

est $\hat{S}\otimes\mathscr{K}(H)\otimes S$. Or
$$(x\otimes a\otimes 1)V_{23}V_{12}(1\otimes b\otimes y)=(x\otimes(a\otimes 1)V(1\otimes y))V_{12}(1\otimes b\otimes 1)$$

et l'adhérence de l'espace engendré par
$$\{x\otimes(a\otimes 1)V(1\otimes y)/x\in\hat{S},\ a\in\mathscr{K}(H),\ y\in S\}$$

est $\hat{S}\otimes\mathscr{K}(H)\otimes S$. ■

COROLLAIRE 3.7. — *Soit* V *un unitaire multiplicatif régulier,* S *et* $\hat{S}$ *les* C*-*algèbres associées.*

a) *Les adhérences des espaces vectoriels engendrés par* $\{V(x\otimes 1)V^*(1\otimes y)/x,\ y\in S\}$ *et* $\{V(x\otimes 1)V^*(y\otimes 1)/x,\ y\in S\}$ *sont toutes deux égales à* $S\otimes S$.

b) *Les adhérences des espaces vectoriels engendrés par* $\{V^*(1\otimes x)V(1\otimes y)/x,\ y\in\hat{S}\}$ *et* $\{V^*(1\otimes x)V(y\otimes 1)/x,\ y\in\hat{S}\}$ *sont toutes deux égales à* $\hat{S}\otimes\hat{S}$.

Preuve. — *a*) Pour $a\in\mathscr{K}(H)$, $\omega\in\mathscr{L}(H)_*$, et $y\in S$ on a
$$V(L(a\omega)\otimes 1)V^*(1\otimes y)=(\omega\otimes\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})(V_{12}V_{13}(a\otimes 1\otimes y))$$

Par 3.6 *a*) l'espace engendré par $\{V(a\otimes y)/a\in\mathscr{K}(H),\ y\in S\}$ est dense dans $\mathscr{K}(H)\otimes S$.

Pour $a\in\mathscr{K}(H)$, $\omega\in\mathscr{L}(H)_*$, et $y\in S$ on a
$$V(L(\omega a)\otimes 1)V^*(y\otimes 1)=(\omega\otimes\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})((a\otimes 1)V(1\otimes y)_{12}V_{13})$$

Par 3.6 *b*) l'espace engendré par $\{(a\otimes 1)V(1\otimes y)/a\in\mathscr{K}(H),\ y\in S\}$ est dense dans $\mathscr{K}(H)\otimes S$.

L'assertion *b*) résulte de *a*) en remplaçant V par $\Sigma V^*\Sigma$. ■

THÉORÈME 3.8. — *Soit* V *un unitaire multiplicatif régulier. Munie du coproduit* δ *donné par* $\delta(x)=V(x\otimes 1)V^*$, *l'algèbre réduite* S *de* V *est une* C*-*algèbre de Hopf bisimplifiable* (*définition* 0.1). *Munie du coproduit* $\hat{\delta}$ *donné par* $\hat{\delta}(x)=V^*(1\otimes x)V$, *l'algèbre réduite duale* $\hat{S}$ *de* V *est une* C*-*algèbre de Hopf bisimplifiable.*

Preuve. — On a

$$(\mathrm{id}\otimes\delta)\circ\delta(x)=V_{23}V_{12}(x\otimes 1\otimes 1)(V_{23}V_{12})^*$$
$$=V_{12}V_{13}(x\otimes 1\otimes 1)(V_{12}V_{13})^*=(\delta\otimes\mathrm{id})\circ\delta(x).$$

De même le coproduit $\hat{\delta}$ est coassociatif. Au vu du corollaire 3.7, la seule chose qui reste à vérifier est que δ (resp. $\hat{\delta}$) est non dégénéré, *i.e.* pour une unité approchée u_i bornée de S (resp. $\hat{S}$) et $x\in S\otimes S$ (resp. $x\in\hat{S}\otimes\hat{S}$), $\delta(u_i)x$ (resp. $\hat{\delta}(u_i)x$) converge vers x. Cela est clairement vrai pour $x=\delta(y)(1\otimes z)$ (resp. $x=\hat{\delta}(y)(z\otimes 1)$) et résulte dans le cas général de 3.7. ■

Remarque. — Pour $x\in\mathscr{K}(H)$, $y\in S$, $(x\otimes 1)V(y\otimes 1)\in\mathscr{K}(H)\otimes S$. En effet, il suffit de vérifier que $(x\otimes 1)V(y\otimes 1)V^*\in\mathscr{K}(H)\otimes S$. On écrit alors $x=az$, $a\in\mathscr{K}(H)$, $z\in S$.

PROPOSITION 3.9. — *L'application* $\omega\to(\omega\otimes\mathrm{id})(V^*)$ *définit un antihomomorphisme d'algèbres* $\kappa: A(V)\to S$ *appelé antipode.*

Preuve. — On a $(\omega\otimes\mathrm{id})(V^*)=L(\omega^*)^*\in S$ par la proposition 3.5.

Pour $\omega\in\mathscr{L}(H)_*$, $L(\omega)=0\Leftrightarrow\omega=0$ sur $\hat{A}(V)\Leftrightarrow L(\omega^*)=0$, comme $\hat{S}$ est autoadjointe. Enfin, si ψ est la forme donnée par $\psi(x)=(\omega\otimes\omega')(V^*(1\otimes x)V)$, on a $L(\omega)L(\omega')=L(\psi)$ et $L(\omega^*)L(\omega'^*)=L(\psi^*)$. La proposition en découle. ■

Nous donnons une autre définition dont l'intérêt n'apparaîtra qu'au paragraphe 6.

DÉFINITION 3.10. — *Un unitaire multiplicatif* V *est dit birégulier s'il est régulier et que l'adhérence dans* $\mathscr{L}(H)$ *de* $\{(\omega\otimes\mathrm{id})(\Sigma V)/\omega\in\mathscr{L}(H)_*\}$ *est* $\mathscr{K}(H)$.

Remarques 3.11. — *a*) Soit W l'unitaire fondamental d'une algèbre de Kac-von Neumann M (*cf.* [6]). Posons $V=W^*$ et notons $\hat{\Delta}$ l'opérateur modulaire associé au poids de Haar dual $\hat{\phi}$ ([6]) de l'algèbre de Kac-von Neumann $\hat{M}$ duale de M. D'après ([6], 2.1.5(*a*)), il est clair que l'algèbre de von Neumann engendrée par A(V) (ou S) coïncide avec $\hat{M}$; le corollaire 3.1.10 de la même référence montre aussi que la restriction ψ de $\hat{\phi}$ à S_+ définit un poids sur S normiquement semi-fini. D'autre part, on a également $V^*(1\otimes\hat{\Delta})V=\hat{\Delta}\otimes\hat{\Delta}$ ([7] lemme I.1). On en déduit que pour tout $\omega\in M_*$ et pour tout t, on a $L(\hat{\Delta}^{it}\omega)=\hat{\Delta}^{it}L(\omega)\hat{\Delta}^{-it}$ donc le groupe modulaire (σ_t) de $\hat{\phi}$ définit par restriction à S, un groupe à un paramètre d'automorphismes de S continu pour la topologie simple normique. Les autres conditions étant faciles à vérifier, la C*-algèbre de Hopf S munie de l'antipode κ (*cf.* 3.9) et de ψ est une C*-algèbre de Kac au sens de [50]. Le même raisonnement montre également que la C*-algèbre de Hopf $\hat{S}$ munie de l'antipode $\rho(\omega)\to(\mathrm{id}\otimes\omega)(V^*)$ et de la restriction à $\hat{S}_+$ du poids de Haar ϕ de M est une C*-algèbre de Kac au même sens.

b) Soit V un unitaire multiplicatif régulier. Si ω est une forme normale positive non nulle sur H, alors $\rho(\omega)\neq 0$ et $L(\omega)\neq 0$. En effet, comme $\omega'(\rho(\omega))=\omega(L(\omega'))$, $\rho(\omega)=0$ si et seulement si la forme ω est nulle sur $A(V)$ *i.e.* ω est nulle sur S. Or S est une C*-algèbre qui agit de façon non dégénérée dans H. Donc, comme $\omega \geqq 0$, si ω est nulle sur S, $\omega = 0$.

Rappelons que pour $x \in S$ et $\omega, \omega' \in S^*$, on pose

$$x * \omega = (\omega \otimes \mathrm{id}) \circ \delta(x), \qquad \omega * x = (\mathrm{id} \otimes \omega) \circ \delta(x) \qquad \text{et} \qquad \omega * \omega' = (\omega \otimes \omega') \circ \delta.$$

Pour $x \geqq 0$ et $\omega \geqq 0$, $\omega * x = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $\omega = 0$. En effet, si ω est un état, écrivons $x = yy^*$. Soit $(\pi_\omega, H_\omega, \xi_\omega)$ la représentation GNS associée à ω et $P \in \mathscr{L}(H_\omega)$ le projecteur de rang 1 associé à ξ_ω. Si $\omega * x = 0$, $(1 \otimes P)(\mathrm{id} \otimes \pi_\omega)(V)(y \otimes 1) = 0$. En particulier, pour tout $a \in \mathscr{K}(H)$ et $b \in S$,

$$(a \otimes P)(\mathrm{id} \otimes \pi_\omega)(V(y \otimes b)) = 0 \; i.e. \; (1 \otimes P)(\mathrm{id} \otimes \pi_\omega)\{(a \otimes 1)V(1 \otimes b)\}(y \otimes 1) = 0;$$

donc par 3.6 *b*) pour tout $z \in \mathscr{K}(H) \otimes \pi_\omega(S)$, $(1 \otimes P) z (y \otimes 1) = 0$ et enfin $y = 0$.

c) Nous dirons que l'algèbre de Hopf (A, δ) *est réduite à droite* (resp. à gauche) si pour $\omega \in A_+^* \setminus \{0\}$, $x \in A_+ \setminus \{0\}$, $\omega * x \neq 0$ (resp. $x * \omega \neq 0$). L'algèbre de Hopf S associé à un unitaire multiplicatif régulier V est donc réduite à droite. Remplaçant V par $\Sigma V^* \Sigma$, on en déduit que l'algèbre de Hopf $\hat{S}$ est réduite à gauche.

PROPOSITION 3.11.1. — *Soit* A *est une algèbre de Hopf réduite à droite* (*resp. à gauche*).

a) *Pour* $\omega, \omega' \in A_+^* \setminus \{0\}$, ω *fidèle et* $x \in A_+ \setminus \{0\}$, $\omega * \omega'$ (*resp.* $\omega' * \omega$) *est fidèle et* $x * \omega$ (*resp.* $\omega * x$) *est strictement positif.*

b) *Si* A *est unifère et séparable alors elle admet une mesure de Haar à droite* (*resp. à gauche*) *fidèle.*

Preuve. — Nous traitons le cas des algèbres de Hopf réduites à droite. Les assertions « resp. » s'en déduiront en remplaçant le coproduit δ de A par $\sigma \circ \delta$ où $\sigma : M(A \otimes A) \to M(A \otimes A)$ est l'extension aux multiplicateurs de la volte de A $(\sigma(x \otimes y) = y \otimes x,\ x, y \in A)$.

a) Pour tout $y \in A_+ \setminus \{0\}$,

$$\omega * \omega'(y) = \omega(\omega' * y) \neq 0.$$

Pour

$$\alpha \in A_+^* \setminus \{0\}, \alpha(x * \omega) = \omega * \alpha(x) \neq 0.$$

b) résulte immédiatement du lemme plus précis suivant :

LEMME 3.11.2. — *Soit* ω *un état fidèle.*

a) *Si pour* $x \in A$, $x * \omega = x$ *alors* x *est scalaire.*

b) *Il existe un état* ϕ *sur* A *tel que* $\omega * \phi = \phi * \omega = \phi$ (*cf.* [54]).

c) ϕ *est alors une mesure de Haar à droite fidèle.*

Preuve. — *a*) On peut supposer $x = x^*$ vu que $(x * \omega)^* = x^* * \omega$. Soit alors $\lambda \in \mathbf{R}$ le minimum du spectre de x. On a : $(x - \lambda) * \omega = x - \lambda$; comme $x - \lambda$ n'est pas inversible, on a nécessairement $x = \lambda$ par 3.11.1 *a*).

b) On peut prendre pour ϕ une limite faible de moyennes de Cesaro de la suite $\omega^n = \omega * \ldots * \omega$ (*n* fois).

c) Pour $x \in A$, on a $(x * \phi) * \omega = x * \phi$; donc $x * \phi$ est scalaire par *a*) et $x * \phi = \omega(x * \phi) = \phi(x)$. De plus, $\phi = \omega * \phi$ est fidèle par 3.11.1 *a*). ■

Soit alors A une algèbre de Hopf séparable, unifère, réduite (à droite) et bisimplifiable. Il résulte de 3.4.4 que l'unitaire V_ϕ associé à sa mesure de Haar à droite ϕ est régulier (car ϕ est alors fidèle). Comme A est simplifiable à gauche $\pi_\phi(A)$ est la C*-algèbre de Hopf S associée à l'unitaire V_ϕ. Il résultera en fait du théorème 4.2 que A est une C*-algèbre de Woronowicz. En particulier ϕ est une mesure de Haar à gauche et A est réduite à gauche.

4. Unitaires multiplicatifs de type compact et C*-algèbres de Woronowicz

Le résultat principal de ce paragraphe est qu'un unitaire multiplicatif de type compact régulier détermine une C*-algèbre de Woronowicz; plus précisément, nous montrons que la C*-algèbre de Hopf S associée est une limite inductive de C*-algèbres de Hopf sous-jacentes à des « pseudogroupes compacts matriciels » de Woronowicz.

Réciproquement, soit A une C*-algèbre de Woronowicz (*cf.* [54]). L'unitaire multiplicatif V_ϕ associé à sa mesure de Haar ϕ est régulier (proposition 3.4.4). Comme le vecteur ξ_ϕ est fixe, V_ϕ est de type compact.

Nous montrons de plus (théorème 4.7) que les unitaires vérifiant les conditions ci-dessus sont exactement classifiées par : *a*) la C*-algèbre de Woronowicz associée; *b*) une multiplicité, plus précisément la dimension de l'espace des vecteurs fixes.

Enfin, nous montrons qu'un unitaire multiplicatif sur un espace hilbertien de dimension finie, est nécessairement de type compact et régulier et détermine donc une algèbre de Kac de dimension finie (théorème 4.9).

Il est commode de donner la définition suivante :

DÉFINITION 4.1. — *Une limite inductive de* C*-*algèbres de Hopf sous-jacentes à des « pseudogroupes compacts matriciels » de Woronowicz est appelée* C*-*algèbre de Woronowicz.*

Autrement dit (*cf.* [54], définition 1.1), une C*-algèbre de Woronowicz est une C*-algèbre de Hopf unifère (A, δ) telle qu'il existe une sous-algèbre involutive dense $\mathscr{A}$ de A engendrée par une famille $(u^p_{i,j})$, $p \in \mathbf{N}$, $i, j \in \{1, \ldots, N_p\}$ et munie d'une application $\kappa : \mathscr{A} \to A$, telles que :

a) $\forall p \in \mathbf{N}$, la matrice $(u^p_{i,j})_{i,j}$ soit un unitaire de la C*-algèbre des matrices $N_p \times N_p$ sur A.

b) $\forall p \in \mathbf{N}$, $i, j \in \{1, \ldots, N_p\}$ $\delta(u^p_{i,j}) = \sum_{1 \leq k \leq N_p} u^p_{i,k} \otimes u^p_{k,j}$.

c) κ est un antihomomorphisme linéaire d'algèbres; $\forall a \in \mathscr{A}$, $\kappa(\kappa(a^*)^*) = a$.

d) $\forall p \in \mathbf{N}$, $i, j \in \{1, \ldots, N_p\}$, $\kappa(u^p_{i,j}) = (u^p_{j,i})^*$.

(Nos énoncés diffèrent de la définition de Woronowicz en ce que nous supposons $(u^p_{i,j})_{i,j}$ unitaire – ce qui est loisible par [54] – remarquons que par [55], la sous-algèbre $\mathscr{A}$ est l'algèbre de tous les coefficients de coreprésentations unitaires de dimension finie de (A, δ). En particulier (A, δ) détermine $\mathscr{A}$.)

Le résultat central de ce paragraphe est :

THÉORÈME 4.2. – *L'algèbre de Hopf* S *associée à un unitaire multiplicatif régulier de type compact est une* C*-*algèbre de Woronowicz.*

D'après la proposition 1.10, un unitaire multiplicatif de type compact admet des vecteurs fixes non nuls (définition 1.8).

Fixons nous un espace de Hilbert H, un unitaire multiplicatif $V \in \mathscr{L}(H \otimes H)$ et un vecteur fixe $e \in H$ de norme 1. Notons ϕ l'état vectoriel associé à e.

DÉFINITION 4.3. – *Pour* $\xi \in H$, *on définit* $\lambda_\xi \in \mathscr{L}(H)$ *en posant* $\lambda_\xi = \theta'^*_e V^* \theta_\xi$.

PROPOSITION 4.4. – *Pour tout* $\xi \in H$ *on a* $(\lambda_\xi \otimes 1) V = V (\lambda_\xi \otimes 1)$.

Preuve. – On a : $(\lambda_\xi^* \otimes 1) = \theta^*_{1,\xi} V_{12} \theta_{2,e}$. Donc :

$$\begin{aligned} V(\lambda_\xi^* \otimes 1) &= V \theta^*_{1,\xi} V_{12} \theta_{2,e} = \theta^*_{1,\xi} V_{23} V_{12} \theta_{2,e} = \theta^*_{1,\xi} V_{12} V_{13} V_{23} \theta_{2,e} \\ &= \theta^*_{1,\xi} V_{12} V_{13} \theta_{2,e} \ (\text{car } e \text{ étant fixe } V_{23} \theta_{2,e} = \theta_{2,e}) \\ &= \theta^*_{1,\xi} V_{12} \theta_{2,e} V = (\lambda_\xi^* \otimes 1) V. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Soit $\mathscr{D}$ la C*-algèbre engendrée par les opérateurs λ_ξ $(\xi \in H)$.

LEMME 4.5. – *a*) *Pour tout* $T \in \mathscr{D}$ *on a* $(T \otimes 1) V = V (T \otimes 1)$.

b) *La représentation identique de* $\mathscr{D}$ *dans* H *est non dégénérée.*

c) *Si* V *est régulier, alors* $\mathscr{D} \subset \mathscr{K}(H)$.

Preuve. – *a*) Résulte de la proposition 4.4.

b) Pour $\xi \neq 0$, il existe $\alpha, \beta \in H$ tels que $\langle (\alpha \otimes \beta), V(\xi \otimes e) \rangle \neq 0$ donc $\lambda^*_\alpha \xi \neq 0$.

c) On a $\lambda^*_\xi = (\mathrm{id} \otimes \omega_{\xi, e})(\Sigma V)$. $\blacksquare$

Remarque. – Pour $\alpha, \beta, \eta \in H$ on a $\lambda_\beta \eta = \rho(\omega_{\eta, e})^* \beta$, donc

$$\lambda_\alpha \lambda_\beta(\eta) = \lambda_\alpha \rho(\omega_{\eta, e})^* \beta = \rho(\omega_{\eta, e})^* \lambda_\alpha \beta$$

par la proposition 4.4. Il en résulte que $\lambda_\alpha \lambda_\beta(\eta) = \lambda_\xi(\eta)$ où $\xi = \lambda_\alpha \beta$. Les opérateurs λ_ξ, $\xi \in H$ forment donc une sous-algèbre de $\mathscr{L}(H)$.

Supposons désormais que V est régulier.

Nous dirons que le vecteur $\xi \in H$ est fini si la dimension de l'espace vectoriel $\hat{S} \xi$ est finie. Si $p \in \mathscr{D}$ est un projecteur, l'espace pH est invariant par $\hat{S}$ et, comme V est régulier, sa dimension est finie (4.5 *c*)); on en déduit (4.5 *b*) que l'espace E des vecteurs finis est dense.

Soit $\mathscr{F}$ le sous-espace dense de $\mathscr{L}(H)_*$ engendré par les formes $\omega_{\xi, \eta}$, $\xi, \eta \in E$ et soit $\mathscr{S}$ le sous-espace vectoriel (dense) de $S : \mathscr{S} = \{ L(\omega) / \omega \in \mathscr{F} \}$.

Notons que $e \in \mathrm{E}$ comme $\rho(\omega)e = \omega(1)e$; donc $\omega_{e,e} \in \mathscr{F}$ et $1 \in \mathscr{S}$.

Soit $\mathrm{F} \subset \mathrm{H}$ un sous-espace de dimension finie invariant par $\hat{\mathrm{S}}$. Alors $\mathrm{F} \otimes \mathrm{H}$ est invariant par V et V*; soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{F} \otimes \mathrm{H})$ la restriction de V à $\mathrm{F} \otimes \mathrm{H}$; c'est un unitaire. Donnons nous une base orthonormale $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ de F. Pour $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ notons $\omega_{i,j}$ la forme donnée par $\omega_{i,j}(x) = \langle e_i, xe_j \rangle$ et posons $u_{i,j} = \mathrm{L}(\omega_{i,j}) \in \mathscr{S}$.

Pour $\xi \in \mathrm{H}$, $i \in \{1, \ldots, n\}$ on a $\mathrm{V}(e_i \otimes \xi) = \sum_{1 \leq j \leq n} e_j \otimes u_{j,i}\xi$. On en déduit que pour $\xi, \eta \in \mathrm{H}$, $i, j \in \{1, \ldots, n\}$

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(u_{i,j} \otimes 1)\mathrm{V}^*(\xi \otimes \eta) &= \theta^*_{1,e_i}(\mathrm{V}_{23}\mathrm{V}_{12}\mathrm{V}^*_{23})(e_j \otimes \xi \otimes \eta) = \theta^*_{1,e_i}(\mathrm{V}_{12}\mathrm{V}_{13})(e_j \otimes \xi \otimes \eta)\\ &= \sum_k \theta^*_{1,e_i}\mathrm{V}_{12}(e_k \otimes \xi \otimes u_{k,j}\eta)\\ &= \sum_k u_{i,k}\xi \otimes u_{k,j}\eta\end{aligned}$$

Donc $\delta(u_{i,j}) = \mathrm{V}(u_{i,j} \otimes 1)\mathrm{V}^* = \sum_k u_{i,k} \otimes u_{k,j}$. On en déduit que pour tout $x \in \mathscr{S}$, $\delta(x) = \mathrm{V}(x \otimes 1)\mathrm{V}^*$ est un élément du produit tensoriel algébrique $\mathscr{S} \otimes \mathscr{S}$.

Pour établir le théorème 4.2, il ne reste plus qu'à montrer que $\mathscr{S}$ est une sous-algèbre involutive de S: on posera alors $\kappa(\mathrm{L}(\omega)) = \mathrm{L}(\omega^*)^*$ (en particulier on aura $\kappa(u_{i,j}) = u^*_{j,i}$). Cela résultera du lemme suivant:

LEMME 4.6. — *a) Le produit tensoriel algébrique* $\mathrm{E} \otimes \mathrm{E}$ *est un sous-espace de* $\mathrm{H} \otimes \mathrm{H}$ *invariant par* V.

b) Pour $\omega \in \mathscr{F}$, *les espaces vectoriels* $\{\rho(\omega)y / y \in \hat{\mathrm{S}}\}$ *et* $\{y\rho(\omega) / y \in \hat{\mathrm{S}}\}$ *sont de dimension finie.*

c) On a $\mathscr{S} = \{(\omega \otimes \mathrm{id})(\delta(x)), \omega \in \mathscr{F}, x \in \mathrm{S}\}$.

Preuve. — *a)* Soit $\xi \in \mathrm{E}$, $\mathrm{F} \subset \mathrm{H}$ un sous-espace de dimension finie invariant par $\hat{\mathrm{S}}$. On a (avec les notations ci-dessus) $\mathrm{V}(u_{j,i}\xi \otimes \eta) = \sum_{1 \leq k \leq n} (u_{j,k} \otimes u_{k,i})\mathrm{V}(\xi \otimes \eta)$, donc $\hat{\mathrm{S}}(u_{j,i}\xi) \subset \{\sum_{1 \leq k \leq n} u_{j,k}\xi_k / \xi_k \in \hat{\mathrm{S}}\xi\}$. Donc

$$\mathrm{V}(e_i \otimes \xi) = \sum_{1 \leq j \leq n} e_j \otimes u_{j,i}\xi \in \mathrm{E} \otimes \mathrm{E} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{V}(\mathrm{E} \otimes \mathrm{E}) \subset \mathrm{E} \otimes \mathrm{E}.$$

De même, $\mathrm{V}^*(\mathrm{E} \otimes \mathrm{E}) \subset \mathrm{E} \otimes \mathrm{E}$.

b) On peut supposer $\omega = \omega_{\xi,\eta}$, $\xi, \eta \in \mathrm{E}$; soit F un sous-espace de dimension finie de H invariant par $\hat{\mathrm{S}}$ tel que $\xi, \eta \in \mathrm{F}$; on a $\rho(\omega)\rho(\omega') = (\mathrm{id} \otimes \omega \otimes \omega')(\mathrm{V}_{23}\mathrm{V}_{12}\mathrm{V}^*_{23})$ est dans l'espace vectoriel engendré par $\rho(\omega_{\alpha,\beta})$, $\alpha, \beta \in \mathrm{F}$. Pour une C*-algèbre A et $a \in \mathrm{A}$, les adhérences de $\mathrm{A}a^*$ et $\mathrm{A}a^*aa^*$ coïncident; si $\mathrm{A}a$ est de dimension finie, il en va de même pour $\mathrm{A}a^*aa^* \subset (\mathrm{A}a)a^*$ donc pour $\mathrm{A}a^*$ et enfin pour $a\mathrm{A}$.

c) Pour $\omega \in \mathscr{F}$, l'image de l'application $\omega' \to \rho(\omega)\rho(\omega')$ est de dimension finie (par *b*), donc son noyau Δ est un sous-espace de codimension finie de $\mathscr{L}(\mathrm{H})_*$. Pour $\omega' \in \Delta$ et $\alpha \in \mathscr{L}(\mathrm{H})_*$, $\omega'((\omega \otimes \mathrm{id})(\delta(\mathrm{L}(\alpha)))) = \alpha(\rho(\omega)\rho(\omega')) = 0$. Il en résulte que l'espace

$\{(\omega\otimes \mathrm{id})(\delta(x)),\ x\in \mathrm{S}\}$ est de dimension finie, et donc égal à son sous-espace dense $\{(\omega\otimes \mathrm{id})(\delta(x)),\ x\in \mathscr{S}\}\subset\mathscr{S}$. On a montré que $\{(\omega\otimes \mathrm{id})(\delta(x)),\ \omega\in\mathscr{F},\ x\in \mathrm{S}\}\subset\mathscr{S}$.

Pour $\omega\in\mathscr{F}$, les espaces $\{y\,\rho(\omega),\ y\in\hat{\mathrm{S}}\}$ et $\{\rho(\beta)\,\rho(\omega),\ \beta\in\mathscr{F}\}$ sont de dimension finie d'après *b*) donc égaux. En particulier, il existe $\beta\in\mathscr{F}$ tel que $\rho(\omega)=\rho(\beta)\,\rho(\omega)$.

Soit $\alpha\in\mathscr{F}$. Une forme $\omega\in\mathscr{F}$ qui s'annule sur $\mathrm{L}(\alpha)*\mathscr{F}=\{(\beta\otimes \mathrm{id})(\delta(\mathrm{L}(\alpha))/\beta\in\mathscr{F}\}$, s'annule en $\mathrm{L}(\alpha)$ car si $\beta\in\mathscr{F}$ vérifie $\rho(\beta)\,\rho(\omega)=\rho(\omega)$, on a

$$(\beta\otimes\omega)(\delta(\mathrm{L}(\alpha)))=\alpha(\rho(\beta)\,\rho(\omega))=\alpha(\rho(\omega))=\omega(\mathrm{L}(\alpha)).$$

Comme $\mathscr{F}$ sépare les points de $\mathscr{L}(\mathrm{H})$ et que l'espace $\mathrm{L}(\alpha)*\mathscr{F}$ est de dimension finie, on en déduit que $\mathrm{L}(\alpha)\in\mathrm{L}(\alpha)*\mathscr{F}$. ■

Démonstration du théorème 4.2. — Soient ξ, ξ', η, $\eta'\in\mathrm{E}$ et ω la forme définie par $\omega(x)=\langle\xi\otimes\eta,\ \mathrm{V}^*(1\otimes x)\,\mathrm{V}(\xi'\otimes\eta')\rangle$. On a $\mathrm{L}(\omega_{\xi,\,\xi'})\,\mathrm{L}(\omega_{\eta,\,\eta'})=\mathrm{L}(\omega)$. Comme $\mathrm{V}(\xi\otimes\eta)\in\mathrm{E}\otimes\mathrm{E}$ et $\mathrm{V}(\xi'\otimes\eta')\in\mathrm{E}\otimes\mathrm{E}$, $\omega\in\mathscr{F}$ et $\mathrm{L}(\omega)\in\mathscr{S}$. Donc $\mathscr{S}$ est une sous-algèbre de S.

Comme S est une C*-algèbre, $\mathscr{S}$ est involutive par 4.6 *c*). ■

Remarque. — Il résulte de 3.4.4, de 3.11 et de 4.2, qu'une C*-algèbre de Hopf séparable unifère, bisimplifiable réduite à droite est une C*-algèbre de Woronowicz.

Si V est un unitaire multiplicatif de type compact, e est un vecteur fixe de norme 1 et ϕ l'état vectoriel associé, on vérifie sans peine que ϕ restreint à S est une mesure de Haar à droite; c'est donc la mesure de Haar de S. En fait, plus généralement, si ψ est un état normal tel que $\rho(\psi)$ soit le projecteur P sur l'espace des vecteurs fixes, la restriction de ψ à S est la mesure de Haar de S. En effet, on a $\mathrm{V}(\mathrm{P}\otimes 1)=(\mathrm{P}\otimes 1)\mathrm{V}=\mathrm{P}\otimes 1$ et pour $x=\mathrm{L}(\omega)$, on trouve

$$(\psi\otimes \mathrm{id})(\delta(x))=(\omega\otimes\psi\otimes \mathrm{id})(\mathrm{V}_{12}\mathrm{V}_{13})=(\omega\otimes \mathrm{id})((\mathrm{P}\otimes 1)\mathrm{V})=\omega(\mathrm{P})=\psi(x).$$

On vérifie de même qu'on a $(\mathrm{id}\otimes\psi)(\delta(x))=\psi(x)$.

THÉORÈME 4.7. — *Soit* V *un unitaire multiplicatif régulier de type compact et* S *l'algèbre de Woronowicz associée. Notons* $\mathrm{V_S}$ *l'unitaire multiplicatif associé à* S (*cf.* 1.2.4), K *l'espace des vecteurs fixes. Alors* V *est équivalent* (*cf.* 1.2.1) *à l'unitaire multiplicatif* $\mathrm{V_S}\otimes 1_{\mathrm{K}\otimes\mathrm{K}}$ (*exemple* 1.2.1).

Preuve. — Soit ϕ l'état vectoriel associé à un vecteur fixe $e\in\mathrm{H}$, $\|e\|=1$.

Pour ξ, $\eta\in\mathrm{K}$, $\omega\in\mathscr{L}(\mathrm{H})_*$ on a $\rho(\omega_{\xi,\,\eta})\,\rho(\omega)=\omega(1)\,\rho(\omega_{\xi,\,\eta})$. On en déduit que $\rho(\omega_{\xi,\,\eta})$ est proportionnel à un projecteur minimal central de $\hat{\mathrm{S}}$. Donc

$$\rho(\omega_{\xi,\,\eta})=\rho(\omega_{\xi,\,\eta})\,\rho(\phi)=\rho(\phi)\,\rho(\omega_{\xi,\,\eta})=\langle\xi,\,\eta\rangle\,\rho(\phi).$$

En particulier, pour $x\in\mathrm{S}$, ξ, $\eta\in\mathrm{K}$, on a $\langle\xi,\,x\eta\rangle=\langle\xi,\,\eta\rangle\,\phi(x)$; en effet, si $x=\mathrm{L}(\omega)$, on a $\langle\xi,\,x\eta\rangle=\omega(\rho(\omega_{\xi,\,\eta}))=\langle\xi,\,\eta\rangle\,\omega(\rho(\phi))$.

Reprenons à présent les notations de 1.2 et notons V′ l'unitaire multiplicatif $\mathrm{V_S}\otimes 1_{\mathrm{K}\otimes\mathrm{K}}$.

Soit $\mathrm{W}:\mathrm{H}_\phi\otimes\mathrm{K}\to\mathrm{H}$ donné par $\mathrm{W}(\pi_\phi(x)\,\xi_\phi\otimes\xi)=x\,\xi$, $(x\in\mathrm{S},\ \xi\in\mathrm{K})$.

Comme $\langle \pi_\phi(x)\xi_\phi \otimes \xi, \pi_\phi(y)\xi_\phi \otimes \eta \rangle = \phi(x^* y)\langle \xi, \eta \rangle = \langle x\xi, y\eta \rangle$, W est bien défini et isométrique.

Pour $x, y \in \mathrm{S}$, $\xi, \eta \in \mathrm{K}$, on a

$$(\mathrm{W} \otimes \mathrm{W})\mathrm{V}'(\pi_\phi(x)\xi_\phi \otimes \xi \otimes \pi_\phi(y)\xi_\phi \otimes \eta) = \delta(x)(1 \otimes y)(\xi \otimes \eta)$$
$$= \mathrm{V}(\mathrm{W} \otimes \mathrm{W})(\pi_\phi(x)\xi_\phi \otimes \xi \otimes \pi_\phi(y)\xi_\phi \otimes \eta)$$

Il reste donc à démontrer que W est surjectif.

Soient $\mathrm{F} \subset \mathrm{H}$ une sous-représentation de dimension finie de $\hat{\mathrm{S}}$ et $(e_i)\, 1 \leqq i \leqq n$ une base orthonormale de F. On définit $u_{i,j}$ comme ci-dessus. Pour $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, posons $v_{i,j} = \kappa^{-1}(u_{j,i})$ (*i.e.* $v_{i,j} = \kappa(u_{j,i}^*)^*$). On a :

– $\delta(v_{i,j}) = (\kappa^{-1} \otimes \kappa^{-1}) \circ \sigma\delta(u_{j,i}) = \Sigma_k v_{i,k} \otimes v_{k,j}$

– $\Sigma_k v_{i,k} u_{j,k} = \kappa^{-1}(\Sigma_k u_{k,j}^* u_{k,i}) = \delta_{i,j}$

– $\Sigma_k u_{k,i} v_{k,j} = \kappa^{-1}(\Sigma_k u_{j,k} u_{i,k}^*) = \delta_{i,j}$

(en d'autres termes, la matrice $(v_{i,j})_{i,j}$ est inverse de la matrice $(u_{j,i})_{i,j}$ *cf.* [54])

Pour $i = 1, \ldots, n$ posons $\xi_i = \Sigma_j v_{i,j} e_j$. Pour $\eta \in \mathrm{H}$, on a :

$$\mathrm{V}(\xi_i \otimes \eta) = \Sigma_j \delta(v_{i,j})\mathrm{V}(e_j \otimes \eta) = \Sigma_{j,k,m}(v_{i,k} e_m \otimes v_{k,j} u_{m,j}\eta)$$
$$= \Sigma_{k,m} v_{i,k} e_m \otimes \delta_{k,m}\eta = \xi_i \otimes \eta.$$

Donc $\xi_i \in \mathrm{K}$.

De plus $\Sigma_k u_{k,i}\xi_k = \Sigma_{j,k} u_{k,i} v_{kj} e_j = e_i$. Donc e_i est dans l'image de W. ■

Soit A une C*-algèbre de Woronowicz et ϕ sa mesure de Haar. On peut déduire de [54] que $\pi_\phi(\mathrm{A})''$ est une algèbre de Kac-von Neumann si et seulement si l'état ϕ est tracial. Dans notre formalisme ce résultat se traduit par :

PROPOSITION 4.8. – *Soit* V *un unitaire multiplicatif régulier de type compact, e un vecteur fixe de norme* 1 *et* ϕ *l'état vectoriel associé.*

a) Pour tout $a, b \in \mathrm{S}$ *on a* $\kappa(a * \phi b) = b * a\phi$.

b) Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) *La restriction de* ϕ *à* S *est traciale.*

(ii) $\kappa^2 = \mathrm{id}$.

Preuve. – *a)* Soit $\xi = ae$, $\eta = b^* e$. On a

$$a * \phi b = \mathrm{L}(\omega_{\eta,\xi}) \qquad \text{et} \qquad \kappa(a * \phi b) = \mathrm{L}(\omega_{\xi,\eta})^* = b * a\phi.$$

b) Si ϕ est traciale $b * a\phi = b * \phi a$. Comme l'espace engendré par $\{a * \phi b / a, b \in \mathscr{S}\}$ est $\mathscr{S}$, $\kappa^2 = \mathrm{id}$. En fait, l'égalité $\kappa^2 = \mathrm{id}$ est équivalente à $\kappa(x^*) = \kappa(x)^*$ et κ s'étend alors en un antiisomorphisme involutif de S.

Réciproquement, soit $\mathrm{F} \subset \mathrm{H}$ une représentation irréductible de $\hat{\mathrm{S}}$. Notons $u_{i,j}$, $1 \leqq i, j \leqq n$ ses coefficients associés à une base e_i de F. D'après [54] théorème 5.7, on a $\phi(u_{i,j} u_{k,m}^*) = (1/\mathrm{M})\,\delta_{i,k} f_1(u_{m,j})$. Mais si $\kappa^2 = \mathrm{id}$, on a $\kappa(u_{i,j} u_{k,m}^*) = u_{m,k} u_{j,i}^*$. Comme $\phi \circ \kappa = \phi$ on en déduit l'égalité $\delta_{i,k} f_1(u_{m,j}) = \delta_{m,j} f_1(u_{i,k})$. Donc $f_1(u_{i,j})$ est proportionnel à $\delta_{i,j}$ donc égal (car $\mathrm{Tr}(F)=\mathrm{Tr}(F^{-1})=M$, *cf.* [54], § 5). En particulier, f_1 est le caractère trivial et ϕ est une trace par [54], théorème 5.6.6° (*Cf.* aussi [6], théorème 7.2.2). ■

Unitaires multiplicatifs en dimension finie

Soit H un espace de Hilbert de dimension finie et $V \in \mathscr{L}(H \otimes H)$ un unitaire multiplicatif de H.

LEMME 4.9. — *Soit* V *un unitaire multiplicatif sur un espace de Hilbert* H *de dimension finie. Soit* τ *la trace normalisée de* $\mathscr{L}(H)$. *Alors* $\rho(\tau)$ *est le projecteur sur les vecteurs fixes et* $\rho(\tau) \neq 0$.

Preuve. —

$$\begin{aligned}\rho(\tau)^2 &= (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \tau)(V_{12} V_{13}) = (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \tau)(V_{23} V_{12} V_{23}^*)\\ &= (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \tau)(V_{12}) \text{ (car } \tau \otimes \tau \text{ est une trace)}\\ &= \rho(\tau).\end{aligned}$$

Comme $\|\rho(\tau)\| \leqq 1$, $\rho(\tau)$ est un projecteur. Si $\xi = \rho(\tau)\xi$, on a $\tau(L(\phi)) = \|\xi\|^2$ où $\phi = \omega_{\xi,\xi}$. Comme $\|L(\phi)\| \leqq \|\xi\|^2$, on en déduit que

$$L(\phi) = \|\xi\|^2 1, \quad i.e.\ \langle \xi \otimes \eta, V(\xi \otimes \eta) \rangle = \|\xi\|^2 \|\eta\|^2$$

donc $V(\xi \otimes \eta) = \xi \otimes \eta$ et ξ est fixe. Réciproquement si ξ est fixe, $L(\omega_{\xi,\xi}) = \|\xi\|^2$ et un raisonnement analogue montre que $\rho(\tau)\xi = \xi$.

Supposons que $\rho(\tau) = 0$. Il est équivalent de dire que $\tau(L(\omega)) = \omega(\rho(\tau)) = 0$ pour toute forme ω *i.e.* τ est nulle sur la sous-algèbre S de $\mathscr{L}(H)$; cela implique que S est nilpotente. En particulier, S est incluse dans l'algèbre des matrices strictement triangulaires supérieures dans une certaine base; cela est absurde par la proposition 1.4. ■

Dans [54] (appendice), Woronowicz montre que la mesure de Haar d'un « pseudo-groupe compact matriciel » fini est traciale (par le lemme 4.9 et le commentaire précédent le théorème 4.7 la restriction à S de τ est une mesure de Haar). Il en résulte (proposition 4.8), qu'en dimension finie, le formalisme de Woronowicz coïncide avec celui de Kac et Paljutkin [15].

THÉORÈME 4.10. — *L'algèbre* S *associée à un unitaire mutliplicatif sur un espace de Hilbert de dimension finie est une algèbre de Kac de dimension finie.*

Preuve. — En vertu de [54] et du théorème 4.2, il suffit de vérifier que V est régulier.

Soit e un vecteur fixe de norme 1, et ϕ l'état vectoriel associé. Par la proposition 1.9 et le lemme 4.9, $\rho(\phi) = \rho(\tau)$. Il en résulte que $\phi(L(\tau)) = \tau(\rho(\phi)) \neq 0$. Par le lemme 4.9 appliqué à l'unitaire multiplicatif $\Sigma V^* \Sigma$ le vecteur $e' = L(\tau)e$ est cofixe. On a $\langle e, e' \rangle = \phi(L(\tau)) \neq 0$.

Pour $\alpha, \beta \in H$, on a :

$$(\mathrm{id} \otimes \omega_{e,\alpha})(\Sigma V) = \theta_{\alpha, e},\ (\mathrm{id} \otimes \omega_{\beta, e'})(\Sigma V) = \theta_{e', \beta},\ \theta_{\alpha, e}\,\theta_{e', \beta} = \langle e, e' \rangle\, \theta_{\alpha, \beta}$$

Comme $\mathscr{C}(V)$ est une algèbre, V est régulier. ■

Soit H_0 (resp. H^0) l'espace des vecteurs fixes (resp. cofixes). Par le lemme 4.9, on a $\dim H\,\tau(\rho(\tau)) = \dim H_0$ et $\dim H\,\tau(L(\tau)) = \dim H^0$, comme $\tau(\rho(\tau)) = \tau(L(\tau)) = (\tau \otimes \tau)(V)$, on en déduit que $\dim H_0 = \dim H^0$. Ce nombre s'appelle la *multiplicité* de V.

5. Constructions liées aux C*-algèbres de Woronowicz

Soit A une C*-algèbre de Woronowicz. En plus de l'unitaire multiplicatif $V = V_\phi \in \mathscr{L}(H \otimes H)$ associé à sa mesure de Haar ϕ (exemple 1.2.4), on peut associer à A un autre unitaire multiplicatif $\hat{V} \in \mathscr{L}(H \otimes H)$. Ces deux unitaires sont reliés par un unitaire $U \in \mathscr{L}(H)$. Nous construisons ici cet unitaire U et en donnons quelques propriétés. Ces propriétés, généralisées au paragrphe suivant, nous permettront d'établir la bidualité.

Soit A une C*-algèbre de Woronowicz et $\mathscr{A}$ la sous-algèbre dense des coefficients des représentations unitaires de dimension finie. Notons ϕ sa mesure de Haar, $(H, \pi, e) = (H_\phi, \pi_\phi, \xi_\phi)$ la représentation GNS associée et $V = V_\phi$ l'unitaire multiplicatif associé. L'image de A par π est l'algèbre S associée à l'unitaire multiplicatif V; c'est la « C*-algèbre réduite » du « groupe quantique compact » et aussi une C*-algèbre de Woronowicz. Nous étudierons dans l'appendice (A.13 *a*) les diverses algèbres de Woronowicz qui ont même unitaire multiplicatif associé. En ce qui concerne notre construction de U on peut, quitte à remplacer A par S, supposer que la représentation π est fidèle.

Rappels 5.1. — (*cf.* [54], théorème 5.6) Rappelons qu'une C*-algèbre de Woronowicz est munie d'un groupe $(f_z)_{z \in \mathbf{C}}$ de caractères $f_z : \mathscr{A} \to \mathbf{C}$ ayant des propriétés remarquables :

a) Pour $z \in \mathbf{C}$, $f_z : \mathscr{A} \to \mathbf{C}$ est un caractère et $f_z * f_{z'} = f_{z+z'}$ (où pour des formes α et β, $\alpha * \beta$ est la forme $(\alpha \otimes \beta) \circ \delta$); les applications $x \to f_z * x = (\mathrm{id} \otimes f_z)\,\delta(x)$ et $x \to x * f_z = (f_z \otimes \mathrm{id})\,\delta(x)$ sont des automorphismes de l'algèbre $\mathscr{A}$.

Pour $z \in \mathbf{C}$ on a : $f_z^* = f_{-\bar{z}}$ et $f_z \circ \kappa = f_{-z}$; donc pour tout $x \in \mathscr{A}$ on a $(f_z * x)^* = f_{-\bar{z}} * x^*$, $(x * f_z)^* = x^* * f_{-\bar{z}}$ et $f_z * \kappa(x) = \kappa(x * f_{-z})$, $\kappa(x) * f_z = \kappa(f_{-z} * x)$. En particulier, pour z imaginaire pur, le caractère f_z est autoadjoint et $x \to f_z * x$ et $x \to x * f_z$ sont des $*$-automorphismes de $\mathscr{A}$ et, comme ils préservent ϕ, ils se prolongent à A.

Le groupe modulaire de la mesure de Haar ϕ et κ^2 s'expriment en fonction de f_z :

b) $\forall x, y \in \mathscr{A}$, $\quad \phi(xy) = \phi(y(f_1 * x * f_1))$; donc

$$\phi((x * f_{-1})\,y) = \phi(y\,(f_1 * x)) \qquad \text{et} \qquad \phi((f_{-1} * x)\,y) = \phi(y\,(x * f_1)).$$

c) $\forall x \in \mathscr{A}$, $\kappa^2(x) = f_{-1} * x * f_1$; donc

$$f_1 * \kappa(x) = \kappa^{-1}(x) * f_1 \qquad \text{et} \qquad f_{-1} * \kappa^{-1}(x) = \kappa(x) * f_{-1}.$$

d) Pour $s, t \in \mathbf{C}$ et $x \in \mathscr{A}$ on pose $h_{s,t}(x) = f_s * \kappa(x) * f_t$. Les applications $h_{s,t}$ sont des antiautomorphismes de $\mathscr{A}$ et $h_{s,t}^{-1} = h_{t+1, s-1}$. De plus $\phi \circ h_{s,t} = \phi$.

e) On déduit de *a*) et *d*) que l'antiautomorphisme $j = h_{1/2, -1/2}$ est une transposition involutive de $\mathscr{A}$ (*i. e.* $j(x^*) = j(x)^*$, $j(j(x)) = x$). L'application j se prolonge en un antiautomorphisme de A.

Nous aurons besoin aussi des notations suivantes :

f) Soient α et β les transformations de $\mathscr{A} \otimes \mathscr{A}$ données par $\alpha(x \otimes y) = \delta(x)(1 \otimes y)$ et $\beta(x \otimes y) = \delta(y)(x \otimes 1)$ $x, y \in \mathscr{A}$ (avec les notations de [54] théorème 4.9 on a $\alpha = s'$ et $\beta = r' \circ \sigma$ où σ est la volte donnée par $\sigma(x \otimes y) = y \otimes x$). Par [54] (theorem 4.9), pour $x, y \in \mathscr{A}$ on a :

$$\begin{aligned}\sigma \circ (h_{1,0} \otimes \mathrm{id}) \circ \alpha(x \otimes y) &= \sigma \circ (\kappa \otimes \mathrm{id}) \circ \delta(x * f_{-1})(y \otimes 1) \\ &= (\kappa^{-1} \otimes \mathrm{id}) \circ \delta(h_{1,0}(x))(y \otimes 1) = \beta^{-1}(y \otimes h_{1,0}(x)).\end{aligned}$$

g) Notons $\hat{V} \in \mathscr{L}(H \otimes H)$ l'opérateur donné par

$$\hat{V}^*(\xi \otimes \pi(y) e) = (\pi \otimes \pi)(\delta(y))(\xi \otimes e).$$

On vérifie aisément que $\hat{V}^*$ est une isométrie. Comme A est simplifiable à gauche c'est un unitaire. Il est clair que l'unitaire $\hat{V}$ est multiplicatif.

Pour toute forme $\omega \in \mathscr{L}(H)_*$ on pose $\lambda(\omega) = (\omega \otimes \mathrm{id})(\hat{V})$.

Il résulte des propriétés de f_z :

PROPOSITION 5.2. — *L'opérateur* T_0 *dans* H *donné par* $T_0(\pi(x) e) = \pi(\kappa(x)) e$, $(x \in \mathscr{A})$ *est fermable. La décomposition polaire* $T = U|T|$ *de sa fermeture définit un unitaire* $U \in \mathscr{L}(H)$ *tel que* $U^2 = 1$. *On a* $\hat{V} = \Sigma(U \otimes 1) V (U \otimes 1) \Sigma$ (*où* $\Sigma \in \mathscr{L}(H \otimes H)$ *est la volte*). *Pour* $\omega \in \mathscr{L}(H)_*$ *on a* $U \lambda(\omega) U = \rho(\omega)$ *et pour tout* $\omega, \omega' \in \mathscr{L}(H)_*$ *on a* $\rho(\omega) \lambda(\omega') = \lambda(\omega') \rho(\omega)$. *Pour* $x \in A$ *on pose* $r(x) = U \pi(x) U$; *on a* : $r(x) \pi(y) = \pi(y) r(x)$ $(x, y \in A)$.

Preuve. — Définissons l'opérateur U sur H en posant (pour $x \in \mathscr{A}$) :

$$U(\pi(x) e) = \pi(h_{1,0}(x)) e = \pi(f_1 * \kappa(x)) e$$

Pour $x, y \in \mathscr{A}$ on a : $\kappa(x)^* = \kappa^{-1}(x^*)$ donc $(f_1 * \kappa(x))^* = \kappa(x^*) * f_{-1}$ (5.1 *a* et *c*); donc :

$$\begin{aligned}\phi((f_1 * \kappa(x))^*(f_1 * \kappa(y))) &= \phi((\kappa(x^*) * f_{-1})(f_1 * \kappa(y))) \\ &= \phi((f_1 * \kappa(y))(f_1 * \kappa(x^*))) \text{ (par 5.1 } b) \\ &= (\phi \circ h_{1,0})(x^* y) \text{ (d'après 5.1 } d) \\ &= \phi(x^* y) \text{ (d'après 5.1 } d).\end{aligned}$$

On en déduit que U est bien défini et isométrique.

Les formules $U^2 = 1$ et $\Sigma(U \otimes 1) V = \hat{V} \Sigma(U \otimes 1)$ résultent respectivement de 5.1 *d*) et 5.1 *f*).

On a alors $\hat{V}=\Sigma(U\otimes 1)V(U\otimes 1)\Sigma$. Appliquant $(\omega\otimes \mathrm{id})$ à cette égalité on trouve $\lambda(\omega)=U\rho(\omega)U$.

Pour

$$x\in A,\quad \xi,\eta\in H,\quad \hat{V}_{12}^* V_{23}(\xi\otimes\pi(x)e\otimes\eta)$$
$$=(\pi\otimes\pi\otimes\pi)\circ\delta^2(x)(\xi\otimes e\otimes\eta)=V_{23}\hat{V}_{12}^*(\xi\otimes\pi(x)e\otimes\eta)$$

(où $\delta^2=(\mathrm{id}\otimes\delta)\circ\delta=(\delta\otimes\mathrm{id})\circ\delta$). Donc les opérateurs $\hat{V}_{12}$ et V_{23} commutent. On en déduit que $\lambda(\omega)$ et $\rho(\omega')$ commutent.

Pour x, $y\in\mathscr{A}$, $h_{1,0}(xh_{1,0}(y))=yh_{1,0}(x)$ (par 5.1 *d*). Donc:

$$r(x)\pi(y)e=U\pi(xh_{1,0}(y))e=\pi(yh_{1,0}(x))e=\pi(y)r(x)e.$$

Pour $\xi=\pi(z)e\in H$ on a: $r(x)\pi(y)\xi=r(x)\pi(yz)e=\pi(y)\pi(z)r(x)e=\pi(y)r(x)\xi$.

Donc $r(x)$ et $\pi(y)$ commutent.

Soit $u=(u_{i,j})_{1\leqq i,j\leqq N}$ une sous-représentation de dimension finie u de ρ. Le sous-espace E_u de H engendré par $\pi(u_{i,j})e$ et $\pi(u_{i,j}^*)e\,(1\leqq i,j\leqq N)$ est invariant par T_0. Comme H est somme hilbertienne d'espaces de cette forme, on en déduit que T_0 est fermable et que la décomposition polaire de sa fermeture laisse stable les espaces E_u. Il ne reste plus qu'à vérifier que $\forall\xi\in\pi(\mathscr{A})e$, $\langle\xi, UT_0\xi\rangle\geqq 0$. Soit $x\in\mathscr{A}$ et $\xi=\pi(x)e$. On a:

$$\langle\xi, UT_0\xi\rangle=\phi(x^*(f_1*\kappa^2(x)))=\phi(x^*(x*f_1))$$

Or $x^*(x*f_1)=((x^**f_{-1/2})(x*f_{1/2}))*f_{1/2}$ et $(x^**f_{-1/2})(x*f_{1/2})=(x*f_{1/2})^*(x*f_{1/2})$. Comme $\phi(y*f_{1/2})=\phi(y)$ on a: $\langle\xi, UT_0\xi\rangle=\phi((x*f_{1/2})^*(x*f_{1/2}))\geqq 0$. ■

Remarque. — On a montré que $|T|$ satisfait $|T|\pi(a)e=\pi(a*f_1)e$.

6. Unitaires multiplicatifs irréductibles

Dans ce paragraphe nous introduisons et étudions une notion d'irréductibilité qui nous servira au paragraphe suivant pour établir la dualité de Takesaki-Takai.

PROPOSITION 6.1. — *Soit* V *un unitaire multiplicatif dans* H *et* $U\in\mathscr{L}(H)$ *un unitaire tel que* $U^2=1$ *et que les unitaires* $\hat{V}=\Sigma(U\otimes 1)V(U\otimes 1)\Sigma$ *et* $\tilde{V}=(U\otimes U)\hat{V}(U\otimes U)$ *soient multiplicatifs. Alors on a les formules suivantes:*

(1) $V_{12}(1\otimes U\otimes 1)V_{23}(1\otimes U\otimes 1)=(1\otimes U\otimes 1)V_{23}(1\otimes U\otimes 1)V_{13}V_{12}$

(2) $\hat{V}_{23}V_{12}V_{13}=V_{13}\hat{V}_{23}$

(3) $\tilde{V}_{12}V_{13}=V_{13}V_{23}\tilde{V}_{12}$

(4) *les unitaires* $\Sigma_{23}\hat{V}_{23}V_{23}$ *et* V_{12} *commutent.*

(5) *les unitaires* $V_{12}\tilde{V}_{12}\Sigma_{12}$ *et* V_{23} *commutent.*

Preuve. — On a

$$\Sigma_{13}\hat{V}_{12}\Sigma_{13}=(1\otimes U\otimes 1)V_{23}(1\otimes U\otimes 1),$$

$$\Sigma_{13}\hat{V}_{13}\Sigma_{13}=(U\otimes 1\otimes 1)\,V_{13}(U\otimes 1\otimes 1)\text{ et }\Sigma_{13}\hat{V}_{23}\Sigma_{13}=(U\otimes 1\otimes 1)V_{12}(U\otimes 1\otimes 1).$$

Comme $\hat{V}$ est multiplicatif il vient :

$$(1\otimes U\otimes 1)\,V_{23}\,(U\otimes U\otimes 1)\,V_{13}V_{12}\,(U\otimes 1\otimes 1)$$
$$=(U\otimes 1\otimes 1)V_{12}\,(U\otimes U\otimes 1)V_{23}(1\otimes U\otimes 1);$$

la formule (1) résulte alors de ce que $(U\otimes 1\otimes 1)$ et V_{23} commutent.

Multipliant à gauche et à droite les termes de la formule (1) par Σ_{23}, il vient $\Sigma_{23}V_{12}(1\otimes U\otimes 1)\;V_{23}(1\otimes U\otimes 1)\Sigma_{23}=\Sigma_{23}(1\otimes U\otimes 1)\;V_{23}(1\otimes U\otimes 1)V_{13}V_{12}\Sigma_{23}$; la formule (2) en résulte; multipliant à gauche et à droite les termes de la formule (1) par Σ_{12} on obtient la formule (3).

On a $\hat{V}_{23}V_{23}V_{12}=V_{13}\hat{V}_{23}V_{23}$ (on utilise la multiplicativité de V et la formule (2)). On en déduit que les unitaires $\Sigma_{23}\hat{V}_{23}V_{23}$ et V_{12} commutent.

On a $V_{23}V_{12}\tilde{V}_{12}=V_{12}\tilde{V}_{12}V_{13}$ (on utilise la multiplicativité de V et la formule (3)). On en déduit que les unitaires $V_{12}\tilde{V}_{12}\Sigma_{12}$ et V_{23} commutent. ■

DÉFINITION 6.2. — *Nous dirons que l'unitaire multiplicatif* $V\in\mathscr{L}(H\otimes H)$ *est irréductible s'il existe un unitaire* $U\in\mathscr{L}(H)$ *tel que*:

a) $U^2=1$ *et* $(\Sigma(1\otimes U)V)^3=1$

b) *Les unitaires* $\hat{V}=\Sigma(U\otimes 1)V(U\otimes 1)\Sigma$ *et* $\tilde{V}=(U\otimes U)\hat{V}(U\otimes U)$ *sont multiplicatifs.*

Remarquons que, comme $\tilde{V}=(U\otimes U)\hat{V}(U\otimes U)$, l'unitaire $\hat{V}$ est multiplicatif si et seulement si $\tilde{V}$ l'est. La condition $(\Sigma(1\otimes U)V)^3=1$ est équivalente à $\hat{V}V\tilde{V}=(U\otimes 1)\Sigma$.

Justifions tout de suite la dénomination « irréductible » :

PROPOSITION 6.3. — *Soit* $V\in\mathscr{L}(H\otimes H)$ *un unitaire multiplicatif régulier et irréductible. Alors l'adhérence normique dans* $\mathscr{L}(H)$ *de l'espace vectoriel engendré par* $\{xy/x\in L(S),\ y\in\rho(\hat{S})\}$ *est* $\mathscr{K}(H)$.

Preuve. — De la régularité de V il résulte que l'adhérence (normique) dans $\mathscr{L}(H)$ de $\{(\mathrm{id}\otimes\omega)\,(\Sigma\,\tilde{V}^*)/\omega\in\mathscr{L}(H)_*\}$ est $\mathscr{K}(H)$. Donc l'adhérence de $\{(\mathrm{id}\otimes\omega)((U\otimes 1)\Sigma\tilde{V}^*)/\omega\in\mathscr{L}(H)_*\}$ est $\mathscr{K}(H)$ *i.e.* $\{(\mathrm{id}\otimes\omega)(\hat{V}V)/\omega\in\mathscr{L}(H)_*\}$ est un sous-espace vectoriel dense de $\mathscr{K}(H)$. Comme la représentation ρ est non dégénérée, l'adhérence de l'espace vectoriel engendré par $\{(\mathrm{id}\otimes\omega)(\hat{V}V)\,x/\omega\in\mathscr{L}(H)_*,\ x\in\hat{S}\}$ est $\mathscr{K}(H)$.

Mais $(\mathrm{id}\otimes\omega)(\hat{V}V)\,x=(\mathrm{id}\otimes\omega)(\hat{V}V(x\otimes 1))$. Comme V est un unitaire de $M(\hat{S}\otimes\mathscr{K}(H))$, les adhérences dans $\mathscr{L}(H)$ des espaces vectoriels engendrés par $\{(\mathrm{id}\otimes\omega)(\hat{V}V(x\otimes 1))/\omega\in\mathscr{L}(H)_*,\ x\in\hat{S}\}$ et $\{(\mathrm{id}\otimes\omega)(\hat{V}(x\otimes 1))/\omega\in\mathscr{L}(H)_*,\ x\in\hat{S}\}$ coïncident. Or $(\mathrm{id}\otimes\omega)(\hat{V})=L(U\omega U)$. La proposition en résulte immédiatement. ■

DÉFINITION 6.4. — *On appelle système de Kac un triplet* (H, V, U) *où* H *est un espace de Hilbert,* $V\in\mathscr{L}(H\otimes H)$ *est un unitaire multiplicatif birégulier* (*définition* 3.10) *irréductible et* U *est un unitaire vérifiant les conditions de la définition* 6.2.

DÉFINITION 6.5. — *Soit* (H, V, U) *un système de Kac. Alors on a*:

a) (H, $\Sigma V^* \Sigma$, U) *et* (H, $\hat{V}$, U) *sont des systèmes de Kac.*

b) *Les unitaires* V_{12} *et* $\tilde{V}_{23}$ *commutent.*

c) *Les unitaires* V_{23} *et* $\hat{V}_{12}$ *commutent.*

Preuve. — Remarquons que V est birégulier si et seulement si V et $\hat{V}$ sont réguliers. Posons $W = \Sigma V^* \Sigma$. On a:

$$\hat{W} = \Sigma (U \otimes 1) \Sigma V^* \Sigma (U \otimes 1) \Sigma = (1 \otimes U) V^* (1 \otimes U) = \Sigma \tilde{V}^* \Sigma;$$

de même, $\tilde{W} = \Sigma \hat{V}^* \Sigma$.

Le *a*) découle immédiatement de ces deux remarques.

Enfin, par 6.1 (4), $\tilde{V}_{23} = (\Sigma_{23} \hat{V}_{23} V_{23})^* (1 \otimes 1 \otimes U)$ commute à V_{12} et par 6.1 (5), $\hat{V}_{12} = (U \otimes 1 \otimes 1)(V_{12} \tilde{V}_{12} \Sigma_{12})^*$ commute à V_{23}. ■

DÉFINITION 6.6. — *Les systèmes de Kac* (H, $\hat{V}$, U) *et* (H, $\Sigma V^* \Sigma$, U) *s'appellent respectivement le système de Kac dual de* (H, V, U) *et le système de Kac opposé à* (H, V, U). *Deux systèmes de Kac* (H, V, U) *et* (H', V', U') *sont dits isomorphes s'il existe un opérateur unitaire* $w \in \mathscr{L}(H; H')$ *tel que* $(w \otimes w) V = V' (w \otimes w)$ *et* $w U = U' w$. *On dit que* (H', V', U') *est dual à* (H, V, U) *s'il est isomorphe à* (H, $\hat{V}$, U).

Remarquons que les systèmes de Kac (H, $\hat{V}$, U) et (H, $\tilde{V}$, U) sont isomorphes.

DÉFINITION 6.7. — *Soit* (H, V, U) *un système de Kac. Pour* $\omega \in \mathscr{L}(H)_*$ *on pose* $\lambda(\omega) = L_{\hat{V}}(\omega)$ *et* $R(\omega) = \rho_{\tilde{V}}(\omega)$.

Autrement dit, $\lambda(\omega)$ et $R(\omega)$ sont donnés par les formules:

$$\lambda(\omega) = (\omega \otimes \mathrm{id})(\hat{V}), \qquad R(\omega) = (\mathrm{id} \otimes \omega)(\tilde{V})$$

PROPOSITION 6.8. — *On a*:

a) $\lambda(\omega) = U \rho(\omega) U$, $R(\omega) = U L(\omega) U$.

b) *Pour tout* $\omega, \omega' \in \mathscr{L}(H)_*$, on a: $[\rho(\omega), \lambda(\omega')] = 0$ *et* $[L(\omega), R(\omega')] = 0$.

c) *Pour* $x \in S$, $y \in \hat{S}$ *on a*:

$$(L \otimes L) \delta(x) = \hat{V}^* (1 \otimes L(x)) \hat{V}, \ (\lambda \otimes \lambda) \hat{\delta}(y) = \hat{V} (\lambda(y) \otimes 1) \hat{V}^*.$$

Preuve. — *a*)

$$\lambda(\omega) = (\mathrm{id} \otimes \omega)((U \otimes 1) V (U \otimes 1)) = U \rho(\omega) U;$$

$$R(\omega) = (\omega \otimes \mathrm{id})((1 \otimes U) V (1 \otimes U)) = U L(\omega) U.$$

b) résulte de la proposition 6.5.

c) Soit $\omega \in \mathscr{L}(H)_*$ et posons $L(\omega) = x$; en utilisant la formule (2) de la proposition 6.1 on trouve

$$(L \otimes L) \delta(x) = (\omega \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id})(V_{12} V_{13}) = (\omega \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id})(\hat{V}_{23}^* V_{13} \hat{V}_{23}) = \hat{V}^* (1 \otimes L(x)) \hat{V}.$$

Il résulte de même de la formule (3) de la proposition 6.1 l'égalité

$$(\rho \otimes \rho)\,\hat{\delta}(y) = \tilde{V}(\rho(y) \otimes 1)\,\tilde{V}^*.$$

L'égalité $(\lambda \otimes \lambda)\,\hat{\delta}(y) = \hat{V}(\lambda(y) \otimes 1)\,\hat{V}^*$ résulte alors de *a*). ■

On peut donner une réciproque aux propositions 6.3 et 6.5:

PROPOSITION 6.9. — *Soit* V *un unitaire multiplicatif dans* H *et soit* $U \in \mathcal{L}(H)$ *un unitaire vérifiant* $U^2 = 1$ *tel que* $[V_{12}, \tilde{V}_{23}] = [\hat{V}_{12}, V_{23}] = 0$.

a) *Si l'espace vectoriel fermé engendré par* $\{\rho(\omega)\,L(\omega'),\ \omega,\ \omega' \in \mathcal{L}(H)_*\}$ *est égal à* $\mathcal{K}(H)$ *alors* V *est régulier.*

b) *Si* $\hat{V}$ *est multiplicatif et que les commutants de* $\rho(\hat{S}) \cup L(S)$ *et de* $\lambda(\hat{S}) \cup L(S)$ *sont réduits aux scalaires, alors* $(1 \otimes U)\,\Sigma\,\hat{V}V\tilde{V}$ *est scalaire.*

Preuve. — *a*) Soient $x = (\mathrm{id} \otimes \omega)(\Sigma V)$ un élément de $\mathcal{C}(V)$ et $\omega' \in \mathcal{L}(H)_*$. Posons $s = UL(\omega')\,U$. Comme $(1 \otimes s)$ et V commutent on a:

$$sx = (\mathrm{id} \otimes \omega)(\Sigma(1 \otimes s)\,V) = (\mathrm{id} \otimes \omega)(\Sigma V(1 \otimes s)) = (\mathrm{id} \otimes s\omega)(\Sigma V).$$

Comme l'ensemble $A(V)\,H$ est total dans H les adhérences de $UA(V)\,U\mathcal{C}(V)$ et de $\mathcal{C}(V)$ coïncident.

De même, si $t = U\rho(\omega')\,U$ on a $xt = (\mathrm{id} \otimes \omega t)(\Sigma V)$ et les adhérences de $\mathcal{C}(V)\,U\hat{A}(V)\,U$ et de $\mathcal{C}(V)$ coïncident.

On en déduit que pour $x, y \in \mathcal{C}(V)$, le produit xy est limite de sommes finies $\Sigma\, x_i(U\, t_i s_j U)\, y_j$ avec $x_i, y_j \in \mathcal{C}(V)$, $s_j \in A(V)$, $t_i \in \hat{A}(V)$. Comme l'espace vectoriel engendré par les produits xy où $x, y \in \mathcal{C}(V)$ est normiquement dense dans $\mathcal{C}(V)$, les adhérences normiques dans $\mathcal{L}(H)$ de $\mathcal{C}(V)$ et de $\mathcal{C}(V)\,\mathcal{K}(H)\,\mathcal{C}(V)$ coïncident. Comme les ensembles $\mathcal{C}(V)\,H$ et $\mathcal{C}(V)^*\,H$ sont totaux dans H, $\mathcal{C}(V)\,\mathcal{K}(H)\,\mathcal{C}(V)$ est dense dans $\mathcal{K}(H)$, la régularité de V en résulte.

b) Posons $W = (1 \otimes U)\,\Sigma\,\hat{V}V\tilde{V}$. Comme $[V_{12}, \tilde{V}_{23}] = 0$, il résulte de 6.1 (4) que $[V_{12}, W_{23}] = 0$. Appliquant 6.1 (4) à $\tilde{V}$, il vient: $[\tilde{V}_{12}, \Sigma_{23} V_{23} \tilde{V}_{23}] = 0$. Mais $W = (U \otimes U)\,V(U \otimes 1)\,\Sigma\, V\tilde{V}$ et comme

$$[\hat{V}_{12}, V_{23}] = 0, \qquad [\tilde{V}_{12}, (1 \otimes U \otimes U)\,V_{23}(1 \otimes U \otimes 1)] = 0.$$

Donc $[\tilde{V}_{12}, W_{23}] = 0$. On en déduit que W commute à $(x \otimes 1)$ pour tout $x \in \rho(\hat{S}) \cup L(S)$.

Remplaçant V par $\hat{V}$ dans ce qui précède, on en déduit que $(U \otimes U)\,\hat{V}(U \otimes 1)\,\Sigma\,\hat{V}V$ commute à $(x \otimes 1)$ pour tout $x \in \lambda(\hat{S}) \cup L(S)$. Or

$$(U \otimes U)\,\hat{V}(U \otimes 1)\,\Sigma\,\hat{V}V = \Sigma(U \otimes 1)\,W(U \otimes 1)\,\Sigma.$$

Donc W commute à $(1 \otimes x)$ pour tout $x \in \lambda(\hat{S}) \cup L(S)$. ■

COROLLAIRE 6.10. — *Soit* V *un unitaire multiplicatif dans* H *et soit* $U \in \mathcal{L}(H)$ *un unitaire vérifiant* $U^2 = 1$. *Posons* $\hat{V} = \Sigma(U \otimes 1)\,V(U \otimes 1)\,\Sigma$ *et* $\tilde{V} = \Sigma(1 \otimes U)\,V(1 \otimes U)\,\Sigma$. *Supposons que* $\hat{V}$ *soit multiplicatif et que* $[V_{12}, \tilde{V}_{23}] = [\hat{V}_{12}, V_{23}] = 0$. *Si l'espace vectoriel fermé engendré par* $\{L(\omega)\,\lambda(\omega'),\ \omega,\ \omega' \in \mathcal{L}(H)_*\}$, *est égal à* $\mathcal{K}(H)$, *les unitaires* $\tilde{V}$ *et* $\hat{V}$ *sont réguliers.*

Preuve. — Pour tout ω, $\omega' \in \mathcal{L}(\mathrm{H})_*$, on a $\rho_{\hat{\mathrm{V}}}(\omega)\,\mathrm{L}_{\hat{\mathrm{V}}}(\omega') = \mathrm{L}(\mathrm{U}\,\omega\,\mathrm{U})\,\lambda(\omega')$. Il est clair que $\hat{\mathrm{V}}$ vérifie les hypothèses de 6.9 *a*), il est donc régulier. ■

Exemples 6.11. — *a*) L'unitaire $1 \in \mathcal{L}(\mathrm{H} \otimes \mathrm{H})$ n'est irréductible que si la dimension de H est 1.

b) Soit G un groupe localement compact. Soit $\mathrm{U} \in \mathcal{L}(\mathrm{L}^2(\mathrm{G}))$ donné par $(\mathrm{U}\,\xi)(t) = \Delta^{1/2}(t)\,\xi(t^{-1})$ où Δ est le module de G (rappelons que nous utilisons des mesures de Haar à droite). Il est clair que $(\mathrm{L}^2(\mathrm{G}), \mathrm{V}_\mathrm{G}, \mathrm{U})$ est un système de Kac.

c) Soit (A, δ) une C*-algèbre de Woronowicz et (H, V, U) comme au paragraphe 5. Comme $\Sigma\,\hat{\mathrm{V}}^*\,\Sigma$ est l'unitaire multiplicatif associé à l'algèbre de Woronowicz $(\mathrm{A}, \sigma \circ \delta)$ il est régulier. Remarquons que $\rho(\phi) = \lambda(\phi)$ est le projecteur sur $e = \xi_\phi$, qui est total pour $\mathrm{L}(\mathrm{S})$; donc la C*-algèbre engendrée par $\mathrm{L}(\mathrm{S}) \cup \rho(\hat{\mathrm{S}})$ (resp. $\mathrm{L}(\mathrm{S}) \cup \lambda(\hat{\mathrm{S}})$) contient les compacts de H_ϕ. Il résulte de la proposition 6.9 *b*) que $(1 \otimes \mathrm{U})\,\Sigma\,\hat{\mathrm{V}}\mathrm{V}\tilde{\mathrm{V}}$ est scalaire et, comme $(1 \otimes \mathrm{U})\,\Sigma\,\hat{\mathrm{V}}\mathrm{V}\tilde{\mathrm{V}}\,(e \otimes e) = e \otimes e$, (H, V, U) est un système de Kac.

d) Soit W l'unitaire fondamental d'une algèbre de Kac-von Neumann (*cf.* [6]). Posons $\mathrm{V} = \mathrm{W}^*$ et $\mathrm{U} = \hat{\mathrm{J}}\mathrm{J} = \mathrm{J}\hat{\mathrm{J}}$ (*cf.* [38]). Comme $\hat{\mathrm{V}}$ est l'unitaire multiplicatif associé à l'algèbre de Kac-von Neumann duale, il est régulier. Il résulte de [38] et de la proposition 6.9 que $(1 \otimes \mathrm{U})\,\Sigma\,\hat{\mathrm{V}}\mathrm{V}\tilde{\mathrm{V}}$ est scalaire. On peut en fait démontrer que $(1 \otimes \mathrm{U})\,\Sigma\,\hat{\mathrm{V}}\mathrm{V}\tilde{\mathrm{V}} = 1$. Donc (H, V, U) est un système de Kac.

Remarque 6.12. — *a*) Soit (H, V, U) un système de Kac. Posons

$$\hat{\tilde{\mathrm{V}}} = \tilde{\hat{\mathrm{V}}} = (\mathrm{U} \otimes \mathrm{U})\,\mathrm{V}\,(\mathrm{U} \otimes \mathrm{U});$$

on a $(1 \otimes \mathrm{U})\,\Sigma\,\hat{\mathrm{V}}\mathrm{V}\tilde{\mathrm{V}} = \hat{\tilde{\mathrm{V}}}\hat{\mathrm{V}}\mathrm{V}\,(1 \otimes \mathrm{U})\,\Sigma$; on en déduit que $\hat{\mathrm{V}}\mathrm{V}\tilde{\mathrm{V}} = \hat{\tilde{\mathrm{V}}}\hat{\mathrm{V}}\mathrm{V} = (\mathrm{U} \otimes 1)\,\Sigma$ donc $\hat{\mathrm{V}}\mathrm{V}\tilde{\mathrm{V}} = \hat{\tilde{\mathrm{V}}}\hat{\mathrm{V}}\mathrm{V} = \tilde{\mathrm{V}}\hat{\tilde{\mathrm{V}}}\hat{\mathrm{V}} = \mathrm{V}\tilde{\mathrm{V}}\hat{\tilde{\mathrm{V}}}$.

b) L'opérateur $\mathcal{R} = \mathrm{V}\,(\mathrm{U} \otimes 1)\,\mathrm{V}\,(\mathrm{U} \otimes 1)$ vérifie l'équation de Yang-Baxter quantique: $\mathcal{R}_{12}\mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{23} = \mathcal{R}_{23}\mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{12}$. En effet, par la formule 6.1 (1), on a $\mathrm{V}_{13}\,\mathrm{V}_{12} = (1 \otimes \mathrm{U} \otimes 1)\,\mathrm{V}_{23}^*\,(1 \otimes \mathrm{U} \otimes 1)\,\mathrm{V}_{12}\,(1 \otimes \mathrm{U} \otimes 1)\,\mathrm{V}_{23}\,(1 \otimes \mathrm{U} \otimes 1) = \mathcal{R}_{23}^*\,\mathrm{V}_{12}\,\mathrm{V}_{13}\,\mathcal{R}_{23}$ et par 6.5 *c*) les unitaires V_{12} et $(\mathrm{U} \otimes 1 \otimes 1)\,\mathrm{V}_{13}\,(\mathrm{U} \otimes 1 \otimes 1)$ commutent. On a

$$\mathcal{R}_{12}\mathcal{R}_{13} = \mathrm{V}_{12}\,\mathrm{V}_{13}\,(\mathrm{U} \otimes 1 \otimes 1)\,\mathrm{V}_{12}\,\mathrm{V}_{13}\,(\mathrm{U} \otimes 1 \otimes 1)$$

et

$$\mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{12} = \mathrm{V}_{13}\,\mathrm{V}_{12}\,(\mathrm{U} \otimes 1 \otimes 1)\,\mathrm{V}_{13}\,\mathrm{V}_{12}\,(\mathrm{U} \otimes 1 \otimes 1).$$

c) Dans [11], la dualité de Takesaki est établie, pour un quintuple $(\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2, \mathrm{W}_1, \mathrm{K}_1, \mathrm{K}_2)$ où M_1 et M_2 sont deux algèbres de von Neumann agissant dans un espace de Hilbert H, W_1 est un opérateur unitaire de $\mathrm{H} \otimes \mathrm{H}$, K_1 et K_2 sont des isométries antilinéaires de H satisfaisant un certain nombre de conditions (*cf.* [11], théorème 2.5). Si $(\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2, \mathrm{W}_1, \mathrm{K}_1, \mathrm{K}_2)$ est un tel quintuple, posons $\mathrm{V} = \mathrm{W}_1^*$ et $\mathrm{U} = \mathrm{K}_1\,\mathrm{K}_2 = \mathrm{K}_2\,\mathrm{K}_1$. Alors V, $\hat{\mathrm{V}}$ et $\tilde{\mathrm{V}}$ sont multiplicatifs et on a $[\mathrm{V}_{12}, \tilde{\mathrm{V}}_{23}] = [\hat{\mathrm{V}}_{12}, \mathrm{V}_{23}] = 0$. Les conditions vi et vii de [11] theorem 2.5, s'expriment par

$$\mathrm{Ad}(\hat{\mathrm{V}}\mathrm{V})(\mathrm{M}_1 \otimes 1) = 1 \otimes \mathrm{M}_1 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Ad}(\mathrm{V}\tilde{\mathrm{V}})(\mathrm{M}_2 \otimes 1) = 1 \otimes \mathrm{M}_2.$$

Soit alors x un opérateur commutant à

$$\{\rho(\omega)\, L(\omega'),\ \omega,\ \omega' \in \mathscr{L}(H)_*\};$$

alors $y = K_2 x K_2$ commute à $\{L(\omega)\lambda(\omega'),\ \omega,\ \omega' \in \mathscr{L}(\mathscr{H})_*\}$. On en déduit que $(1 \otimes x)$ commute à $V\tilde{V}$ donc à $\mathrm{Ad}(V\tilde{V})(M_2 \otimes 1) = 1 \otimes M_2$ et $(1 \otimes y)$ commute à $\hat{V}V$ donc à $\mathrm{Ad}(\hat{V}V)(M_1 \otimes 1) = 1 \otimes M_1$. Enfin y commute à M_1 et M_2 donc est scalaire. On en déduit (proposition 6.9) que $(1 \otimes U)\Sigma\hat{V}V\tilde{V}$ est scalaire donc que $\mathrm{Ad}(\Sigma\hat{V}V)$ est l'identité sur $M_1 \otimes 1$ et $\mathrm{Ad}(\Sigma V\tilde{V})$ est l'identité sur $M_2 \otimes 1$.

7. Unitaires multiplicatifs et bidualité de Takesaki-Takai

Dans ce paragraphe nous démontrons la bidualité de Takesaki-Takai pour les systèmes de Kac. En fait les constructions et démonstrations antérieures de la bidualité s'adaptent facilement à notre cadre (*cf.* e. g. [5]).

Dans tout ce qui suit, on se fixe un système de Kac (H, V, U).

DÉFINITION 7.1. — *Soit* δ_A *une coaction de* S (*resp.* $\hat{S}$) *dans la* C*-*algèbre* A; *notons* π_L *et* π_R (*resp.* $\hat{\pi}_\lambda$ *et* $\hat{\pi}_\rho$) *les représentations de* A *dans le* C*-*module* $A \otimes H$ *définies par* $\pi_L = (\mathrm{id}_A \otimes L) \circ \delta_A$ *et* $\pi_R = (\mathrm{id}_A \otimes R) \circ \delta_A$ (*resp.* $\hat{\pi}_\lambda = (\mathrm{id}_A \otimes \lambda) \circ \delta_A$, $\hat{\pi}_\rho = (\mathrm{id}_A \otimes \rho) \circ \delta_A$).

On appelle produit croisé (*réduit*) *de* A *par la coaction* δ_A *de* S (*resp.* $\hat{S}$) *la sous* C*-*algèbre notée* $A \times \hat{S}$ (*resp.* $A \times S$) *de* $\mathscr{L}(A \otimes H)$ *engendrée par les produits* $\pi_L(a)(1_A \otimes \rho(\omega))$ (*resp.* $\hat{\pi}_\lambda(a)(1_A \otimes L(\omega))$), $a \in A$ *et* $\omega \in \mathscr{L}(H)_*$.

Comme dans le cas des groupes, nous avons:

LEMME 7.2. — (*cf.* [23]) *Le produit croisé* $A \times \hat{S}$ (*resp.* $A \times S$) *est l'adhérence de l'espace vectoriel engendré par les produits* $\pi_L(a)(1_A \otimes \rho(\omega))$ (*resp.* $\hat{\pi}_\lambda(a)(1_A \otimes L(\omega))$; $a \in A$, $\omega \in \mathscr{L}(H)_*$.

Preuve. — Il suffit de montrer, que pour $a \in A$, $\omega \in \mathscr{L}(H)_*$, le produit $(1_A \otimes \rho(\omega))\pi_L(a)$ est limite de sommes finies $\Sigma \pi_L(a_i)(1_A \otimes \rho(\omega_i)$. Soit $\tilde{\pi}$ la représentation de A dans le C*-module $A \otimes H \otimes H$ définie par $\tilde{\pi} = (\pi_L \otimes L) \circ \delta_A = (\mathrm{id}_A \otimes L \otimes L) \circ (\mathrm{id}_A \otimes \delta) \circ \delta_A$.

Nous avons

$$(1_A \otimes \rho(\omega))\pi_L(a) = (\mathrm{id}_A \otimes \mathrm{id}_H \otimes \omega)(V_{23}\pi_L(a)_{12}) = (\mathrm{id}_A \otimes \mathrm{id}_H \otimes \omega)(\tilde{\pi}(a)V_{23}).$$

Écrivant $\omega = \omega' s$ avec $s \in S$, on obtient:

$$(1_A \otimes \rho(\omega))\pi_L(a) = (\mathrm{id}_A \otimes \mathrm{id}_H \otimes \omega')(\pi_L \otimes L)((1_A \otimes s)\delta_A(a))V_{23})$$

Comme $\delta_A(a) \in M(\tilde{A} \otimes S, A \otimes S)$, le produit $(1_A \otimes s)\delta_A(a))$ est limite de sommes finies $\Sigma a_i \otimes s_i$ avec $a_i \in A$, $s_i \in S$. Donc $(1_A \otimes \rho(\omega))\pi_L(a)$ est limite de $\Sigma \pi_L(a_i)(1_A \otimes \rho(\omega' s_i))$.

L'assertion « resp. » s'obtient en remplaçant V par $\hat{V}$. ■

Le lemme précédent montre clairement que π_L (resp. $\hat{\pi}_\lambda$) définit un homomorphisme non dégénéré, noté π (resp. $\hat{\pi}$) de A dans $M(A \times \hat{S})$ (resp. $M(A \times S)$). De même, pour tout $x \in \hat{S}$ (resp. $y \in S$) on a $1_A \otimes \rho(x) \in M(A \times \hat{S})$ (resp. $1_A \otimes L(y) \in M(A \times S)$). On en déduit un homomorphisme $\hat{\theta}: \hat{S} \to M(A \times \hat{S})$ (resp. $\theta: S \to M(A \times S)$). Le lemme 7.2 dit que les produits $\pi(a)\hat{\theta}(x)$ appartiennent à $A \times \hat{S}$ et engendrent $A \times \hat{S}$ (resp. les éléments de la forme $\hat{\pi}(a)\theta(x)$ engendrent $A \times S$).

Notons $\Psi_{L,\rho}$ et $\Psi_{R,\lambda}$ (resp. $\hat{\Psi}_{\lambda,L}$ et $\hat{\Psi}_{\rho,R}$) les représentations de $A \times \hat{S}$ (resp. $A \times S$) dans $A \otimes H$ données, pour $a \in A$ et $x \in \hat{S}$ (resp. $y \in S$) par $\Psi_{L,\rho}(\pi(a)\hat{\theta}(x)) = \pi_L(a)(1_A \otimes \rho(x))$ et $\Psi_{R,\lambda}(\pi(a)\hat{\theta}(x)) = \pi_R(a)(1_A \otimes \lambda(x))$ (resp. $\hat{\Psi}_{\lambda,L}(\hat{\pi}(a)\theta(y)) = \hat{\pi}_\lambda(a)\,(1_A \otimes L(y))$ et $\hat{\Psi}_{\rho,R}(\hat{\pi}(a)\theta(y)) = \hat{\pi}_\rho(a)(1_A \otimes R(y))$).

Définition 7.3. — *Soit* δ_A *une coaction de* S (*resp.* $\hat{S}$) *dans la* C*-*algèbre* A. *On appelle coaction duale la coaction de* $\hat{S}$ (*resp. de* S) *dans* $A \times \hat{S}$ (*resp. dans* $A \times S$) *donnée par*:

$$\delta_{A \times \hat{S}}(\pi(a)\hat{\theta}(x)) = (\pi(a) \otimes 1)(\hat{\theta} \otimes \mathrm{id}) \circ \delta(x) \quad (a \in A,\ x \in \hat{S})$$

$$(\textit{resp.}\ \delta_{A \times S}(\hat{\pi}(a)\theta(x)) = (\hat{\pi}(a) \otimes 1)(\theta \otimes \mathrm{id}) \circ \delta(x) \quad (a \in A,\ x \in S)).$$

Pour montrer qu'on définit ainsi des homomorphismes il suffit de remarquer qu'on a (en utilisant 6.4):

$$(\Psi_{L,\rho} \otimes \rho) \circ \delta_{A \times \hat{S}}(x) = \tilde{V}_{23}(\Psi_{L,\rho}(x) \otimes 1_H)\tilde{V}_{23}^* \in \mathscr{L}(A \otimes H \otimes H) \quad (x \in A \times \hat{S})$$

$$(\hat{\Psi}_{\lambda,L} \otimes L) \circ \delta_{A \times S}(x) = V_{23}(\hat{\Psi}_{\lambda,L}(x) \otimes 1_H)V_{23}^* \in \mathscr{L}(A \otimes H \otimes H) \quad (x \in A \times S)$$

Nous avons:

Lemme 7.4. — *Muni de* $\delta_{A \times \hat{S}}$ (*resp.* $\delta_{A \times S}$), $A \times \hat{S}$ (*resp.* $A \times S$) *est une* $\hat{S}$-*algèbre* (*resp.* S-*algèbre*) (*définition* 0.2).

Preuve. — Posons $B = A \times \hat{S}$. De l'égalité $(\Psi_{L,\rho} \otimes \rho) \circ \delta_B(x) = \tilde{V}_{23}(\Psi_{L,\rho}(x) \otimes 1_H)\tilde{V}_{23}^*$ il résulte que δ_B est un homomorphisme involutif non dégénéré injectif de B dans $M(B \otimes \hat{S})$.

La formule $\delta_B(\pi(a)\hat{\theta}(x)) = (\pi(a) \otimes 1)(\hat{\theta} \otimes \mathrm{id}) \circ \delta(x)$ montre que δ_B prend ses valeurs dans $M(\tilde{B} \otimes \hat{S}; B \otimes \hat{S})$; comme $\hat{S}$ est simplifiable à droite, l'espace vectoriel engendré par $\delta_B(B)(1 \otimes \hat{S})$ est dense dans $B \otimes \hat{S}$. L'égalité $(\delta_B \otimes \mathrm{id}_{\hat{S}}) \circ \delta_B = (\mathrm{id}_B \otimes \delta) \circ \delta_B$ résulte de cette même formule.

L'assertion « resp. » résulte de celle-ci en remplaçant V par $\hat{V}$. ■

Soit (A, δ_A) une S-algèbre (resp. $\hat{S}$-algèbre). Soit δ_0 la coaction de S (resp. $\hat{S}$) dans $A \otimes \mathscr{K}(H)$ donnée par $\delta_0(a \otimes k) = (\delta_A(a))_{13}(1_A \otimes k \otimes 1_S)$ ($a \in A$ et $k \in \mathscr{K}(H)$). Soit $V_0 \in M(\hat{S} \otimes S)$ tel que $(\rho \otimes L)(V_0) = V$. Alors $(\rho \otimes \mathrm{id})(V_0) \in M(\mathscr{K}(H) \otimes S)$ est un cocycle pour l'action triviale sur $\mathscr{K}(H)$ (définition 0.4). Donc $1_A \otimes (\rho \otimes \mathrm{id})(V_0)$ est un cocycle pour δ_0. On définit alors une coaction de S dans $A \otimes \mathscr{K}(H)$ (resp. de $\hat{S}$ dans $A \otimes \mathscr{K}(H)$) en posant pour tout $x \in A \otimes \mathscr{K}$:

$$(\mathrm{id}_{A \otimes \mathscr{K}(H)} \otimes L) \circ \delta'_A(x) = V_{23}(\mathrm{id}_{A \otimes \mathscr{K}(H)} \otimes L) \circ \delta_0(x) V_{23}^*$$

(resp. $(\mathrm{id}_{A \otimes \mathscr{K}(H)} \otimes \rho) \circ \delta'_A(x) = \tilde{V}_{23}(\mathrm{id}_{A \otimes \mathscr{K}(H)} \otimes \rho) \circ \delta_0(x)\tilde{V}_{23}^*$).

Il est facile de voir que $(A \otimes \mathscr{K}, \delta'_A)$ est une S-algèbre (resp. $\hat{S}$-algèbre) (cela résulte d'ailleurs du théorème suivant). Généralisant la dualité de Takesaki-Takai (*cf.* [42], [50],

[18]), nous avons:

THÉORÈME 7.5. — *a) Soit* (A, δ_A) *une* S-*algèbre, alors le double produit croisé* $(A \times \hat{S}) \times S$, *muni de la coaction* $\delta_{A \times \hat{S} \times S}$ *de* S, *est canoniquement isomorphe à la* S-*algèbre* $(A \otimes \mathcal{K}, \delta'_A)$.

b) Soit (A, δ_A) *une* $\hat{S}$-*algèbre, alors le double produit croisé* $(A \times S) \times \hat{S}$, *muni de la coaction* $\delta_{A \times S \times \hat{S}}$ *de* $\hat{S}$, *est canoniquement isomorphe à la* $\hat{S}$-*algèbre* $(A \otimes \mathcal{K}, \delta'_A)$.

Preuve. — *a)* Le produit croisé $B = A \times \hat{S}$ agit de façon fidèle et non dégénérée dans le A-module $A \otimes H$. Donc $B \times S$ agit de façon fidèle et non dégénérée dans le A-module $(B \otimes H) \otimes_{\Psi_{L, \rho}} (A \otimes H) = A \otimes H \otimes H$.

Plus précisément, $B \times S$ est isomorphe au sous-espace fermé de $\mathcal{L}(A \otimes H \otimes H)$ engendré par les produits $(\pi_L(a) \otimes 1)(1_A \otimes (\rho \otimes \lambda)(\delta(x))(1_A \otimes 1_H \otimes L(y))$, $a \in A$, $x \in \hat{S}$, $y \in S$. L'automorphisme intérieur associé à $(1_A \otimes (1 \otimes U) V (1 \otimes U))$ envoie $B \times S$ sur l'espace vectoriel fermé engendré par

$$\{(\pi_L \otimes R)\delta_A(a)(1_{A \otimes H} \otimes \lambda(x) L(y))/a \in A,\ x \in \hat{S},\ y \in S\}.$$

Comme δ_A est injective, la représentation π_L est fidèle et l'application $T \to T \otimes_{\pi_L} 1$ de $\mathcal{L}(A \otimes H)$ dans $\mathcal{L}((A \otimes H) \otimes_{\pi_L} (A \otimes H))$ est injective. Mais, à travers l'identification

$$(A \otimes H) \otimes_{\pi_L} (A \otimes H) \cong A \otimes H \otimes H,$$

on a les égalités

$$1_{A \otimes H} \otimes \lambda(x) L(y) = (1_A \otimes \lambda(x) L(y)) \otimes_{\pi_L} 1 \qquad \text{et} \qquad (\pi_L \otimes R)\delta_A(a) = \pi_R(a) \otimes_{\pi_L} 1.$$

Il en résulte que $A \times \hat{S} \times S$ s'identifie à la sous-algèbre C de $\mathcal{L}(A \otimes H)$ adhérence normique de l'espace vectoriel engendré par $\{\pi_R(a)(1_A \otimes \lambda(x) L(y))/a \in A,\ x \in \hat{S},\ y \in S\}$. Comme l'espace vectoriel fermé engendré par $\{\lambda(x) L(y)/x \in \hat{S},\ y \in S\}$ est $\mathcal{K}(H)$, C est l'adhérence normique de l'espace vectoriel engendré par $\{\pi_R(a)(1_A \otimes k)/a \in A,\ k \in \mathcal{K}(H)\}$; comme l'espace vectoriel fermé engendré par $\delta_A(A)(1 \otimes S)$ est $A \otimes S$, on trouve $C = A \otimes \mathcal{K}(H)$.

Pour montrer que la coaction $\delta_{A \times \hat{S} \times S}$ s'identifie à la coaction δ'_A, il suffit de vérifier que

$$\delta'_A(\pi_R(a)(1_A \otimes \lambda(x) L(y)) = (\pi_R(a)(1_A \otimes \lambda(x)) \otimes 1_S) 1_A \otimes (L \otimes \mathrm{id}_S) \circ \delta(y)$$

$(a \in A,\ x \in \hat{S},\ y \in S)$. Or

$$\begin{aligned}(\mathrm{id}_{A \otimes H} \otimes L) \circ \delta_0(\pi_R(a)) &= \Sigma_{23}(\pi_L \otimes R) \circ \delta_A(a) \Sigma_{23} \\ &= \Sigma_{23}(1_A \otimes 1 \otimes U) V_{23}(\pi_L(a) \otimes 1) V_{23}^*(1_A \otimes 1 \otimes U)\Sigma_{23} \\ &= \tilde{V}_{23}\, \pi_L(a)_{13}\, \tilde{V}_{23}^*\end{aligned}$$

Donc $(\mathrm{id}_{A \otimes H} \otimes L) \circ \delta'_A(\pi_R(a)) = V_{23} \tilde{V}_{23}\, \pi_L(a)_{13}\, \tilde{V}_{23}^* V_{23}^* = \pi_R(a) \otimes 1$.

Remarquons enfin que

$$(\mathrm{id}_{A\otimes H}\otimes L)\circ\delta'_A(1_A\otimes\lambda(x)L(y))=1_A\otimes V(\lambda(x)L(y)\otimes 1)V^*$$
$$=(1_A\otimes\lambda(x)\otimes 1)(1_A\otimes(L\otimes L)\circ\delta(y))$$

En remplaçant V par $\hat{V}$, on obtient le *b*). ■

PROPOSITION 7.6. — *Soit* δ_A *une coaction de* S (*resp.* $\hat{S}$) *dans la* C*-*algèbre* A *et* $u\in M(A\otimes S)$ (*resp.* $u\in M(A\otimes\hat{S})$) *un cocycle pour* δ_A *tel que* $\delta_{A,u}$(*cf. définition* 0.4) *soit une coaction. Notons* B *et* B_u *les produits croisés respectifs de* A *par les coactions* δ_A *et* $\delta_{A,u}$. *Munies des coactions duales, les* $\hat{S}$-*algèbres* (*resp.* S-*algèbres*) B *et* B_u *sont isomorphes de façon équivariante.*

Preuve. — La formule $\Delta\begin{bmatrix}a_{1,1} & a_{1,2}\\ a_{2,1} & a_{2,2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\delta_A(a_{1,1}) & u\,\delta_A(a_{1,2})\\ \delta_A(a_{2,1})u^* & \delta_{A,u}(a_{2,2})\end{bmatrix}$ définit une coaction Δ de S dans $M_2(A)$. Soit B_Δ le produit croisé de $M_2(A)$ par la coaction Δ et $\pi_\Delta : M_2(A)\to M(B_\Delta)$ l'homomorphisme associé. Notons $(e_{i,j})$ $i,j\in\{1,2\}$ l'unité matricielle de $M(M_2(A))$. Les $\hat{S}$-algèbres B et B_u sont respectivement isomorphes de façon équivariante à $\pi_\Delta(e_{1,1})B_\Delta\pi_\Delta(e_{1,1})$ et $\pi_\Delta(e_{2,2})B_\Delta\pi_\Delta(e_{2,2})$. L'automorphisme intérieur associé à $\pi_\Delta(e_{1,2})$ donne l'isomorphisme cherché. ■

Remarques 7.7. — *a*) Tout ceci reste vrai dans le cadre des produits croisés d'algèbres de von Neumann: Soit (H, V, U) un système de Kac. Notons M le bicommutant de L(S) et $\hat{M}$ celui de $\rho(\hat{S})$. Ce sont des algèbres de Hopf von Neumann au sens de [10]. Une coaction de M (resp. $\hat{M}$) sur une algèbre de von Neumann A est un homomorphisme normal $\delta_A : A\to A\otimes M$ (resp. $\delta_A : A\to A\otimes\hat{M}$) tel que $(\mathrm{id}\otimes\delta)\circ\delta_A=(\delta_A\otimes\mathrm{id})\circ\delta_A$. Si A est munie d'une coaction de M (resp. $\hat{M}$) le produit croisé $A\times\hat{M}$ (resp. $A\times M$) est la sous-algèbre de von Neumann de $A\otimes\mathscr{L}(H)$ engendrée par $(\mathrm{id}\otimes L)\circ\delta_A(A)$ et $(1\otimes\rho(b))$ $b\in\hat{S}$ (resp. par $(\mathrm{id}\otimes\rho)\circ\delta_A(A)$ et $(1\otimes R(a))$ $a\in S$); elle est naturellement munie d'une coaction de $\hat{M}$ (resp. M). Les démonstrations de [5] et [7] s'adaptent sans peine et montrent que le double produit croisé $(A\times\hat{M})\times M$ (resp. $(A\times M)\times\hat{M}$) est isomorphe à $A\otimes\mathscr{L}(H)$. Remarquons que cette dualité de Takesaki s'obtient sous des hypothèses de régularité affaiblies.

b) On peut aussi généraliser à ce cadre les constructions de [2] paragraphe 6: on construit des homomorphismes naturels $J_S : KK_S(A, B)\to KK_{\hat{S}}(A\times\hat{S}, B\times\hat{S})$ et $J_{\hat{S}} : KK_{\hat{S}}(A, B)\to KK_S(A\times S, B\times S)$ et on démontre qu'à travers l'équivalence de Morita équivariante provenant de la bidualité (théorème 7.5) ces homomorphismes sont inverses l'un de l'autre.

8. Exemples de systèmes de Kac: couples assortis

Dans [46, 28, 29] est définie une notion de « couple assorti » (matched pair) d'algèbres de Hopf dans un contexte algébrique. Il est à noter que les formules définissant les couples assortis sont aussi données dans [34] de façon « duale ». C'est d'ailleurs cette présentation, qui convient mieux aux C*-d'algèbres, que nous adoptons ici. A partir de la notion de couple assorti d'algèbres de Hopf, nous donnons une notion de couple assorti de systèmes de Kac. A un tel couple correspondent deux nouveaux systèmes de Kac : leur produit tensoriel « tordu » et leur biproduit croisé.

Nous décrivons trois exemples de couples assortis de systèmes de Kac :

a) le couple assorti associé à une action d'un groupe localement compact par automorphismes d'un système de Kac; dans ce cas, le produit tensoriel tordu et le biproduit croisé donnent des résultats tout à fait similaires et généralisent aux systèmes de Kac les produits croisés d'une algèbre de Kac von Neumann par un groupe d'automorphismes.

b) à tout système de Kac est associé un couple assorti, dont le produit tensoriel tordu est l'analogue dans notre cadre du double de Drinfeld (*cf.* [4], § 13). De plus, comme dans le cas algébrique [4], un opérateur unitaire R « universel » satisfaisant l'équation de Yang-Baxter quantique est associé au double quantique. Dans ce cas le biproduit croisé est « trivial ».

c) un couple assorti est associé à deux sous-groupes G_1 et G_2 d'un groupe G tels que l'application $(x, y) \to xy$ soit une bijection de $G_1 \times G_2$ sur G. Dans ce cas, le produit tensoriel tordu est le système de Kac du groupe G; le biproduit croisé est la réalisation du « bicrossed product » de [27] en tant que système de Kac.

En particulier notre construction établit la dualité de Takesaki-Takai pour toutes ces algèbres.

Commençons par rappeler la définition d'un couple assorti de C*-algèbres de Hopf :

Définition 8.1 [46], [28]. — *Soient* (A, δ_A) *et* (B, δ_B) *deux* C*-*algèbres de Hopf. Une* inversion *sur* A, B *est un *-isomorphisme* $\tau : A \otimes B \to B \otimes A$ *tel que, en étendant* τ *aux multiplicateurs on ait* :

$$(\tau \otimes \mathrm{id}_A)(\mathrm{id}_A \otimes \tau)(\delta_A \otimes \mathrm{id}_B) = (\mathrm{id}_B \otimes \delta_A)\tau$$

et

$$(\mathrm{id}_B \otimes \tau)(\tau \otimes \mathrm{id}_B)(\mathrm{id}_A \otimes \delta_B) = (\delta_B \otimes \mathrm{id}_A)\tau.$$

A une inversion sur A, B est naturellement associé un coproduit sur $A \otimes B$.

Définition 8.2. — *Soient* (A, δ_A) *et* (B, δ_B) *deux* C*-*algèbres de Hopf et* τ *une inversion sur* A, B. *On appelle coproduit associé à* τ *l'application*

$$\delta_\tau = (\mathrm{id}_A \otimes \tau \otimes \mathrm{id}_B)(\delta_A \otimes \delta_B) : A \otimes B \to M(A \otimes B \otimes A \otimes B)$$

Il résulte immédiatement de la définition d'une inversion :

Proposition 8.3. — *Le coproduit associé à toute inversion est coassociatif.*

Regroupons dans une proposition quelques propriétés élémentaires des inversions :

Proposition 8.4. — *a*) *La volte* $\sigma : A \otimes B \to B \otimes A$ *définie par* $\sigma(a \otimes b) = b \otimes a$ *est une inversion.*

Soient (A, δ_A) *et* (B, δ_B) *deux* C*-*algèbres de Hopf et* τ *une inversion sur* A, B.

b) *Alors* τ^{-1} *est une inversion sur* B, A *et* $\sigma\tau^{-1}\sigma$ *est une inversion sur* A, B *munies des coproduits opposés.*

c) En étendant τ *aux multiplicateurs on obtient deux homomorphismes* $\alpha : A \to M(B \otimes A)$ *et* $\beta : B \to M(B \otimes A)$ *donnés par* $\alpha(x) = \tau(x \otimes 1)$ *et* $\beta(y) = \tau(1 \otimes y)$. *Alors* β (*resp.* α) *est une coaction à droite* (*resp. à gauche*) *de* A *sur* B (*resp. de* B *sur* A).

PROPOSITION 8.5. — *Soient* (A, δ_A) *et* (B, δ_B) *deux* C*-*algèbres de Hopf bisimplifiables et* τ *une inversion sur* A, B. *Alors* $(A \otimes B, \delta_\tau)$ *est une* C*-*algèbre de Hopf bisimplifiable.*

Preuve. — Pour $x \in A$, $z \in A \otimes B$, on a

$$(1 \otimes 1 \otimes x)(\mathrm{id}_A \otimes \tau)(\delta_A \otimes \mathrm{id})(z) = (\tau^{-1} \otimes \mathrm{id}_A)((1 \otimes 1 \otimes x)(\mathrm{id}_B \otimes \delta_A)\tau(z));$$

donc, comme A est une C*-algèbre de Hopf bisimplifiable, le sous-espace vectoriel fermé (en norme) de $M(A \otimes B \otimes A)$ engendré par $\{(1 \otimes 1 \otimes x)(\mathrm{id}_A \otimes \tau)(\delta_A \otimes \mathrm{id})(z), x \in A, z \in A \otimes B\}$ est $A \otimes B \otimes A$.

Pour $x, x' \in A$, $y, y' \in B$,

$$(1 \otimes 1 \otimes x \otimes y)\delta_\tau(x' \otimes y') = (1 \otimes 1 \otimes x \otimes 1)(\mathrm{id}_A \otimes \tau \otimes \mathrm{id}_B)(\delta_A(x') \otimes z)$$

avec $z = (1 \otimes y)\delta_B(y')$. Comme B est une C*-algèbre de Hopf bisimplifiable, le sous-espace vectoriel fermé de $M(A \otimes B \otimes A \otimes B)$ engendré par $\{(1 \otimes z)\delta_\tau(z'), z, z' \in A \otimes B\}$ coïncide avec celui engendré par $\{((1 \otimes 1 \otimes x)(\mathrm{id}_A \otimes \tau)(\delta_A \otimes \mathrm{id})(z)) \otimes y, x \in A, z \in A \otimes B, y \in B\}$; c'est donc $A \otimes B \otimes A \otimes B$.

On démontre de façon analogue que le sous-espace vectoriel fermé de $M(A \otimes B \otimes A \otimes B)$ engendré par $\{(z \otimes 1)\delta_\tau(z'), z, z' \in A \otimes B\}$ est aussi $A \otimes B \otimes A \otimes B$. ■

DÉFINITION 8.6. — *La* C*-*algèbre de Hopf* $(A \otimes B, \delta_\tau)$ *associée à l'inversion* τ *s'appelle le* τ-*produit tensoriel de* (A, δ_A) *par* (B, δ_B).

Le produit tensoriel ordinaire de (A, δ_A) par (B, δ_B) est donc le σ-produit tensoriel où σ est la volte.

Soient $X \in \mathscr{L}(H \otimes H)$ et $Y \in \mathscr{L}(K \otimes K)$ deux unitaires multiplicatifs réguliers. Notons S_X, $\hat{S}_X$, S_Y et $\hat{S}_Y$ les C*-algèbres de Hopf associées à X et Y. Donnons nous une inversion $\tau : S_X \otimes \hat{S}_Y \to \hat{S}_Y \otimes S_X$ sur $(S_X, \hat{S}_Y)$. Notons alors a et b les opérateurs unitaires $a = (\mathrm{id}_{K \otimes H} \otimes \tau)(X_{23})$ et $b = (\tau \otimes \mathrm{id}_{K \otimes H})(Y_{23})$ agissant sur $K \otimes H \otimes K \otimes H$, et posons $T = ba$.

PROPOSITION 8.7. — *L'opérateur unitaire* T *est multiplicatif.*

Cet opérateur s'appelle le « biproduit croisé » de X et Y relativement à τ.

Pour établir cette proposition, nous aurons besoin d'un lemme.

LEMME 8.8. — *a) Pour* $x \in S_X$ *on a* $T(\tau(x \otimes 1_K) \otimes 1_{K \otimes H})T^* = (\tau \otimes \tau)(\delta(x)_{13})$.

b) Pour $y \in \hat{S}_Y$ *on a* $T^*(1_{K \otimes H} \otimes \tau(1_H \otimes y))T = (\tau \otimes \tau)(\delta(y)_{24})$.

Preuve. — *a*) On a

$$a(\tau(x \otimes 1_K) \otimes 1_{K \otimes H})a^* = (\mathrm{id}_K \otimes \mathrm{id}_H \otimes \tau)(\mathrm{id}_K \otimes \delta_X \otimes \mathrm{id}_K)(\tau \otimes \mathrm{id}_K)(x \otimes 1_{K \otimes K})$$

Or $(\mathrm{id}_H \otimes \tau)\ (\delta_X \otimes \mathrm{id}_K) = (\tau^{-1} \otimes \mathrm{id}_H)\ (\mathrm{id}_K \otimes \delta_X)\tau$ et comme $\delta_Y(1_K) = 1_{K \otimes K}$ on a $(\mathrm{id}_K \otimes \tau)(\tau \otimes \mathrm{id}_K)(x \otimes 1_{K \otimes K}) = (\delta_Y \otimes \mathrm{id}_H)\tau(x \otimes 1_K)$. Donc

$$
\begin{aligned}
a(\tau(x \otimes 1_K) \otimes 1_{K \otimes H})a^* &= (\mathrm{id}_K \otimes \tau^{-1} \otimes \mathrm{id}_H)(\delta_Y \otimes \delta_X)\tau(x \otimes 1_K) \\
&= ((\tau \otimes \mathrm{id}_K)(\mathrm{id}_H \otimes \delta_Y)\tau^{-1} \otimes \mathrm{id}_H)(\mathrm{id}_K \otimes \delta_X)\tau(x \otimes 1_K) \\
&= ((\tau \otimes \mathrm{id}_K)(\mathrm{id}_H \otimes \delta_Y) \otimes \mathrm{id}_H)(\mathrm{id}_H \otimes \tau)(\delta_X(x) \otimes 1_K)
\end{aligned}
$$

Pour $z \in M(S_X \otimes \hat{S}_Y \otimes \mathscr{K}(H))$ on a

$$Y_{23}(\mathrm{id}_H \otimes \delta_Y \otimes \mathrm{id}_H)(z)Y_{23}^* = z_{134}$$

donc $b((\tau \otimes \mathrm{id}_K)(\mathrm{id}_H \otimes \delta_Y) \otimes \mathrm{id}_H)(z)b^* = (\tau \otimes \mathrm{id}_{K \otimes H})(z_{134})$.

Il s'ensuit que $T(\tau(x \otimes 1_K) \otimes 1_{K \otimes H})T^* = (\tau \otimes \mathrm{id}_{K \otimes H})((id_H \otimes \tau)(\delta_X(x) \otimes 1_K))_{134})$.

b) On a

$$
\begin{aligned}
b^*(1_{K \otimes H} \otimes \tau(1_H \otimes y))b &= (\tau \otimes \mathrm{id}_K \otimes \mathrm{id}_H)(\mathrm{id}_H \otimes \delta_Y \otimes \mathrm{id}_H)(\mathrm{id}_H \otimes \tau)(1_{H \otimes H} \otimes y) \\
&= (\mathrm{id}_K \otimes \tau^{-1} \otimes \mathrm{id}_H)(\delta_Y \otimes \delta_X)\tau(1_H \otimes y) \\
&= (\mathrm{id}_K \otimes \mathrm{id}_H \otimes \tau)(\mathrm{id}_K \otimes \delta_X \otimes \mathrm{id}_K)(\tau \otimes \mathrm{id}_K)(1_H \otimes \delta_Y(y))
\end{aligned}
$$

Or, pour $z \in M(\mathscr{K}(K) \otimes S_X \otimes \hat{S}_Y)$ on a :

$$a^*(\mathrm{id}_K \otimes \mathrm{id}_H \otimes \tau)(\mathrm{id}_K \otimes \delta_X \otimes \mathrm{id}_K)(z)a = (\mathrm{id} \otimes \tau)(z_{124}).$$

Il s'ensuit que

$$T^*(1_{K \otimes H} \otimes \tau(1_H \otimes y))T = (\mathrm{id}_{K \otimes H} \otimes \tau)(((\tau \otimes \mathrm{id}_K)(1_H \otimes \delta_Y(y)))_{124}). \quad \blacksquare$$

Preuve de la proposition 8.7. — Remarquons que a_{23} et b_{12} commutent. Or, $a_{12} = (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id})(X_{23})$ et $b_{23} = (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id})(Y_{45})$; donc a_{12} et b_{23} commutent également. Donc $b_{23}T_{12}^*a_{23} = a_{12}^*T_{23}b_{12}^*$.

Par le lemme 8.8 on a $T_{23}a_{12}T_{23}^* = a_{12}a_{13}$ et $T_{12}^*b_{23}T_{12} = b_{13}b_{23}$. Donc

$$
\begin{aligned}
T_{12}^*T_{23}T_{12}T_{23}^* &= T_{12}^*b_{23}T_{12}T_{12}^*a_{23}T_{12}T_{23}^* = b_{13}b_{23}T_{12}^*a_{23}T_{12}T_{23}^* \\
&= b_{13}a_{12}^*T_{23}b_{12}^*T_{12}T_{23}^* = b_{13}a_{12}^*T_{23}a_{12}T_{23}^* = b_{13}a_{13} = T_{13}. \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

Reprenons les notations ci-dessus et supposons à présent que $\tau : S_X \otimes S_Y \to S_Y \otimes S_X$ est une inversion sur (S_X, S_Y). On peut, si Y est irréductible, former le « biproduit croisé » de X et $\hat{Y}$. Pour construire l'unitaire multiplicatif V associé au τ-produit tensoriel de S_X par S_Y, nous devons de plus supposer que l'inversion τ est « bien » implémentée.

Supposons donc qu'il existe un opérateur unitaire $Z' \in \mathscr{L}(H \otimes K, K \otimes H)$ tel que pour tout $x \in S_X \otimes S_Y$; on a $Z'xZ'^* = \tau(x)$. Notons $s \in \mathscr{L}(H \otimes K, K \otimes H)$ la volte et posons $Z = s^*Z' \in \mathscr{L}(H \otimes K)$. Posons enfin $V = (Z_{12}^*X_{13}Z_{12})Y_{24} = (Z_{12}'^*X_{23}Z_{12}')Y_{24}$.

LEMME 8.9. — *a*) $V \in M(\mathscr{K}(H \otimes K) \otimes S_X \otimes S_Y)$.

b) *Pour tout* $x \in S_X \otimes S_Y$ *on a* $V(x \otimes 1_{H \otimes K})V^* = \delta_\tau(x)$.

Preuve. — *a*) résulte de ce que, comme X et Y sont supposés réguliers, Z_{12}, X_{13} et Y_{24} sont tous trois des multiplicateurs de $\mathscr{K}(H \otimes K) \otimes S_X \otimes S_Y$.

b) Pour tout $x \in S_X \otimes S_Y$ donc :

$$\begin{aligned} V(x \otimes 1_{H \otimes K}) V^* &= (Z'^*_{12} X_{23} Z'_{12})((\mathrm{id} \otimes \delta_Y)(x))_{124} (Z'^*_{12} X^*_{23} Z'_{12}) \\ &= (Z'^*_{12} X_{23})((\tau \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes \delta_Y)(x))_{124} (X^*_{23} Z'_{12}) \\ &= Z'^*_{12}((\mathrm{id} \otimes \delta_X \otimes \mathrm{id})(\tau \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes \delta_Y)(x)) Z'_{12} \\ &= (\tau^{-1} \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes \delta_X \otimes \mathrm{id})(\tau \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes \delta_Y)(x) = \delta_\tau(x) \end{aligned}$$

étant donné que $(\tau^{-1} \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes \delta_X)\tau = (\mathrm{id} \otimes \tau)(\delta_X \otimes \mathrm{id})$. ∎

PROPOSITION 8.10. — *a*) *Les conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) $Z_{34}(Z^*_{12} X_{13} Z_{12}) Y_{24} = Y_{24}(Z^*_{12} X_{13} Z_{12}) Z_{34}$.

(ii) $(\mathrm{id} \otimes \delta_\tau)(V) = V_{12} V_{13}$.

(iii) *Les unitaires* V *et* $Z^*_{34} Y_{24}$ *commutent.*

(iv) *L'unitaire* V *est multiplicatif.*

b) *Sous ces conditions, l'unitaire multiplicatif* V *est régulier. Si de plus* X *et* Y *sont biréguliers, il en va de même pour* V.

Preuve. — *a*) L'opérateur $(\mathrm{id} \otimes \delta_X \otimes \delta_Y)(V)$ est donné par

$$(Z^*_{12} X_{13} Z_{12})(Z^*_{12} X_{14} Z_{12}) Y_{25} Y_{26}$$

donc $(\mathrm{id} \otimes \delta_\tau)(V)$ est donné par

$$Z_{54}(Z^*_{12} X_{13} Z_{12})(Z^*_{12} X_{15} Z_{12}) Y_{24} Y_{26} Z^*_{54} = (Z^*_{12} X_{13} Z_{12}) Z_{54}(Z^*_{12} X_{15} Z_{12}) Y_{24} Z^*_{54} Y_{26}$$

L'égalité $(\mathrm{id} \otimes \delta_\tau)(V) = V_{12} V_{13}$ équivaut donc à

$$Z_{54}(Z^*_{12} X_{15} Z_{12}) Y_{24} Z^*_{54} = Y_{24}(Z^*_{12} X_{15} Z_{12}),$$

d'où l'équivalence (i) $\Leftrightarrow$ (ii).

L'équivalence (i) $\Leftrightarrow$ (iii) est élémentaire et (ii) $\Leftrightarrow$ (iv) résulte du lemme 8.9 *b*).

b) Les adhérences des espaces vectoriels engendrés par

$$\{(k \otimes 1) V (1 \otimes h)\, k,\ h \in \mathscr{K}(H \otimes K)\}$$

et par

$$\{(h_1 \otimes k_1 \otimes 1_{H \otimes K}) X_{13} Z_{12} Y_{24} (1_{H \otimes K} \otimes h_2 \otimes k_2)\, h_1,\ h_2 \in \mathscr{K}(H), k_1,\ k_2 \in \mathscr{K}(K)\}$$

coïncident. Comme

$$\begin{aligned} &(h_1 \otimes k_1 \otimes 1_{H \otimes K}) X_{13} Z_{12} Y_{24} (1_{H \otimes K} \otimes h_2 \otimes k_2) \\ &\qquad = ((h_1 \otimes 1) X (1 \otimes h_2))_{13} ((1 \otimes k_1) Z)_{12} (Y (1 \otimes k_2))_{24} \end{aligned}$$

la régularité de V résulte de celles de X et Y. Une démonstration analogue s'applique pour la birégularité. ∎

Remarque. — Si V est multiplicatif on a $(Z \otimes Z) V (Z^* \otimes Z^*) = (Z_{12} Y_{24} Z_{12}^*) X_{13}$ (condition (i)).

Donnons nous à présent deux systèmes de Kac (H, X, u), (K, Y, v), une inversion $\tau : S_X \otimes S_Y \to S_Y \otimes S_X$ et un opérateur unitaire $Z' \in \mathcal{L}(H \otimes K, K \otimes H)$ tel que pour tout $x \in S_X \otimes S_Y$; on a $Z' x Z'^* = \tau(x)$. Notons encore $s \in \mathcal{L}(H \otimes K, K \otimes H)$ la volte et posons $Z = s^* Z' \in \mathcal{L}(H \otimes K)$. Posons enfin $U = (u \otimes v) Z$ et supposons que $U^2 = 1$.

COROLLAIRE 8.11. — *Si l'unitaire* V *est multiplicatif, il en va de même pour l'unitaire* $V' = (U \otimes 1) V^* (U \otimes 1)$.

Preuve. — Posons $X' = (v \otimes 1) Y^* (v \otimes 1)$, $Y' = (u \otimes 1) X^* (u \otimes 1)$ et $Z'' = s^* Z' s^*$. Comme (K, X', v) et (H, Y', u) sont des systèmes de Kac et que Z'' implémente l'inversion $\sigma^{-1} \tau \sigma^{-1}$ sur $S_{X'}$, $S_{Y'}$ (proposition 8.4 *b*), il résulte de la proposition 8.10 *a*) que l'unitaire $V'' = (Z''^*_{12} X'_{23} Z''_{12}) Y'_{24}$ est multiplicatif; or $V'' = (s \otimes s) V' (s^* \otimes s^*)$. ■

Il sera utile de considérer des inversions qui ont un bon comportement analytique :

DÉFINITION 8.12. — *Un couple assorti de* C*-*algèbres de Hopf est donné par deux* C*-*algèbres de Hopf bisimplifiables* (A, δ_A) *et* (B, δ_B) *et une inversion* τ *sur* (A, B) *telle que les coactions* α *et* β *munissent respectivement* A *d'une structure de* B-*algèbre* (*à gauche*) *et* B *d'une structure de* A-*algèbre*.

Autrement dit, cela revient à supposer que les sous-ensembles

$$\{\alpha(x)(y \otimes 1)/x \in A,\ y \in B\} \qquad \text{et} \qquad \{\beta(y)(1 \otimes x)/x \in A,\ y \in B\}$$

de $M(B \otimes A)$ sont des sous-ensembles totaux de $B \otimes A$.

Afin de construire un système de Kac associé aux deux constructions ci-dessus nous utiliserons la condition suivante :

DÉFINITION 8.13. — *Un couple assorti de systèmes de Kac est donné par deux systèmes de Kac* (H, X, u) *et* (K, Y, v) *et un opérateur unitaire* $Z \in \mathcal{L}(H \otimes K)$ *tels que* :

a) Z *normalise* $S_X \otimes S_Y$ *et* $(S_X, S_Y, \sigma \operatorname{Ad}(Z))$ *est un couple assorti de* C*-*algèbres de Hopf* (*où* $\sigma : S_X \otimes S_Y \to S_Y \otimes S_X$ *est la volte*).

b) $(H \otimes K, V, U)$ *est un système de Kac où* $V = (Z_{12}^* X_{13} Z_{12}) Y_{24}$ *et* $U = (u \otimes v) Z$.

PROPOSITION 8.14. — *Soit* $((H, X, u); (K, Y, v); Z)$ *un couple assorti de systèmes de Kac. Définissons l'unitaire* $W = (Z_{34}^* \hat{Y}_{24} Z_{34})(Z_{12}^* X_{13} Z_{12})$ *agissant dans* $H \otimes K \otimes H \otimes K$. *Alors* $(H \otimes K, W, U)$ *est un système de Kac. L'algèbre de Hopf* S *associée à* V *est* $(S_X \otimes S_Y, \delta_\tau)$. *Pour* $x \in \hat{S}_X$ *et* $y \in \hat{S}_Y$ *on pose* $\pi(x) = Z^*(x \otimes 1_K) Z$ *et* $\pi'(y) = 1_H \otimes y$. *Alors* $\pi : \hat{S}_X \to M(\hat{S}_V)$ *et* $\pi' : \hat{S}_Y \to M(\hat{S}_V)$ *sont des morphismes d'algèbres de Hopf et* $\hat{S}_V$ *est l'espace vectoriel fermé engendré par les produits* $\pi(x)\pi'(y)$, $x \in \hat{S}_X$, $y \in \hat{S}_Y$. *L'algèbre* S *associée à* W *est isomorphe à* $S_X \times_\alpha \hat{S}_Y$*; l'algèbre* $\hat{S}$ *associée à* W *est isomorphe à* $S_Y \times_\beta \hat{S}_X$.

DÉFINITION 8.15. — *Avec les notations de la proposition* 14, *le système de Kac* $(H \otimes K, V, U)$ *s'appelle le* Z-*produit tensoriel de* (H, X, u) *par* (K, Y, v)*; le système de Kac* $(H \otimes K, W, U)$ *s'appelle le biproduit croisé de* (H, X, u) *par* (K, Y, v) *relativement à* Z.

Preuve de la proposition 8.14. — On a $W=(sZ\otimes sZ)^* T(sZ\otimes sZ)$ où $s\in\mathscr{L}(H\otimes K, K\otimes H)$ est la volte donc W est multiplicatif. Posons $a=Z_{12}^* X_{13} Z_{12}$ et $b=Y_{24}$. On a $(1\otimes U)\Sigma b\Sigma(1\otimes U)=Z_{34}^*\hat{Y}_{24}Z_{34}$. Donc $(\Sigma(1\otimes U)ab)^3=1$ si et seulement si $(b\Sigma(1\otimes U)a)^3=1$ *i.e.* $(\Sigma(1\otimes U)W)^3=1$.

Soient $a\in S_X$ et $b\in S_Y$ et $\omega\in\mathscr{L}(H\otimes K)_*$.

On a

$$L_V((a\otimes 1)\omega(1\otimes b)Z)=(\omega\otimes\mathrm{id})(X_{13}x_{12}Z_{12}Y_{24}) \quad \text{où } x=(1\otimes b)\sigma^{-1}\tau(a\otimes 1)\in S_X\otimes S_Y.$$

Donc S_V est l'espace vectoriel fermé engendré par

$$\{(\omega\otimes\mathrm{id})(X_{13}x_{12}Z_{12}Y_{24})/\omega\in\mathscr{L}(H\otimes K)_*, x\in S_X\otimes S_Y\}.$$

Or l'espace vectoriel fermé engendré par $\{(k\otimes 1)X(a\otimes 1)\, a\in S_X, k\in\mathscr{K}(H)\}$ est $\mathscr{K}(H)\otimes S_X$. Donc S_V est $S_X\otimes S_Y$. Le coproduit de S_V est donné par le lemme 8.9 *b*).

Pour $\omega_1\in\mathscr{L}(H)_*$ et $\omega_2\in\mathscr{L}(K)_*$ on a $\rho_V(\omega_1\otimes\omega_2)=\pi(\rho_X(\omega_1))\pi'(\rho_Y(\omega_2))$. De plus $V^*(1\otimes\pi'(y))V=Y_{24}^*(1\otimes\pi'(y))Y_{24}=(\pi'\otimes\pi')\delta_Y(y)$. La propriété analogue pour π se démontre de même en utilisant la remarque qui suit la proposition 8.10.

On a aussi

$$L_W(Z^*(1\otimes b)\omega(a\otimes 1))=Z^*(\omega\otimes\mathrm{id})(\hat{Y}_{24}(Z^*\otimes Z)y_{12}X_{13})$$

où $y=\sigma^{-1}\tau(a\otimes 1)(1\otimes b)\in S_X\otimes S_Y$. Il en résulte que S_W est engendré par $\{Z^*(\omega\otimes\mathrm{id})(\hat{Y}_{24}(Z^*\otimes Z)y_{12}X_{13})/\omega\in\mathscr{L}(H\otimes K)_*, y\in S_X\otimes S_Y\}$. Or l'espace vectoriel fermé engendré par $\{(a\otimes 1)X(k\otimes 1)\, a\in S_X, k\in\mathscr{K}(H)\}$ est $\mathscr{K}(H)\otimes S_X$. Donc S_W est engendré par $\{Z^*(1\otimes y)Z(a\otimes 1)/a\in S_X, y\in\lambda(\hat{S}_Y)\}$ donc est isomorphe à $S_X\times_\alpha\hat{S}_Y$.

De même $\hat{S}_W$ est engendré par $\{(1\otimes b)Z^*(x\otimes 1)Z, b\in S_Y, x\in\hat{S}_X\}$.

Comme S_V et US_VU commutent, il en résulte que pour $a, a'\in S_X$, $a\otimes 1$ et $U(a'\otimes 1)U$ commutent; comme $\hat{S}_V$ et $U\hat{S}_VU$ commutent, il en résulte que pour $y, y'\in\hat{S}_Y$, $1\otimes y=UZ^*(1\otimes\lambda(y))ZU$ et $U(1\otimes y')U=Z^*(1\otimes\lambda(y'))Z$ commutent. Il en résulte que S_W et US_WU commutent. Posons

$$\hat{W}=\Sigma(U\otimes 1)W(U\otimes 1)\Sigma.$$

Alors $\hat{W}W\Sigma=(U\otimes U)W^*(1\otimes U)$ commute à $1\otimes x$, $x\in S_W$ donc

$$(\Sigma\hat{W}W)_{23}W_{12}=W_{12}(\Sigma\hat{W}W)_{23};$$

il en résulte que $\hat{W}$ est multiplicatif.

Reste la birégularité de W. Pour $a\in S_X$, $b\in S_Y$, $x\in\hat{S}_X$ et $y\in\lambda(\hat{S}_Y)$ on a $(Z^*(x\otimes 1)Z(1\otimes b))\ ((a\otimes 1)Z^*(1\otimes y)Z)=Z^*(x\otimes 1)(\sigma^{-1}\tau(a\otimes b))(1\otimes y)Z$ et donc l'espace vectoriel engendré par $\hat{S}_W S_W$ est l'algèbre des compacts. Il résulte de 6.9 que W est régulier.

Pour h, $k\in\mathscr{K}(H\otimes K)$ a, $a'\in S_X$, $b\in S_Y$, on a

$$W(a'\otimes 1_{K\otimes H\otimes K})=\delta(a')_{13}W$$

(lemme 8.8 *a*) donc

$$(1_{H\otimes K}\otimes h(a\otimes 1_K))\,W((a'\otimes b)k\otimes 1_{H\otimes K})$$
$$=(1_{H\otimes K}\otimes h)((1_H\otimes a)\delta(a'))_{13}\,W((1_H\otimes b)k\otimes 1_{H\otimes K}).$$

Soient $a\in S_X$ et $b\in S_Y$; posons $x=(\sigma^{-1}\tau(a\otimes 1))(1\otimes b)\in S_X\otimes S_Y$; pour $h, k\in\mathscr{K}(H\otimes K)$ on a

$$(a\otimes 1_K\otimes hZ)\,W(Z^*(1_H\otimes b)k\otimes 1_{H\otimes K})=(1\otimes h)(\hat{Y}_{24}(Z^*x\otimes Z)X_{13}(k\otimes 1).$$

Il en résulte que l'espace vectoriel fermé par

$$\{(1_{H\otimes K}\otimes h)\,W(k\otimes 1_{H\otimes K})/h,\ k\in\mathscr{K}(H\otimes K)\}$$

coïncide avec celui engendré par

$$\{(1\otimes h)(\hat{Y}_{24}(Z^*x\otimes Z)X_{13}(k\otimes 1)/h,\ k\in\mathscr{K}(H\otimes K)\ x\in S_X\otimes S_Y\}.$$

Comme l'espace engendré par $\{(a\otimes 1)X(k\otimes 1)\,a\in S_X,\ k\in\mathscr{K}(H)\}$ est $\mathscr{K}(H)\otimes S_X$ et que Y est régulier, il en résulte que l'espace vectoriel fermé engendré par

$$\{(1_{H\otimes K}\otimes h)\,W(k\otimes 1_{H\otimes K})/h,\ k\in\mathscr{K}(H\otimes K)\}\ \text{est}\ \mathscr{K}(H\otimes K\otimes H\otimes K).\quad\blacksquare$$

EXEMPLES DE COUPLES ASSORTIS DE SYSTÈMES DE KAC

a) *Produit croisé d'un système de Kac par un groupe d'automorphismes.*

Un automorphisme d'un système de Kac (H, X, u) est un unitaire $w\in\mathscr{L}(H)$ tel que $w\otimes w$ commute à X et w commute à u. Une action d'un groupe localement compact G dans (H, X, u) est une représentation unitaire w de G dans H telle que les w_g soient des automorphismes de (H, X, u). Rappelons que le système de Kac associé au groupe localement compact G est le système (K, Y, v) où $K=L^2(G)$, Y est donné par

$$Y\xi(s,t)=\xi(st,t)\qquad(\xi\in K\otimes K=L^2(G\times G),\ s,\ t\in G)$$

et

$$(v\xi)(s)=\Delta(s)^{1/2}\,\xi(s^{-1})\qquad(\xi\in K,\ s\in G).$$

Soit w une action d'un groupe localement compact G dans un système de Kac (H, X, u). Définissons l'opérateur unitaire $Z\in\mathscr{L}(H\otimes K)$ en posant $(Z\xi)(g)=w_g^*\,\xi(g)$ pour $\xi\in H\otimes K=L^2(G;H)$, $g\in G$.

PROPOSITION 8.16. — *Les systèmes de Kac* (H, X, u) *et* (K, Y, v) *forment avec l'opérateur unitaire* Z *un couple assorti de systèmes de Kac. Le biproduit croisé de* (H, X, u) *par* (K, Y, v) *relativement à* Z *est le dual du* Z*-produit tensoriel de* (H, $\tilde{X}$, u) par (K, Y, v).

Preuve. — Pour $\omega\in\mathscr{L}(H)_*$ on a $w_g^*\,L(\omega)\,w_g=L(w_g^*\,\omega\,w_g)$. Donc $w_g^*\,L(\omega)\,w_g\in S_X$ et $g\to w_g^*\,L(\omega)\,w_g$ est normiquement continu. Soit alors $\alpha:S_X\to M(S_X\otimes C_0(G))$ l'action à droite de G dans S_X implémentée par w. Pour $x\in S_X$ et $f\in C_0(G)$ on a $Z(x\otimes f)Z^*=\alpha(x)(1\otimes f)$. Il s'ensuit que Z normalise $S_X\otimes C_0(G)$. Les propriétés d'inversion de l'isomorphisme τ associé à Z sont élémentaires pour les éléments de la forme $1 \otimes f$ et découlent de ce que α est une action à droite par automorphismes d'algèbre de Hopf pour les éléments de la forme $x \otimes 1$.

Posons $V = (Z_{12}^* X_{13} Z_{12}) Y_{24}$ et $U = (u \otimes v) Z$. Pour

$$\xi \in H \otimes K \otimes H \otimes K = L^2 (G \times G; H \otimes H), \qquad g, h \in G,$$

on trouve :

$$(V \xi)(g, h) = (w_g \otimes 1) X (w_g^* \otimes 1) \xi (gh, h).$$

Pour $\xi \in L^2 (G \times G \times G; H \otimes H \otimes H)$, $g, h, k \in G$ on a donc :

$$\begin{aligned}
&(V_{23} V_{12} \xi)(g, h, k)\\
&\quad = (1 \otimes w_h \otimes 1) X_{23} (w_g \otimes w_h^* \otimes 1) X_{12} (w_g^* \otimes 1 \otimes 1) \xi (ghk, hk, k)\\
&\quad = (1 \otimes w_h \otimes 1) X_{23} (w_{gh} \otimes 1 \otimes 1)(w_h^* \otimes w_h^* \otimes 1) X_{12} (w_g^* \otimes 1 \otimes 1) \xi (ghk, hk, k)\\
&\quad = (w_{gh} \otimes w_h \otimes 1) X_{23} X_{12} (w_{gh}^* \otimes w_h^* \otimes 1) \xi (ghk, hk, k)\\
&\quad = (w_{gh} \otimes w_h \otimes 1) X_{12} X_{13} X_{23} (w_{gh}^* \otimes w_h^* \otimes 1) \xi (ghk, hk, k)\\
&\quad = (w_g \otimes 1 \otimes 1) X_{12} (w_h \otimes 1 \otimes 1) X_{13} (w_{gh}^* \otimes w_h \otimes 1) X_{23} (1 \otimes w_h^* \otimes 1) \xi (ghk, hk, k)\\
&\quad = (V_{12} V_{13} V_{23} \xi)(g, h, k)
\end{aligned}$$

Pour $\xi \in H \otimes K = L^2 (G; H)$, $g \in G$ on a $(U \xi)(g) = \Delta (g)^{1/2} w_g u \xi (g^{-1})$ et donc $U^2 = 1$. Il s'ensuit que V et $\hat{V}$ sont multiplicatifs (corollaire 8.11).

Soient $s \in \mathscr{L} (H \otimes H)$ et $\Sigma \in \mathscr{L} (H \otimes K \otimes H \otimes K)$ les voltes et posons $A = s (1 \otimes u) X$. Pour $\xi \in L^2 (G \times G; H \otimes H)$, g, $h \in G$, on a

$$(\Sigma (1 \otimes U) V \xi)(g, h) = \Delta (g)^{1/2} (w_g \otimes w_h) A (w_h^* \otimes 1) \xi (hg^{-1}, g^{-1}).$$

Comme A commute à $w_g \otimes w_g$ et que $A^3 = 1$, on a $(\Sigma (1 \otimes U) V)^3 = 1$.

Donc (H, X, u) et (K, Y, v) forment avec l'opérateur Z un couple assorti de systèmes de Kac.

Le biproduit croisé est donné par la formule $(W \xi)(g, h) = \Delta (g)^{1/2} X (1 \otimes w_g) \xi (g, g^{-1} h)$ ($\xi \in L^2 (G \times G; H \otimes H)$, $g, h \in G$).

Pour $\xi \in L^2 (G \times G; H \otimes H)$, $g, h \in G$, on a $(\hat{V} \xi)(g, h) = \Delta (g)^{1/2} \hat{X} (1 \otimes w_g) \xi (g, g^{-1} h)$.

Remarquons que w est aussi une action de G dans (H, $\tilde{X}$, u). D'après ce qui précède, les systèmes de Kac (H, $\tilde{X}$, u) et (K, Y, v) forment avec l'opérateur unitaire Z un couple assorti de systèmes de Kac et le dual ($H \otimes K$, $\hat{V}'$, U) de leur Z-produit tensoriel est donné par la formule de $\hat{V}$ où on remplace X par $\tilde{X}$; on trouve donc $\hat{V}' = W$. ■

b) Double quantique d'un système de Kac

Nous montrons comment à tout système de Kac est associé un couple assorti de systèmes de Kac qui permet d'obtenir dans notre cadre la construction purement algébrique du double quantique (*cf.* [4], § 13) comme Z-produit tensoriel au sens de la définition 8.15. Dans le cas particulier où (H, X, u) est le système de Kac associé à un groupe quantique compact (*i.e.* le système de Kac associé à une C*-algèbre de Woronowicz), le Z-produit tensoriel est associé au « double group » de Podles-Woronowicz [34]; en particulier, le double quantique du groupe quantique SU (2, μ) de Woronowicz est le groupe quantique Sl (2, μ) de [34].

De plus, comme dans le cas algébrique [4], un opérateur unitaire R « universel » satisfaisant l'équation de Yang-Baxter quantique est associé au double quantique. Nous montrons en outre comment la solution de l'équation de Yang-Baxter construite au paragraphe 6 est l'image du R universel par une représentation.

Soit (H, X, u) un système de Kac; notons $s \in \mathscr{L}(\mathrm{H} \otimes \mathrm{H})$ la volte. Posons $\mathrm{Y}=s\mathrm{X}^* s$ et $\mathrm{Z}=s\mathrm{X}(u\otimes u)\mathrm{X}^*(u\otimes u)s=s(u\otimes u)\mathrm{X}^*(u\otimes u)\mathrm{X}s$. Alors (H, Y, u) est un système de Kac.

THÉORÈME 8.17. — *Les systèmes de Kac* (H, X, u) *et* (H, Y, u) *forment avec l'opérateur unitaire* Z *un couple assorti de systèmes de Kac. Le biproduit croisé associé est équivalent au produit tensoriel* $(\mathrm{H}\otimes\mathrm{H}, \mathrm{X}\otimes\hat{\mathrm{Y}}, u\otimes u)$.

Preuve. — Remarquons que pour $x \in \mathrm{S}_\mathrm{Y}=\hat{\mathrm{S}}_\mathrm{X}$ on a $\delta_\mathrm{Y}(x)=s\mathrm{X}^*(1\otimes x)\mathrm{X}s$ et que $(u\otimes u)\mathrm{X}^*(u\otimes u)$ commute à $\hat{\mathrm{S}}_\mathrm{X}\otimes\mathrm{S}_\mathrm{X}$. Pour $x\in\mathrm{S}_\mathrm{X}\otimes\hat{\mathrm{S}}_\mathrm{X}$ on a donc

$$\mathrm{Z}x\mathrm{Z}^*=s\mathrm{X}sxs\mathrm{X}^*s\in\mathrm{S}_\mathrm{X}\otimes\hat{\mathrm{S}}_\mathrm{X},$$

puisque $\mathrm{X}\in\mathrm{M}(\hat{\mathrm{S}}_\mathrm{X}\otimes\mathrm{S}_\mathrm{X})$. Posons $\tau(x)=\mathrm{X}sxs\mathrm{X}^*\in\hat{\mathrm{S}}_\mathrm{X}\otimes\mathrm{S}_\mathrm{X}$. On a

$$(\tau\otimes\mathrm{id})(\mathrm{id}\otimes\tau)(\delta\otimes\mathrm{id})(x)=\mathrm{Ad}(\mathrm{X}_{12}s_{12}\mathrm{X}_{23}s_{23}\mathrm{X}_{12})(x_{13}).$$

Or

$$\mathrm{X}_{12}s_{12}\mathrm{X}_{23}s_{23}\mathrm{X}_{12}=\mathrm{X}_{12}\mathrm{X}_{13}\mathrm{X}_{23}s_{12}s_{23}=\mathrm{X}_{23}\mathrm{X}_{12}s_{12}s_{23}$$

et

$$\mathrm{Ad}(\mathrm{X}_{23}\mathrm{X}_{12}s_{12}s_{23})(x_{13})=\mathrm{Ad}(\mathrm{X}_{23})(\tau(x)_{12})=(\mathrm{id}\otimes\delta)\tau(x).$$

On démontre de même l'égalité $(\mathrm{id}\otimes\tau)(\tau\otimes\mathrm{id})(\mathrm{id}\otimes\delta)=(\delta\otimes\mathrm{id})\tau$.

Il résulte alors de 3.6 d (et de la propriété analogue pour $\hat{\mathrm{X}}$) que $(\mathrm{S}_\mathrm{X}, \hat{\mathrm{S}}_\mathrm{X}, \tau)$ est un couple assorti d'algèbres de Hopf.

Comme

$$(s(u\otimes u)\mathrm{X}(u\otimes u)s)_{12}\mathrm{X}_{13}(s(u\otimes u)\mathrm{X}^*(u\otimes u)s)_{12}=(1\otimes u\otimes 1)\tilde{\mathrm{X}}_{12}\mathrm{X}_{13}\tilde{\mathrm{X}}^*_{12}(1\otimes u\otimes 1),$$

on déduit de 6.1 (3) que

$$\begin{aligned}\mathrm{Z}^*_{12}\mathrm{X}_{13}\mathrm{Z}_{12}&=\mathrm{X}^*_{21}\mathrm{X}_{13}(1\otimes u\otimes 1)\mathrm{X}_{23}(1\otimes u\otimes 1)\mathrm{X}_{21}\\&=\mathrm{X}_{23}\mathrm{X}_{13}(1\otimes u\otimes 1)\mathrm{X}_{23}(1\otimes u\otimes 1).\end{aligned}$$

Comme V commute à $(s(u\otimes u)\mathrm{X}(u\otimes u)s)_{34}$ il suffit pour établir la condition 8.10 (iii) de montrer que V commute à $\mathrm{X}^*_{43}\mathrm{Y}_{24}=\mathrm{Y}_{34}\mathrm{Y}_{24}=\mathrm{X}_{23}\mathrm{Y}_{24}\mathrm{X}^*_{23}$, autrement dit que Y_{24} commute à $\mathrm{X}^*_{23}\mathrm{V}\mathrm{X}_{23}=\mathrm{X}_{13}(1\otimes u\otimes 1)\mathrm{X}_{23}(1\otimes u\otimes 1)\mathrm{Y}_{24}\mathrm{X}_{23}$. Comme X_{13} et Y_{24} commutent, on doit montrer que X^*_{42} et $(1\otimes u\otimes 1)\mathrm{X}_{23}(1\otimes u\otimes 1)\mathrm{X}^*_{42}\mathrm{X}_{23}$ commutent *i.e.* que X^*_{12} et $(1\otimes u\otimes 1)\mathrm{X}_{23}(1\otimes u\otimes 1)\mathrm{X}^*_{12}\mathrm{X}_{23}$ commutent. Or

$$\begin{aligned}\mathrm{X}_{12}(1\otimes u\otimes 1)\mathrm{X}_{23}(1\otimes u\otimes 1)\mathrm{X}^*_{12}\mathrm{X}_{23}&=(1\otimes u\otimes 1)\mathrm{X}_{23}(1\otimes u\otimes 1)\mathrm{X}_{13}\mathrm{X}_{23}\ (\text{par } 6.1)\\&=(1\otimes u\otimes 1)\mathrm{X}_{23}(1\otimes u\otimes 1)\mathrm{X}^*_{12}\mathrm{X}_{23}\mathrm{X}_{12}\end{aligned}$$

Remarquons que $U=(u\otimes u)Z=sX^*(u\otimes u)Xs$, donc $U^2=1$ et par le corollaire 8.11 $\hat{V}=\Sigma(U\otimes 1)V(U\otimes 1)\Sigma$ est multiplicatif (où $\Sigma=s_{13}s_{24}\in\mathscr{L}(H\otimes H\otimes H\otimes H)$ est la volte de $H\otimes H$).

Le biproduit croisé est équivalent à $T=(\tau\otimes \mathrm{id})(\hat{Y}_{23})(\mathrm{id}\otimes\tau)(X_{23})$. Or l'adjoint de

$$(X^*\otimes X^*)(\tau\otimes\mathrm{id})(\hat{Y}_{23})(X\otimes X)$$

est

$$X_{34}^*((1\otimes u)X(1\otimes u))_{13}X_{34}=X_{14}((1\otimes u)X(1\otimes u))_{13}.$$

Donc $(X^*\otimes X^*)T(X\otimes X)=\hat{Y}_{13}X_{14}^*X_{12}^*X_{24}X_{12}=\hat{Y}_{13}X_{24}$ et le biproduit croisé est équivalent au produit tensoriel. On a donc

$$W=(Z^*sX\otimes Z^*sX)(\hat{Y}_{13}X_{24})(Z^*sX\otimes Z^*sX)^*=(Q\otimes Q)(\hat{Y}_{24}X_{13})(Q\otimes Q)^*$$

où $Q=Z^*sXs=(u\otimes u)sXs(u\otimes u)$. En particulier, $(H\otimes H, W, Q(u\otimes u)Q^*)$ est un système de Kac. Or $Q(u\otimes u)Q^*=U$, et, comme on l'a remarqué au début de la preuve de la proposition 8.14, les propriétés $(\Sigma(1\otimes U)V)^3=1$ et $(\Sigma(1\otimes U)W)^3=1$ sont équivalentes. ■

DÉFINITION 8.18. – *Le Z-produit tensoriel* $(H\otimes H, V, U)$ *ci-dessus s'appelle le double quantique de* (H, X, u).

Remarque. – Soient (H, X, u) et (H', Y, v) deux systèmes de Kac, $s\in\mathscr{L}(H\otimes H', H'\otimes H)$ la volte et $Q\in\mathscr{L}(H'\otimes H)$ un unitaire tel que Q soit une représentation de X et s^*Q^*s soit une représentation de Y. Posons $Z=s^*Q(v\otimes u)Q^*(v\otimes u)s=s^*(v\otimes u)Q^*(v\otimes u)Qs$. Alors les systèmes de Kac (H', Y, u) et (H, X, u) forment avec l'opérateur unitaire Z un couple assorti de systèmes de Kac. Le biproduit croisé associé est équivalent au produit tensoriel $(H\otimes H', X\otimes\hat{Y}, u\otimes v)$.

Conservons les notations ci-dessus.

PROPOSITION 8.19. – *Posons* $R=Z_{12}^*X_{14}Z_{12}$.

a) L'unitaire R *est un multiplicateur de* $\hat{S}_V\otimes\hat{S}_V$.

b) Notons $\hat{\delta}$ *le coproduit de* $\hat{S}_V$ *(donné par* $\hat{\delta}(x)=V^*(1\otimes x)V$*). On a*

$$(\mathrm{id}\otimes\hat{\delta})(R)=R_{13}R_{12},(\hat{\delta}\otimes\mathrm{id})(R)=R_{13}R_{23}$$

et pour tout $x\in\hat{S}_V$, $\sigma\hat{\delta}(x)=R\,\hat{\delta}(x)R^*$.

c) L'unitaire R *vérifie l'équation de Yang-Baxter quantique* $R_{12}R_{13}R_{23}=R_{23}R_{13}R_{12}$.

Preuve. – *a*) Remarquons que $\hat{S}_Y=S_X$. Donc $X\in M(\hat{S}_X\otimes\hat{S}_Y)$. Or $R=(\pi\otimes\pi')(X)$ (avec les notations de 8.14).

b) On a $(\hat{\delta}_X\otimes\mathrm{id})(X)=X_{13}X_{23}$ donc $(\hat{\delta}\otimes\mathrm{id})(R)=R_{13}R_{23}$ (car π est un morphisme d'algèbres de Hopf. On a $\hat{\delta}_Y=\sigma\delta_X$ donc $(\mathrm{id}\otimes\hat{\delta}_Y)(X)=X_{13}X_{12}$ et $(\mathrm{id}\otimes\hat{\delta})(R)=R_{13}R_{12}$.

Par 8.10 (iii) V et $Z_{34}^*Y_{24}$ commutent; or

$$Z^*=(u\otimes u)Y^*(u\otimes u)Y \qquad \text{et} \quad (u\otimes u)Y^*(u\otimes u)_{34}$$

commute à V; donc V et $Y_{34}Y_{24}$ commutent *i.e.*

$$Z_{12}^* X_{13} Z_{12} Y_{24} Y_{34} = Y_{34} Y_{24} Z_{12}^* X_{13} Z_{12}.$$

Donc $R\hat{\delta}(\pi'(y)) = \sigma\hat{\delta}(\pi'(y))R$, pour tout $y \in \hat{S}_Y$. De plus on en déduit

$$Z_{12}^* X_{13} Z_{12} X_{42}^* X_{43}^* = X_{43}^* X_{42}^* Z_{12}^* X_{13} Z_{12}$$

donc

$$X_{13} Z_{12} X_{43} X_{42} Z_{12}^* = Z_{12} X_{42} X_{43} Z_{12}^* X_{13}$$

i.e. $X_{13} X_{43} Z_{12} X_{42} Z_{12}^* = Z_{12} X_{42} Z_{12}^* X_{43} X_{13}$, d'où on déduit

$$X_{35} X_{15} Z_{34} X_{14} Z_{34}^* = Z_{34} X_{14} Z_{34}^* X_{15} X_{35},$$

c'est-à-dire $(Z \otimes Z)\sigma\hat{\delta}(\pi(x))R(Z \otimes Z)^* = (Z \otimes Z)R\hat{\delta}(\pi(x))(Z \otimes Z)^*$ pour tout $x \in \hat{S}_X$.

Enfin, *c*) découle de *b*). ■

Remarques 8.20. — *a*) Il est facile de vérifier que, dans la construction du Z-produit tensoriel, la régularité de X et Y n'est pas essentielle. En particulier, on peut construire le double quantique de tout unitaire multiplicatif irréductible (X, u): on obtient un unitaire multiplicatif irréductible (V, U) donné par la même formule

$$V = Z_{12}^* X_{13} Z_{12} X_{42}^*, U = (u \otimes u) Z \qquad \text{avec} \quad Z = s X (u \otimes u) X (u \otimes u) s.$$

En outre, est encore associée une solution « universelle » $R (= Z_{12}^* X_{14} Z_{12})$ de l'équation de Yang-Baxter quantique.

b) Soit $\mathscr{R} = X(u \otimes 1) X(u \otimes 1)$ et posons $\Theta = \mathscr{R}_{12} Y_{13} \in \mathscr{L}(H \otimes H \otimes H)$. C'est une représentation θ de V (*cf.* Appendice A). En effet

$$(\mathrm{id} \otimes \delta_\tau)(\Theta) = X_{34} X_{12} X_{14} u_1 X_{12} X_{14} u_1 Y_{13} Y_{15} X_{34}^*.$$

Comme $u_1 X_{12} u_1$ commute à $X_{34} X_{14}$ et $u_1 X_{14} u_1 Y_{13} X_{34}^* = Y_{13} u_1 X_{14} u_1$ (proposition 6.1), on trouve

$$(\mathrm{id} \otimes \delta_\tau)(\Theta) = \mathscr{R}_{12} X_{34} X_{14} Y_{13} u_1 X_{14} u_1 Y_{15};$$

enfin, $X_{34} X_{14} Y_{13} = Y_{13} X_{14}$, d'où $(\mathrm{id} \otimes \delta_\tau)(\Theta) = \Theta_{12} \Theta_{13}$.

Calculons $\theta(\pi(x)\pi'(y))$, *i.e.* $(\mathrm{id} \otimes \omega_1 \otimes \omega_2)(\Theta)$. On trouve $(\mathrm{id} \otimes \omega_1)(\mathscr{R})(\mathrm{id} \otimes \omega_2)(Y)$. Donc $\theta \circ \pi$ est la représentation de X donnée par $\mathscr{R}$ et $\theta \circ \pi'$ est la représentation de Y donnée par Y *i.e.* l'identité. Donc $(\theta \otimes \theta)(R) = (\theta \circ \pi \otimes \theta \circ \pi')(X) = (\theta \circ \pi \otimes \mathrm{id})(X) = \mathscr{R}$.

c) *Couples assortis de groupes localement compacts.*

Soit G un groupe localement compact, G_1 et G_2 deux sous groupes fermés tels que l'application $(x_1, x_2) \to x_1 x_2$ soit un homéomorphisme de $G_1 \times G_2$ sur G. On dit alors que G_1 et G_2 forment un couple assorti de groupes localement compacts. Les couples assortis de groupes ont été étudiés dans [46], [28], [29] dans un cadre algébrique. Dans [27] des conditions nécessaires et suffisantes pour que le biproduit croisé soit une algèbre de Kac von Neumann sont données. Nous montrons ici qu'on a toujours un couple assorti de systèmes de Kac; donc le biproduit croisé est un système de Kac, d'où en particulier une dualité de Takesaki-Takai. Le cas où l'application $(x_1, x_2) \to x_1 x_2$ est un homéomorphisme de $G_1 \times G_2$ sur une partie ouverte et dense de G distincte de G sera étudié ultérieurement. Dans ce cas, l'unitaire multiplicatif correspondant au biproduit croisé n'est pas régulier.

Soient E et F deux espaces mesurés. A toute application bimesurable $\phi : E \to F$ qui échange les classes de mesure correspond un opérateur unitaire $T_\phi : L^2(F) \to L^2(E)$ tel que $T_\phi(f)(x) = f \circ \phi(x)\, \delta(x)^{1/2}$ pour tout $f \in L^2(F)$ où δ est une dérivée de Radon-Nikodym.

Soit G un groupe localement compact, G_1 et G_2 deux sous groupes fermés tels que l'application $(x_1, x_2) \to x_1 x_2$ soit un homéomorphisme de $G_1 \times G_2$ sur G. Alors la classe de mesure de la mesure de Haar de G s'identifie à celle de la mesure produit de $G_1 \times G_2$ (*cf.* [3], Chap. 7, p. 66). Identifions alors $L^2(G)$ avec $L^2(G_1) \otimes L^2(G_2)$. Notons $(L^2(G_1), X, u)$ et $(L^2(G_2), Y, v)$ les systèmes de Kac de G_1 et G_2 respectivement. Soit $\phi : G_2 \times G_1 \to G_1 \times G_2$ l'application telle que, pour $x_i \in G_i$ on ait $\phi(x_2, x_1) = (u_1, u_2)$ où $u_i \in G_i$ sont tels que $x_2 x_1 = u_1 u_2$ et soit Z' l'opérateur unitaire de $L^2(G_1) \otimes L^2(G_2)$ dans $L^2(G_2) \otimes L^2(G_1)$ associé à ϕ; enfin, notons $s : L^2(G_1) \otimes L^2(G_2) \to L^2(G_2) \otimes L^2(G_1)$ la volte et posons $Z = s^* Z'$.

THÉORÈME 8.21. – *Les systèmes de Kac* $(L^2(G_1), X, u)$ *et* $(L^2(G_2), Y, v)$ *forment avec l'opérateur unitaire* Z *un couple assorti de systèmes de Kac. Le Z-produit tensoriel correspondant est le système de Kac du groupe* G.

Preuve. – Soit $\tau : C_0(G_1 \times G_2) \to C_0(G_2 \times G_1)$ telle que $\tau(f)(x_2, x_1) = f(\phi(x_2, x_1))$. Soient $f \in C_0(G_1 \times G_2)$, $x_2 \in G_2$, $x_1, y_1 \in G_1$, posons

$$\phi(x_2, x_1) = (z_1, z_2) \qquad \text{et} \qquad \phi(z_2, y_1) = (u_1, u_2).$$

On a $z_1 z_2 = x_2 x_1$ et $u_1 u_2 = z_2 y_1$, donc $z_1 u_1 u_2 = x_2 x_1 y_1$ *i.e.* $\phi(x_2, x_1 y_1) = (z_1 u_1, u_2)$.

$$\begin{aligned}(\tau \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes \tau)(\delta \otimes \mathrm{id})(f)(x_2, x_1, y_1) &= (\mathrm{id} \otimes \tau)(\delta \otimes \mathrm{id})(f)(z_1, z_2, y_1)\\ &= (\delta \otimes \mathrm{id})(f)(z_1, u_1, u_2) = f(z_1 u_1, u_2)\end{aligned}$$

et

$$(\mathrm{id} \otimes \delta)\tau(f)(x_2, x_1, y_1) = \tau(f)(x_2, x_1 y_1) = f(z_1 u_1, u_2).$$

De même, soient $x_2, y_2 \in G_2$, $x_1 \in G_1$, posons $\phi(y_2, x_1) = (z_1, z_2)$ et $\phi(x_2, z_1) = (u_1, u_2)$. On a $z_1 z_2 = y_2 x_1$ et $u_1 u_2 = x_2 z_1$, donc $u_1 u_2 z_2 = x_2 y_2 x_1$ *i.e.* $\phi(x_2 y_2, x_1) = (u_1, u_2 z_2)$. Il s'ensuit que $(\mathrm{id} \otimes \tau)(\tau \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes \delta) = (\delta \otimes \mathrm{id})\tau$.

Donc τ est une inversion sur $C_0(G_1)$, $C_0(G_2)$. Comme, avec la terminologie de [21], toute action de groupe est non dégénérée, $(C_0(G_1), C_0(G_2), \tau)$ est un couple assorti de C*-algèbres de Hopf.

Soient $h : G_1 \times G_1 \to G_1 \times G_1$ et $k : G_2 \times G_2 \to G_2 \times G_2$ les applications données par $h(x_1, y_1) = (x_1 y_1, y_1)$ et $k(x_2, y_2) = (x_2 y_2, y_2)$.

Posons $V = (Z_{12}^* X_{13} Z_{12}) Y_{24}$. Pour

$$\xi \in L^2(G_1 \times G_2 \times G_1 \times G_2), \qquad x_1, y_1 \in G_1 \qquad \text{et} \qquad x_2, y_2 \in G_2$$

on a

$$V\xi(x_1, x_2, y_1, y_2)$$
$$= d(x_1, x_2, y_1, y_2)^{1/2}\xi\circ k_{24}\circ(\phi\times\mathrm{id}_{G_1\times G_2})\circ h_{23}\circ(\phi^{-1}\times\mathrm{id}_{G_1\times G_2})\circ(x_1, x_2, y_1, y_2)$$

où $d(x_1, x_2, y_1, y_2)$ est une dérivée de Radon-Nikodym (c'est l'unique fonction mesurable qui rend V unitaire). Posons

$$\phi^{-1}(x_1, x_2) = (z_2, z_1) \qquad \text{et} \qquad \phi(z_2, z_1 y_1) = (u_1, u_2)$$

de sorte que

$$k_{24}\circ(\phi\times\mathrm{id}_{G_1\times G_2})\circ h_{23}\circ(\phi^{-1}\times\mathrm{id}_{G_1\times G_2})\circ(x_1, x_2, y_1, y_2) = (u_1, u_2 y_2, y_1, y_2).$$

Or $x_1 x_2 = z_2 z_1$ et $z_2 z_1 y_1 = u_1 u_2$, donc $x_1 x_2 y_1 y_2 = u_1 u_2 y_2$. Il s'ensuit que, à travers l'identification de $L^2(G_1\times G_2)$ avec $L^2(G)$ donnée par l'homéomorphisme $(x, y)\to xy$ de $G_1\times G_2$ sur G, V s'identifie à l'unitaire multiplicatif de G.

Enfin, posons $U = (u\otimes v)Z$; pour

$$\xi\in L^2(G_1\times G_2), \qquad (u\otimes v)Z(\xi)(x_1, x_2) = d(x_1, x_2)^{1/2}\xi(y_1, y_2)$$

où d est une dérivée de Radon-Nikodym et $(y_1, y_2) = \phi(x_2^{-1}, x_1^{-1})$, *i.e.* $y_1 y_2 = (x_1 x_2)^{-1}$. Donc, à travers l'identification de $L^2(G_1\times G_2)$ avec $L^2(G)$, $(L^2(G_1)\otimes L^2(G_2), V, U)$ s'identifie au système de Kac de G. ■

Remarquons que pour $\xi\in L^2(G_1\times G_2\times G_1\times G_2)$, $x_1, y_1\in G_1$ et $x_2, y_2\in G_2$ on a

$$W\xi(x_1, x_2, y_1, y_2) = d(x_1, x_2, y_1, y_2)^{1/2}\xi\circ(\phi\times\mathrm{id}_{G_1\times G_2})$$
$$\circ h_{23}\circ(\phi^{-1}\times\phi)\circ\hat{k}_{23}\circ(\mathrm{id}_{G_1\times G_2}\times\phi^{-1})\circ(x_1, x_2, y_1, y_2)$$

où d est une dérivée de Radon-Nakodym $\hat{k}(x_2, y_2) = (x_2, x_2^{-1} y_2)$. Identifions $L^2(G_1\times G_2)$ avec $L^2(G)$. A travers cette identification de $L^2(G_1\times G_2)$ avec $L^2(G)$, l'unitaire W est donnée par la formule :

$$W\xi(x, y) = d(x, y)^{1/2}\xi(xp_1(p_2(x)^{-1}y), p_2(x)^{-1}y)$$

où $p_1 : G\to G_1$ et $p_2 : G\to G_2$ sont les applications telles que, pour $x\in G$, $x = p_1(x)p_2(x)$.

Explicitons les actions associées à l'inversion τ: on doit donc calculer $\tau(f\otimes 1)$, $f\in C_0(G_1)$ et $\tau(1\otimes g)$, $g\in C_0(G_2)$. On pose donc $\phi(x_2, x_1) = (\alpha_{x_2}(x_1), \beta_{x_1}(x_2))$ et on a $\tau(f\otimes 1)(x_2, x_1) = f(\alpha_{x_2}(x_1))$ et $\tau(1\otimes g)(x_2, x_1) = g(\beta_{x_1}(x_2))$. Remarquons que, grâce à l'homéomorphisme $(x_1, x_2)\to x_1 x_2$, on identifie G/G_2 à G_1 et $G_1\backslash G$ à G_2; à travers ces identifications, α est l'action par translation (à gauche) de G_2 dans G/G_2 et β l'action par translation (à droite) de G_1 dans $G_1\backslash G$.

On en déduit donc :

PROPOSITION 8.22. — *Les algèbres* S_W *et* $\hat{S}_W$ *associées au biproduit croisé sont respectivement isomorphes à* $C_0(G_1)\times_\alpha G_2$ *et à* $C_0(G_2)\times_\beta G_1$, *où* α *est l'action par translation* *(à gauche) de* G_2 *dans* $G_1 = G/G_2$ *et* β *l'action par translation (à droite) de* G_1 *dans* $G_1 \diagdown G$. ■

Voyons maintenant quelques exemples de couples assortis de groupes localement compacts :

Exemples 8.23 (*cf.* [27]). — *a*) Soit G un groupe de Lie semi-simple. Sa décomposition d'Iwasawa $G = KP (= KAN)$ est un exemple de décomposition comme ci-dessus. Les algèbres associées à W dans ce cas ne sont pas des algèbres de Kac-von Neumann au sens de [17, 6] car l'antipode κ n'est pas bornée (*cf.* [27] où le cas particulier $G = Sl(2, \mathbf{C})$ est explicité).

b) Soit n un nombre entier $G = \mathscr{S}_n$ le groupe symétrique d'ordre n, $G_1 = \mathscr{S}_{n-1}$ le sous-groupe des permutations qui fixent le point n et $G_2 = \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ le groupe engendré par la permutation circulaire λ. Pour $\sigma \in G_1$ on a $\alpha_\sigma(\lambda^0) = \lambda^0$ et $\alpha_\sigma(\lambda^k) = \lambda^{\sigma(k)}$, $k \in \{1, \ldots, n-1\}$. En effet, $\lambda^{-\sigma(k)} \sigma \lambda^k (n) = \lambda^{-\sigma(k)} \sigma(k) = n$ donc $\lambda^{-\sigma(k)} \sigma \lambda^k \in G_1$. En particulier, on a

$$A = C_0(G_2) \times G_1 = C^*(\mathscr{S}_{n-1}) \oplus M_{n-1}(C^*(\mathscr{S}_{n-2})).$$

L'action de G_2 sur G_1 s'exprime moins simplement. Cependant, pour $n = 4$, on trouve que G_2 fixe la permutation identique et la transposition (1, 3) et agit comme la permutation circulaire sur les 4 autres éléments de G_1. Il en résulte que $B = C_0(G_1) \times G_2$ est isomorphe à $C^*(G_1) \oplus C^*(G_1) \oplus M_4(\mathbf{C}) = \mathbf{C}^8 \otimes M_4(\mathbf{C})$. Dans ce cas on trouve aussi $A = \mathbf{C} \oplus \mathbf{C} \oplus M_2(\mathbf{C}) \oplus M_3(\mathbf{C}) \oplus M_3(\mathbf{C})$. Remarquons que ni A ni B ne peuvent être isomorphes à un produit tensoriel d'une C*-algèbre par une C*-algèbre commutative. En particulier l'algèbre de Kac correspondante, ne peut pas s'obtenir comme produit croisé.

On peut généraliser cet exemple de la manière suivante : soit G_2 un groupe (fini) et G un groupe de permutations de l'ensemble G_2 contenant les translations à droite. Soit G_1 l'ensemble des éléments de G qui fixent l'élément neutre de G_2 et identifions G_2 au sous-groupe de G formé des translations à droite. Par exemple, si G_2 a n éléments, on peut prendre pour G le groupe $\mathscr{S}_n$ de toutes les permutations de G_2. On trouve encore

$$A = C_0(G_2) \times G_1 = C^*(\mathscr{S}_{n-1}) \oplus M_{n-1}(C^*(\mathscr{S}_{n-2})).$$

Notons que l'exemple de Kac-Paljutkin [15] ne s'écrit pas sous cette forme : en effet, soit G un groupe à 8 éléments. Soit $G = G_1 G_2$ une décomposition de G; supposons que G_1 a moins d'éléments que G_2; alors G_1 a au plus 2 éléments et l'action de G_2 dans G_1 est triviale. En particulier, l'algèbre de Kac associée à cette décomposition est un produit semi-direct. Remarquons en fait que, si G_1 a 2 éléments, $C(G_1) \times G_2$ est commutative (car le groupe G_2 est abélien) et que si G_1 n'a qu'un élément $C(G_2) \times G_1$ est commutative.

Cependant, il est possible d'exprimer les exemples de Kac-Paljutkin ([15] et [16]) en corrigeant la formule définissant W par un cocycle.

Pour $x, y \in G$, posons $w(x, y) = (x p_1(p_2(x)^{-1} y), p_2(x)^{-1} y)$

DÉFINITION 8.24. — *Une fonction mesurable* $\theta: G \times G \to U(1)$ *est appelé w-cocycle si l'opérateur unitaire* W_θ *donné par la formule* $W_\theta \xi(x, y) = \theta(x, y) d(x, y)^{1/2} \xi(w(x, y))$ *est multiplicatif.*

On vérifie sans peine que $(L^2(G), W_\theta, U)$ est alors un système de Kac (où U est donné par la formule $(U\xi)(x) = \Delta(x)^{1/2} \xi(x^{-1})$).

Un w-cocycle $\theta(x, y) = t(x, y) t(w(x, y))^{-1}$ où $t: G \times G \to U(1)$ est une fonction (mesurable) de la forme $t(x, y) = a(x) a(y)$ est appelé cobord.

Nous n'étudions pas les cocycles en général mais nous contentons dans ce qui suit d'étudier quelques exemples de cocycles permettant d'interpréter deux exemples de Kac et Paljutkin ([15] et [16]). Pour ce faire nous ferons quelques hypothèses simplificatrices:

Supposons que G est un produit semi-direct de G_1 par G_2. Dans ce cas, G_1 agit dans G_2 par automorphismes et G_2 agit trivialement dans G_1 et $p_1: G \to G_1$ est un homomorphisme de groupes. On a alors $w(x, y) = (xp_1(y), p_2(x)^{-1} y)$. L'identité de cocycle donne alors:

$$\theta(x, y)\theta(xp_1(y), z)\theta(p_2(x)^{-1} y, p_2(xp_1(y))^{-1} z) = \theta(y, z)\theta(x, yp_1(z))$$

Si $x \in G_1$ et $y, z \in G_2$, on trouve: $\theta(x, y)\theta(x, z)\theta(y, z) = \theta(y, z)\theta(x, y)$, *i.e.* $\theta(x, z) = 1$. Faisons alors les deux hypothèses simplificatrices suivantes

a) $\theta(x, y) = 1$ si $y \in G_2$;

b) $\theta(x, y) = \theta(p_2(x), y)$.

Si $x, y \in G_2$, $\theta(x, y) = 1$ et la condition de cocycle donne:

$$\theta(x, z)\theta(x^{-1} y, x^{-1} z) = \theta(y, z)\theta(x, yp_1(z)).$$

Pour $g \in G_1$ et $x, y \in G_2$ posons $\eta^g(x, y) = \theta(x, xyg)$. Soient $x, y, z \in G_2$ et $g \in G_1$ et posons $x' = x$, $y' = xy$ et $z' = xyzg$. La condition de cocycle pour x', y', z' donne $\eta^g(x, yz)\eta^g(y, z) = \eta^g(xy, z)\eta^g(x, y)$.

Autrement dit, η^g est un 2-cocycle de groupe sur $G_2: \eta^g \in Z^2(G_2; U(1))$.

Soient $g, h \in G_1$, $x, y, z \in G_2$. La condition de cocycle pour $x' = x$, $y' = xyg$, $z' = g^{-1} xyzgh$ est:

$$\eta^g(x, y)\theta(xg, g^{-1} xyzgh)\theta(yg, g^{-1} yzgh) = \theta(xyg, g^{-1} xygh)\eta^{gh}(x, y).$$

Autrement dit $\eta^g(x, y)(g\eta^h)(x, yz)(g\eta^h)(y, z) = (g\eta^h)(xy, z)\eta^{gh}(x, y)$ où $g\eta^h$ est donné par la formule $(g\eta^h)(x, y) = \eta^h(g^{-1} xg, g^{-1} yg)$ $(x, y \in G_2)$ puisque $p_2(xg) = g^{-1} xg$, $p_2(yg) = g^{-1} yg$ et $p_2(xyg) = g^{-1} xyg$. Comme $(g\eta^h)$ est un 2-cocycle, on trouve finalement: $\eta^g(x, y)(g\eta^h)(x, y) = \eta^{gh}(x, y)$.

Autrement dit, $g \to \eta^g$ est une application équivariante de G_1 dans $Z^2(G_2; U(1))$ *i.e.* vérifie la propriété $\eta^{gh} = \eta^g(g\eta^h)$. Dans ce cas, on a un homomorphisme de groupes de G_1 dans le produit semi-direct $Z^2(G_2; U(1)) \times \mathrm{Aut}(G_2)$.

Réciproquement, si $g \to \eta^g$ est une application équivariante de G_1 dans $Z^2(G_2; U(1))$, la formule $\theta(x, y) = \eta^g(p_2(x), p_2(x)^{-1} y')$ où $y = y'g$, $g \in G_1$ et $y' \in G_2$ définit un w-cocycle vérifiant *a*) et *b*).

Soit $g \to \eta^g$ une application continue équivariante de G_1 dans $Z^2(G_2; U(1))$ et θ le w-cocycle associé. On a alors un champ continu $g \to B^g$ indexé par G_1 de C*-algèbres où $B^g = C^*(G_2; \eta^g)$. Il est facile de voir que l'algèbre $\hat{S}$ associée à l'unitaire multiplicatif W_θ correspondant ne dépend pas du cocycle : c'est le produit croisé $C_0(G_2) \times G_1$; l'algèbre S devient l'algèbre des sections continues du champ $g \to B^g\,(g \in G_1)$.

En résumé on a :

PROPOSITION 8.25. — *Soit* $G = G_1 \times G_2$ *un produit semi-direct de groupes localement compacts et notons w la transformation correspondante.*

a) La formule $\eta^g(x, y) = \theta(x, xyg)$ $(g \in G_1$ *et* $x, y \in G_2)$ *établit une correspondance biunivoque entre w-cocycles* θ *tels que pour tout* $x, y \in G$ $\theta(x, y) = 1$ *si* $y \in G_2$ *et* $\theta(x, y) = \theta(p_2(x), y)$ *d'une part et applications équivariantes* $g \to \eta^g$ *de* G_1 *dans* $Z^2(G_2; U(1))$.

b) Soit θ *le w-cocycle correspondant à l'application* $g \to \eta^g$ *et* W_θ *l'unitaire multiplicatif associé. L'algèbre* $\hat{S}$ *associée à* W_θ *est le produit croisé* $C_0(G_2) \times G_1$; *l'algèbre* S *est l'algèbre des sections continues du champ* $g \to C^*(G_2; \eta^g)$ $(g \in G_1)$.

(On vérifie sans peine que W_θ est régulier.)

Exemples 8.26. — 1. (*cf.* [15]) Soit $G_1 = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ agissant dans $G_2 = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ en permutant les générateurs a et b. Notons s et t les applications de G_2 à valeurs dans $\mathbf{Z}$ définies par $s(ab^\varepsilon) = t(a^\varepsilon b) = 1$ et $s(b^\varepsilon) = t(a^\varepsilon) = 0$ $(\varepsilon = 0, 1)$. Posons $\eta^0 = 1$ et définissons $\eta = \eta^1$ par la formule $\eta(x, y) = i^{d(x, y)}$ où on a posé

$$d(x, y) = 2\,s(x)\,t(y) - s(x)\,t(x) - s(y)\,t(y) + s(xy)\,t(xy).$$

On vérifie aisément que η est un 2-cocycle sur G_2 et que le générateur de G_1 transforme η en son inverse. Il lui correspond donc un unitaire multiplicatif. L'algèbre de Kac S (et $\hat{S}$) correspondante est l'algèbre de dimension 8 définie dans [15].

2. (*cf.* [16] et [35]) Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie sur $\mathbf{R}$ et π une représentation du groupe additif E par automorphismes linéaires de F. Posons $G_1 = E$, $G_2 = F$. Cherchons les applications $g \to \eta^g$ sous la forme $\eta^g(x, y) = \exp(ih\,\beta^g(x, y))$ où β^g est une forme bilinéaire alternée sur F. Soit $B = F^* \wedge F^*$ l'espace des formes bilinéaires alternées sur F muni de l'action de E. On cherche les applications $\beta : E \to B$ telles que $\beta(s+t) = \beta(s) + s.\beta(t)$, autrement dit les 1-cocycles (représentations affines) associées à l'action de E dans B.

Notons B_0 le sous-espace de B formé des points fixes sous l'action de E. On peut prendre β sous la forme $\beta(s) = \beta_0(s) + s.b - b$ où $\beta_0 : E \to B_0$ est une application linéaire et $b \in B$.

Remarque. — Supposons que B_0 admet un supplémentaire B' invariant par E; alors β admet la décomposition $\beta = \beta_0 + \beta'$. Il existe $s_0 \in E$ tel que $s_0 - 1$ soit inversible dans B'; posons $b = (s_0 - 1)^{-1}\,\beta'(s_0)$; comme $(s-1)\,\beta(s_0) = (s_0 - 1)\,\beta(s)$ on a alors $\beta(s) = \beta_0(s) + s.b - b$.

Cependant, si $E = \mathbf{R}^2$ agit dans $F = \mathbf{R}^3$ par $(a, b).(x, y, z) = (x + ay + bz, y, z)$, alors F et B sont isomorphes de façon E équivariante (car E préserve le déterminant). Les applications équivariantes $\beta: E \to B$ sont données par

$$\beta(a, b) = (au + bv + a^2 x + aby + b^2 z, 2ax + by, ay + 2bz) \qquad \text{où} \qquad u, v, x, y, z$$

sont des nombres réels.

Donnons nous une telle application β (sous la forme $\beta(s) = \beta_0(s) + s.b - b$), considérons le w-cocycle θ correspondant et formons l'unitaire multiplicatif W_θ.

Dans le cas où $b = 0$, l'application linéaire β peut être interprétée comme une application alternée $\eta: F \times F \to E^*$ invariante par l'action de E dans $F \times F$. Alors $F \times F \times E^*$ est muni d'une structure de groupe de type Heisenberg et l'algèbre S associée à W_θ est isomorphe à la C*-algèbre de ce groupe (mais non comme algèbre de Hopf vu que S n'est pas cocommutative). On retrouve l'exemple de Rieffel [35], dans le cas où F est de la forme $X \times X$ (avec les notations de [35] on pose $E = Z^*$, $F = X \times X$ et $\eta((x, x'), (y, y')) = \beta(x, y') - \beta(y, x')$).

Enfin, soit $E = \mathbf{R}$ agissant dans $F = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ par $\alpha_s(x) = \exp(s\mathrm{K})(x)$ où K est une matrice 2×2 à coefficients réels. Pour $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$, on pose $\eta(x, y) = x_1 y_2 - x_2 y_1$. Soit k un nombre réel quelconque. Notons τ la trace de K.

Si $\tau = 0$, alors η est invariant par l'action de G_1. Posons alors pour $s \in G_1$, $\eta^s = \exp(ihs\eta)$, où $h \in \mathbf{R}$ est une constante.

Si $\tau \neq 0$, on pose alors pour $s \in G_1$, $\eta^s = \exp(ih(\exp(s\tau) - 1)\eta)$.

Dans les deux cas, l'application $s \to \eta^s$ de G_1 dans $Z^2(G_2; U(1))$ vérifie la propriété d'équivariance. Dans le premier cas, la C*-algèbre S correspondante est canoniquement isomorphe à l'algèbre du groupe de Heisenberg; dans le deuxième cas, l'algèbre S est isomorphe à l'algèbre du groupe de Heisenberg mais de façon non canonique. Le premier cas est l'exemple construit par Kac Paljutkin dans [16].

Appendice

Représentations des unitaires multiplicatifs

Dans cet appendice nous étudions la notion de représentation et de coreprésentation pour un unitaire multiplicatif V. Si V est régulier nous définissons les C*-algèbres pleines S_p et $\hat{S}_p$ associées à V. Si V est de plus irréductible, nous montrons que V est en fait un multiplicateur du produit tensoriel $\hat{S}_p \underset{\max}{\otimes} S_p$.

Les représentations sont définies à l'aide de la relation pentagonale (*cf.* [19] et [18]):

DÉFINITION A.1. — *Soit* V *un unitaire multiplicatif sur* H. *Une représentation de* V *dans un espace de Hilbert* K *est la donnée d'un unitaire* $W \in \mathscr{L}(K \otimes H)$ *tel qu'on ait l'égalité* $W_{12} W_{13} V_{23} = V_{23} W_{12}$ (*dans* $\mathscr{L}(K \otimes H \otimes H)$).

Une coreprésentation de V *dans un espace de Hilbert* K *est la donnée d'un unitaire* $W \in \mathscr{L}(H \otimes K)$ *tel qu' on ait l'égalité* $V_{12} W_{13} W_{23} = W_{23} V_{12}$ (*dans* $\mathscr{L}(H \otimes H \otimes K)$).

Exemples de représentations A.2. — *a*) Si $V \in \mathscr{L}(H \otimes H)$ est un unitaire multiplicatif, l'identité de H est une représentation et une coreprésentation de V dans **C** appelées représentation et coreprésentation triviale. On appelle caractères (resp. cocaractères) de V les représentations de dimension 1 *i.e.* les unitaires $W \in \mathscr{L}(H)$ tels que $V(W \otimes 1)V^* = W \otimes W$ (resp. $V^*(1 \otimes W)V = W \otimes W$).

b) L'unitaire multiplicatif V lui-même est une représentation et une coreprésentation de V dans H appelées représentation et coreprésentation régulière.

c) Les représentations de l'unitaire multiplicatif V_G associé au groupe localement compact G (exemple 1.2.2), coïncident avec les représentations unitaires de G.

d) Soit (K, W) une représentation et H_0 un espace de Hilbert. On appelle amplifiée gauche (resp. droite) de (K, W) par H_0 la représentation $(K \otimes H_0, W_{13})$ (resp. $(H_0 \otimes K, W_{23})$). Toutes les représentations de l'unitaire multiplicatif $1 \in \mathscr{L}(H \otimes H)$ sont des amplifiées de la triviale (on a : $W_{12} W_{13} = W_{12}$ donc $W_{13} = 1$).

Si $V \in \mathscr{L}(H \otimes H)$ est un unitaire multiplicatif et $W \in \mathscr{L}(K \otimes H)$ est une représentation (resp. $W \in \mathscr{L}(H \otimes K)$ est une coreprésentation) de V, $W_{21}^* \in \mathscr{L}(H \otimes K)$ est une coreprésentation (resp. $W_{21}^* \in \mathscr{L}(K \otimes H)$ est une représentation) de $\Sigma V^* \Sigma$. On réalise ainsi une correspondance biunivoque entre représentations (resp. coreprésentations) de V, et coreprésentations (resp. représentations) de $\Sigma V^* \Sigma$.

Si V et V′ sont deux unitaires multiplicatifs équivalents, les représentations (resp. coreprésentations) de V et V′ sont en correspondance biunivoque.

e) On dira que les représentations W et W′ dans K commutent si W_{12} et W'_{13} commutent. Dans ce cas l'unitaire WW′ est une représentation dans K appelée représentation produit de W par W′.

Soient (K, W) et (K′, W′) deux représentations. Alors les représentations amplifiées $(K \otimes K', W_{13})$ et $(K \otimes K', W'_{23})$ commutent. Leur produit $(K \otimes K', W_{13} W'_{23})$ est appelé produit tensoriel de (K, W) par (K′, W′).

Les notions analogues pour les coreprésentations de V se définissent de la même manière.

f) Soient (K, W) et (K′, W′) deux représentations (resp. coreprésentations). Un opérateur $T \in \mathscr{L}(K, K')$ est appelé opérateur d'entrelacement de W à W′ si $(T \otimes 1) W = W'(T \otimes 1)$ (resp. $(1 \otimes T) W = W'(1 \otimes T)$). Les représentations (resp. coreprésentations) (K, W) et (K′, W′) sont dites équivalentes s'il existe un opérateur d'entrelacement $U \in \mathscr{L}(K, K')$ unitaire. Remarquons que les amplifiés gauche et droit sont équivalents. Le produit tensoriel de (K, W) par la triviale T est équivalent à W. Le produit tensoriel de la représentation (K, W) par la régulière V est équivalent à l'amplifié de la régulière; le produit tensoriel de la coreprésentation régulière V par (K, W) est équivalent à l'amplifié de la régulière.

Pour toute représentation (resp. coreprésentation) X de V et tout $\omega \in \mathscr{L}(H)_*$ on pose $\rho_X(\omega) = (\mathrm{id} \otimes \omega)(X)$ (resp. $L_X(\omega) = (\omega \otimes \mathrm{id})(X)$).

PROPOSITION A.3. — *Soit* V *un unitaire multiplicatif. Soit* X *une représentation* (*resp. coreprésentation*) *de* V *dans l'espace de Hilbert* K.

a) *L'espace* $\hat{A}_X = \{\rho_X(\omega)/\omega \in \mathcal{L}(H)_*\}$ (*resp.* $A_X = \{L_X(\omega)/\omega \in \mathcal{L}(H)_*\}$) *est une sous-algèbre de* $\mathcal{L}(K)$.

Supposons de plus que V *est régulier.*

b) *L'adhérence normique de* $\hat{A}_X$ (*resp.* A_X) *est une sous-algèbre involutive* $\hat{S}_X$ (*resp.* S_X) *de* $\mathcal{L}(K)$.

c) *On a* $X \in M(\hat{S}_X \otimes \mathcal{K}(H))$ (*resp.* $X \in M(\mathcal{K}(H) \otimes S_X)$) *et l'adhérence de l'espace vectoriel engendré par*

$$\{(x \otimes 1) X (1 \otimes y)/x \in \hat{S}_X,\ y \in \mathcal{K}(H)\}\ (\textit{resp.}\ \{(x \otimes 1) X (1 \otimes y)/x \in \mathcal{K}(H),\ y \in S_X\})$$

est $\hat{S}_X \otimes \mathcal{K}(H)$ (*resp.* $\mathcal{K}(H) \otimes S_X$).

d) *On a* $X \in M(\hat{S}_X \otimes S)$ (*resp.* $X \in M(\hat{S} \otimes S_X)$) *et l'adhérence de l'espace vectoriel engendré par* $\{(x \otimes 1) X (1 \otimes y)/x \in \hat{S}_X,\ y \in S\}$ (*resp.* $\{(x \otimes 1) X (1 \otimes y)/x \in \hat{S},\ y \in S_X\}$) *est* $\hat{S}_X \otimes S$ (*resp.* $\hat{S} \otimes S_X$).

Preuve. — *a*) Pour $\omega, \omega' \in \mathcal{L}(H)_*$ on a

$$\rho_X(\omega)\,\rho_X(\omega') = \rho_X(\psi)\ (\text{resp.}\ L_X(\omega)\,L_X(\omega') = L_X(\psi))\ \text{où}\ \psi \in \mathcal{L}(H)_*$$

est donnée par $\psi(x) = (\omega \otimes \omega')(V(x \otimes 1)V^*)$ (resp. $\psi(x) = (\omega \otimes \omega')(V^*(1 \otimes x)V)$).

b) On procède comme dans la proposition 3.5. L'adhérence normique dans $\mathcal{L}(K)$ de l'espace vectoriel engendré par $\{(\mathrm{id} \otimes \omega \otimes \omega')(X_{13} V_{23} X_{12}^* \Sigma_{23})^*,\ \omega, \omega' \in \mathcal{L}(H)_*\}$ est $\hat{S}_X$. Or $X_{13} V_{23} X_{12}^* \Sigma_{23} = X_{13} V_{23} \Sigma_{23} X_{13}^*$. Donc

$$(\mathrm{id} \otimes \omega \otimes \omega')(X_{13} V_{23} X_{12}^* \Sigma_{23}) = (\mathrm{id} \otimes \omega')(X(1 \otimes y)X^*)$$

où $y = (\mathrm{id} \otimes \omega)(\Sigma V)$. On conclut grâce à la régularité de V.

L'assertion resp. résulte de celle-ci en remplaçant V par $\Sigma V^* \Sigma$.

L'assertion *c*) se démontre comme 3.6 *a*) et *b*). L'assertion *d*) s'en déduit (*cf.* démonstration de 3.6 *c*) et *d*)). ■

*Remarque A.*4. — On déduit immédiatement de A.3 *d*) qu'avec les notations de A.3, $X \in M(\mathcal{K}(K) \otimes S)$ (resp. $X \in M(\hat{S} \otimes \mathcal{K}(K))$) et que l'adhérence de l'espace engendré par $\{(x \otimes 1) X (1 \otimes y)/x \in \mathcal{K}(K),\ y \in S\}$ (resp. $\{(x \otimes 1) X (1 \otimes y)/x \in \hat{S},\ y \in \mathcal{K}(K)\}$) est $\mathcal{K}(K) \otimes S$ (resp. $\hat{S} \otimes \mathcal{K}(K)$).

DÉFINITION A.5. — *Soit* V *un unitaire multiplicatif. Pour* $\omega \in \mathcal{L}(H)_*$ *posons* $\|\omega\|_{\hat{p}} = \sup\{\|\rho_X(\omega)\|/X$ représentation de $V\}$ (*resp.* $\|\omega\|_p = \sup\{\|L_Y(\omega)\|/Y$ coreprésentation de $V\}$). *Notons* $\hat{S}_p$ (*resp.* S_p) *le séparé complété de* $\mathcal{L}(H)_*$ *pour la semi-norme* $\|\cdot\|_{\hat{p}}$ (*resp.* $\|\cdot\|_p$).

Notons que pour toute représentation (resp. coreprésentation) X de V on a $\|\rho_X(\omega)\| \leqq \|\omega\|$ (resp. $\|L_X(\omega)\| \leqq \|\omega\|$). On a donc $\|\omega\|^{\hat{p}} \leqq \|\omega\|$ (resp. $\|\omega\|_p \leqq \|\omega\|$).

COROLLAIRE A.6. — *a) Les espaces* $\hat{S}_p$ *et* S_p *sont naturellement munis de structures d'algèbres de Banach.*

Supposons V *régulier.*

b) L'algèbre $\hat{S}_p$ *(resp.* S_p*) est une* C*-*algèbre; pour toute représentation (resp. coreprésentation)* X, ρ_X *(resp.* L_X*) est une représentation involutive de* $\hat{S}_p$ *(resp.* S_p*).*

c) Il existe un (unique) unitaire $V' \in M(\hat{S}_p \otimes S)$ *(resp.* $V'' \in M(\hat{S} \otimes S_p)$*) tel que pour toute représentation non dégénérée* π *de* $\hat{S}_p$ *(resp.* S_p*), l'unitaire* $X = (\pi \otimes L)(V')$ *(resp.* $(\rho \otimes \pi)(V'')$*) soit une représentation (resp. coreprésentation) de* V *telle que* $\pi = \rho_X$ *(resp.* $\pi = L_X$*).*

d) Les représentations (resp. coreprésentations) de V *sont les représentations non dégénérées de* $\hat{S}_p$ *(resp. de* S_p*). Plus précisément, la correspondance* $W \to \rho_W$ *(resp.* $W \to L_W$*) est bijective.*

e) Munie du coproduit δ *donné par* $\delta((\omega \otimes \mathrm{id})(V'')) = (\omega \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id})\ (V''_{12} V''_{13})$ *(resp.* $\delta((\mathrm{id} \otimes \omega)(V')) = (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \omega)(V'_{13} V'_{23})$*), la* C*-*algèbre* S_p *(resp.* $\hat{S}_p$*) est une* C*-*algèbre de Hopf bisimplifiable.*

Preuve. — *a*) Pour $\omega, \omega' \in \mathscr{L}(H)_*$ on définit $\omega * \omega' \in \mathscr{L}(H)_*$ (resp. $\omega \mathbin{\hat{*}} \omega' \in \mathscr{L}(H)_*$) en posant $\omega * \omega'(x) = (\omega \otimes \omega')(V(x \otimes 1)V^*)$ (resp. $\omega \mathbin{\hat{*}} \omega' = (\omega \otimes \omega')(V^*(1 \otimes x)V)$). On définit ainsi un produit associatif sur $\hat{S}_p$ (resp. S_p). Par A.3 *a*) on a

$$\|\omega * \omega'\|_{\hat{p}} \leqq \|\omega\|_{\hat{p}} \|\omega'\|_{\hat{p}} \text{ (resp. } \|\omega \mathbin{\hat{*}} \omega'\|_p \leqq \|\omega\|_p \|\omega'\|_p).$$

b) Par A.3 *b*) l'image de $\hat{S}_p$ par toute représentation ρ_X est une C*-algèbre. Puisque la somme de telles représentations est une représentation, $\hat{S}_p$ admet des représentations isométriques. En prenant la somme de deux représentations fidèles, on voit que l'involution ne dépend pas de la représentation. Donc $\hat{S}_p$ est une C*-algèbre.

L'assertion resp. résulte de celle-ci en remplaçant V par $\Sigma V^* \Sigma$.

c) Soit X une représentation de V telle que ρ_X soit fidèle. Comme $(\rho_X \otimes L)$ est une représentation fidèle du produit tensoriel (spatial) $\hat{S}_p \otimes S$, le *c*) résulte de A.3 *c*) et *d*).

d) Si π est une représentation non dégénérée de $\hat{S}_p$, on pose $X = (\pi \otimes L)(V')$ et on vérifie aisément que π et ρ_X coïncident.

e) Soit π une représentation fidèle de S_p et posons $Y = (\rho \otimes \pi)(V'')$. Alors $Y' = Y_{12} Y_{13}$ est une coreprésentation de V (dans $H_\pi \otimes H_\pi$). Il existe un unique homomorphisme $\delta : S_p \to M(S_p \otimes S_p)$ tel que $\forall x \in S_p$, $L'_Y(x) = (\pi \otimes \pi) \circ \delta(x)$.

Remarquons que δ est caractérisé par l'égalité $(\mathrm{id} \otimes \delta)(V'') = V''_{12} V''_{13}$. On a alors:

$$(\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \delta) \circ (\mathrm{id} \otimes \delta)(V'') = V''_{12} V''_{13} V''_{14} = (\mathrm{id} \otimes \delta \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \delta)(V'').$$

Le fait que pour $x, y \in S_p$, $\delta(x)(1 \otimes y)$ et $\delta(x)(y \otimes 1)$ appartiennent à $S_p \otimes S_p$ et que S_p est bisimplifiable résulte de A.3 *c*) et *d*) (*cf.* la démonstration de 3.7).

L'assertion « resp. » se déduit de celle-ci en remplaçant V par $\Sigma V^* \Sigma$. ■

Remarquons que la C*-algèbre de Hopf S_p est en fait une C*-algèbre de Hopf « pleine » *i.e.* le coproduit prend ses valeurs dans $M(S_p \underset{\max}{\otimes} \tilde{S}_p + \tilde{S}_p \underset{\max}{\otimes} S_p;\ S_p \underset{\max}{\otimes} S_p)$. En effet, si

$\pi = \pi_1 \otimes \pi_2$ est une représentation fidèle de $S_p \underset{\max}{\otimes} S_p$, $Y = (\rho \otimes \pi_1)(V'')(\rho \otimes \pi_2)(V'')$ est une coreprésentation de V. Il en va de même pour la C*-algèbre de Hopf $\hat{S}_p$.

Traitons maintenant le cas des unitaires multiplicatifs irréductibles. Soit (H, V, U) un système de Kac.

LEMME A.7. — *Soient* (K, X) *une représentation et* (K′, Y) *une coreprésentation de* V, *on a* :

a) *Les unitaires* $\hat{V}_{12}$ *et* Y_{23} *commutent; les unitaires* $\tilde{V}_{23}$ *et* X_{12} *commutent.*

b) $X_{13}\hat{V}_{23} = \hat{V}_{23}X_{12}X_{13}$ *et* $\tilde{V}_{12}Y_{13} = Y_{13}Y_{23}\tilde{V}_{12}$

c) *Si* $K = K'$ *et si les unitaires* X_{23} *et* Y_{12} *de* $\mathscr{L}(H \otimes K \otimes H)$ *commutent, il existe un unitaire* $W \in \mathscr{L}(K)$ *tel que* $X_{12}(W \otimes 1)Y_{21} = Y_{21}X_{12}\,(\in \mathscr{L}(K \otimes H))$.

d) *On a alors* $X_{12}(1 \otimes U)Y_{21}(1 \otimes U) = (1 \otimes U)Y_{21}(1 \otimes U)(W \otimes 1)X_{12}$.

Preuve. — *a*) Dans $\mathscr{L}(H \otimes H \otimes H \otimes K')$, l'unitaire $\hat{V}_{12}$ commute à V_{23} (6.5*c*) et à Y_{34} donc à Y_{24}. Dans $\mathscr{L}(K \otimes H \otimes H \otimes H)$, l'unitaire $\tilde{V}_{34}$ commute à V_{23} (6.5*b*) et à X_{12} donc à X_{13}.

b) Dans $\mathscr{L}(K \otimes H \otimes H \otimes H)$, on a :

$$\begin{aligned} X_{12}X_{14}\hat{V}_{34} &= V_{24}X_{12}V_{24}^*\hat{V}_{34} \\ &= V_{24}X_{12}\hat{V}_{34}V_{24}^*V_{23}^* \text{ (Proposition 6.1 formule (2))} \\ &= \hat{V}_{34}V_{23}V_{24}X_{12}V_{24}^*V_{23}^* \\ &= \hat{V}_{34}V_{23}X_{12}X_{14}V_{23}^* = \hat{V}_{34}X_{12}X_{13}X_{14} \end{aligned}$$

Donc $X_{14}\hat{V}_{34} = \hat{V}_{34}X_{13}X_{14}$.

On a de même dans $\mathscr{L}(H \otimes H \otimes H \otimes K')$:

$$\tilde{V}_{12}Y_{14}Y_{34} = \tilde{V}_{12}V_{13}^*Y_{34}V_{13} = V_{23}^*V_{13}^*Y_{34}V_{13}V_{23}\tilde{V}_{12} = Y_{14}Y_{24}Y_{34}\tilde{V}_{12}$$

Donc $\tilde{V}_{12}Y_{14} = Y_{14}Y_{24}\tilde{V}_{12}$.

c) On a $X_{13}^*Y_{31}\ X_{13}Y_{31}^*\hat{V}_{23} = X_{13}^*Y_{31}\ X_{13}\hat{V}_{23}Y_{31}^* = X_{13}^*\ Y_{31}\hat{V}_{23}X_{12}X_{13}Y_{31}^* = \hat{V}_{23}X_{13}^*Y_{31}X_{13}Y_{31}^*$. Appliquant $\mathrm{id} \otimes \omega \otimes \mathrm{id}$ aux deux termes de cette égalité, on en déduit que $X_{12}^*Y_{21}X_{12}Y_{21}^*$ commute à $1 \otimes \lambda(\omega)$ pour toute forme ω. De même $X_{12}^*Y_{21}X_{12}Y_{21}^*$ commute à $1 \otimes R(\omega)$ pour toute forme ω. Il existe donc $W \in \mathscr{L}(K)$ tel que $X_{12}^*Y_{21}X_{12}Y_{21}^* = W \otimes 1$.

d) Posons $\hat{Y} = (1 \otimes U)Y_{21}(1 \otimes U)$. Par *b*) on a $V_{23}\hat{Y}_{13} = \hat{Y}_{13}Y_{21}V_{23}$. Dans $\mathscr{L}(K \otimes H \otimes H)$, on a :

$$\begin{aligned} X_{12}\hat{Y}_{13}(W \otimes 1 \otimes 1)X_{13} &= \hat{Y}_{13}X_{12}(W \otimes 1 \otimes 1)X_{13} = \hat{Y}_{13}Y_{21}X_{12}Y_{21}^*X_{13} \\ &= \hat{Y}_{13}Y_{21}X_{12}X_{13}Y_{21}^* = \hat{Y}_{13}Y_{21}V_{23}X_{12}V_{23}^*Y_{21}^* \\ &= V_{23}\hat{Y}_{13}X_{12}\hat{Y}_{13}^*V_{23}^*\hat{Y}_{13} = V_{23}X_{12}V_{23}^*\hat{Y}_{13} = X_{12}X_{13}\hat{Y}_{13} \end{aligned}$$

Donc $\hat{Y}_{13}(W \otimes 1 \otimes 1)X_{13} = X_{13}\hat{Y}_{13}$. ■

PROPOSITION A.8. — (*cf.* [8], *corollaire* 2.2) *Soit* (H, V, U) *un système de Kac. Il existe un unitaire* $V_p \in M(\hat{S}_p \underset{\max}{\otimes} S_p)$ *tel que si* (K, X) *est une représentation et* (K, Y) *une coreprésentation de* V *telles que les unitaires* X_{23} *et* Y_{12} *de* $\mathcal{L}(H \otimes K \otimes H)$ *commutent on ait* $X_{12}((\rho_X \otimes L_Y)(V_p) \otimes 1) Y_{21} = Y_{21} X_{12}$ $(\in \mathcal{L}(K \otimes H))$.

Preuve. — Soit $\sigma = \hat{\pi} \otimes \pi$ une représentation non dégénérée fidèle dans l'espace de Hilbert K de $\hat{S}_p \underset{\max}{\otimes} S_p$. Posons $X = (\hat{\pi} \otimes L)(V')$ et $Y = (\rho \otimes \pi)(V'')$. Alors

$$X \in M(\hat{\pi}(\hat{S}_p) \otimes L(S)) \subset M(\sigma(\hat{S}_p \underset{\max}{\otimes} S_p) \otimes \mathcal{K}(H))$$

et

$$Y \in M(\rho(\hat{S}) \otimes \pi(S_p)) \subset M(\mathcal{K}(H) \otimes \sigma(\hat{S}_p \underset{\max}{\otimes} S_p)).$$

Donc, avec les notations du lemme A.7, $W \otimes 1 \in M(\sigma(\hat{S}_p \underset{\max}{\otimes} S_p) \otimes \mathcal{K}(H))$. En particulier, $W \in M(\sigma(\hat{S}_p \underset{\max}{\otimes} S_p))$ et il existe (un unique) $V_p \in M(\hat{S}_p \underset{\max}{\otimes} S_p)$ tel que $\sigma(V_p) = W$. L'unitaire V_p ne dépend pas du choix de σ, comme on le voit, par exemple, en prenant la somme de deux représentations σ et σ'. ■

Remarque A.9. — Les propriétés *c*) et *d*) du lemme A.7 expriment que les relations $V_{12} V_{13} V_{23} = V_{23} V_{12}$ et $\hat{V}_{23} V_{12} V_{13} = V_{13} \hat{V}_{23}$ (et $V_{13} V_{23} \tilde{V}_{12} = \tilde{V}_{12} V_{13}$) ont lieu respectivement dans $\mathcal{L}(\hat{S}_p \underset{\max}{\otimes} H \underset{\max}{\otimes} S_p)$, $\mathcal{L}(\hat{S}_p \underset{\max}{\otimes} S_p \otimes H)$ et $\mathcal{L}(H \otimes \hat{S}_p \underset{\max}{\otimes} S_p)$,

Représentations covariantes. — Soit V un unitaire multiplicatif régulier. Le coproduit $\delta : S \to M(\tilde{S} \otimes S; S \otimes S)$ est une coaction de S dans elle-même. Rappelons qu'une représentation covariante pour cette coaction dans l'espace de Hilbert K est un couple (π, u) où $\pi : S \to \mathcal{L}(K)$ est une représentation et $u \in \mathcal{L}(K \otimes S)$ est un unitaire. La représentation π est en particulier une représentation de S_p et définit donc un unitaire $Y = (\rho \otimes \pi)(V) \in \mathcal{L}(H \otimes K)$. Posons $X = (\mathrm{id} \otimes L)(u) \in \mathcal{L}(K \otimes H)$. On a :

$$X_{12} X_{13} V_{23} = V_{23} X_{12} \in \mathcal{L}(K \otimes H \otimes H) \tag{1}$$

$$V_{12} Y_{13} Y_{23} = Y_{23} V_{12} \in \mathcal{L}(H \otimes H \otimes K) \tag{2}$$

La propriété de covariance (définition 0.3) donne alors :

$$Y_{12} V_{13} X_{23} = X_{23} Y_{12} \in \mathcal{L}(H \otimes K \otimes H). \tag{3}$$

Définissons alors une représentation covariante dans un espace de Hilbert K de l'unitaire multiplicatif V comme une paire $X \in \mathcal{L}(K \otimes H)$ et $Y \in \mathcal{L}(H \otimes K)$ satisfaisant les conditions (1), (2) et (3) ci-dessus.

PROPOSITION A.10. — *Soit* (X, Y) *une représentation covariante dans l'espace de Hilbert* K *du système de Kac* (H, V, U).

a) La représentation X *et la coreprésentation* Y *sont stablement équivalentes à la régulière.*

b) L'unitaire $W=(\rho_X \otimes L_Y)(V_p) \in \mathscr{L}(K \otimes K)$ *est multiplicatif régulier.*

Preuve. — *a*) De (3) on déduit que X_{23} est équivalente à $V_{13}X_{23}$ donc à V_{13} (par l'égalité $V_{13}X_{23}(U\otimes 1\otimes 1)X_{21}(U\otimes 1\otimes 1)=(U\otimes 1\otimes 1)X_{21}(U\otimes 1\otimes 1)V_{13}$ *cf.* remarque A.9) et que Y_{12} est équivalente à $Y_{12}V_{13}$ donc à V_{13}.

b) On a $W_{13}=X_{12}^* Y_{23} X_{12} Y_{12}^* (\in \mathscr{L}(K\otimes H\otimes K))$. Dans $\mathscr{L}(H\otimes K\otimes K)$ on a l'égalité: $Y_{12}Y_{13}W_{23}=W_{23}Y_{12}$. En effet on a dans $\mathscr{L}(H\otimes K\otimes H\otimes K)$

$$\begin{aligned} Y_{12}^* W_{24} Y_{12} &= Y_{12}^* X_{23}^* Y_{34} X_{23} Y_{34}^* Y_{12} \\ &= Y_{12}^* X_{23}^* Y_{34} X_{23} Y_{12} Y_{34}^* = (Y_{12}V_{13}X_{23})^* Y_{34} (Y_{12}V_{13}X_{23}) Y_{34}^* \\ &= X_{23}^* Y_{14} Y_{34} X_{23} Y_{34}^* = Y_{14} W_{24}. \end{aligned}$$

Enfin, on a dans $\mathscr{L}(K\otimes H\otimes K\otimes K)$,

$$\begin{aligned} W_{34} W_{13} W_{34}^* &= W_{34} (X_{12}^* Y_{23} X_{12} Y_{23}^*) W_{34}^* \\ &= X_{12}^* (Y_{23} Y_{24}) X_{12} (Y_{23} Y_{24})^* \\ &= W_{13} Y_{23} W_{14} Y_{23}^* = W_{13} W_{14}. \end{aligned}$$

On en déduit que W est multiplicatif.

L'adhérence de l'espace engendré par

$$\{(x\otimes Y)(X\otimes y)(1\otimes k\otimes 1)/x,\ y\in \mathscr{K}(K),\ k\in\mathscr{K}(H)\}$$

est $\mathscr{K}(K\otimes H\otimes K)$ (A.3 *c*)). Comme

$$(x\otimes Y)(X\otimes y)(1\otimes k\otimes 1)=(x\otimes 1\otimes 1)X_{12}W_{13}Y_{23}(1\otimes k\otimes y),$$

l'adhérence de l'espace engendré par

$$\{(x\otimes 1)W_{13}(1\otimes y)/x\in\mathscr{K}(K\otimes H),\ y\in\mathscr{K}(H\otimes K)\}$$

est $\mathscr{K}(K\otimes H\otimes K)$ donc W est régulier. ■

Sous les hypothèses de la proposition A.10, les sous-espaces vectoriels fermés engendrés par

$$\{(1\otimes h)X(k\otimes 1),\ h\in\mathscr{K}(H),\ k\in\mathscr{K}(K)\}$$

et

$$\{(1\otimes k)Y(h\otimes 1),\ h\in\mathscr{K}(H),\ k\in\mathscr{K}(K)\}$$

sont denses dans $\mathscr{K}(K\otimes H)$ et $\mathscr{K}(H\otimes K)$ respectivement vu que X_{21} est une coreprésentation de l'unitaire multiplicatif régulier $\tilde{V}$ et Y_{21} est une représentation de l'unitaire multiplicatif régulier $\hat{V}$. De l'égalité

$$X_{12}(1\otimes U\otimes 1)Y_{23}(1\otimes U\otimes 1)=(1\otimes U\otimes 1)Y_{23}(1\otimes U\otimes 1)W_{13}X_{12}$$

(lemme A.7 *d*) on déduit alors que W est birégulier.

Supposons de plus qu'il existe $U'\in\mathscr{L}(K)$ tel que

1) $U'^2=1$ et $\hat{W}=(1\otimes U')W_{21}(1\otimes U')$ est multiplicatif.

2) W_{23} et $\hat{W}_{12}$ commutent.

Proposition A.11. — *Sous ces hypothèses, l'unitaire multiplicatif* W *est un multiple de* V.

Posons $\tilde{X}=(U\otimes 1)X_{21}(U\otimes 1)$ et $\hat{X}=(1\otimes U')X_{21}(1\otimes U')$.

Lemme A.12. — *On a les formules suivantes*:

(1) $$\tilde{X}_{23}V_{12}=V_{12}\tilde{X}_{23}$$

(2) $$\tilde{X}_{12}V_{13}=V_{13}X_{23}\tilde{X}_{12}.$$

(3) $$Y_{12}V_{13}X_{23}=X_{23}Y_{12}$$

(4) $$Y_{23}X_{12}=X_{12}W_{13}Y_{23}$$

(5) $$\hat{X}_{23}X_{12}W_{13}=W_{13}\hat{X}_{23}$$

(6) $$\hat{X}_{12}W_{23}=W_{23}\hat{X}_{12}.$$

Preuve. — (1) est le lemme A.7 *a*), (2) et (4) résultent respectivement des assertions *b*) et *c*) du lemme A.7 et (3) est la propriété de covariance. Considérons V comme multiplicateurs de $\hat{S}\otimes S$; notons L_Y (resp. ρ_X et λ_X) la représentation de S (resp. $\hat{S}$) dans K telle que $(\rho\otimes L_Y)(V)=Y$ (resp. $(\rho_X\otimes L)(V)=X$ et, pour $x\in\hat{S}$, $\lambda_X(x)=U'\rho_X(x)U'$). Alors

$$(\rho_X\otimes L_Y)(V)=W,\qquad (\lambda_X\otimes L)(V)=\hat{X}_{21}\qquad\text{et}\qquad (\lambda_X\otimes L_Y)(V)=\hat{W}_{21}.$$

Comme $\hat{W}_{12}W_{23}=W_{23}\hat{W}_{12}$, $\lambda_X(\hat{S})$ et $l_X(\hat{S})$ commutent d'où la formule (6). De la multiplicativité de $\hat{W}$ il résulte que $\hat{W}_{23}W_{12}W_{23}=W_{13}\hat{W}_{23}$ *i.e.*

$$(\lambda_X\otimes L_Y)(V)_{32}(\rho_X\otimes L_Y)(V)_{12}(\rho_X\otimes L_Y)(V)_{13}=(\rho_X\otimes L_Y)(V)_{13}(\lambda_X\otimes L_Y)(V)_{32}$$

et, L et L_Y étant stablement équivalentes

$$(\lambda_X\otimes L)(V)_{32}(\rho_X\otimes L)(V)_{12}(\rho_X\otimes L_Y)(V)_{13}=(\rho_X\otimes L_Y)(V)_{13}(\lambda_X\otimes L)(V)_{32}$$

d'où la formule (5). ■

Démonstration de la proposition A.11. — A l'aide de ces formules on trouve

$$\begin{aligned}\hat{X}_{12}\hat{X}_{34}Y_{34}Y_{12}\tilde{X}_{12}\tilde{X}_{34}V_{13}&=\hat{X}_{12}\hat{X}_{34}Y_{34}Y_{12}V_{13}X_{23}\tilde{X}_{12}\tilde{X}_{34} &&\text{(par (1) et (2))}\\ &=\hat{X}_{12}\hat{X}_{34}X_{23}W_{24}Y_{34}Y_{12}\tilde{X}_{12}\tilde{X}_{34} &&\text{(par (3) et (4))}\\ &=W_{24}\hat{X}_{12}\hat{X}_{34}Y_{34}Y_{12}\tilde{X}_{12}\tilde{X}_{34} &&\text{(par (5) et (6))}\end{aligned}$$

Autrement dit $(t\otimes t)V_{13}=W_{24}(t\otimes t)$ où $t=\hat{X}Y\tilde{X}$. Il en résulte que les unitaires multiplicatifs V et W sont stablement équivalents. Il en résulte que W détermine une représentation du produit croisé réduit de S par $\hat{S}$ *i.e.* de $\mathcal{K}(H)$, d'où le résultat. ■

Remarques A.13. — *a*) au paragraphe 4, nous avons classifié les unitaires multiplicatifs compacts réguliers à l'aide de C*-algèbres de Woronowicz et d'une multiplicité. Il est facile de décrire les C*-algèbres de Woronowicz à l'aide d'un unitaire multiplicatif (compact et régulier) et d'une (classe d'équivalence faible de) coreprésentation. Soit (A, δ) une C*-algèbre de Woronowicz. On définit l'opérateur $V_0\in\mathcal{L}(H\otimes A)$ en posant $V_0(\pi(x)e\otimes y)=(\pi\otimes \mathrm{id})(\delta(x))(e\otimes y)$ $(x, y\in A)$. Si σ est une représentation fidèle de A l'unitaire $X=(\mathrm{id}\otimes\sigma)(V_0)$ est une coreprésentation de V, il lui correspond donc une représentation L_X de la C*-algèbre S_p. Il est facile de voir qu'on a $\sigma(A)=L_X(S_p)=S_X$. Donc A est un quotient de S_p. Comme le diagramme

$$\begin{array}{ccc} S_p & \xrightarrow{\delta} & S_p\otimes S_p \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \xrightarrow{\delta} & A\otimes A \end{array}$$

commute, on en déduit que la représentation $(\sigma\otimes\sigma)\circ\delta$ est faiblement contenue dans σ. Réciproquement, si σ est une représentation de S_p telle que $(\sigma\otimes\sigma)\circ\delta$ soit faiblement contenue dans σ, $\sigma(S_p)$ est une C*-algèbre de Woronowicz.

b) En regardant les représentations covariantes, on peut définir le produit croisé « max » d'une C*-algèbre munie d'une coaction de S.

c) On peut aussi généraliser à notre cadre les notions de moyennabilité (*cf.* [51] et [9]) : un unitaire multiplicatif est dit moyennable (resp. comoyennable) si la représentation ρ (resp. L) est isométrique. On démontre alors facilement que :

— pour qu'un unitaire multiplicatif régulier soit moyennable (resp. comoyennable) il faut et il suffit que la représentation (resp. coreprésentation) triviale soit faiblement contenue dans la régulière.

— si un unitaire multiplicatif régulier est moyennable (resp. comoyennable) la C*-algèbre $\hat{S}=\hat{S}_p$ (resp. $S=S_p$) est nucléaire.

— si un unitaire multiplicatif régulier est moyennable (resp. comoyennable) les produits croisés réduits et « max » coïncident. En particulier, si (H, V, U) est un système de Kac moyennable ou comoyennable $S\times_{\max}\hat{S}=\hat{S}\times_{\max}S\cong S\times\hat{S}=\mathcal{K}(H)$. On en déduit que les représentations covariantes de V (au sens de A.10) sont classifiées par leur multiplicité *i.e.*

$$K\cong H\otimes H_0,\quad X=V_{13}\in\mathcal{L}(H\otimes H_0\otimes H),\quad Y=V_{12}\in\mathcal{L}(H\otimes H\otimes H_0), W=V\otimes 1_{H_0\otimes H_0}.$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] E. Abe, *Hopf algebras*, Cambridge University Press, London, New York, 1977.

[2] S. Baaj et G. Skandalis, C*-algèbres de Hopf et théorie de Kasparov équivariante. K-*theory*, vol. 2, 1989, p. 683-721.

[3] N. Bourbaki, *Intégration*, Chap. 7 à 8, Hermann, 1963.

[4] V. G. Drinfeld, Quantum Groups, *Proc. ICM Berkeley*, 1986, p. 798-820.

[5] M. Enock, Produit croisé d'une algèbre de von Neumann par une algèbre de Kac. I. *J.F.A.*, vol. 26, 1977, p. 16-46.

[6] M. Enock et J. M. Schwartz, Une dualité dans les algèbres de von Neumann, *Bull. S.M.F.* Suppl. mémoire, vol. 44, 1975, p. 1-144.

[7] M. Enock et J. M. Schwartz, Produit croisé d'une algèbre de von Neumann par une algèbre de Kac. II *Publ. RIMS Kyoto Univ.*, vol. 16, n° 1, 1980, p. 189-232.

[8] M. Enock et J. M. Schwartz, Extension de la catégorie des algèbres de Kac, *Ann. de l'Inst. Fourier*, vol. 36, fasc. 1, 1986, p. 105-131.

[9] M. Enock et J. M. Schwartz, Algèbres de Kac moyennables. *Pacific J. of Math.*, vol. 125, n° 2, 1986, p. 363-379.

[10] J. Ernest, Hopf von Neumann algebras. *Proc. Conf. Funct. Anal.* (Irvine, Calif.) Academic Press, 1967, p. 195-215.

[11] L. van Heeswijck, Duality in the Theory of Crossed Products, *Math. Scand*, vol. 44, 1979, p. 313-329.

[12] G. I. Kac, Ring Groups and the Duality Principle, *Trans. Moscow Math. Soc.*, 1963, p. 291-339. Translated from *Trudy Moskov. Mat. Ob.*, vol. 12, 1963, p. 259-301.

[13] G. I. Kac, Ring Groups and the Duality Principle II, *Trans. Moscow Math. Soc.*, 1965, p. 94-126. Translated from *Trudy Moskov. Math. Ob.*, vol. 13, 1965, p. 84-113.

[14] G. I. Kac, Certain arithmetic properties of ring groups, *Funk. Anal. i. Prilozen*, vol. 6, 1972, p. 88-90.

[15] G. I. Kac et V. G. Paljutkin, Finite Group Rings, *Trans. Moscow Math. Soc.*, 1966, p. 251-294. Translated from *Trudy Moskov. Mat. Obsc.*, vol. 15, 1966, p. 224-261.

[16] G. I. Kac et V. G. Paljutkin, Example of Ring Groups Generated by Lie Groups (en russe) *Ukr. Mat. J.*, vol. 16, 1, 1964, p. 99-105.

[17] G. I. Kac et L. I. Vainerman, Nonunimodular Ring-Groups and Hopf-von Neumann Algebras, *Math. USSSR Sb.*, vol. 23, 1974, p. 185-214. Translated from *Matem. Sb.*, vol. 94, (136), 1974, vol. 2, p. 194-225.

[18] Y. Katayama, Takesaki's Duality for a Non Degenerate Coaction, *Math. Scand.*, vol. 55, 1985, p. 141-151.

[19] E. Kirchberg, Representation of Coinvolutive Hopf-W*-Algebras and Non Abelian Duality. *Bull. Acad. Pol. Sc.*, vol. 25, 1977, p. 117-122.

[20] M. G. Krein, Hermitian-Positive Kernels in Homogeneous Spaces, *Amer. Math. Soc. Transl.*, (2), vol. 34, 1963, p. 109-164. Translated from *Ukr. Mat. Z.*, vol. 2, n° 1, 1950, p. 10-59.

[21] M. B. Landstad, Duality Theory for Covariant Systems, *Trans. A.M.S.*, vol. 248, 1979, p. 223-267.

[22] M. B. Landstad, Duality for Dual Covariance Algebras, *Comm. Math. Phys.*, vol. 52, 1977, p. 191-202.

[23] M. B. Landstad, J. Phillips, I. Raeburn, C. E. Sutherland, Representations of Crossed Products by Coactions and Principal Bundles. *Trans. AMS*, vol. 299, n° 2, 1987, p. 747-784.

[24] G. W. Mackey, Borel Structures in Groups and their Duals, *Trans. A.M.S.*, *vol.* 85, 1957, p. 134-165.

[25] S. Mac Lane, Categories for the working mathematicians, GTM 5.

[26] S. Mac Lane, Natural Associativity and Commutativity, *Rice Univ. Studies*, vol. 49, 1963, p. 4-28.

[27] S. H. Majid, Non-Commutative Geometric Groups by a Bicrossproduct Construction: Hopf Algebras at the Planck Scale, *Thesis*, Harvard Univ, 1988.

[28] S. H. Majid, Hopf von Neumann algebra Bicrossproducts, Kac Algebras Bicrossproducts, and the Classical Yang-Baxter Equation, *J.F.A.*, vol. 95, n° 2, 1991, p. 291-319.

[29] S. H. MAJID, Physics for Algebraists, Non-Commutative and Non-Cocommutative Hopf Algebras by a Bicrossproduct Construction, *J. of Algebra*, vol. 130, n° 1, 1990, p. 17-64.

[30] G. MOORE and N. SEIBERG, Classical and Quantum Conformal Field Theory, *Comm. Math. Phys.*, vol. 123, 1989, p. 177-254.

[31] Y. NAKAGAMI, Dual Action on a von Neumann Algebra and Takesaki's Duality for a Locally Compact Group, *Publ. R.I.M.S. Kyoto Univ.*, vol. 12, 1977, p. 727-775.

[32] Y. NAKAGAMI and M. TAKESAKI, Duality for Crossed Products of von Neumann Algebras. *Lect. Notes in Math.*, vol. 731, 1979.

[33] G. K. PEDERSEN, C*-*Algebras and their Automorphism Groups*. Academic press, 1979.

[34] P. PODLES et S. L. WORONOWICZ, Quantum Deformation of Lorentz Group, *Comm. Math. Phys.*, vol. 130, 1990, p. 381-431.

[35] M. A. RIEFFEL, Some Solvable Quantum Groups, *Proc. Conf. Craiova Romania* Sept. 1989 (à paraître).

[36] M. ROSSO, Comparaison des groupes SU(2) quantiques de Drinfeld et Woronowicz, *C. R. Acad. Sci.*, vol. 304, 1987, p. 323-326.

[37] M. ROSSO, Algèbres enveloppantes quantifiées, groupes quantiques compacts de matrices et calcul différentiel non commutatif. Prépublication.

[38] J. M. SCHWARTZ, Sur la structure des algèbres de Kac I, *J. Funct. Anal.*, vol. 34, 1979, p. 370-406.

[39] J. M. SCHWARTZ, Sur la structure des algèbres de Kac II, *Proc. of the London Math. Soc.*, vol. 41, 1980, p. 465-480.

[40] W. F. STINESPRING, Integration theorems for gages and duality for unimodular groups, *Trans. AMS*, vol. 90, 1959, p. 15-56.

[41] S. STRATILA, D. VOICULESCU et L. ZSIDO, On Crossed Products. I and II, *Rev. Roumaine Math. P. et Appl.*, vol. 21, 1976, p. 1411-1449 et vol. 22, 1977, p. 83-117.

[42] H. TAKAI, On a Duality for Crossed Products of C*-Algebras, *J.F.A.*, vol. 19, 1975, p. 25-39.

[43] M. TAKESAKI, A Characterization of Group Algebras as a Converse of Tannaka-Stinespring-Tatsuuma Duality Theorem, *Amer. J. of Math.*, vol. 91, 1969, p. 529-564.

[44] M. TAKESAKI, Duality and von Neumann Algebras, *L.N.M.*, vol. 247, 1972, p. 665-779.

[45] M. TAKESAKI, Duality for Crossed Products and the Structure of von Neumann Algebras of type III, *Acta Math.*, vol. 131, 1973, p. 249-310.

[46] M. TAKEUCHI, Matched Pairs of Groups and Bismash Products of Hopf Algebras, *Comm. Algebra*, vol. 9, n° 8, 1981, p. 841-882.

[47] T. TANNAKA, Über den Dualität der nicht-kommutativen topologischen Gruppen, *Tôhoku Math. J.*, vol. 45, 1938, p. 1-12.

[48] N. TATSUUMA, A Duality Theorem for Locally Compact Groups, *J. of Math. of Kyoto Univ.*, vol. 6, 1967, p. 187-293.

[49] L. I. VAINERMAN, Characterization of Dual Objects for Locally Compact Groups, *Funct. Anal. Appl.*, vol. 8, 1974, p. 66-67. Translated from *Funk. Anal. i. Prilozen*, vol. 8, 1974, n° 1, p. 75-76.

[50] J. M. VALLIN, C*-algèbres de Hopf et C*-algèbres de Kac. *Proc. London Math. Soc.*, (3), vol. 50, 1985, p. 131-174.

[51] D. VOICULESCU, Amenability and Katz algebras. *Algèbres d'opérateurs et leurs applications en physique mathématique. Colloques Internationaux*, C.N.R.S., n° 274, 1977, p. 451-457.

[52] A. WEIL, L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications. *Act. Sc. Ind.*, n° 1145, Hemann, Paris, 1953.

[53] S. L. WORONOWICZ, Twisted SU(2) group. An example of a non commutative differential calculus. *Publ. R.I.M.S.*, vol. 23, 1987, p. 117-181.

[54] S. L. WORONOWICZ, Compact Matrix Pseudogroups, *Comm. Math. Phys.*, vol. 111, 1987, p. 613-665.

[55] S. L. WORONOWICZ, Tannaka-Krein Duality for Compact Matrix Pseudogroups. Twisted SU(N) Group, *Inv. Math.*, vol. 93, 1988.

[56] S. L. WORONOWICZ, Differential Calculus on Compact Matrix Pseudogroups (Quantum Groups), *Comm. Math. Phys.*, vol. 122, 1989, p. 125-170.

(Manuscrit reçu le 27 janvier 1992.)

S. BAAJ,
Département de Mathématique et d'Informatique,
Université d'Orléans,
45046 Orléans Cedex, France

G. SKANDALIS,
Collège de France, annexe,
3, rue d'Ulm,
75005 Paris, France,
Université et Paris-VII, UFR de Mathématique,
C.N.R.S.-U.R.A. 212, 2, place Jussieu,
75251 Paris Cedex 05, France.