C. R. Acad. Sci. Paris, t. 327, Série I, p. 623-628, 1998
Analyse mathématique/*Mathematical Analysis*

Transformations pentagonales

Saad BAAJ [a], **Georges SKANDALIS** [b]

[a] Département de mathématiques, Université Blaise-Pascal, 63177 Aubière, France
Courriel : baaj@ucfma.univ-bpclermont.fr

[b] UFR de mathématiques, Université Denis-Diderot, Paris VII, case postale 7012, 2, place Jussieu, 75251 Paris cedex 05, France
Courriel : skandal@mathp7.jussieu.fr

(Reçu le 20 juillet 1998, accepté le 15 septembre 1998)

Résumé. Nous montrons que toute transformation bimesurable $v : X \times X \to X \times X$ où X, est un espace mesuré vérifiant l'identité pentagonale $v_{23} \circ v_{13} \circ v_{12} = v_{12} \circ v_{23}$ et suffisamment régulière, provient d'un couple assorti de groupes localement compacts (*cf.* [5], [8], [6], [2]), i.e. d'un groupe localement compact G et de deux sous-groupes fermés G_1 et G_2 tels que l'application $(g_1, g_2) \mapsto g_1 g_2$ soit un homéomorphisme de $G_1 \times G_2$ sur une partie ouverte et dense de G. © Académie des Sciences/Elsevier, Paris

Pentagonal transformations

Abstract. *We prove that every bimeasurable transformation $v : X \times X \to X \times X$, where X is a measured space satisfying the pentagon identity $v_{23} \circ v_{13} \circ v_{12} = v_{12} \circ v_{23}$ (and sufficiently regular) comes from a matched pair of locally compact groups* (cf. [5], [8], [6], [2]), *i.e. a locally compact group G and two closed subgroups, G_1 and G_2 such that the map $(g_1, g_2) \mapsto g_1 g_2$ is a homeomorphism from $G_1 \times G_2$ onto a dense open subset of G.* © Académie des Sciences/Elsevier, Paris

Abridged English Version

Let (X, μ) be a measured space and $v : X \times X \to X \times X$ a bimeasurable transformation. We say that v is a *pentagonal transformation* on X if, almost everywhere on $X \times X \times X$, we have $v_{23} \circ v_{13} \circ v_{12} = v_{12} \circ v_{23}$. Clearly, the unitary operator $V \in \mathcal{L}(\mathrm{L}^2(X, \mu) \otimes \mathrm{L}^2(X, \mu))$ associated with v (i.e. defined by $(V\xi)(x) = \mathrm{d}(x)^{1/2}\xi(v(x))$, where d is a Radon–Nikodym derivative) is multiplicative (in the sense of [2]) if and only if the transformation v is pentagonal.

Let $v : X \times X \to X \times X$ be a pentagonal transformation. The compositions of v with the projections $X \times X \to X$ are binary composition laws. Write for $(x, y) \in X \times X$, $v(x, y) = (x \bullet y, x \sharp y)$. We also set $v^{-1}(x, y) = (x \diamond y, x * y)$.

Note présentée par Alain CONNES.

Define the maps $\phi, \psi, \eta, \theta : X \times X \to X \times X$ setting by $\phi(x, y) = (x \bullet y, y)$, $\psi(x, y) = (x, x * y)$, $\eta(x, y) = (x, x\sharp y)$ and $\theta(x, y) = (x \diamond y, y)$.
The main result in this Note is:

THEOREM 1. – *Let $v : X \times X \to X \times X$ be a pentagonal transformation. Suppose that ϕ and η are bimeasurable transformations; then there exist a locally compact group G, two closed subgroups G_1 and G_2 of G such that the map $(g_1, g_2) \mapsto g_1 g_2$ is a homeomorphism from $G_1 \times G_2$ onto a dense open subset of G, commuting actions of G_1 (on the right) and G_2 (on the left) on X and a measurable $G_1 \times G_2$-equivariant map $f : X \to G$ such that, for almost all $(x, y) \in X \times X$, we have $v(x, y) = (x \cdot p_1(p_2(f(x))^{-1} f(y)), p_2(f(x))^{-1} \cdot y)$.*

Here $p_i : G \to G_i$are the maps (defined almost everywhere) such that, for almost all $x \in G$, we have $x = p_1(x) p_2(x)$.

One checks easily that the products $\bullet$ and $*$ are associative. The transformations ϕ and ψ' : $(x, y) \mapsto (y * x, y)$ are thus pentagonal; associated to them are multiplicative unitaries, which are commutative in the sense of [2], and therefore correspond to locally compact groups. Consider further the map w defined by the fromula $w(a, b, c, d) = (a \bullet (b\sharp c), d * (b \bullet c), c, d)$. It is a pentagonal transformation on $X \times X$. It also corresponds to a 'commutative' multiplicative unitary W and therefore to a locally compact group G. Moreover, $w = \psi'_{24} \circ v_{21} \circ \phi_{13} \circ v_{21}^{-1}$; whence $W \in \mathcal{L}(\mathrm{L}^2(X) \otimes \mathrm{L}^2(X) \otimes C_0(G_1) \otimes C_0(G_2))$. We therefore get an injective $*$-homomorphism π from $C_0(G)$ to the multiplier algebra $C_b(G_1 \times G_2)$ of $C_0(G_1) \otimes C_0(G_2) = C_0(G_1 \times G_2)$; this map is seen to be $f \mapsto f \circ h$, where $h : G_1 \times G_2 \to G$ is of the form $(g_1, g_2) \mapsto h_1(g_1) h_2(g_2)$, with $h_i : G_i \to G$ continuous group homomorphisms.

The key step in the proof of Theorem 1 is:

PROPOSITION 2. – *Under the hypothesese, of Theorem* 1, *we have:*

a) *The multiplicative unitary V associated with v is semi-regular (in the sense of* [1]*);*
b) *The image of π contains $C_0(G_1 \times G_2)$.*

It follows from Proposition 2b) that h is a homeomorphism from $G_1 \times G_2$ onto an open subset of G which is dense since π is injective. The exact form of v in Theorem 1 follows quite easily.

We also compute the Hopf algebras associated with the multiplicative unitary V, their "Haar measures" and their modular theory.

PROPOSITION 3

a) *The C^*-algebra S (resp. $\widehat{S}$) associated with V is the crossed product $C_0(G/G_2) \rtimes G_2$ (resp. $C_0(G_1 \backslash G) \rtimes G_1$).*
b) *The right (resp. left) Haar measure of S (resp. $\widehat{S}$) is $\psi_1 \circ E_1$ (resp. $\varphi_2 \circ E_2$) where E_1 (resp. E_2) is the operator valued weight of Haagerup* (see [4]) *corresponding to the (von-Neumann) crossed product from $\mathrm{L}^\infty(G/G_2) \rtimes G_2$ (resp. $\mathrm{L}^\infty(G_1 \backslash G) \rtimes G_1$) to $\mathrm{L}^\infty(G/G_2)$ (resp. $\mathrm{L}^\infty(G_1 \backslash G)$) and ψ_1 (resp. φ_2) is the right (resp. left) Haar measure of $\mathrm{L}^\infty(G_1) = \mathrm{L}^\infty(G/G_2)$ (resp. $\mathrm{L}^\infty(G_2) = \mathrm{L}^\infty(G_1 \backslash G)$).*

À toute transformation bimesurable $\varphi : X \to Y$, où (X, μ) et (Y, ν) sont des espaces mesurés, est associé un opérateur unitaire $T : \mathrm{L}^2(Y, \nu) \to \mathrm{L}^2(X, \mu)$ donné par la formule $(Tf)(x) = \mathrm{d}(x)^{1/2} f(\varphi(x))$, où d est la dérivée de Radon–Nikodym $\mathrm{d}(\varphi^{-1}\nu)/\mathrm{d}\mu$.

Soient (X, μ) un espace mesuré et $v : X \times X \to X \times X$ une transformation bimesurable. Nous dirons que v est une *transformation pentagonale* sur X si, presque partout sur $X \times X \times X$, on a $v_{23} \circ v_{13} \circ v_{12} = v_{12} \circ v_{23}$. Il est clair que l'unitaire $V \in \mathcal{L}(\mathrm{L}^2(X, \mu) \otimes \mathrm{L}^2(X, \mu))$ associé à v est multiplicatif (au sens de [2]) si et seulement si la transformation v est pentagonale. On dira que V est l'unitaire multiplicatif associé à v.

Un exemple d'une telle transformation pentagonale est donné par un groupe localement compact G et deux sous-groupes fermés G_1 et G_2 tels que l'application $(x, y) \mapsto xy$ soit un homéomorphisme de $G_1 \times G_2$ sur une partie ouverte dense de G (*cf.* [5], [8], [6], [2]). Le but de cette Note est de démontrer que toute transformation pentagonale « suffisamment régulière » est de cette forme (théorème 3.2).

1. Un exemple

Nous commençons par rappeler la transformation pentagonale associée à un groupe et deux sous-groupes (*voir* [5], [8], [6], [2]) et décrivons les mesures de Haar des algèbres de Hopf associées, ainsi que leur théorie modulaire.

Soient G un groupe localement compact, et G_1 et G_2 deux sous-groupes fermés tels que l'application $(x, y) \mapsto xy$ soit un homéomorphisme de $G_1 \times G_2$ sur une partie ouverte dense Ω de G. Rappelons (*cf.* [3]) qu'alors $G - \Omega$ est négligeable pour la mesure de Haar de G.

Définissons les applications $p_1 : \Omega \to G_1$ et $p_2 : \Omega \to G_2$ par la formule $p_1(x)p_2(x) = x$. Considérons p_1 et p_2 comme des applications mesurables presque partout définies sur G.

PROPOSITION 1.1. – *Pour* $(x, y) \in G \times G$ *posons* $v(x, y) = (xp_1(p_2(x)^{-1}y), p_2(x)^{-1}y)$.

a) *La transformation* v *est pentagonale.*

b) *L'unitaire multiplicatif* V *associé est semi-birégulier (au sens de* [1]*) et irréductible (au sens de* [2]*); l'unitaire* U *associé est l'unitaire correspondant à la transformation* $x \mapsto x^{-1}$ *de* G.

c) *La* C^**-algèbre* S *(resp.* $\widehat{S}$*) associée à* V *est le produit croisé* $C_0(G/G_2) \rtimes G_2$ *(resp.* $C_0(G_1 \backslash G) \rtimes G_1$*). La* C^**-algèbre* $S \rtimes \widehat{S}$ *est* $C_0(G) \rtimes (G_1 \times G_2)$.

d) *La mesure de Haar à droite (resp. à gauche) de* S *(resp.* $\widehat{S}$*) est* $\psi_1 \circ E_1$ *(resp* $\varphi_2 \circ E_2$*), où* E_1 *(resp.* E_2*) est le poids opératoriel de Haagerup (voir [4]) correspondant au produit croisé (von-Neumann) de* $\mathrm{L}^\infty(G/G_2) \rtimes G_2$ *(resp.* $\mathrm{L}^\infty(G_1 \backslash G) \rtimes G_1$*) vers* $\mathrm{L}^\infty(G/G_2)$ *(resp.* $\mathrm{L}^\infty(G_1 \backslash G)$*) et* ψ_1 *(resp.* φ_2*) est la mesure de Haar à droite (resp. à gauche) de* $\mathrm{L}^\infty(G_1) = \mathrm{L}^\infty(G/G_2)$ *(resp* $\mathrm{L}^\infty(G_2) = \mathrm{L}^\infty(G_1 \backslash G)$*).*

Rappelons que l'« irréductibilité » de V signifie que l'unitaire $\Sigma(U \otimes 1)V(U \otimes 1)\Sigma$ est multiplicatif (Σ désigne la volte de $\mathrm{L}^2(G)$) et que $(\Sigma(1 \otimes U)V)^3 = 1$.

Dans c), les produits croisés sont représentés dans $\mathrm{L}^2(G)$ de la façon suivante : $C_0(G/G_2)$ (resp. $C_0(G_1 \backslash G)$) formé de fonctions G_2 (resp G_1)-invariantes dans G, opère dans $\mathrm{L}^2(G)$ par multiplication, et G_2 (resp. G_1) opère par translations à gauche (resp. à droite). Il résulte de c) et de [2] que V est (bi-)régulier si et seulement si $(g_1, g_2) \mapsto g_1 g_2$ est surjective.

d) signifie que $\Psi = \psi_1 \circ E_1$ est normal, semi-fini et fidèle, que sa restriction à S est « normiquement » semi-finie, son groupe modulaire laisse S invariante et, pour tout $\omega \in S_+^*$ on a $\Psi(\omega * \cdot) = \omega(1)\psi$. On peut construire la mesure de Haar à gauche de S : $\Phi = F^{-2}\Psi$, où F est l'opérateur (affilié au centralisateur de Ψ) de multiplication par $y \mapsto \Delta(p_1(y))^{1/2}\Delta_1(p_1(y))^{-1}$, avec Δ et Δ_1 désignant les fonctions modulaires de G et G_1. La mesure de Haar à droite de $\widehat{S}$ est donnée par $\widehat{\Psi} = \widehat{F}^2\widehat{\Phi}$, où $\widehat{F}$ est l'opérateur (affilié au centralisateur de la mesure de Haar à gauche $\widehat{\Phi}$ de $\widehat{S}$) de multiplication par $y \mapsto \Delta^{1/2}(p_2(y))\Delta_2(p_2(y))^{-1}$. On vérifie alors que la théorie modulaire est bien donnée par les formules de [7], §6. En particulier, l'opérateur de Tomita pour Ψ est $\Delta_\Psi = F\widehat{F}^{-1}UF\widehat{F}U$.

Remarquons que chaque représentation du produit croisé (plein) $C_0(G) \rtimes (G_1 \times G_2)$ donne lieu à une représentation covariante de V au sens de [2], donc à un unitaire multiplicatif semi-birégulier W; les algèbres de Hopf associées à W sont isomorphes à S et $\widehat{S}$ (*cf.* [1], théorème 3.18). En particulier, si X est un espace mesuré muni d'actions qui commutent de G_2 – à gauche – et de G_1 – à droite

– et d'une application $G_1 \times G_2$-équivariante $f : X \to G$, on obtient une transformation pentagonale $w : X \times X \to X \times X$ par la formule $w(x,y) = (xp_1(p_2(f(x))^{-1}f(y)), p_2(f(x))^{-1}y)$. Une orbite de $G_1 \times G_2$ dans G (distincte de l'orbite dense G_2G_1) fournit un exemple d'un tel X.

2. Le cas « commutatif »

On déduit assez facilement de [2], §2, les deux résultats suivants :

LEMME 2.1. – *Soit $v : X \times X \to X \times X$ une transformation pentagonale telle que, pour presque tous $x, y \in X$, on ait $\pi_2 \circ v(x,y) = y$ (où $\pi_2(x,y) = y$). Alors il existe un groupe localement compact G, une action à droite de G dans X et une application mesurable $f : X \to G$ tels que l'on ait pour presque tous $x, y \in X$ et $g \in G$, $f(x \cdot g) = f(x)g$ et $v(x,y) = (x \cdot f(y), y)$.*

En fait, X est alors un espace produit $G \times X_0$, f est la projection $G \times X_0 \to G$ et l'action est donnée par $(g,x) \cdot g' = (gg', x)$.

LEMME 2.2. – *Soient (H,V) et (K,W) deux unitaires multiplicatifs commutatifs et notons G et G' les groupes localement compacts associés. Soit $A \in \mathcal{L}(H \otimes K)$ une représentation de W dans H qui est une coreprésentation de V dans K. Alors il existe un unique homomorphisme continu h de G' dans G tel que $A = (h_* \otimes \mathrm{id})(W) = (\mathrm{id} \otimes h_*)(V)$.*

3. Le cas général

Soit $v : X \times X \to X \times X$ une transformation pentagonale. Les applications obtenues en composant v avec les projections $X \times X \to X$ sont des lois de composition interne. Pour $(x,y) \in X \times X$, écrivons $v(x,y) = (x \bullet y, x \sharp y)$. Il est commode de poser aussi $v^{-1}(x,y) = (x \diamond y, x * y)$.

On a facilement:

LEMME 3.1. – *Avec les notations ci-dessus*

a) *les produits $(x,y) \mapsto x \bullet y$ et $(x,y) \mapsto x * y$ sont associatifs : pour presque tout $(x,y,z) \in X^3$, on a $x \bullet (y \bullet z) = (x \bullet y) \bullet z$ et $x * (y * z) = (x * y) * z$;*
b) *pour presque tout $(x,y,z) \in X^3$, on a les formules : $(x \sharp y) \diamond z = x \sharp (y \diamond z)$, $y \sharp (x \sharp z) = (x * y) \sharp z$, $(x \diamond z) \diamond y = x \diamond (y \bullet z)$;*
c) *pour presque tout $(x,y,z) \in X^3$, posant $(a,b) = v(x,z)$, on a $a * (y \bullet b) = (x * y) \bullet z$, $x \sharp (z \bullet y) = b \bullet (a \sharp y)$ et $(y * a) \diamond b = (y \diamond z) * x$.*

Définissons les applications $\phi, \psi, \eta, \theta : X \times X \to X \times X$ en posant $\phi(x,y) = (x \bullet y, y)$, $\psi(x,y) = (x, x * y)$, $\eta(x,y) = (x, x \sharp y)$ et $\theta(x,y) = (x \diamond y, y)$.

THÉORÈME 3.2. – *Soit $v : X \times X \to X \times X$ une transformation pentagonale. On suppose que les applications ϕ et η, définies ci-dessus, sont des transformations bimesurables; alors il existe un groupe localement compact G, des sous-groupes fermés G_1 et G_2 de G tels que l'application $(x,y) \mapsto xy$ soit un homéomorphisme de $G_1 \times G_2$ sur une partie ouverte dense de G, des actions qui commutent de G_1 – à droite – et de G_2 – à gauche – sur X et une application mesurable $G_1 \times G_2$-équivariante $f : X \to G$ tels que pour presque tout $(x,y) \in X \times X$, on ait $v(x,y) = (x \cdot p_1(p_2(f(x))^{-1}f(y)), p_2(f(x))^{-1} \cdot y)$.*

Remarquons que, si les applications ϕ et η sont des transformations bimesurables, alors il en va de même pour $\psi = \phi \circ v^{-1}$ et $\theta = \eta \circ v^{-1}$, ainsi que pour l'application $\psi' : X \times X \to X \times X$ donnée par $\psi'(x,y) = (y * x, y)$.

Définissons aussi des applications α et α' de $X \times X \times X$ dans lui-même et w de $X \times X \times X \times X$ dans lui même en posant $\alpha(a,b,c) = (a \bullet (b \sharp c), b \bullet c, c)$, $\alpha'(a,b,c) = (a, c * b, c)$ et $w(a,b,c,d) = (a \bullet (b \sharp c), d * (b \bullet c), c, d)$

LEMME 3.3

a) *Les applications* ϕ *et* ψ' *sont des transformations pentagonales sur* X.

b) *On a* $\alpha' = \psi'_{23}$, $\alpha = v_{21}\phi_{13}v_{21}^{-1}$ *et* $w = \psi'_{24}\alpha_{123}$. *En particulier, les applications* α, α' *et* w *sont des transformations bimesurables.*

c) *On a* $v_{43}^{-1} \circ w \circ v_{43} = \alpha_{123} \circ \alpha'_{124}$.

d) *On a les formules* $\phi_{34} \circ \alpha_{124} \circ \alpha_{123} = \alpha_{123} \circ \phi_{34}$; $\psi'_{34} \circ \alpha'_{124} \circ \alpha'_{123} = \alpha'_{123} \circ \psi'_{34}$; $w_{1234} \circ \alpha_{345} = \alpha_{345} \circ \alpha_{125} \circ w_{1234}$; $w_{1234} \circ \alpha'_{345} = \alpha'_{345} \circ \alpha'_{125} \circ w_{1234}$.

e) *L'application* w *est une transformation pentagonale sur* $X \times X$.

Par le lemme 2.1, on a des groupes localement compacts G_1, G_2 et G, des actions à droite de G_i dans X et de G dans $X \times X$ et des applications mesurables $f_i : X \to G_i$ et $F : X \times X \to G$ tels que l'on ait, pour presque tous $a, b, c, d \in X$, $g_i \in G_i$ et $g \in G$: $f_i(a \cdot g_i) = f_i(a)g_i$, $F((a,b) \cdot g) = F(a,b)g$; $a \bullet b = a \cdot f_1(b)$, $a * b = b \cdot f_2(a)$ et $(a \bullet (b \sharp c), d * (b \bullet c)) = (a,b) \cdot F(c,d)$.

Les transformations α et α' définissent respectivement des opérateurs unitaires A et A' agissant sur $L^2(X) \otimes L^2(X) \otimes L^2(X)$, qui définissent (par les lemmes 2.2 et 3.3-d)) des homomomorphismes continus $h_1 : G_1 \to G$ et $h_2 : G_2 \to G$. Pour presque tout $(x,y) \in X \times X$, on a $F(x,y) = h_1 \circ f_1(x) h_2 \circ f_2(y)$.

Il en résulte que l'application $h : (g_1, g_2) \mapsto h_1(g_1)h_2(g_2)$ a une image dense dans G ; notons π l'application $C_0(G) \to C_b(G_1 \times G_2)$ correspondante ($f \mapsto f \circ h$).

Le point crucial dans la preuve du théorème 3.2 est :

PROPOSITION 3.4. – *Sous les hypothèses du théorème* 3.2, *on a :*

a) *l'unitaire multiplicatif* V *associé à* v *est semi-régulier (au sens de* [1]*)* ;

b) *l'image de l'application* π *contient* $C_0(G_1 \times G_2)$.

Démonstration. – a) Soient $\xi, \zeta, \xi' \in L^2(X, \mu)$. Notons $\sigma : X \times X \to X \times X$ la volte ($\sigma(a,b) = (b,a)$) et posons $\rho = \eta \circ \phi^{-1} \circ \sigma$. Un calcul simple montre que $((\mathrm{id} \otimes \omega_{\xi,\zeta})(\Sigma V)\xi')(x) = \int_X k(x,y)\xi'(y)\mathrm{d}\mu(y)$, où $k(x,y) = \mathrm{d}(x,y)(\bar{\xi} \otimes \zeta) \circ \rho(x,y)$ où $\mathrm{d} : X \times X \to \mathbf{R}_+^*$ est une fonction mesurable (donnée par des dérivées de Radon–Nikodym). L'opérateur $Q : \xi \mapsto (\xi \circ \rho)\mathrm{d}$ est un opérateur défini de manière dense fermé à image dense de $L^2(X \times X)$ dans lui-même. On vérifie aisément que Q possède un domaine essentiel contenu dans le produit tensoriel algébrique $L^2(X) \otimes L^2(X)$, d'où l'on déduit que $\mathcal{C}(V)$ (qui est par définition $\{ (\mathrm{id} \otimes \omega)(\Sigma V),\ \omega \in \mathcal{L}(L^2(X))_* \}$) contient un sous-ensemble dense de l'ensemble des opérateurs de Hilbert–Schmidt. Son adhérence contient donc tous les opérateurs compacts.

b) Notons V^1, V^2, et W les opérateurs unitaires associés à ϕ, ψ' et w respectivement. Comme $W = V_{21}^* V_{13}^1 V_{21} V_{24}^2$, l'espace $\{ (\omega \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{L}(L^2(X \times X))})(W),\ \omega \in \mathcal{L}(L^2(X \times X))_* \}$ est engendré par $\{ (\omega \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id})((V_{12}^1(a \otimes 1 \otimes 1)V_{13}^2),\ a \in \mathcal{C}(V),\ \omega \in \mathcal{L}(L^2(X))_* \}$. Mais l'espace vectoriel fermé engendré par $\{ (\omega \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id})((V_{12}^1(k \otimes 1 \otimes 1)V_{13}^2),\ k \in \mathcal{K}(L^2(X)),\ \omega \in \mathcal{L}(L^2(X))_* \}$ est $C_0(G_1 \times G_2)$; donc b) résulte de a). □

De la proposition 3.4b, il résulte que l'application $(g_1, g_2) \mapsto h_1(g_1)h_2(g_2)$ est un homéomorphisme de $G_1 \times G_2$ sur une partie ouverte Ω de G ; on a vu que Ω est dense. On identifie à présent G_i avec son image dans G au moyen de h_i. Notons $p_i : \Omega \to G_i$ l'application telle que $x = p_1(x)p_2(x)$.

LEMME 3.5. – *Pour presque tous* $x, y \in X$ *on a :*

a) $f_1(x \bullet y) = f_1(x)f_1(y)$, $f_2(x * y) = f_2(y)f_2(x)$;

b) $f_1(b)f_2(a) = f_2(x)f_1(y)$, *où l'on a posé* $(a,b) = v(x,y)$;

c) $f_1(x * y) = p_1(f_2(x)^{-1}f_1(y)^{-1})^{-1}$ *et* $f_2(x \bullet y) = p_2(f_2(x)f_1(y))$.

Définissons enfin $f : X \to G$ en posant $f(x) = f_1(x)f_2(x)^{-1}$.

LEMME 3.6. – *Pour presque tous* $x, y \in X \times X$, *on a :* $(f \times f)(v(x,y)) = (f(x)p_1(p_2(f(x))^{-1}f(y)), p_2(f(x))^{-1}f(y))$.

Par lemme 3.1.b), on a des actions $\triangleleft$ de G_1 – à droite – et $\triangleright$ de G_2 – à gauche – dans X en posant $x \triangleleft f_1(y)^{-1} = x \diamond y$ et $f_2(x) \triangleright y = x \sharp y$; ces deux actions commutent. Il résulte du lemme 3.5 que, presque partout $f(g_2 \triangleright x \triangleleft g_1) = g_2 f(x) g_1$. Le théorème en résulte, vu que $v = \theta^{-1} \circ \eta$. □

Références bibliographiques

[1] Baaj S., Représentation régulière du groupe quantique des déplacements de Woronowicz, Astérisque 232 (1995) 11–48.
[2] Baaj S., Skandalis G., Unitaires multiplicatifs et dualité pour les produits croisés de C^*–algèbres, Ann. Sci. École Norm. Sup. 26 (4e série) (1993) 425–488.
[3] Bourbaki N., Éléments de mathématiques, Intégration Ch. VIII, Hermann.
[4] Haagerup U., On the dual weights for crossed products of Von Neumann algebras II, Math. Scand. 43 (1978) 119–140.
[5] Kac G.I., Extensions of groups to ring groups, Math. USSR Sbornik 5 (1968) 451–474.
[6] Majid S., Hopf–von Neumann algebra bicrossproducts, Kac algebra bicrossproducts, and the classical Yang–Baxter equations, J. Fund. Anal. 95 (2) (1991) 291–319.
[7] Skandalis G., Operator Algebras and Duality, Proc. Int. Cong. Math. Kyoto 1990, Vol. 2, 1991, pp. 997–1009.
[8] Takeuchi M., Matched pairs of groups and bismashed product of Hopf algebras, Comm. Alg. 9 (1981) 841–882.