

ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

PIERRE DE LA HARPE

GEORGES SKANDALIS

Déterminant associé à une trace sur une algèbre de Banach

Annales de l'institut Fourier, tome 34, n° 1 (1984), p. 241-260.

http://www.numdam.org/item?id=AIF_1984__34_1_241_0

© Annales de l'institut Fourier, 1984, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

DÉTERMINANT ASSOCIÉ À UNE TRACE SUR UNE ALGÈBRE DE BANACH

par P. de la HARPE et G. SKANDALIS

Soit A une algèbre de Banach complexe. Notons $GL_1(A)$ le groupe des éléments inversibles de A (ou quasi-inversibles si A n'a pas d'unité) muni de la topologie normique, $GL_1^0(A)$ sa composante connexe et $DGL_1^0(A)$ le groupe dérivé de celle-ci. (Nous désignons en général par $D\Gamma$ le sous-groupe d'un groupe Γ formé des produits finis de commutateurs.) Cet article est la première partie d'un travail qui a pour but d'étudier le quotient $GL_1^0(A)/DGL_1^0(A)$ ainsi que le groupe $DGL_1^0(A)$. Nous définissons ici un déterminant sur $GL_1^0(A)$ (et non sur $GL_1(A)$ tout entier). Nous montrons dans la seconde partie que, pour certains types de C^* -algèbres déjà considérés par T. Fack [7], le noyau de ce déterminant coïncide avec $DGL_1^0(A)$. Ce sujet suggère très naturellement un outillage de K -théorie algébrique; pour les quelques propriétés générales du foncteur K_0 que nous utilisons ici (dont la périodicité de Bott), nous renvoyons le lecteur à [15] ou [11]. (Si A n'a pas d'unité, nous écrivons toutefois $K_0(A)$ ce que Taylor désigne par $\tilde{K}_0(A)$; la notation de Taylor a le désavantage d'évoquer le K -groupe réduit d'un espace topologique compact Ω lorsque $A = C(\Omega)$.)

Dans un premier paragraphe, nous supposons donnés un espace de Banach E et une application linéaire continue τ de A dans E *traciale* au sens où $\tau(xy) = \tau(yx)$ pour tous $x, y \in A$; une telle application induit un homomorphisme de groupes $\underline{\tau}$ de $K_0(A)$ dans E . Nous définissons un *déterminant* Δ_τ , qui est un homomorphisme de source une forme stabilisée $GL_\infty^0(A)$ de $GL_1^0(A)$ et de but $E/\underline{\tau}(K_0(A))$, tel que $\Delta_\tau(\exp(i2\pi y))$ soit la classe de $\tau(y)$ pour tout $y \in A$. Le déterminant usuel sur

$M_n(\mathbf{C})$ est donc $\exp(i2\pi\Delta_\tau)$ si τ est la trace usuelle (avec $\tau(1) = n$), le déterminant de B. Fuglede et R. Kadison est $\exp(\operatorname{Re}(i2\pi\Delta_\tau))$ si τ est la trace normalisée sur un facteur fini continu, et le déterminant classique associé à l'algèbre (sans unité) des opérateurs à trace sur un espace de Hilbert de dimension infinie entre tout aussi naturellement dans notre cadre. Ce premier paragraphe est ainsi une réponse à la question du problème 5.11 de [2].

L'inclusion $\operatorname{DGL}_\infty^0(A) \subset \operatorname{Ker}(\Delta_\tau)$ étant banale, il est naturel d'examiner quand l'égalité est vraie. Soient en particulier E_u le quotient de A par le sous-espace fermé engendré par les commutateurs additifs $xy - yx$ (avec $x, y \in A$) et $T: A \rightarrow E_u$ la projection canonique; nous appelons *déterminant universel* de A l'homomorphisme Δ_T . Nous montrons au § 2 que $\operatorname{DGL}_\infty^0(A)$ est dense dans $\operatorname{Ker}(\Delta_T)$; de plus, si A est séparable, alors $\operatorname{Ker}(\Delta_T)$ coïncide avec $\bigcap \operatorname{Ker}(\Delta_\tau)$, l'intersection étant prise sur toutes les traces $\tau: A \rightarrow \mathbf{C}$. Certaines considérations de ce paragraphe sont proches d'un travail indépendant de M. Karoubi.

En général, il n'y a toutefois égalité ni entre $\operatorname{DGL}_\infty^0(A)$ et $\operatorname{Ker}(\Delta_T)$, ni entre $\operatorname{Ker}(\Delta_T)$ et $\bigcap \operatorname{Ker}(\Delta_\tau)$. C'est ce que montrent les deux exemples de C^* -algèbres du paragraphe suivant. (Nous réservons nos résultats positifs à la seconde partie.)

Nous terminons pour l'agrément du lecteur par une remarque montrant que, si A est une C^* -algèbre approximativement finie avec unité et θ un nombre réel irrationnel, alors $\exp(i2\pi\theta) \in \operatorname{DGL}_\infty(A)$ si et seulement s'il existe deux unitaires $u, v \in A$ avec $\exp(i2\pi\theta) = uvu^{-1}v^{-1}$. L'argument repose sur un résultat de M. Pimsner et D. Voiculescu.

La seconde partie sera consacrée aux résultats suivants. Soit A une C^* -algèbre approximativement finie simple avec unité; alors $\operatorname{DGL}_1(A)$ coïncide avec le noyau de la restriction à $\operatorname{GL}_1(A)$ du déterminant universel Δ_T ; de plus le quotient de $\operatorname{DGL}_1(A)$ par son centre (un sous-groupe de \mathbf{C}^*) est un groupe simple. Si A est une C^* -algèbre stable ou infinie simple avec unité, le déterminant universel est banal (ce qui résulte de [7]) et $\operatorname{DGL}_1^0(A)$ est un groupe parfait.

Nous remercions D. Handelman pour ses utiles remarques sur les C^* -algèbres approximativement finies non séparables (voir [10], et le début du § 3).

1. Le déterminant associé à une application traciale.

Soient A une algèbre de Banach (complexe), E un espace de Banach et $\tau : A \rightarrow E$ une application linéaire continue traciale. Pour tout entier $n \geq 1$, nous notons $M_n(A)$ l'algèbre des $(n \times n)$ -matrices sur A , qui est une algèbre de Banach pour une norme convenable. On écrit $M_\infty(A)$ la limite inductive de $(M_n(A))_{n > 1}$ relative aux inclusions standard schématisées par $*$ $\mapsto \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. L'application τ s'étend en une application

$$\left\{ \begin{array}{l} M_\infty(A) \longrightarrow E \\ (a_{j,k})_{j,k > 1} \longmapsto \sum_{j > 1} \tau(a_{j,j}) \end{array} \right.$$

encore notée τ .

Si A possède une unité, $GL_n(A)$ désigne le groupe des éléments inversibles de $M_n(A)$ muni de la topologie définie par la norme. Si A n'a pas d'unité, soit \tilde{A} l'algèbre obtenue par adjonction d'une unité, qui est une algèbre de Banach pour une norme convenable; $GL_n(A)$ désigne alors le sous-groupe topologique de $GL_n(\tilde{A})$ formé des éléments du type $1 - x$ avec $x \in M_n(A)$. Dans tous les cas, on écrit $GL_\infty(A)$ la limite inductive de $(GL_n(A))_{n > 1}$ relative aux inclusions schématisées par $*$ $\mapsto \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; c'est un groupe topologique de composante connexe $GL_\infty^0(A)$.

Soient Ω un espace compact et φ une application continue de Ω dans $GL_\infty(A)$ [respectivement $M_\infty(A)$]; alors φ se factorise par $GL_n(A)$ [resp. $M_n(A)$] pour n convenable. Si Ω est de plus une variété différentiable [resp. un espace mesuré], il n'y a donc aucune difficulté à définir la classe de différentiabilité [resp. l'intégrale sur Ω] de φ . Soient $[\alpha_1, \alpha_2]$ un intervalle compact de la droite réelle et $\xi : [\alpha_1, \alpha_2] \rightarrow GL_\infty^0(A)$ un chemin de classe \mathcal{C}^1 par morceaux; nous définissons

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}_\tau(\xi) &= \frac{1}{i2\pi} \tau \left\{ \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \dot{\xi}(\alpha) \xi(\alpha)^{-1} d\alpha \right\} \\ &= \frac{1}{i2\pi} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \tau \{ \dot{\xi}(\alpha) \xi(\alpha)^{-1} \} d\alpha . \end{aligned}$$

La constante $i2\pi$ donne la "normalisation" suivante : si $A = \mathbf{C}$, si τ est l'identité et si ξ est le lacet de degré un donné par $\xi(\alpha) = \exp(i2\pi\alpha) \in \mathbf{C}^* = GL_1(\mathbf{C}) \subset GL_\infty(\mathbf{C})$ pour tout $\alpha \in [0, 1]$, alors $\tilde{\Delta}_\tau(\xi) = 1$.

LEMME 1. — a) Soient $\xi_1, \xi_2 : [\alpha_1, \alpha_2] \rightarrow GL_\infty^0(A)$ deux chemins comme ci-dessus et ξ leur produit défini par

$$\xi(\alpha) = \xi_1(\alpha) \xi_2(\alpha)$$

pour tout $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$; alors $\tilde{\Delta}_\tau(\xi) = \tilde{\Delta}_\tau(\xi_1) + \tilde{\Delta}_\tau(\xi_2)$.

b) Soit $\xi : [\alpha_1, \alpha_2] \rightarrow GL_\infty^0(A)$ un chemin avec $\|\xi(\alpha) - 1\| < 1$ pour tout $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$; alors

$$i2\pi \tilde{\Delta}_\tau(\xi) = \tau(\text{Log}(\xi(\alpha_2))) - \tau(\text{Log}(\xi(\alpha_1))).$$

c) L'intégrale $\tilde{\Delta}_\tau(\xi)$ ne dépend que de la classe d'homotopie de ξ (à extrémités fixes).

d) L'application $\tilde{\Delta}_\tau$, définie sur les lacets basés en l'élément neutre de $GL_\infty^0(A)$, induit l'homomorphisme de groupes abéliens $\underline{\tau} : K_0(A) \approx \pi_1(GL_\infty^0(A)) \rightarrow E$ décrit comme suit :

Cas où A possède une unité. Soient e un idempotent dans $M_\infty(A)$ et $[e]$ sa classe dans $K_0(A)$; alors $\underline{\tau}([e]) = \tau(e)$.

Cas où A est sans unité; on désigne par \tilde{A} l'algèbre obtenue par adjonction d'une unité, par $\epsilon : \tilde{A} \rightarrow \mathbf{C}$ l'augmentation canonique, et on prolonge τ en posant $\tau(1) = 0$. Soient $e \in M_\infty(\tilde{A})$ un idempotent, n le rang de son image par ϵ dans $M_\infty(\mathbf{C})$ et $[e] - [1_n]$ la classe de $K_0(A)$ définie par e (voir [15], nos 7.5 et 7.7); alors $\underline{\tau}([e] - [1_n]) = \tau(e)$.

Preuve. (Voir [1]. — lemme 5 de l'appendice). — Pour a), on a

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}_\tau(\xi) &= \frac{1}{i2\pi} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \tau \{ \dot{\xi}_1(\alpha) \xi_1(\alpha)^{-1} \\ &\quad + \xi_1(\alpha) \dot{\xi}_2(\alpha) \xi_2(\alpha)^{-1} \xi_1(\alpha)^{-1} \} d\alpha \\ &= \tilde{\Delta}_\tau(\xi_1) + \tilde{\Delta}_\tau(\xi_2) \end{aligned}$$

car τ est tracielle. L'affirmation b) résulte de l'existence d'une primitive $\tau(\text{Log}(\xi(\alpha)))$ de $\tau(\dot{\xi}(\alpha)\xi(\alpha)^{-1})d\alpha$. L'affirmation c) résulte de a), b) et de ce qu'on peut écrire $\xi_2 = \xi_1 \xi'_1 \xi'_2 \dots \xi'_k$ avec $\|\xi'_j(\alpha) - 1\| < 1$ pour tout α et pour $j = 1, 2, \dots, k$.

Il n'y a plus rien à montrer pour d) ; la formulation de l'isomorphisme de Bott à laquelle nous nous référons est celle de [11], § III.1. \square

DEFINITION. — On appelle déterminant associé à l'application linéaire continue tracielle $\tau: A \rightarrow E$ et on note Δ_τ l'application de $GL_\infty^0(A)$ dans le groupe additif $E/\underline{\tau}(K_0(A))$ qui fait correspondre à $x \in GL_\infty^0(A)$ la classe $p(\tilde{\Delta}_\tau(\xi))$, où ξ est un chemin dans $GL_\infty^0(A)$ continûment différentiable par morceaux d'origine 1 et d'extrémité x , et où $p: E \rightarrow E/\underline{\tau}(K_0(A))$ est la projection canonique.

PROPOSITION 2. — On conserve les notations ci-dessus.

a) L'application Δ_τ est un homomorphisme.

b) $i2\pi\Delta_\tau(\exp(y)) = p(\tau(y))$ pour tout $y \in M_\infty(A)$.

c) Si $A = M_n(\mathbf{C})$ et si τ est la trace usuelle (avec $\tau(1) = n$), alors la restriction à $GL_1^0(A) = GL(n, \mathbf{C})$ de $\exp(i2\pi\Delta_\tau)$ est le déterminant usuel.

d) Si A est une C^* -algèbre et si τ est une trace positive normalisée, alors la restriction à $GL_1^0(A)$ de $\exp(\operatorname{Re}(i2\pi\Delta_\tau))$ est le déterminant de Fuglede-Kadison [8].

e) Si H est un espace de Hilbert de dimension infinie, A l'algèbre de Banach des opérateurs à trace sur H et τ la trace usuelle sur A , alors la restriction à $GL_1(A)$ de $\exp(i2\pi\Delta_\tau)$ est encore le déterminant usuel (voir [4] § XI.9).

Preuve. — L'affirmation a) résulte du lemme 1 a) et b) est immédiat. Soient $A = M_n(\mathbf{C})$ et τ la trace usuelle. Soient $y \in M_n(\mathbf{C})$ et $x = \exp(y)$. Alors $\Delta_\tau(x)$ est la classe dans \mathbf{C} modulo $\underline{\tau}(K_0(A)) = \mathbf{Z}$ de $\frac{1}{i2\pi} \tau(y)$, donc

$$\exp(i2\pi\Delta_\tau(x)) = \exp(\tau(y)) = \det(x).$$

Les homomorphismes $\exp(i2\pi\Delta_\tau)$ et \det de $GL(n, \mathbf{C})$ dans \mathbf{C}^* coïncident ainsi sur l'image de l'exponentielle, i.e. partout.

Si A et τ sont comme dans d), alors $\underline{\tau}(K_0(A)) \subset \mathbf{R}$ et l'écriture $\exp(\operatorname{Re}(i2\pi\Delta_\tau)): GL_\infty^0(A) \rightarrow \mathbf{R}_+^*$ a bien un sens. Soit $x \in GL_1(A) \cap GL_\infty^0(A)$; comme x est inversible, sa décomposition

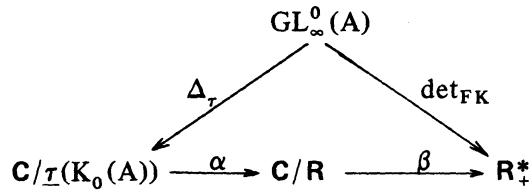
polaire $u|x|$ a lieu dans A , et $\Delta_\tau(x) = \Delta_\tau(u) + \Delta_\tau(|x|)$. On peut choisir un chemin connectant 1 à u dans les unitaires de $GL_\infty^0(A)$, de sorte que $\Delta_\tau(u) \in \mathbf{R}$. Par suite

$$\operatorname{Re}(i2\pi\Delta_\tau(x)) = i2\pi\Delta_\tau(|x|) = \tau(\operatorname{Log}|x|)$$

et $\exp(\operatorname{Re}(i2\pi\Delta_\tau(x))) = \exp(\tau(\operatorname{Log}|x|))$.

On retrouve la définition du déterminant de Fuglede-Kadison, d'où d). On laisse la vérification de l'affirmation e) au lecteur. \square

Soit A une C^* -algèbre séparable. On sait que $K_0(A)$ est dénombrable (car deux idempotents normiquement proches dans $M_n(A)$ sont équivalents). Si $\tau : A \rightarrow \mathbf{C}$ est une trace positive normalisée, $\tau(K_0(A))$ est donc un sous-groupe dénombrable de \mathbf{C} (même de \mathbf{R}). On a donc un diagramme commutatif



où Δ_τ est surjectif vu l'affirmation b), où α est la projection canonique, où $\beta(\lambda + \mathbf{R}) = \exp(\operatorname{Re}(i2\pi\lambda))$, et où \det_{FK} est le déterminant de Fuglede-Kadison. Or β est un isomorphisme et le noyau de α est non nul (même non dénombrable). On a donc $\operatorname{Ker}(\Delta_\tau) \subsetneq \operatorname{Ker}(\det_{FK})$; en ce sens Δ_τ fournit strictement plus d'information que \det_{FK} . (Voir aussi la remarque suivant la proposition 13).

2. Le déterminant universel et son noyau.

Soit A une algèbre de Banach. Notons E_u le quotient de A par le sous-espace fermé $\overline{[A, A]}$ de A engendré par les commutateurs additifs. (Si A est une C^* -algèbre, E_u est le complexifié de l'espace noté A^q dans [3].) Nous appelons *application traciaie universelle* de A et nous notons T (parfois T_A) la projection canonique de A sur E_u ; l'homomorphisme

$$\Delta_T : GL_\infty^0(A) \longrightarrow E_u / \underline{T}(K_0(A))$$

est alors le *déterminant universel* de A . Toute application traciale $\tau : A \longrightarrow E$ est de la forme σT avec σ une application linéaire continue de E_u dans E , et on a $DGL_\infty^0(A) \subset \text{Ker}(\Delta_T) \subset \text{Ker}(\Delta_\tau)$. Il est naturel de demander quand ces inclusions donnent lieu à des égalités. La proposition suivante indique une réponse partielle; nous isolons une partie de la preuve dans le lemme 3(a), et le lemme 3(b) sera utile dans la seconde partie de ce travail.

LEMME 3. — Soit τ une application traciale sur A .

a) Soit $x \in \text{Ker}(\Delta_\tau)$; il existe $y_1, \dots, y_k \in M_\infty(A)$ avec

$$x = \prod_{1 \leq j \leq k} \exp(y_j) \quad \text{et} \quad \sum_{1 \leq j \leq k} \tau(y_j) = 0$$

b) Soient $x_1, \dots, x_k \in M_\infty(A)$ avec $\|x_j - 1\| < 1$ ($1 \leq j \leq k$) et $\prod_{1 \leq j \leq k} (1 - \|x_j - 1\|) > 1/2$. Alors

$$\tau(\text{Log}(x_1 \dots x_k)) = \tau(\text{Log}(x_1)) + \dots + \tau(\text{Log}(x_k)).$$

Preuve. — a) Soit $\xi : [0, 1] \longrightarrow GL_\infty^0(A)$ un chemin d'origine 1 et d'extrémité x tel que $\tilde{\Delta}_\tau(\xi) = 0$. Soit k un entier tel que

$$\|\xi\left(\frac{j-1}{k}\right)^{-1} \xi\left(\frac{j}{k}\right) - 1\| < 1 \quad (j = 1, \dots, k). \quad \text{On pose}$$

$$y_j = \text{Log} \left\{ \xi\left(\frac{j-1}{k}\right)^{-1} \xi\left(\frac{j}{k}\right) \right\}$$

et on définit

$$\eta(\alpha) = \xi\left(\frac{j}{k}\right) \exp\{(k\alpha - j)y_j\} \quad \frac{j-1}{k} \leq \alpha \leq \frac{j}{k}$$

pour $j = 1, \dots, k$. On suppose de plus k assez grand pour que $\|\eta(\alpha) \xi(\alpha)^{-1} - 1\| < 1$ pour tout $\alpha \in [0, 1]$.

Le lemme 1 montre que η est un chemin d'origine 1 et d'extrémité x tel que $\tilde{\Delta}_\tau(\eta) = \tilde{\Delta}_\tau(\xi)$. On a bien $x = \prod_{1 \leq j \leq k} \exp(y_j)$

$$\text{et } i2\pi\tilde{\Delta}_\tau(\eta) = \sum_{1 \leq j \leq k} \tau(y_j) = 0.$$

b) Rappelons d'abord qu'on a pour tout $x \in M_\infty(A)$ avec $\|x - 1\| < 1$

$$\|\text{Log}x\| = \|\text{Log}(1 - (1 - x))\| \leq \sum_{n>1} \frac{1}{n} \|1 - x\|^n = \text{Log} \left(\frac{1}{1 - \|1 - x\|} \right)$$

et pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ avec $0 \leq \alpha \leq 1$

$$\|\exp(\alpha \text{Log}x)\| \leq \exp(\alpha \|\text{Log}x\|) \leq \frac{1}{1 - \|1 - x\|}$$

$$\|\exp(\alpha \text{Log}x) - 1\| \leq \exp(\alpha \|\text{Log}x\|) - 1 \leq \frac{\|1 - x\|}{1 - \|1 - x\|}.$$

Soit $\xi : [0, 1] \rightarrow \text{GL}_\infty^0(A)$ le chemin défini par

$$\xi(\alpha) = \exp(\alpha \text{Log}x_1) \dots \exp(\alpha \text{Log}x_k).$$

Alors

$$\begin{aligned} \|\xi(\alpha) - 1\| &\leq \|\exp(\alpha \text{Log}x_1) - 1\| \|\exp(\alpha \text{Log}x_2)\| \dots \|\exp(\alpha \text{Log}x_k)\| \\ &\quad + \dots + \|\exp(\alpha \text{Log}x_k) - 1\| \\ &\leq \frac{\|x_1 - 1\|}{1 - \|x_1 - 1\|} \frac{1}{1 - \|x_2 - 1\|} \dots \frac{1}{1 - \|x_k - 1\|} \\ &\quad + \dots + \frac{\|x_k - 1\|}{1 - \|x_k - 1\|} \\ &= \left\{ \prod_{1 \leq j \leq k} (1 - \|x_j - 1\|) \right\}^{-1} - 1 < 1 \end{aligned}$$

par hypothèse pour tout $\alpha \in [0, 1]$. Il résulte donc du lemme 1b) que $i2\pi\tilde{\Delta}_\tau(\xi) = \tau\{\text{Log}(\exp \text{Log}x_1 \dots \exp \text{Log}x_k)\} = \tau\{\text{Log}(x_1 \dots x_k)\}$.

D'autre part ξ est produit des chemins $\alpha \mapsto \exp(\alpha \text{Log}x_j)$ et il résulte du lemme 1a) que $i2\pi\tilde{\Delta}_\tau(\xi) = \tau(\text{Log}x_1) + \dots + \tau(\text{Log}x_k)$ d'où le résultat. \square

PROPOSITION 4. — *Les adhérences dans $\text{GL}_\infty(A)$ de $\text{Ker}(\Delta_\tau)$ et de $\text{DGL}_\infty^0(A)$ coïncident.*

Preuve. — L'inclusion non banale à vérifier est celle de $\text{Ker}(\Delta_\tau)$ dans $\text{DGL}_\infty^0(A)$.

Rappelons le fait évident suivant : soient Γ un groupe, n un entier positif et $\alpha, \beta \in \Gamma$; alors $\alpha^n \beta^n (\alpha^{-1} \beta^{-1})^n \in D\Gamma$. En particulier, pour tous $a, b \in M_\infty(A)$:

$$(*) \quad \frac{\exp(a) \exp(b) \exp(-a-b)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \exp(a) \exp(b) \left\{ \exp\left(-\frac{a}{n}\right) \exp\left(-\frac{b}{n}\right) \right\}^n} \in \overline{\text{DGL}_\infty^0(A)}.$$

Soient alors $x \in \text{Ker}(\Delta_T)$ et y_1, \dots, y_k comme dans le lemme 3(a). Pour montrer que

$$\begin{aligned} x = & \{ \exp(y_1) \exp(y_2) \exp(-y_1 - y_2) \} \\ & \{ \exp(y_1 + y_2) \exp(y_3) \exp(-y_1 - y_2 - y_3) \} \\ & \dots \{ \exp(y_1 + \dots + y_{k-1}) \exp(y_k) \exp(-y_1 - \dots - y_k) \} \\ & \exp(y_1 + \dots + y_k) \end{aligned}$$

est dans $\overline{\text{DGL}_\infty^0(A)}$, il suffit donc de vérifier que

$$\exp(y_1 + \dots + y_k) \in \overline{\text{DGL}_\infty^0(A)},$$

ou encore que $\exp(z) \in \overline{\text{DGL}_\infty^0(A)}$ pour tout $z \in M_\infty(A)$ avec $T(z) = 0$.

Soit z un tel élément. Par définition de T , il existe arbitrairement près de z un élément de la forme $\Sigma [a_j, b_j]$ avec $a_j, b_j \in M_\infty(A)$ et $j = 1, \dots, \ell$. En vertu de (*), il suffit de vérifier que $\exp([a, b]) \in \overline{\text{DGL}_\infty^0(A)}$ pour tous $a, b \in M_\infty(A)$. Or ce dernier fait résulte de l'identité

$$\exp(ab - ba) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \exp\left(-\frac{a}{n}\right) \exp\left(-\frac{b}{n}\right) \exp\left(\frac{a}{n}\right) \exp\left(\frac{b}{n}\right) \right\}^{n^2}$$

et la preuve est achevée. \square

Nous montrons au paragraphe suivant qu'il existe une C^* -algèbre A (déjà considérée dans [13]) pour laquelle $\text{DGL}_\infty^0(A) \subsetneq \text{Ker}(\Delta_T)$.

Appelons *trace* sur une algèbre de Banach A une forme linéaire continue $\tau : A \rightarrow \mathbf{C}$ telle que $\tau(ab) = \tau(ba)$ pour tous $a, b \in A$. Lorsque A est une C^* -algèbre et sauf mention expresse, une telle trace n'est donc pas nécessairement positive. Notre second objectif pour ce paragraphe est de comparer $\text{Ker}(\Delta_T)$ et l'intersection des $\text{Ker}(\Delta_\tau)$ prise sur toutes les traces τ sur A .

LEMME 5. — Soient E un espace de Banach, D un sous-ensemble dénombrable de E et C un convexe fermé du dual fort E' de E .

Soit $\eta \in E$ un point tel que $\tau(\eta) \in \tau(D)$ pour tout $\tau \in C$. Alors il existe $\kappa \in D$ tel que $\tau(\eta) = \tau(\kappa)$ pour tout $\tau \in C$.

Preuve. — Pour tout $\delta \in D$, considérons l'hyperplan fermé $H_\delta = \{\tau \in E' \mid \tau(\eta - \delta) = 0\}$ et le convexe fermé $C_\delta = C \cap H_\delta$ de E' . Par hypothèse $C = \bigcup_{\delta \in D} C_\delta$. Mais C est un espace métrique complet et le théorème de Baire implique qu'il existe $\kappa \in D$ et un ouvert U de E' tels que $\phi \neq U \cap C \subset C_\kappa$, donc tel que $\tau(\eta) = \tau(\kappa)$ pour tout $\tau \in U \cap C$. Par convexité de C , on a aussi $\tau(\eta) = \tau(\kappa)$ pour tout $\tau \in C$. \square

PROPOSITION 6. — Soient A une algèbre de Banach et $x \in GL_\infty^0(A)$. Les conditions suivantes sont équivalentes.

(i) $x \in \text{Ker}(\Delta_\tau)$.

(ii) Il existe $y_1, \dots, y_k \in M_\infty(A)$ avec $x = \prod_{1 \leq j \leq k} \exp(y_j)$ et $\sum_{1 \leq j \leq k} T(y_j) = 0$.

(iii) Il existe $y_1, \dots, y_k \in M_\infty(A)$ avec $x = \prod_{1 \leq j \leq k} \exp(y_j)$ et $\sum_{1 \leq j \leq k} \tau(y_j) = 0$ pour toute trace τ sur A .

Si A est séparable, ces conditions sont encore équivalentes à

(iv) $x \in \text{Ker}(\Delta_\tau)$ pour toute trace τ sur A .

Preuve. — L'équivalence de (i) avec (ii) résulte du lemme 3(a), celle de (ii) avec (iii) de la définition de T et du théorème de Hahn-Banach, et l'implication de (iv) par (i) est banale.

Supposons donc que A est séparable et que la condition (iv) est vérifiée. Ecrivons $x = \exp(y_1) \dots \exp(y_k)$ et

$$\eta = \frac{1}{i2\pi} \sum_{1 \leq j \leq k} y_j \in M_\infty(A);$$

par hypothèse $\tau(\eta) \in \underline{\tau}(K_0(A))$ pour toute trace τ sur A .

Considérons l'espace de Banach E_u introduit au début du paragraphe et prenons pour C le dual fort E'_u de E_u . Soit η_u l'image canonique de η dans E_u : si η est une matrice $(\eta_{j,k})_{1 \leq j, k < \infty}$, alors η_u est la classe modulo $[A, A]$ de la somme finie $\sum_{1 \leq j < \infty} \eta_{j,j} \in A$. Soient $D \subset M_\infty(A)$ un système de représentants de $K_0(A)$ et D_u son image canonique dans E_u .

L'hypothèse s'écrit $\tau(\eta_u) \in \tau(D_u)$ pour tout $\tau \in C$. Comme A est séparable, D_u est dénombrable et il existe par le lemme 5 un élément $\kappa_u \in D_u$ avec $\tau(\eta_u) = \tau(\kappa_u)$ pour tout $\tau \in C$. Par suite il existe $\kappa \in K_0(A)$ avec $\tau(\eta) = \tau(\kappa)$ pour tout $\tau \in E'_u$, donc aussi avec $T(\eta) = T(\kappa)$. En d'autres termes (p étant comme dans la définition du § 1) $\Delta_T(x) = p(T(\eta)) = 0$ et $x \in \text{Ker}(\Delta_T)$. \square

PROPOSITION 6 bis. — Soient A une C^* -algèbre et $x \in GL_\infty^0(A)$. Les conditions (i) à (iii) de la proposition 6 sont équivalentes à (iii') Il existe $y_1, \dots, y_k \in M_\infty(A)$ avec $x = \prod_{1 \leq j \leq k} \exp(y_j)$ et

$$\sum_{1 \leq j \leq k} \tau(y_j) = 0 \text{ pour toute trace positive } \tau \text{ sur } A.$$

Si A est séparable, ces conditions sont encore équivalentes à (iv') $x \in \text{Ker}(\Delta_T)$ pour toute trace positive τ sur A .

Preuve. — C'est un résultat dû essentiellement à Grothendieck que toute trace sur A est combinaison linéaire de quatre traces positives. (Voir [9] et la proposition 2.8 de [3].) Par suite (iii) et (iii') sont équivalents et impliquent (iv'). On achève comme pour la proposition 6, mais en considérant cette fois le convexe de E'_u formé des traces (hermitiennes) positives. \square

Considérons un élément de $GL_\infty^0(A)$ et sa décomposition polaire $x = u|x|$. Il résulte de la proposition 6 bis et en particulier de la condition (iii') que, si $x \in \text{Ker}(\Delta_T)$, alors u et $|x|$ sont dans $\text{Ker}(\Delta_T)$.

Nous montrons au paragraphe suivant qu'il existe une C^* -algèbre approximativement finie (non séparable) pour laquelle l'implication de (i) par (iv) (et a fortiori par (iv')) n'est pas vérifiée.

On peut reformuler comme suit la question de ce paragraphe. Rappelons d'abord que $DGL_\infty(A) = DGL_\infty^0(A)$, comme le montrent des calculs matriciels tout à fait élémentaires. (Voir par exemple les indications pour l'exercice II.6.13 de [11]. Il faut toutefois savoir qu'il peut arriver que l'inclusion de $DGL_1^0(A)$ dans $DGL_1(A)$ soit stricte [16].) Rappelons ensuite qu'on définit les groupes abéliens

$$K_1(A) = GL_\infty(A)/DGL_\infty(A) = GL_\infty(A)/DGL_\infty^0(A)$$

$$K_1^{\text{top}}(A) = GL_\infty(A)/GL_\infty^0(A)$$

et l'épimorphisme canonique $\pi_A : K_1(A) \longrightarrow K_1^{\text{top}}(A)$ dont le noyau est l'abélianisé de $GL_\infty^0(A)$ [12]. Si $\tau : A \longrightarrow E$ est une application traciale, Δ_τ induit un homomorphisme

$$\delta_\tau : \text{Ker}(\pi_A) \longrightarrow E/\underline{\tau}(K_0(A)).$$

Soient en particulier $T : A \longrightarrow E_u$ l'application traciale universelle et $\delta_T : \text{Ker}(\pi_A) \longrightarrow E_u/\underline{T}(K_0(A))$ l'épimorphisme associé. La question de ce paragraphe consiste à demander quand δ_T est un isomorphisme.

3. Deux exemples.

Le premier exemple est une C^* -algèbre approximativement finie non séparable dont nous définissons d'abord le groupe des dimensions. Pour cet exemple, nous admettons l'hypothèse du continu (afin d'invoquer [10], voir plus bas).

LEMME 7. — *On considère \mathbf{R}^3 comme espace vectoriel sur \mathbf{Q} . Il existe une forme linéaire $\Phi : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{Q}$ possédant les deux propriétés suivantes :*

(i) *Pour tout $(x, y, z) \in \text{Ker}(\Phi) - \{0\}$, il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ avec $(\lambda x, \lambda y, \lambda z) \notin \text{Ker}(\Phi)$.*

(ii) *La restriction à $\text{Ker}(\Phi)$ de toute application \mathbf{R} -linéaire surjective Ψ de \mathbf{R}^3 sur \mathbf{R} ou sur \mathbf{R}^2 est encore surjective.*

Preuve. — Soient V la droite réelle considérée comme espace vectoriel sur \mathbf{Q} et W son dual. Il existe un ensemble I dont le cardinal est la puissance du continu \mathfrak{c} et une famille $(\mathbf{Q}_i)_{i \in I}$ de copies de \mathbf{Q} avec $V = \bigoplus \mathbf{Q}_i$. Comme $W \approx \prod \mathbf{Q}_i$, la \mathbf{Q} -dimension de W est strictement supérieure à \mathfrak{c} . Munissons W d'une structure d'espace vectoriel réel en posant

$$\lambda \varphi(x) = \varphi(\lambda x) \quad \lambda \in \mathbf{R} \quad \varphi \in W \quad x \in V (= \mathbf{R}).$$

Alors $\dim_{\mathbf{R}} W > \mathfrak{c}$, sinon

$$\dim_{\mathbf{Q}} W \leq (\dim_{\mathbf{R}} W) (\dim_{\mathbf{Q}} \mathbf{R}) = (\mathfrak{c})^2 = \mathfrak{c}$$

contrairement à ce qui précède. En particulier $\dim_{\mathbf{R}} W \geq 3$ et il existe $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ dans W qui sont \mathbf{R} -linéairement indépendants.

Considérons la forme \mathbf{Q} -linéaire

$$\Phi : \begin{cases} \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{Q} \\ (x, y, z) \longmapsto \varphi_1(x) + \varphi_2(y) + \varphi_3(z). \end{cases}$$

Par hypothèse sur les φ_j , la forme \mathbf{Q} -linéaire

$$\begin{cases} \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{Q} \\ \lambda \longmapsto \varphi_1(\lambda x) + \varphi_2(\lambda y) + \varphi_3(\lambda z) = \Phi(\lambda x, \lambda y, \lambda z) \end{cases}$$

est non nulle pour tout $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 - \{0\}$. En particulier l'assertion (i) est vraie.

Soient E, F deux espaces vectoriels sur \mathbf{Q} , soit H un hyperplan de E et soit $\Psi: E \rightarrow F$ une application linéaire surjective. Si $\text{Ker}(\Psi) \not\subset H$, alors $\Psi(H) = F$ (c'est un exercice élémentaire d'algèbre linéaire). Soit en particulier Ψ comme dans l'assertion (ii). Alors $\text{Ker}(\Psi)$ est un \mathbf{R} -sous-espace non trivial de \mathbf{R}^3 , qui n'est pas contenu dans $\text{Ker}(\Phi)$ vu l'assertion (i). La restriction de Ψ à $\text{Ker}(\Phi)$ est donc encore surjective. \square

Considérons \mathbf{R}^3 comme un *groupe abélien ordonné* pour l'ordre strict défini par

$$(x, y, z) \geq 0 \begin{cases} \text{si } x > 0, y > 0, z > 0 \\ \text{ou si } (x, y, z) = (0, 0, 0). \end{cases}$$

Soit G le groupe $\text{Ker}(\Phi)$ muni de l'ordre relatif, qui est un groupe de dimensions (théorème 2.2 de [5]). Soit A une C^* -algèbre approximativement finie dont G soit le groupe des dimensions; une telle algèbre existe. (Si G était séparable, cela résulterait du théorème 5.5 de [6]; en fait G ne l'est pas, mais on peut appliquer un théorème de Goodearl et Handelman [10] si l'on veut bien admettre l'hypothèse du continu.) Choisissons

$$g_0 = (x_0, y_0, z_0) \in G - \{0\} \text{ avec } g_0 > 0$$

et un projecteur $p \in A$ dont la classe dans $K_0(A) = G$ soit $[p] = g_0$. En vertu du lemme 7, il existe un nombre réel $\lambda > 0$ tel que $\lambda g_0 \notin G$. Posons $u = \exp(i2\pi\lambda p)$.

PROPOSITION 8. — Avec les notations ci-dessus, on a

(i) $u \notin \text{Ker}(\Delta_\tau)$ pour toute trace $\tau: A \rightarrow \mathbf{C}$.

(ii) $u \notin \text{Ker}(\Delta_T)$ avec T l'application traciale universelle de A .

Preuve. — Soit $\tau : A \rightarrow \mathbf{C}$ une trace non nulle. Alors $\Delta_\tau(u)$ est la classe modulo $\underline{\tau}(G)$ de $\tau(\lambda p)$. Si la trace τ était hermitienne positive, alors $\underline{\tau} : G \rightarrow \mathbf{R}$ serait \mathbf{Z} -linéaire positive, et s'étendrait donc en une application \mathbf{R} -linéaire surjective (car non nulle) de \mathbf{R}^3 dans \mathbf{R} . En fait, τ est combinaison linéaire de traces positives, donc $\underline{\tau} : G \rightarrow \mathbf{C}$ s'étend en une application \mathbf{R} -linéaire de \mathbf{R}^3 dans \mathbf{C} dont l'image coïncide avec celle de $\underline{\tau}$ par le lemme 7(ii). Par suite $\tau(\lambda p) = \lambda \tau(p) \in \underline{\tau}(G)$ et $u \in \text{Ker}(\Delta_\tau)$.

Introduisons la trace hermitienne positive $\tau_1 : A \rightarrow \mathbf{C}$ dont l'homomorphisme associé est $\underline{\tau}_1 : \begin{cases} G \rightarrow \mathbf{C} \\ (x, y, z) \rightarrow x \end{cases}$.

Introduisons de même τ_2, τ_3 et l'application traciale $\tau_{123} : A \rightarrow \mathbf{C}^3$ de coordonnées (τ_1, τ_2, τ_3) . Ainsi τ_{123} est l'inclusion de G dans \mathbf{C}^3 . Alors $\Delta_{\tau_{123}}(u)$ est la classe modulo $\underline{\tau}_{123}(G)$ de

$$\tau_{123}(\lambda p) = \lambda \tau_{123}(p) = \lambda \underline{\tau}_{123}(g_0) \notin \underline{\tau}_{123}(G).$$

Par choix de λ , on a donc $u \notin \text{Ker}(\Delta_{\tau_{123}})$ et a fortiori $u \notin \text{Ker}(\Delta_T)$. □

Le second exemple de ce paragraphe nécessite un résultat de topologie différentielle bien connu (preuve du théorème II.5.9 dans [11]), mais dont nous rappelons la preuve pour la commodité du lecteur. Soit X un espace topologique compact. Si E est un fibré vectoriel complexe sur X , nous notons $[E]$ sa classe dans $K(X)$. Pour la preuve du lemme ci-dessous, nous adoptons l'écriture $\mathbf{Z}/2$ -graduée : Si $H = H^{(0)} \oplus H^{(1)}$ est un fibré $\mathbf{Z}/2$ -gradué sur X , sa classe dans $K(X)$ est $[H^{(0)}] - [H^{(1)}]$. Si H_1 et H_2 sont deux fibrés $\mathbf{Z}/2$ -gradués sur X , leur produit tensoriel gradué $H = H_1 \hat{\otimes} H_2$ est défini par $H^{(i)} = \bigoplus (H_1^{(j)} \otimes H_2^{(k)})$, la somme portant sur les paires (j, k) dans $\mathbf{Z}/2 \times \mathbf{Z}/2$ avec $i = j + k$. L'énoncé qui suit nous a été proposé par A. Connes.

LEMME 9. — Soient $E_1, \dots, E_k, F_1, \dots, F_k$ des fibrés vectoriels sur X et $\{\Omega_1, \dots, \Omega_k\}$ un recouvrement ouvert de X tel que E_j et F_j soient isomorphes au-dessus de Ω_j ($1 \leq j \leq k$). Alors $\prod_{1 \leq j \leq k} ([E_j] - [F_j]) = 0$.

Preuve. — Soit H_j le fibré $\mathbf{Z}/2$ -gradué défini par $H_j^{(0)} = E_j$ et $H_j^{(1)} = F_j$ ($1 \leq j \leq k$), et soit H le produit tensoriel gradué des H_j ; il suffit de montrer que $H^{(0)}$ et $H^{(1)}$ sont isomorphes. Le fibré en algèbres $\text{End}(H)$ est $\mathbf{Z}/2$ -gradué par

$$\begin{aligned} \text{End}(H)^{(0)} &= \text{End}(H^{(0)}, H^{(0)}) \oplus \text{End}(H^{(1)}, H^{(1)}) \\ \text{End}(H)^{(1)} &= \text{Hom}(H^{(0)}, H^{(1)}) \oplus \text{Hom}(H^{(1)}, H^{(0)}). \end{aligned}$$

Il suffit donc d'exhiber une section continue Γ de $\text{End}(H)^{(1)}$ avec $\Gamma^2 = \text{id} \in \text{End}(H)^{(0)}$.

Soit $(\varphi_j)_{1 \leq j \leq k}$ une partition continue de l'unité subordonnée à $(\Omega_j)_{1 \leq j \leq k}$. Pour tout $j \in \{1, \dots, k\}$, soit

$$\beta_j \in \text{Iso}(E_j|_{\Omega_j}, F_j|_{\Omega_j}).$$

On a donc $B_j = \beta_j \oplus \beta_j^{-1} \in \text{End}(H_j|_{\Omega_j})^{(1)}$

et $B_j^2 = \text{id} \in \text{End}(H_j|_{\Omega_j})^{(0)}$.

Considérons aussi

$$\Gamma_j = \varphi_j^{1/2} \left(\widehat{\otimes}_{1 \leq i < j} \text{id}_{H_i} \right) \widehat{\otimes} B_j \widehat{\otimes} \left(\widehat{\otimes}_{j < i \leq k} \text{id}_{H_i} \right) \in \text{End}(H)^{(1)}$$

et posons $\Gamma = \sum_{1 \leq j \leq k} \Gamma_j \in \text{End}(H)^{(1)}$. On a bien $\Gamma^2 = \text{id}$. \square

LEMME 10. — Soient n un entier positif et γ_n le fibré en droites complexes canonique sur l'espace projectif $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$. Si $(\Omega_j)_{1 \leq j \leq k}$ est un recouvrement ouvert de $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ trivialisant pour γ_n , alors $k \geq n + 1$.

Preuve. — On sait que $K(\mathbf{P}^n(\mathbf{C}))$ est isomorphe à $\mathbf{Z}[t]/(1-t)^{n+1}$ où t correspond à la classe $[\gamma_n^*]$ du dual de γ_n . (Voir par exemple le corollaire IV.2.8 de [11].) Si γ_n est trivial au-dessus d'un ouvert de $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$, il en est de même de γ_n^* . On applique le lemme 9 avec $E_1 = \dots = E_k = \underline{\mathbf{C}}$ (fibré trivial) et $F_1 = \dots = F_k = \gamma_n^*$. Il vient $(1 - [\gamma_n^*])^k = 0$, donc $k \geq n + 1$. \square

Soit n un entier positif. On munit le fibré $\gamma_n^* \oplus \underline{\mathbf{C}}$ d'une structure hermitienne et on désigne par B_n la C^* -algèbre des sections continues du fibré $\text{End}(\gamma_n^* \oplus \underline{\mathbf{C}})$. Tout élément de B_n est donc de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec

a une section de $\text{End}(\gamma_n^*, \gamma_n^*) \approx \gamma_n \otimes \gamma_n^* \approx \underline{\mathbf{C}}$

b une section de $\text{End}(\underline{\mathbf{C}}, \gamma_n^*) \approx \gamma_n^*$

c une section de $\text{End}(\gamma_n^*, \underline{\mathbf{C}}) \approx \gamma_n$

d une section de $\text{End}(\underline{\mathbf{C}}, \underline{\mathbf{C}}) \approx \underline{\mathbf{C}}$.

Définissons

$$Y_n = \begin{pmatrix} 2^{-n} & 0 \\ 0 & -2^{-n} \end{pmatrix} \in B_n$$

et $X_n = \exp(Y_n) \in \text{GL}_1^0(B_n)$.

LEMME 11. — *On reprend les notations ci-dessus, et on désigne par T_n l'application traciale universelle de B_n .*

(i) $T_n(Y_n) = 0$

(ii) *Supposons qu'il existe $Z_1, \dots, Z_{2k} \in \text{GL}_p^0(B_n)$ avec $X_n = \prod_{1 \leq j \leq k} Z_{2j-1} Z_{2j} (Z_{2j-1})^{-1} (Z_{2j})^{-1}$; alors $2kp^2 \geq n + 1$.*

Preuve. — Soit $t \in \mathbf{P}^n(\mathbf{C})$. Choisissons une section b de γ_n^* et une section c de γ_n non nulles en t . Alors

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} b \otimes c & 0 \\ 0 & -b \otimes c \end{pmatrix}$$

est de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$ avec $a(t) \neq 0$. Considérons $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix} \in B_n$

avec $\lambda \in \mathbf{C}, \lambda \neq 0$. En utilisant une partition de l'unité, on peut

écrire $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix}$ sur $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ comme une somme de commuta-

teurs additifs comme ci-dessus. L'application traciale universelle de B_n

s'annule donc en $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix}$; en particulier $T_n(Y_n) = 0$.

Soient Z_1, \dots, Z_{2k} comme dans l'assertion (ii). On peut

écrire $Z_j = \begin{pmatrix} a_j & b_j \\ c_j & d_j \end{pmatrix}$ avec a_j, \dots, d_j des $(p \times p)$ -matrices de

sections de fibrés convenables ($j = 1, \dots, 2k$). Supposons qu'il existe $t \in \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ avec $b_j(t) = 0$ pour tout $j \in \{1, \dots, 2k\}$.

Alors le commutateur multiplicatif de $Z_{2j-1}(t) = \begin{pmatrix} * & 0 \\ * & * \end{pmatrix}$ et de $Z_{2j}(t) = \begin{pmatrix} * & 0 \\ * & * \end{pmatrix}$ serait de la forme $\begin{pmatrix} \text{commutateur} & 0 \\ * & \text{commutateur} \end{pmatrix}$,

et on aurait $X_n(t) = \begin{pmatrix} e_n(t) & * \\ * & f_n(t) \end{pmatrix}$ avec $e_n(t), f_n(t) \in GL_p(\mathbb{C})$ et $\det(e_n(t)) = \det(f_n(t)) = 1$ contrairement à la définition de X_n . Par suite les ouverts

$$\Omega_{j,k,\ell} = \{t \in \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \mid (b_j)_{k,\ell}(t) \neq 0\} \quad \begin{matrix} j = 1, \dots, 2k \\ 1 \leq k, \ell \leq p \end{matrix}$$

forment un recouvrement de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Comme ils sont trivialisants pour γ_n^* (donc pour γ_n), l'assertion (ii) résulte du lemme 10. \square

Soit alors A la C^* -algèbre obtenue en adjoignant une unité au produit restreint (= somme directe) des B_n ($n \geq 1$). Notons

$$Y = \bigoplus_{n \geq 1} Y_n \in A \quad X = \exp(Y) = 1 + \bigoplus_{n \geq 1} (X_n - 1) \in GL_1^0(A).$$

La seconde assertion du lemme 11 montre que $X \notin DGL_\infty^0(A)$. Néanmoins $\Delta_T(X)$ est la classe modulo $\underline{T}(K_0(A))$ de $\frac{1}{i2\pi} T(Y)$, et $T(Y) = 0$ par le lemme 11(i) et par continuité de T . Donc $X \in \text{Ker}(\Delta_T)$. Nous avons montré :

PROPOSITION 12. — *Il existe une C^* -algèbre séparable avec unité A telle que $DGL_\infty^0(A) \subsetneq \text{Ker}(\Delta_T)$.*

4. Scalaires dans les C^* -algèbres approximativement finies.

Soit A une C^* -algèbre approximativement finie avec unité. (On rappelle que $GL_1(A)$ est un groupe connexe). On identifie C^* à un sous-groupe de $GL_1(A)$ et on examine dans ce dernier paragraphe l'intersection $C^* \cap DGL_1(A)$.

Soit d'abord $\lambda \in \mathbf{C}^*$ avec $|\lambda| \neq 1$; alors $\lambda \notin \text{DGL}_1(A)$. Ecrivons en effet $\lambda = \exp(i2\pi(\mu + i\nu))$ avec $\mu, \nu \in \mathbf{R}$ et $\nu \neq 0$. Soit τ une trace positive normalisée sur A ; alors $\Delta_\tau(\lambda)$ est la classe modulo $\underline{\tau}(K_0(A)) \subset \mathbf{R}$ de $\mu + i\nu \notin \mathbf{R}$, donc $\Delta_\tau(\lambda) \neq 0$ et $\lambda \notin \text{DGL}_1(A)$.

Soit ensuite λ une racine de 1, primitive d'ordre n . S'il existe une \mathbf{C}^* -algèbre B avec $A = M_n(B)$, il est évident qu'il existe des unitaires $u, v \in A$ avec $\lambda = uvu^{-1}v^{-1}$; nous ignorons si la réciproque est vraie. (Nous montrons dans la seconde partie de ce travail que, si A est simple, alors $\lambda \in \text{DGL}_1(A)$ si et seulement si $\underline{T}(1)$ est divisible par n dans $\underline{T}(K_0(A))$.)

Avant d'examiner les cas restants, rappelons le résultat suivant (cas particulier du théorème 1.4 de [5]): Soient A une \mathbf{C}^* -algèbre approximativement finie avec unité et $y \in K_0(A)$ tel que $\underline{\tau}(y) > 0$ pour toute trace positive normalisée sur A ; alors $y \geq 0$ dans $K_0(A)$.

PROPOSITION 13. — Soient A une \mathbf{C}^* -algèbre approximativement finie avec unité et $\lambda \in \text{GL}_1(A)$ un multiple scalaire de l'identité de la forme $\lambda = \exp(i2\pi\theta)$ avec θ réel irrationnel. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) Il existe des unitaires $u, v \in \text{GL}_1(A)$ avec $\lambda = uvu^{-1}v^{-1}$.
- (ii) $\lambda \in \text{DGL}_1(A)$.
- (iii) $\Delta_T(\lambda) = 0$.

Preuve. — Supposons que $\Delta_T(\lambda) = 0$ et montrons que la condition (i) est aussi vérifiée. La condition (iii) équivaut à l'existence de $x \in K_0(A)$ avec $\underline{T}(\theta) = \underline{T}(x)$. Considérons le groupe ordonné pointé $\mathbf{Z} + \theta\mathbf{Z}$ avec l'ordre donné par l'injection naturelle dans \mathbf{R} et l'élément distingué 1. Soit $\underline{\varphi} : \mathbf{Z} + \theta\mathbf{Z} \rightarrow K_0(A)$ l'homomorphisme de groupes pointés défini par $\underline{\varphi}(1) = [1]$ et $\underline{\varphi}(\theta) = x$. Vérifions que $\underline{\varphi}$ est positif. Soit $(m, n) \in \mathbf{Z}^2$ avec $m + n\theta \geq 0$. Pour toute trace positive normalisée τ sur A , on a $\theta\tau(1) = \tau(\theta) = \underline{\tau}(x)$, et donc $\underline{\tau}(\underline{\varphi}(m + n\theta)) = \underline{\tau}(m + nx) = (m + n\theta)\underline{\tau}(1) > 0$. Le résultat rappelé avant l'énoncé montre que $\underline{\varphi}$ est positif.

Soit B_θ une \mathbf{C}^* -algèbre approximativement finie séparable ayant pour K_0 ordonné pointé le groupe $\mathbf{Z} + \theta\mathbf{Z}$ considéré ci-dessus. Une telle algèbre existe, elle est unique à isomorphisme près,

et le morphisme φ est induit par un morphisme unital de C^* -algèbres $\varphi : B_\theta \longrightarrow A$ [6]. Il résulte alors de [14] qu'il existe une injection univale de l'algèbre A_θ de la rotation irrationnelle d'angle $2\pi\theta$ dans A . Par suite, il existe des unitaires $u, v \in A$ avec $\exp(i2\pi\theta) = uvu^*v^*$. \square

La proposition 13 montre en particulier que le noyau de Δ_T n'est en général pas fermé dans $GL_\infty^0(A)$, pas plus que le noyau de la restriction de Δ_T à $GL_1^0(A)$ dans $GL_1^0(A)$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. CONNES, An analogue of the Thom isomorphism for crossed products of a C^* -algebra by an action of \mathbb{R} , *Adv. in Math.*, 39 (1981), 31-55.
- [2] J. CUNTZ, The internal structure of simple C^* -algebras, In *Proc. Symp. Pure Math.*, 38, Amer. Math. Soc., 1981.
- [3] J. CUNTZ et G.K. PEDERSEN, Equivalence and traces on C^* -algebras, *J. Functional Analysis*, 33 (1979), 135-164.
- [4] N. DUNFORD et J.T. SCHWARTZ, *Linear operators. Part II : Spectral theory*, Interscience, 1963.
- [5] E.G. EFFROS, D.E. HANDELMAN et C.L. SHEN, Dimension groups and their affine representations, *Amer. J. Math.*, 102 (1980), 385-407.
- [6] G. ELLIOTT, On the classification of inductive limits of sequences of semi-simple finite-dimensional algebras, *J. Algebra*, 38 (1976), 29-44.
- [7] T. FACK, Finite sums of commutators in C^* -algebras, *Ann. Inst. Fourier*, 32-1 (1982), 129-137.
- [8] B. FUGLEDE et R.V. KADISON, Determinant theory in finite factors, *Ann. Math.*, 55 (1952), 520-530.
- [9] A. GROTHENDIECK, Un résultat sur le dual d'une C^* -algèbre, *Journal de Math.*, 36 (1957), 97-108.
- [10] D. HANDELMAN, communication non publiée.

- [11] M. KAROUBI, *K-theory, an introduction*, Springer, 1978.
- [12] M. KAROUBI, K-théorie algébrique de certaines algèbres d'opérateurs, *Lecture Notes in Math.*, 725 (1979), 254-290.
- [13] G.K. PEDERSEN et N.H. PETERSEN, Ideals in a C^* -algebra, *Math. Scand.*, 27 (1970), 193-204.
- [14] M. PIMSNER et D. VOICULESCU, Imbedding the irrational rotation C^* -algebra into an AF-algebra, *J. Operator theory*, 4 (1980), 201-210.
- [15] J.L. TAYLOR, Banach algebras and topology in "Algebras in Analysis", J.H. Williamson, ed., Academic Press, (1975) 118-186.
- [16] Y. YUEN, Groups of invertible elements of Banach algebras, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 79 (1973), 82-84.

Manuscrit reçu le 2 décembre 1982.

P. de la HARPE,
Section de mathématiques
Université de Genève
C.P. 240
1211 Genève 24.

G. SKANDALIS,
Laboratoire de mathématiques
fondamentales
Université P. & M. Curie
Tour 45.46, 3^e étage
4 place Jussieu
75230 Paris Cedex 05.