JOURNAL OF FUNCTIONAL ANALYSIS 62, 354–378 (1985)

Sur la simplicité essentielle du groupe des inversibles et du groupe unitaire dans une C^*-algèbre simple

PIERRE DE LA HARPE

Section de Mathématiques, Université de Genève, C.P. 240, 1211 Geneva 24, Switzerland

ET

GEORGES SKANDALIS

Laboratoire de Mathématiques Fondamentales, Université P. & M. Curie, Tour 45.46 3ème étage, 4 place Jussieu, 75230 Paris Cedex 05, France

Communicated by A. Connes

Received June 22, 1984

Soient A une C^*-algèbre approximativement finie simple avec unité, $GL_1(A)$ le groupe des inversibles et $U_1(A)$ le groupe des unitaires de A. Dans un travail précédent, nous avons décrit les abélianisés $GL_1(A)/DGL_1(A)$ et $U_1(A)/DU_1(A)$ grâce au groupe de Grothendieck $K_0(A)$ vu comme groupe des dimensions de A. Ici, nous montrons que les groupes $DGL_1(A)$ et $DU_1(A)$ sont simples modulo leurs centres. Nous étudions aussi le cas d'une C^*-algèbre stable et celui d'une C^*-algèbre avec unité qui est infinie simple. Dans les deux derniers cas, nous montrons de plus qu'il existe un homomorphisme naturel surjectif du groupe de Milnor $K_2^{\mathrm{Mil}}(A)$ sur $K_0(A)$. © 1985 Academic Press, Inc.

Let A be a simple approximately finite-dimensional C^*-algebra with unit, let $GL_1(A)$ be the group of invertible elements and let $U_1(A)$ be that of unitaries in A. In a previous work the abelianized groups $GL_1(A)/DGL_1(A)$ and $U_1(A)/DU_1(A)$ have been described with Grothendieck's group $K_0(A)$ viewed as a dimension group for A. Here, it is shown that the groups $DGL_1(A)$ and $DU_1(A)$ are simple up to their centres. The case of a stable C^*-algebra and that of a C^*-algebra with unit which is simple infinite are also studied. In the last two cases, moreover, it is shown that there exists a natural homomorphism from Milnor's group $K_2^{\mathrm{Mil}}(A)$ onto $K_0(A)$. © 1985 Academic Press, Inc.

Soient A une C^*-algèbre avec unité, $GL_1(A)$ le groupe des inversibles de A et $U_1(A)$ le groupe des unitaires de A. On note $M_n(A)$ la C^*-algèbre des matrices n-fois-n sur A et $GL_n(A)$, $U_n(A)$ les groupes correspondants

0022-1236/85 $3.00

($n = 1, 2, \ldots, \infty$). Ces groupes sont munis des topologies naturelles (de limites inductives si $n = \infty$); pour désigner leurs composantes connexes, on ajoute un indice zéro: $GL_1^0(A), \ldots, U_\infty^0(A)$. Pour tout groupe Γ, on note $D\Gamma$ le groupe dérivé.

Nous abordons ici l'étude du lien entre idéaux bilatères de A et sous-groupes distingués des groupes associés (étude déjà proposée au n° 6.9 de [He]). Ce travail fait suite à [HS1] et [HS2], dont nous conservons les notations et la numérotation. Nous avons déjà rappelé (à la fin de la section 2) que $DGL_\infty(A) = DGL_\infty^0(A)$, et on vérifie tout aussi facilement que $DU_\infty(A) = DU_\infty^0(A)$. On sait aussi que les sous-groupes normaux de $DGL_\infty(A)$ sont des groupes de congruence. En particulier, si A est simple, alors le groupe $DGL_\infty(A)$ est simple. (Voir [B, chap. V, sect. 2, théorème 2.1.a]; nous reproduisons ce résultat en appendice pour la commodité du lecteur.) En revanche, on ne sait en général pas si $DGL_1^0(A)$ et $DU_1^0(A)$ modulo leurs centres sont simples (exception: le cas des facteurs [Ha]).

Nous montrons ici les résultats suivants. Rappelons auparavant que, si A est une C^*-algèbre AF, les groupes $GL_1(A)$ et $U_1(A)$ sont connexes (c'est donc à dessein qu'on omet l'indice 0).

THÉORÈME I. *Soit A une C^*-algèbre approximativement finie simple avec unité.*

(i) *Soit G un sous-groupe non central de $GL_1(A)$ normalisé par $DGL_1(A)$. Alors G contient $DGL_1(A)$. En particulier, $DGL_1(A)$ modulo son centre est un groupe simple.*

(ii) *Soit G un sous-groupe non central de $U_1(A)$ normalisé par $DU_1(A)$. Alors G contient $DU_1(A)$. En particulier, $DU_1(A)$ modulo son centre est un groupe simple.*

Le théorème I exprime notamment que les groupes $DGL_1(A)$ et $DU_1(A)$ sont parfaits, et précise les énoncés de la section 6 de [HS2].

THÉORÈME II. *Soit A une C^*-algèbre infinie simple avec unité.* (*Rappel*: "*infinie*" *veut dire qu'il existe $x \in A$ avec $x^*x = 1$ et $xx^* \neq 1$.*) *Soit G un sous-groupe normal non central de $GL_1^0(A)$. Alors $G = GL_1^0(A)$. En particulier $GL_1^0(A)$ modulo son centre est un groupe simple.*

Nos preuves reprennent certains procédés déjà utilisés par Kaplansky et Lanski (voir aussi le chapitre IV de [Ha]), et utilisent essentiellement les résultats de [HS2].

Pour terminer, faisons le point sur ce que nous savons des premiers groupes de K-théorie algébrique d'une C^*-algèbre A qui est

ou bien stable

ou bien avec unité, infinie et simple.

Par définition, on a $K_0^{\text{alg}}(A) = K_0^{\text{top}}(A)$. Les résultats de la section 7 impliquent évidemment leurs analogues stables, de sorte que $K_1^{\text{alg}}(A) = K_1^{\text{top}}(A)$. De plus, nous montrons à la section 10 que les preuves de ces résultats impliquent davantage. Précisément

$$\text{l'homomorphisme naturel } K_2^{\text{Mil}}(A) \to K_2^{\text{top}}(A) \text{ est surjectif}$$

où K_2^{Mil} désigne le groupe de Milnor, et où $K_2^{\text{top}}(A)$ est isomorphe à $K_0(A)$ par périodicité de Bott. Tout ceci est en parfait accord avec [Kar]. On connaît au moins un cas où $K_2^{\text{Mil}}(A) = K_2^{\text{top}}(A)$: c'est celui d'une algèbre de von Neumann proprement infinie, pour laquelle $K_2^{\text{Mil}}(A)$ est nul [HM].

8. Groupes simples: Cas général linéaire

Le résultat préliminaire ci-dessous atteste de l'abondance des diviseurs de zéro dans une C^*-algèbre.

Lemme 8.1. *Soit A une C^*-algèbre avec unité.*

(a) *On suppose A non isomorphe à $\mathbb{C}$. Soit $c \in A$ avec $c \neq 0$. Il existe $y, z \in A$ avec $ycz = 0$ et $yc \neq 0 \neq z$.*

(b) *On suppose A simple. Soient $c_1, c_2 \in A$ avec $c_1 \neq 0 \neq c_2$. Il existe $e \in A$ avec $c_1 e c_2 \neq 0$.*

Preuve. (a) Supposons d'abord que le spectre de c^*c contienne au moins deux points, dont $\lambda \neq 0$. Il existe deux fonctions continues f, g: Spec$(c^*c) \to \mathbb{C}$ avec $f(\lambda) \neq 0$, $g \neq 0$ et $fg = 0$. On pose $y = f(c^*c)\,c^*$ et $z = g(c^*c)$.

Supposons au contraire que $c^*c = \lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $x \in A_+ - \mathbb{R}_+$. Vu ce qui précède, il existe $v, z \in A$ avec $vxz = 0$ et $vx \neq 0 \neq z$. On achève en posant $y = vxc^*$.

(b) Si A est simple, il existe $a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_k$ dans A avec $1 = a_1 c_2 b_1 + a_2 c_2 b_2 + \cdots + a_k c_2 b_k$. Par suite $0 \neq c_1 = c_1 a_1 c_2 b_1 + \cdots + c_1 a_k c_2 b_k$ et $c_1 a_j c_2 \neq 0$ pour j bien choisi dans $\{1, \dots, k\}$. ∎

Soient A une C^*-algèbre avec unité et p, q deux projecteurs orthogonaux de A. Convenons d'appeler *transvection relative à* (p, q) tout élément de la forme $1 + y \in A$ avec $y = pyq \neq 0$, et *élément triangulaire relatif à* (p, q) tout élément de la forme

$$a + b + d + 1 - p - q$$

avec $a = pap$, $b = pbq$ et $d = qdq$. Notons qu'une transvection est toujours dans $DGL_1^0(A)$, comme il résulte du calcul

$$\begin{pmatrix} 2p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & y \\ 0 & q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & -y \\ 0 & q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & y \\ 0 & q \end{pmatrix}.$$

PROPOSITION 8.2. *Soit A une C^*-algèbre simple avec unité. Soient p, q, r trois projecteurs orthogonaux non nuls de somme 1 dans A tels que $p \preccurlyeq r$, $q \preccurlyeq r$, avec pAp non isomorphe à $\mathbb{C}$. Soit G un sous-groupe non central de $GL_1(A)$ normalisé par $DGL_1^0(A)$. Alors G contient toutes les transvections relatives à (p, q).*

Les trois lemmes suivants constituent une preuve de la proposition 8.2.

LEMME 8.3. *Le groupe G contient un élément triangulaire t relatif à $(p, 1-p)$ qui n'est pas un multiple de l'identité.*

Preuve. Par hypothèse, il existe

$$a = pap, \qquad b = pb(1-p)$$
$$c = (1-p)\,cp, \qquad d = (1-p)\,d(1-p)$$

dans A tels que $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ soit dans G et ne soit pas central dans A. On écrit $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{smallmatrix}\right)$. On peut supposer $c \neq 0 \neq c'$, sans quoi il n'y aurait rien à montrer.

Il existe $y \in pA(1-p)$ et $z \in pAp$ avec $c'yc \neq 0$, $z \neq 0$ et $c'ycz = 0$. Considérons en effet $c^*c \in pAp - \{0\}$. D'après le lemme 8.1(a), il existe $y_0, z \in pAp$ avec $y_0c^*cz = 0$ et $y_0c^*c \neq 0 \neq z$. D'après le lemme 8.1(b), il existe $e \in A$ avec $c'ey_0c^*c \neq 0$. On pose $y = pey_0c^* \in pA(1-p)$.

Le commutateur de $\left(\begin{smallmatrix} p & -y \\ 0 & 1-p \end{smallmatrix}\right)$ et $\left(\begin{smallmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{smallmatrix}\right)$ est un élément de G de la forme $\left(\begin{smallmatrix} * & * \\ c'yc & * \end{smallmatrix}\right)$. On peut donc supposer a priori que G contient un élément $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ avec $c \neq 0$, et qu'il existe $z \in pAp$ avec $z \neq 0$ et $cz = 0$.

D'après le lemme 8.1(b), il existe $f \in A$ avec $zfc \neq 0$. Posons $g = zf(1-p)$, de sorte que $gc \neq 0$. Alors $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ ne commute pas à $g = \left(\begin{smallmatrix} 0 & g \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, donc le commutateur de $\left(\begin{smallmatrix} p & -g \\ 0 & 1-p \end{smallmatrix}\right)$ et $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ n'est pas l'identité. Comme $cg = 0$, ce commutateur est un élément de G de la forme $\left(\begin{smallmatrix} * & * \\ 0 & 1-p \end{smallmatrix}\right)$. ∎

LEMME 8.4. *Le groupe G contient une transvection relative à $(p, 1-p)$.*

Preuve. Il résulte du lemme 8.3 qu'il existe

$$a = pap, \qquad b = pb(1-p)$$
$$d = (1-p)\,d(1-p)$$

dans A tels que $t=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ soit dans G et ne soit pas dans $\mathbb{C}^*$. On écrit $t^{-1}=\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$.

Supposons d'abord $a+d=\lambda\in\mathbb{C}^*$, donc $a'+d'=\lambda^{-1}$ et $c'=0$; par hypothèse sur t, on a $b\neq 0$ et $b'=-\lambda^{-2}b\neq 0$. L'élément

$$\begin{pmatrix} p+bb^* & 0 \\ 0 & (1-p+b^*b)^{-1}_{1-p} \end{pmatrix}$$

est dans $DGL_1^0(A)$, car c'est le commutateur

$$\left(\begin{pmatrix} (p+bb^*)^{1/2} & b \\ 0 & (1-p+b^*b)^{-1/2}_{1-p} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} (p+bb^*)^{-1/2}_{p} & 0 \\ b^* & (1-p+b^*b)^{1/2} \end{pmatrix}\right).$$

Par suite le commutateur

$$\left(\begin{pmatrix} p+bb^* & 0 \\ 0 & (1-p+b^*b)^{-1}_{1-p} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & b \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} p & e \\ 0 & 1-p \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} e&=\lambda^{-1}\{-b+(p+bb^*)\,b(1-p+b^*b)\} \\ &=\lambda^{-1}bb^*b(2+b^*b)\neq 0 \end{aligned}$$

est une transvection relative à $(p, 1-p)$ qui est dans G.

Supposons donc $a+d\notin\mathbb{C}^*$, et supposons de plus qu'il existe $y=py(1-p)\in A$ avec $ay\neq yd$. Le commutateur $(1-yd, t)=1+ay-yd$ est une transvection relative à $(p, 1-p)$ qui est dans G.

Supposons enfin que $ay=yd$ pour tout $y\in pA(1-p)$. Comme A est simple, il existe $c_1,\dots, c_k, b_1,\dots, b_k$ dans A avec

$$1-p=\sum c_jab_j=\sum (1-p)\,c_j papb_j(1-p).$$

On peut supposer $c_j\in(1-p)\,Ap$ et $b_j\in pA(1-p)$, donc en particulier $ab_j=b_jd$ pour $j=1,\dots, k$. Par suite $1-p=(\sum c_jb_j)\,d$. Pour tout $z\in(1-p)\,A(1-p)$ on a $a(b_jdz)=(b_jdz)\,d$ $(j=1,\dots, k)$ et donc

$$dz=(1-p)\,dz=\sum c_jab_jdz=\sum c_jb_jdzd=(1-p)\,zd=zd.$$

Par suite d est central dans $(1-p)\,A(1-p)$ et il existe $\lambda\in\mathbb{C}^*$ avec $d=\lambda(1-p)$. De même, il existe $\mu\in\mathbb{C}^*$ avec $a=\mu p$. Soit $y\in pA(1-p)-\{0\}$; la relation $ay=yd$ implique $\lambda=\mu$, et on est ramené au premier cas de la preuve. ∎

LEMME 8.5. *Le groupe G contient toutes les transvections relatives à (p, q).*

Preuve. Montrons d'abord que G contient une transvection relative à (p, q). Par hypothèse, il existe $y_1 = py_1(q+r) \neq 0$ avec $1 + y_1 \in G$. Si $py_1 r = 0$, il n'y a rien à montrer. Sinon, on a pour tout $z \in A$

$$(1 + py_1(q+r), 1 + rzq) = 1 + py_1 rzq \in G$$

et on peut choisir z avec $py_1 rzq \neq 0$ vu le lemme 8.1(b).

Soit donc $y \in pAq$ avec $y \neq 0$ et $1 + y \in G$. Soient $a \in GL_1^0(pAp)$ et $b \in GL_1^0(qAq)$, et montrons que $1 + ayb \in G$. Soient u, v des unitaires de A dans $GL_1^0(A)$ avec $upu^* \leqslant r$ et $vqv^* \leqslant r$. (Si w est une isométrie partielle de projecteur initial p et de projecteur final majoré par r, on peut poser par exemple $u = 1 - p - ww^* + w + w^*$.) Posons

$$\begin{aligned}
a' &= a + 1 - p \in GL_1^0(A)\\
b' &= b + 1 - q \in GL_1^0(A)\\
c' &= ua'^{-1}u^*vb'v^* \in GL_1^0(A), \qquad c' - 1 \in rAr\\
d' &= a'b'^{-1}c'.
\end{aligned}$$

Alors $d' \in DGL_1^0(A)$ car

$$d' = (a', b'^{-1}u)(b'^{-1}, v)$$

et

$$d'(1+y)\, d'^{-1} = 1 + ayb \in G$$

comme promis.

Soit $x \in pAq$. Par implicité de A, il existe $a_1, ..., a_k, b_1, ..., b_k$ dans A avec $x = a_1 yb_1 + \cdots + a_k yb_k$. Par hypothèse sur x et y, on a aussi $x = (pa_1 p)\, y(qb_1 q) + \cdots + (pa_k p)\, y(qb_k q)$. Tout élément d'une C^*-algèbre avec unité étant différence de deux inversibles dans la composante connexe de 1, on peut même supposer

$$\left.\begin{aligned} pa_j p &\in GL_1^0(pAp),\\ qb_j q &\in GL_1^0(qAq), \end{aligned}\right\} \quad j = 1, ..., k.$$

On a donc comme plus haut $1 + a_j yb_j \in G$ $(j = 1, ..., k)$ et

$$1 + x = \prod_{1 \leqslant j \leqslant k} (1 + a_j yb_j) = 1 + \sum_{1 \leqslant j \leqslant k} a_j yb_j \in G.$$

La preuve de la proposition 8.2 est ainsi achevée. ▮

Il peut être utile de considérer des variantes de la proposition 8.2. Par exemple, si on suppose de plus que G est normalisé par $GL_1^0(A)$ (c'est toujours le cas lorsque A est une algèbre infinie vu le théorème 7.5), alors G contient toutes les transvections relatives à $(p, 1-p)$ et à $(1-p, p)$; la preuve de ceci est plus courte que celle ci-dessus. Formulons une autre variante, que nous utilisons dans la preuve du théorème 8.7.

PROPOSITION 8.2$^{\text{bis}}$. *Soit A une C^*-algèbre simple avec unité. Soient p_1, p_2, p_3, p_4 des projecteurs orthogonaux non nuls de somme 1 dans A tels que $p_i \preccurlyeq p_j + p_k$ pour tout triple $\{i, j, k\}$ de $\{1, 2, 3, 4\}$ avec $j \neq k$, et soit $p = p_1 + p_2$. Soit G un sous-groupe non central de $GL_1(A)$ normalisé par $DGL_1^0(A)$. Alors G contient toutes les transvections relatives à $(p, 1-p)$ et à $(1-p, p)$.*

Preuve. Cela résulte immédiatement de la proposition 8.2. ∎

L'intérêt de la proposition 8.2 vient en particulier de l'observation suivante.

LEMME 8.6. *Soient A une C^*-algèbre avec unité, p et q deux projecteurs orthogonaux de A avec $p+q=1$, et $u \in A$ une isométrie partielle avec $u^*u = p$ et $uu^* \leqslant q$. Soit $x \in DGL_1(pAp)$. Alors $x + q$ est un produit de transvections relatives à (p, q) et à (q, p).*

Preuve. Soient $y, z \in GL_1(pAp)$; notons $y' = (y)_p^{-1}$ et $z' = (z)_p^{-1}$. Si $q' = uu^*$, on a

$$\begin{pmatrix} p & yu^* \\ 0 & q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & 0 \\ -uy' & q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & yu^* \\ 0 & q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & yu^* \\ -uy' & q-q' \end{pmatrix}.$$

Le même calcul valant pour $y = -p$,

$$\begin{pmatrix} 0 & yu^* \\ -uy' & q-q' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -u^* \\ u & q-q' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & uy'u^* + q - q' \end{pmatrix}$$

est un produit de transvections convenables. Par suite

$$\begin{pmatrix} 0 & zu^* \\ -uz' & q-q' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -y'u^* \\ uy & q-q' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z'y' & 0 \\ 0 & uyzu^* + q - q' \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} zyz'y' & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}$$

est un produit de transvections de la forme désirée. ∎

THÉORÈME 8.7. *Soient A une C^*-algèbre approximativement finie simple avec unité et G un sous-groupe non central de $GL_1(A)$ normalisé par*

$DGL_1(A)$. Alors G contient $DGL_1(A)$. En particulier, le quotient de $DGL_1(A)$ par son centre est un groupe simple.

Preuve. On peut supposer A de dimension infinie. Soient p_1, p_2, p_3, p_4 des projecteurs de A satisfaisant aux hypothèses de la proposition 8.2^{bis}, avec de plus $p_3 + p_4 \preccurlyeq p_1 + p_2$ (voir la preuve du lemme 3.6 de [F]). Nous savons déjà que G contient les transvections relatives à toutes les paires de projections prises parmi

$$p = p_1, \qquad q = p_2, \qquad r = p_3 + p_4.$$

Soit $x \in DGL_1(A)$; il s'agit de montrer que $x \in G$.

Comme $GL_1(A)$, et a fortiori $DGL_1(A)$, sont connexes par arcs, on peut supposer $\|x - 1\|$ petit. En appliquant deux fois le lemme 5.8, on voit que x est congru modulo les transvections à un élément de la forme

$$d = \begin{pmatrix} d_p & 0 & 0 \\ 0 & d_q & 0 \\ 0 & 0 & d_r \end{pmatrix}, \qquad \begin{matrix} d_p \in GL_1(pAp) \\ d_q \in GL_1(qAq) \\ d_r \in GL_1(rAr), \end{matrix}$$

avec $\|d_p - p\|$, $\|d_q - q\|$ et $\|d_r - r\|$ petits. Écrivons comme dans la preuve du lemme 5.11

$$d_p = p + st \qquad \text{avec} \quad s \in pAr,\ t \in rAp.$$

Posons

$$s' = (d_p)_p^{-1} s, \qquad t' = t(d_p)_p^{-1}.$$

Alors

$$\begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \\ -t' & 0 & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & 0 & s \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \\ t & 0 & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & 0 & -s' \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} d_p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & r - ts' \end{pmatrix}.$$

Par suite x est congru modulo des transvections à un élément de la forme

$$\begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix},$$

ou encore par le même argument à un élément de la forme

$$y=\begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & d'_r \end{pmatrix}.$$

Les transvections étant toutes des commutateurs (voir la remarque qui précède la proposition 8.2), on a $y \in DGL_1(A)$. Soit T [respectivement T'] l'application traciale universelle de A [resp. rAr]. On a $\Delta_T(y)=0$. Comme $[r]$ est une unité dans le groupe ordonné $K_0(A)$, toute trace positive sur rAr se prolonge de manière unique en une trace positive sur A. On a donc aussi $\Delta_{T'}(d'_r)=0$, et $d'_r \in DGL_1(rAr)$ en vertu de la proposition 6.1. Il résulte du lemme 8.6 que $y \in G$, et x est bien dans G. ∎

THÉORÈME 8.8. *Soient A une C^*-algèbre infinie simple avec unité et G un sous-groupe normal non central de $GL_1^0(A)$. Alors $G=GL_1^0(A)$. En particulier, $GL_1^0(A)$ modulo son centre est un groupe simple.*

Preuve. Soient p, q deux projecteurs orthogonaux de A équivalents à 1 et soient u, v deux isométries partielles de A avec

$$u^*u=v^*v=1, \qquad uu^*=p, vv^*=q.$$

Les algèbres pAp et qAq étant isomorphes à A (via $a \mapsto u^*au$ et $a \mapsto v^*av$), on peut appliquer la proposition 8.2^{bis}, de sorte que G contient les transvections relatives à $(p, 1-p)$ et à $(1-p, p)$.

Soit $x \in GL_1^0(A)$ avec $\|x-1\|$ suffisamment petit; montrons que $x \in G$. Vu le lemme 5.8, on peut supposer que $x \in pAp+(1-p)A(1-p)$. Posons $y=pxp+1-p$, $z=p+(1-p)x(1-p)$, et montrons que y, z sont dans G.

Comme $\|y-1\|$ est petit et comme l'algèbre pAp est isomorphe à A, il résulte du théorème 7.5 que $pyp \in DGL_1^0(pAp)$. Comme $p \sim 1 \sim q \leqslant 1-p$, le lemme 8.6 s'applique; il résulte donc de la proposition 8.2 que $y \in G$.

Les relations $u(1-p)u^* \leqslant p$ et $(1-p)u^*u=1-p$ montrent que $u(1-p)$ est une isométrie partielle de $1-p$ vers un projecteur majoré par p, donc que $1-p \preccurlyeq p$. L'argument ci-dessus montre donc aussi que $z \in G$. ∎

9. GROUPES SIMPLES: CAS UNITAIRE

Sur le thème du paragraphe précédent, nous nous limitons à l'unique variation suivante, qui contient une solution partielle du problème 5.12 de [Cu].

THÉORÈME 9.1. *Soient A une C^*-algèbre approximativement finie simple avec unité et G un sous-groupe non central de $U_1(A)$ normalisé par $DU_1(A)$. Alors G contient $DU_1(A)$. En particulier, le quotient de $DU_1(A)$ par son centre est un groupe simple.*

La suite de ce numéro constitue la preuve de ce résultat. Les propositions 9.6 et 9.10 en constituent les étapes principales.

LEMME 9.2. *Soit A une C^*-algèbre avec unité. Les centralisateurs dans A de $DU_1^0(A)$ et de $[A, A]$ coïncident avec le centre de A. En d'autres termes, pour tout $y \in A$, les propriétés suivantes sont équivalentes*

(i) $yu = uy$ *pour tout* $u \in A$ *tel qu'il existe* $v, w \in U_1^0(A)$ *avec* $u = vwv^*w^*$,

(ii) $yx = xy$ *pour tout* $x \in A$ *tel qu'il existe* $s, t \in A$ *avec* $x = st - ts$,

(iii) $ya = ay$ *pour tout* $a \in A$.

Preuve. L'implication de (i) par (iii) est banale.

Supposons que y satisfait (i). Pour montrer (ii), il suffit de considérer le cas où s et t sont auto-adjoints, puis de contempler l'identité

$$st - ts = \lim_{\lambda \to 0} \lambda^{-2}\{1 - \exp(-i\lambda s)\exp(-i\lambda t)\exp(i\lambda s)\exp(i\lambda t)\}.$$

Supposons que y satisfait (ii); il en est de même de y^*, donc des parties réelle et imaginaire de y, et on ne restreint pas la généralité de la preuve en supposant y auto-adjoint et non nul.

Indiquons d'abord un argument valant pour le cas particulier d'une algèbre A simple. Si y n'était pas scalaire, il existerait deux fonctions continues à valeurs réelles f et g sur le spectre de g avec

$$f(y) \neq 0, \qquad g(y) \neq 0, \qquad f(y)\, g(y) = 0.$$

Par hypothèse sur A (lemme 8.1.a) il existerait $a \in A$ avec $f(y)^2 ag(y) \neq 0$, donc avec

$$[f(y), [f(y)\, a, g(y)]] \neq 0$$

contrairement à l'hypothèse. Donc y est bien scalaire.

Dans le cas général, soit y avec $y = y^* \neq 0$ satisfaisant (ii). Notons χ_λ la fonction caractéristique de l'intervalle $]-\infty, \lambda] \subset \mathbb{R}$. Supposons qu'il puisse exister $a \in A$ avec $ya \neq ay$; il existe alors $\lambda \in \mathbb{R}$ avec $\chi_\lambda(y)\, a \neq a\chi_\lambda(y)$ dans l'algèbre de von Neumann enveloppante A'' de A, donc avec $\chi_\lambda(y)$ $a(1 - \chi_\lambda(y)) \neq 0$. Si μ tend vers λ par valeurs strictement supérieures, alors

$\chi_\mu(y)$ tend fortement vers $\chi_\lambda(y)$; il existe donc $\mu > \lambda$ avec $\chi_\lambda(y) a(1-\chi_\mu(y)) \neq 0$. Soient f, g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues avec

$$f = 1 \text{ sur }]-\infty, \lambda], \qquad f = 0 \text{ sur } \left[\frac{\lambda+\mu}{2}, \infty\right[$$

$$g = 0 \text{ sur } \left]-\infty, \frac{\lambda+\mu}{2}\right], \qquad g = 1 \text{ sur } [\mu, \infty[.$$

On a

$$\chi_\lambda(y)\, f(y)^2 = \chi_\lambda(y), \qquad g(y)(1-\chi_\mu(y)) = 1 - \chi_\mu(y)$$

donc

$$f(y)^2\, ag(y) \neq 0$$

et on achève comme plus haut. ∎

Notons que, dans (i), on peut même imposer à v et w d'être dans un voisinage donné de 1 dans $U_1^0(A)$.

LEMME 9.3. *Soient A et G comme en* 9.1. *Il existe $x \in G$ avec $\|x-1\| < \frac{1}{2}$ et x non central dans A.*

Preuve. Soit $y \in G$ un élément non central. Il résulte du lemme 9.2 qu'il existe $s \in A$ avec $s^* = -s$ et $e^{\|s\|} - 1 < \frac{1}{4}$ tel que $y \exp(s) \neq \exp(s)\, y$. Posons $x = (y, \exp(s))$. Si x était central, il existerait $t \in \mathbb{R}$ avec

$$y \exp(s)\, y^{-1} = \exp(ysy^{-1}) = \exp(s + it);$$

on aurait donc $\exp(it) = 1$ et $x = 1$ par le théorème 4 de [Hi], contrairement aux hypothèses. Par suite x convient. ∎

Soient B_1, B_2 deux C^*-algèbres de dimensions finies et φ: $B_1 \to B_2$ un morphisme unital. Nous disons que φ est *entrecroisé* si, pour tout idéal bilatère non nul J_j de B_j $(j = 1, 2)$, la composition de l'inclusion $J_1 \to B_1$, de φ et de la projection canonique $B_2 \to J_2$ est injective. Lorsque φ est décrit par une matrice d'entiers non négatifs à la Bratelli, φ est entrecroisé si et seulement si tous les coefficients de la matrice sont strictement positifs.

LEMME 9.4. *Soit A comme en* 9.1. *Il existe un système inductif*

$$A_1 \xrightarrow{\varphi_1} A_2 \xrightarrow{\varphi_2} A_3 \xrightarrow{\varphi_3} \cdots$$

de C^*-algèbres de dimensions finies de limite inductive A où chaque φ_n est entrecroisé.

Preuve. L'affirmation équivaut à une propriété du groupe des dimensions de A qui est établie au lemme A.4.3 de [E]. Il faut savoir que ce groupe des dimensions est simple, ce dont on s'assure par exemple comme dans [Hn]. ∎

LEMME 9.5. *Soient B une C^*-algèbre avec unité et*

$$1 = p_1 + p_2 + p_3 + p_4, \qquad 1 = q_1 + q_2 + q_3 + q_4$$

deux décompositions de 1 en sommes de projecteurs orthogonaux. On se donne des nombres complexes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ de modules 1 distincts deux à deux, et on écrit

$$k = \inf\{|\lambda_i - \lambda_j| \mid 1 \leqslant i, j \leqslant 4\};$$

on se donne aussi $v_j \in B$ avec $v_j^* v_j = v_j v_j^* = q_j$ pour $j = 1, 2, 3, 4$; on pose

$$u = \sum_{1 \leqslant j \leqslant 4} \lambda_j p_j, \qquad v = \sum_{1 \leqslant j \leqslant 4} v_j.$$

S'il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}$ avec

$$0 < 48\varepsilon \leqslant k^3, \qquad \|u - v\| < 2\varepsilon$$

$$\|\lambda_j q_j - v_j\| < 2\varepsilon \qquad \textit{pour} \quad j = 1, 2, 3, 4$$

alors p_j et q_j sont équivalents pour $j = 1, 2, 3, 4$.

Preuve. On calcule

$$(u - \lambda_1)(u - \lambda_2)(u - \lambda_3) = (\lambda_4 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_3)\, p_4$$

$$(v - \lambda_1)(v - \lambda_2)(v - \lambda_3) = (\lambda_4 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_3)\, q_4 + r$$

avec $\|r\| < 24\varepsilon$, puis

$$\begin{aligned}(\lambda_4 - \lambda_1)&(\lambda_4 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_3)(p_4 - q_4) \\ &= (u - v)(u - \lambda_2)(u - \lambda_3) + (v - \lambda_1)(u - v)(u - \lambda_3) \\ &\quad + (v - \lambda_1)(v - \lambda_2)(u - v) - r.\end{aligned}$$

Par suite

$$\|p_4 - q_4\| < \frac{48\varepsilon}{k^3} \leqslant 1$$

donc p_4 et q_4 sont équivalents. On obtient les autres cas par permutations circulaires des indices 1, 2, 3, 4. ∎

Proposition 9.6. *Soient A, G comme en* 9.1 *et $A_1 \xrightarrow{\varphi_1} A_2 \xrightarrow{\varphi_2} \cdots$ comme en* 9.4. *Il existe un entier $n \geqslant 1$, deux projecteurs orthogonaux $p_1, p_2 \in A_n$ avec p_1 équivalent à p_2 dans A_n et $p_1 + p_2$ équivalent à un sous-projecteur de $p_3 = 1 - p_1 - p_2$ dans A, ainsi que $z \in U_1(p_1 A p_1)$ avec $Sp(z) \cap \{1, -1\} = \varnothing$, tels que*

$$\begin{pmatrix} z^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & p_3 \end{pmatrix} \in G$$

où la matrice est relative à la décomposition $1 = p_1 + p_2 + p_3$. (On a écrit abusivement z^{-1} au lieu de $(z)_{p_1}^{-1}$ et z au lieu de $p_{2,1} z (p_{2,1})^*$ pour une isométrie partielle $p_{2,1}$ convenable.)

Preuve. Soit $x \in G$ comme en 9.3. Soient λ_1, λ_2 deux points distincts de $Sp(x)$; notons que $|\lambda_1 - \lambda_2| < 1$. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}$ tel que

$$0 < 48\varepsilon < (|\lambda_1 - \lambda_2| - 2\varepsilon)^3.$$

On choisit un entier $n \geqslant 1$ et un unitaire $y \in U_1(A_n)$ avec $\|x - y\| < \varepsilon$, puis deux points $\mu_1, \mu_2 \in Sp(y)$ avec $|\lambda_j - \mu_j| < \varepsilon$ $(j = 1, 2)$, et enfin deux projecteurs $p_1, p_2 \in A_n$ avec $y p_j = \mu_j p_j$ $(j = 1, 2)$. Quitte à remplacer n par $n + 1$ et p_1, p_2 par des projecteurs plus petits, on peut supposer p_1 équivalent à p_2 dans A_n et $p_1 + p_2$ équivalent à un sous-projecteur de $p_3 = 1 - p_1 - p_2$ dans A (c'est ici qu'on utilise le lemme 9.4). Désormais, dans cette preuve, toutes les matrices sont relatives à la décomposition $1 = p_1 + p_2 + p_3$, et on commet systématiquement l'abus d'écrire 1 au lieu des isométries et projecteurs convenables.

On a

$$y = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & y' \end{pmatrix} \in U_1(A_n)$$

avec $y' \in U_1(p_3 A_n p_3)$. Posons

$$u = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in DU_1(A_n)$$

de sorte qu'on a

$$(y, u) = \begin{pmatrix} \mu_1\mu_2^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2\mu_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(x, u) \in G$$

$$\|(x, u) - (y, u)\| \leqslant 2\,\|x - y\| < 2\varepsilon.$$

On vérifie facilement que la distance entre deux quelconques des trois nombres complexes $\mu_1\mu_2^{-1}$, $\mu_2\mu_1^{-1}$, 1 est minorée par $|\lambda_1 - \lambda_2| - 2\varepsilon$. Par suite le spectre de (x, u) est contenu dans la réunion des trois boules ouvertes de rayon 2ε centrées en ces points, boules qui sont disjointes car $6\varepsilon < |\lambda_1 - \lambda_2|$. Notons q_1 [respectivement q_2, q_3] le projecteur spectral de (x, u) correspondant à la boule centrée en $\mu_1\mu_2^{-1}$ [resp. $\mu_2\mu_1^{-1}$, 1]. On a donc

$$(x, u) = q_1xq_2 + q_2xq_2 + q_3xq_3, \qquad q_1 + q_2 + q_3 = 1.$$

Il résulte du lemme 9.5 que les projecteurs p_j et q_j sont équivalents $(j = 1, 2, 3)$.

Soit $v_j \in A$ avec $v_j^*v_j = q_j$ et $v_jv_j^* = p_j$ $(j = 1, 2, 3)$, et posons $v = v_1 + v_2 + v_3 \in U_1(A)$. Alors $v(x, u)\,v^*$ est diagonal relativement à la décomposition $1 = p_1 + p_2 + p_3$. Soit T la trace universelle de A, choisissons $s = s^* \in A$ avec

$$\Delta_T(v) = T(s) \qquad \text{modulo} \quad T(K_0(A)),$$

et posons

$$s' = p_1sp_1 + p_2sp_2 + p_3sp_3, \qquad w = \exp(-i2\pi s')\,v.$$

Alors $T(s') = T(s)$ et $\Delta_T(w) = 0$, donc $w \in DU_1(A)$ par la proposition 6.7. De plus $w(x, u)\,w^*$ est toujours diagonal relativement à la décomposition $1 = p_1 + p_2 + p_3$ et on peut écrire

$$w(x, u)\,w^* = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 \end{pmatrix} \in G.$$

Les spectres (privés de 0) de q_1xq_1 et q_2xq_2 sont dans des boules de rayon 2ε; leurs centres $\mu_1\mu_2^{-1}$ et $\mu_2\mu_1^{-1}$ sont distants de $|\lambda_1 - \lambda_2| - 2\varepsilon$ au moins et

$$|\mu_1\mu_2^{-1} - \mu_2\mu_1^{-1}| < 2 - 4\varepsilon$$

(sinon $|\mu_1 - \mu_2| \sim 2^{1/2}$, ce qui contredirait

$$|\mu_1 - \mu_2| \leqslant |\lambda_1 - \lambda_2| + 2\varepsilon < 1 + 2\varepsilon).$$

Les spectres de x_1 et x_2 ont donc les mêmes propriétés. Si $z = x_2 x_1^{-1}$, on a donc $Sp(z) \cap \{-1, 1\} = \varnothing$. On achève en notant que le commutateur

$$\left(\begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} z^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est dans G. ∎

LEMME 9.7. *Soit Ω un fermé du cercle unité du plan complexe disjoint de $\{-1, 1\}$ et soit $\mu \in \mathbb{S}^1$ avec $|\mathrm{Im}\,\mu| < |\mathrm{Im}\,\lambda|$ pour tout $\lambda \in \Omega$. Alors il existe des applications continues*

$$\begin{cases} \Omega \to \,]0, 1[\\ \lambda \mapsto \alpha_\lambda \end{cases} \qquad \begin{cases} \Omega \to \,]0, 1[\\ \lambda \mapsto \beta_\lambda \end{cases} \qquad \begin{cases} \Omega \to SU(2) \\ \lambda \mapsto \gamma_\lambda \end{cases}$$

telles que $\alpha_\lambda^2 + \beta_\lambda^2 = 1$ et

$$\gamma_\lambda \left(\begin{pmatrix} \lambda^{-1} & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_\lambda & -\beta_\lambda \\ \beta_\lambda & \alpha_\lambda \end{pmatrix}\right) \gamma_\lambda^{-1} = \begin{pmatrix} \mu^{-2} & 0 \\ 0 & \mu^2 \end{pmatrix}$$

pour tout $\lambda \in \Omega$.

Preuve. Soit $\lambda \in \Omega$. Posons $\beta_\lambda = |\mathrm{Im}\,\mu|\,|\mathrm{Im}\,\lambda|^{-1}$ et

$$g_\lambda = \begin{pmatrix} a_\lambda & -\overline{b_\lambda} \\ b_\lambda & \overline{a_\lambda} \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} \lambda^{-1} & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_\lambda & -\beta_\lambda \\ \beta_\lambda & \alpha_\lambda \end{pmatrix}\right).$$

On calcule

$$a_\lambda = \alpha_\lambda^2 + \lambda^{-2}\beta_\lambda^2, \qquad b_\lambda = (\lambda^2 - 1)\,\alpha_\lambda \beta_\lambda$$
$$\mathrm{trace}(g_\lambda) = 2\,\mathrm{Re}(\mu^2)$$

de sorte que g_λ est conjugué dans $SU(2)$ à

$$\begin{pmatrix} \mu^{-2} & 0 \\ 0 & \mu^2 \end{pmatrix}.$$

Posons $\sigma_\lambda = \bar{b}_\lambda^{-1}(a_\lambda - \bar{\mu}^2)$, ce qui définit une fonction continue de λ (car $b_\lambda \neq 0$). On vérifie que

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_\lambda \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} -\bar{\sigma}_\lambda \\ 1 \end{pmatrix}$$

sont vecteurs propres de g_λ de valeurs propres respectivement $\bar{\mu}^2$ et μ^2, et on achève en posant

$$\gamma_\lambda = (1 + |\sigma_\lambda|^2)^{-1/2} \begin{pmatrix} 1 & \bar{\sigma}_\lambda \\ -\sigma_\lambda & 1 \end{pmatrix}. \quad ∎$$

LEMME 9.8. *Sous les conditions de la proposition* 9.6, *il existe* $y \in G \cap U_1(A_n)$ *avec* y *non central dans* A.

Preuve. Supposons d'abord z multiple scalaire de p_1. Le groupe $G \cap U_1(A_n)$ n'est alors pas central dans $U_1(A_n)$ car $Sp(z)$ n'est ni $\{1\}$ ni $\{-1\}$.

Supposons ensuite $z \notin \mathbb{C}p_1$, de sorte que z n'est pas central dans $p_1 A p_1$ (l'algèbre A étant simple, l'algèbre $p_1 A p_1$ l'est aussi et son centre est donc banal). Notons Ω le spectre de z dans $p_1 A p_1$. Le calcul fonctionnel montre qu'il existe un homomorphisme

$$\Phi\colon U_2(\mathscr{C}(\Omega)) \to U_1(A_{12}), \qquad A_{12} = (p_1 + p_2)\, A(p_1 + p_2)$$

avec

$$\Phi \begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z^{-1} & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}$$

où $\zeta\colon \Omega \to \mathbb{C}$ est l'inclusion naturelle. Il résulte de 9.7 qu'il existe $\mu \in \mathbb{R}$ avec $0 < \mu < 1$ et

$$v \in U_1(A_{12}), \qquad r \in DU_1(A_{12})$$

avec

$$v(Z, r)\, v^{-1} = \begin{pmatrix} 1 - 2\mu^2 & -2\mu(1-\mu^2)^{1/2} \\ 2\mu(1-\mu^2)^{1/2} & 1 - 2\mu^2 \end{pmatrix}$$

$$Z = \begin{pmatrix} z^{-1} & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}$$

où les matrices sont relatives à la décomposition $p_1 + p_2$ de l'unité dans A_{12}.

Comme p_1+p_2 est équivalent à un sous-projecteur de p_3, il existe $v', r' \in p_3 A p_3$ avec

$$\begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & v' \end{pmatrix} \in DU_1(A), \qquad \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r' \end{pmatrix} \in DU_1(A)$$

et on a

$$\begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & v' \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} Z & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r' \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & v' \end{pmatrix}^{-1} \in G$$

où les matrices sont relatives à la décomposition $1=(p_1+p_2)+p_3$. En explicitant relativement à la décomposition $1=p_1+p_2+p_3$, on a donc

$$\begin{pmatrix} 1-2\mu^2 & -2\mu(1-\mu^2)^{1/2} & 0 \\ 2\mu(1-\mu^2)^{1/2} & 1-2\mu^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G \cap U_1(A_n)$$

d'où le lemme. ∎

LEMME 9.9. *Toujours sous les mêmes conditions, on a de plus*

$$G \supset DU_1(A_{n+1}).$$

Preuve. Il existe des entiers $k_1, ..., k_m \geqslant 1$ tels que $U_1(A_{n+1})$ soit isomorphe à $U(k_1) \times \cdots \times U(k_m)$. L'inclusion $A_n \to A_{n+1}$ étant entrecroisée, l'élément y de 9.8 est de la forme

$$(y_1, ..., y_m) \in U(k_1) \times \cdots \times U(k_m)$$

et aucun des y_j n'est central dans $U(k_j)$. Il en résulte que G contient le produit des $SU(k_j)$, c'est-à-dire $DU_1(A_{n+1})$. ∎

Dans le résultat partiel qui suit, il faut prendre garde que p_1 et p_2 ne désignent a priori *pas* les mêmes projecteurs qu'en 9.6.

PROPOSITION 9.10. *Soient A et G comme en* 9.1. *Il existe une sous C^*-algèbre B de A de dimension finie contenant des projecteurs p_1, p_2, p_3, p_4 de somme* 1, *avec p_1, p_2, p_3 équivalents dans B et p_1 majorant un projecteur p'_1 équivalent à p_4 dans A, de telle sorte que*

$$G \supset DU_1(B).$$

Preuve. Les arguments précédents montrent que G contient $DU_1(A_m)$ non seulement pour un entier $m \geqslant 1$, mais pour tout m assez grand. Vu le lemme 9.4, on peut choisir m tel que tout idéal bilatère minimal de A_m soit de la forme $M_k(\mathbb{C})$ avec $k \geqslant 9$, et donc tel que A_m contienne des projecteurs p_1, p_2, p_3, p_4 avec les propriétés désirées. On écrit alors B au lieu de A_m. ▮

LEMME 9.11. *On se place dans les conditions de la proposition* 9.10. *Soient* $x_2, x_3 \in U_1(p_1 A p_1)$ *et* $x_4 \in U_1(p'_1 A p'_1)$; *alors*

$$X_2 = \begin{pmatrix} x_2^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_4 \end{pmatrix}, \qquad X_3 = \begin{pmatrix} x_3^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_4 \end{pmatrix}.$$

$$X_4 = \begin{pmatrix} x_4^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_4 \end{pmatrix}$$

sont dans G, *et de plus*

$$G \supset DU_1(p_1 A p_1)$$

(*avec les mêmes abus que ceux commis en* 9.6).

Preuve. Considérons le commutateur

$$\left(\begin{pmatrix} x_2^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_2^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Son premier élément est dans $DU_1(A)$, comme le montre un calcul du type

$$\begin{pmatrix} x^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^{-1} & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$$

et second élément est dans $DU_1(B)$, donc dans G par 9.10. Par suite $X_2 \in G$, et de même $X_3 \in G$, $X_4 \in G$.

On a de plus $(X_2, X_3) \in G$, et on en déduit que $DU_1(p_1 A p_1) \subset G$. ▮

Fin de la preuve du théorème 9.1. Comme $U_1(A)$ est connexe par arcs, $DU_1(A)$ l'est aussi et il suffit de montrer que ses éléments proches de 1 sont dans G. On se donne donc $\varepsilon > 0$ (à préciser plus bas) et $x \in DU_1(A)$ avec

$\|x-1\| < \varepsilon$, et nous voulons montrer que $x \in G$. On dispose d'une algèbre B et de projecteurs p_1, p_2, p_3, p_4 comme en 9.10.

Posons $\lambda_j = \exp(ij(\pi/3))$ pour $j = 1, 2, 3$ et $\lambda_4 = 1$, puis

$$a = \sum_{1 \leqslant j \leqslant 4} \lambda_j p_j \in DU_1(B) \subset G.$$

Comme $\|ax - a\| < \varepsilon$, le spectre de ax est contenu dans la réunion des boules de rayon ε centrés en les λ_j.

Pour ε assez petit, on montre ensuite grâce au lemme 9.5 et comme dans la preuve de 9.6 qu'il existe $w \in DU_1(A)$ tel qu'on puisse écrire

$$waxw^* = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_4 \end{pmatrix}$$

relativement à la décomposition $1 = p_1 + p_2 + p_3 + p_4$.

Soient alors $X_2, X_3, X_4 \in G$ comme en 9.11. On a

$$waxw^* = \begin{pmatrix} y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_4 \end{pmatrix} X_2 X_3 X_4$$

avec $y \in U_1(p_1 A p_1)$. Les éléments w, a, x, X_2, X_3, X_4 étant tous dans $DU_1(A)$, on a $y \in DU_1(p_1 A p_1)$ par la proposition 6.7, donc $waxw^* \in G$ par le lemme 9.11. Il en résulte d'abord que ax est dans G, et ensuite que x est dans G parce que a l'est. ▮

10. Remarques sur le groupe d'homologie $H_2(-, \mathbb{Z})$

Ce paragraphe est indépendant des sections 8 et 9.

Proposition 10.1. *Soit A une C^*-algèbre qui est stable, ou une C^*-algèbre avec unité qui est infinie simple. L'homomorphisme naturel du groupe de Milnor $K_2^{\mathrm{Mil}}(A)$ dans $K_2^{\mathrm{top}}(A)$ est surjectif.*

Preuve. On sait que $GL_1^0(A)$ est parfait, mais les preuves de la section 7 fournissent de plus la précision suivante: pour tout voisinage U de 1 dans $GL_1^0(A)$, il existe des voisinages V, W avec

$$1 \in W \subset V \subset U$$

tels que tout élément x de W soit de la forme $\prod_{1 \leqslant j \leqslant k} (y_j, z_j)$ avec $y_j, z_j \in V$ pour $j = 1,..., k$ et avec les $4k$ produits partiels

$$y_1, y_1 z_1, y_1 z_1 y_1^{-1}, (y_1, z_1), (y_1, z_1)\, y_2, ..., x$$

dans U. Par suite, le revêtement universel (au sens topologique usuel) $\widetilde{GL_1^0(A)}$ de $GL_1^0(A)$ est parfait. On obtient donc une suite exacte

$$0 \to \pi_1(GL_1^0(A)) \to \widetilde{GL_1^0(A)} \to GL_1^0(A) \to 1$$

avec terme intermédiaire parfait: cette suite est ainsi un revêtement au sens algébrique du terme [Ker]. Par conséquent, il existe une surjection naturelle du groupe d'homologie d'Eilenberg–McLane $H_2(GL_1^0(A))$ sur $\pi_1(GL_1^0(A))$, l'homologie étant à coefficients dans le $GL_1^0(A)$-module trivial $\mathbb{Z}$.

Ces considérations sont a fortiori valables pour le groupe stable $GL_\infty^0(A)$, qui est parfait, donc isomorphe à $DGL_\infty(A)$, ou encore à $E_\infty(A)$ avec les notations de l'appendice. On obtient ainsi un homomorphisme naturel de $H_2(DGL_\infty(A))$, c'est-à-dire de $K_2^{\mathrm{Mil}}(A)$, sur $\pi_1(GL_\infty^0(A))$, c'est-à-dire sur $K_2^{\mathrm{top}}(A)$. ∎

COROLLAIRE 10.2. *Avec les hypothèse de la proposition, il existe un homomorphisme surjectif naturel de* $K_2^{\mathrm{Mil}}(A)$ *sur* $K_0(A)$.

Preuve. C'est la flèche de la proposition suivie de la flèche de périodicité de Bott. ∎

Le corollaire était déjà connu dans un cas au moins: si M est une algèbre de von Neumann proprement infinie, alors $K_2^{\mathrm{Mil}}(M) = 0$ par [HM], donc $K_2^{\mathrm{Mil}}(M) = K_0(M)$. Mais le corollaire n'est certainement pas vrai pour toute C^*-algèbre, car $K_2^{\mathrm{Mil}}(\mathbb{C})$ est un groupe divisible et $K_0(\mathbb{C})$ est cyclique infini.

Nous remercions D. Handelman qui a bien voulu ne rien croire d'une première version incorrecte de ce paragraphe.

APPENDICE

Nous exposons ici un résultat bien connu sous le nom de *lemme de Whitehead*, ainsi que quelques résultats annexes.

Soit A un anneau, avec ou sans unité. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on désigne par $M_n(A)$ l'anneau des $(n \times n)$-matrices sur A. Si A possède une unité, $GL_n(A)$ est le groupe des éléments inversibles de $M_n(A)$. Si A n'a pas d'unité et si $\tilde{A}$ désigne l'anneau obtenu par adjonction d'une unité, $GL_n(A)$ est le sous-groupe de $GL_n(\tilde{A})$ constitué des éléments de la forme $1 + y$ avec

$y \in M_n(A)$. Dans tous les cas, $E_n(A)$ est le sous-groupe de $GL_n(A)$ engendré par les éléments de la forme $1+y$ où y est une matrice de $M_n(A)$ n'ayant qu'une entrée non nulle, celle-ci étant située hors de la diagonale principale. Les inclusions évidentes permettent de définir le *groupe linéaire général stable* $GL_\infty(A) = \bigcup_{n \geqslant 1} GL_n(A)$ et le *groupe linéaire élémentaire stable* $E_\infty(A) = \bigcup_{n \geqslant 1} E_n(A)$ de A.

Rappelons que l'anneau A est *simple* s'il n'a pas d'idéal bilatère propre *et* s'il n'est pas constitué de deux éléments dont tous les produits sont nuls (i.e., et si $A^2 = A$). On sait que, si A est simple, alors $M_n(A)$ l'est aussi pour tout $n > 1$ [J, chap. III, n° 2].

PROPOSITION A.1. *Soit A un anneau, avec ou sans unité.*

(a) *Si $A^2 = A$, le groupe $DGL_\infty(A)$ est parfait et coïncide avec $E_\infty(A)$.*

(b) *Si A est simple, le groupe $DGL_\infty(A)$ est simple.*

(c) *Si A possède une unité, tout élément de $DGL_\infty(A)$ peut s'écrire comme un produit de 2 commutateurs.*

(d) *Si A est une C^*-algèbre sans unité, tout élément de $DGL_\infty(A)$ peut s'écrire comme un produit de 4 commutateurs.*

L'assertion (a) est le lemme de Whitehead. L'assertion (b) est un cas particulier d'un résultat connu sur les *groupes de congruence* (voir [B, chap. V, sect. 2, théorème 2.1.a]). Les assertions (c) et (d) sont présentées à titre de curiosité. On ne sait en général pas si, dans l'assertion (c), on peut remplacer 2 par 1. Lorsque A est l'anneau des opérateurs bornés sur un espace de Hilbert complexe de dimension infinie, c'est une question déjà posée par A. Brown et C. Pearcy [BP].

Considérons un entier $k \geqslant 1$ et le sous-groupe Γ_k de $E_\infty(A)$ engendré par les éléments de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{pmatrix}$$

avec $z \in M_p(A)$, $p \geqslant k$. (On adopte l'écriture par blocs pour les matrices, et 1 désigne ci-dessus l'unité 1_p de $M_p(A)$ ou de $M_p(\tilde{A})$.)

LEMME A.2. *Si $A^2 = A$, le groupe Γ_k coïncide avec $E_\infty(A)$ pour tout $k \geqslant 1$, et $DGL_\infty(A) = E_\infty(A)$.*

Preuve. Le groupe Γ_k contient toute matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} 1_p & z \\ 0 & 1_q \end{pmatrix}$$

avec $p, q \geqslant k$ et z une matrice à p lignes et q colonnes.

Soient d'abord $p \geqslant k$ et $u \in GL_p(A)$; vérifions que

$$\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^{-1} \end{pmatrix} \in \Gamma_k.$$

Comme $M_p(A)^2 = M_p(A)$, il existe un entier j et $a_i, b_i \in M_p(A)$ $(1 \leqslant i \leqslant j)$ avec $u - 1_p = \sum a_i b_i$. Soient a la matrice ligne des a_i (à p lignes et jp colonnes) et b la matrice colonne des b_i, qui sont telles que $u = 1_p + ab$. En calculant dans $GL_{(j+2)p}(A)$, on obtient

$$\begin{pmatrix} 1_p & 0 & 0 \\ 0 & 1_p & 0 \\ -bu^{-1} & b & 1_{jp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1_p & 0 & a \\ 0 & 1_p & 0 \\ 0 & 0 & 1_{jp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1_p & 0 & 0 \\ 0 & 1_p & 0 \\ b & 0 & 1_{jp} \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} 1_p & 0 & -u^{-1}a \\ 0 & 1_p & u^{-1}a \\ 0 & 0 & 1_{jp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1_p & 0 & 0 \\ 0 & 1_p & 0 \\ 0 & -b & 1_{jp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1_p & 0 & 0 \\ 0 & 1_p & -a \\ 0 & 0 & 1_{jp} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \mathrm{u} & 0 & 0 \\ 0 & u^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1_{jp} \end{pmatrix} \in \Gamma_k.$$

Soit de plus $v \in GL_p(A)$. En procédant de même avec

$$\tilde{v} = \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL_{2p}(A),$$

on obtient

$$\begin{pmatrix} v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1_p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1_p \end{pmatrix} \in \Gamma_k.$$

Par suite, en calculant dans $GL_{3p}(A)$:

$$\left(\begin{pmatrix} u & 0 & 0 \\ 0 & u^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1_p \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v & 0 & 0 \\ 0 & 1_p & 0 \\ 0 & 0 & v^{-1} \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} uvu^{-1}v^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1_p & 0 \\ 0 & 0 & 1_p \end{pmatrix} \in \Gamma_k.$$

Ceci ayant lieu pour tout $p \geqslant k$, on a la première inclusion de la suite

$$DGL_\infty(A) \subset \Gamma_k \subset E_\infty(A) \subset DGL_\infty(A).$$

Les autres inclusions étant banales, la preuve du lemme est achevée. ∎

Pour l'assertion (a) de la proposition A.1, il suffit de montrer que $\Gamma_1 \subset DE_\infty(A)$. Considérons un entier $p \geqslant 1$ et $z \in M_p(A)$. Soient $a_1, \dots, a_j$, $b_1, \dots, b_j$ dans $M_p(A)$ avec $z = \sum a_i b_i$. Alors

$$\prod_i \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & b_i & 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & z & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et $\left(\begin{smallmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in DE_\infty(A)$. De même $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{smallmatrix}\right) \in DE_\infty(A)$.

Pour l'assertion (b), considérons un sous-groupe G de $GL_\infty(A)$ non réduit à $\{1\}$ et normalisé par $E_\infty(A)$. Il existe un entier $k \geqslant 1$ et un élément non nul $y \in M_k(A)$ avec $x = 1 + y \in G$. Montrons que $\Gamma_k \subset G$. Soient un éntier $p \geqslant k$ et $z \in M_p(A)$. Par simplicité de $M_p(A)$, il existe un entier j et des éléments $a_i, b_i, c_i, d_i \in M_p(A)$ $(1 \leqslant i \leqslant j)$ avec $z = \sum a_i b_i y c_i d_i$. En calculant dans $GL_{3p}(A)$, on obtient pour tout $i \in \{1, \dots, j\}$:

$$\left(\begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & c_i \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & yc_i \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$$

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b_i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & yc_i \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b_i y c_i \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$$

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & a_i & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b_i y c_i \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a_i b_i y c_i \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$$

et

$$\prod_{1 \leqslant i \leqslant j} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & a_i b_i y c_i \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & d_i & 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & z & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G.$$

On a donc $\left(\begin{smallmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in G$, et de même $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{smallmatrix}\right) \in G$, d'où enfin $DGL_\infty(A) \subset \Gamma_1 \subset G$, de sorte que $DGL_\infty(A)$ est simple.

Pour l'assertion (c), considérons $x \in DGL_\infty(A)$. Il existe un entier $n \geqslant 1$ et des éléments $y_1, z_1, \dots, y_j, z_j \in E_n(A)$ avec $x = (y_1, z_1) \cdots (y_j, z_j)$. Posons

$$d_i = (y_i, z_i) \in E_n(A) \qquad (1 \leqslant i \leqslant j)$$

$$y = \mathrm{Diag}(y_1, \dots, y_j) \in E_{jn}(A)$$

$$z = \mathrm{Diag}(z_1, \dots, z_j) \in E_{jn}(A)$$

$$d = \mathrm{Diag}(d_2 \cdots d_j, d_2^{-1}, \dots, d_j^{-1}) \in E_{jn}(A).$$

Alors $x = (y, z)\, d$ et il reste à vérifier que d est un commutateur. Si

$$e_j = d_j,\ e_{j-1} = d_{j-1} d_j, \ldots, e_2 = d_2 d_3 \cdots d_j$$

on obtient

$$\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ 1 & & & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & e_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & e_j \end{pmatrix} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} e_2 & & & & \\ & e_3 e_2^{-1} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & e_j e_{j-1}^{-1} & \\ & & & & e_j^{-1} \end{pmatrix} = d$$

d'où l'assertion (c).

Enfin l'assertion (d) se montre de la même manière, en utilisant le lemme 7.3.

W. van der Kallen nous signale que l'assertion (c) est un cas particulier d'un résultat de K. Dennis (communication privée, mai 1982).

RÉFÉRENCES

[ASS] H. ARAKI, M. SMITH, ET L. SMITH, On the homotopical significance of the type of von Neumann algebra factors, *Comm. Math. Phys.* **22** (1971), 71–88.

[B] H. BASS, "Algebraic K-Theory," Benjamin, New York, 1968.

[BP] A. BROWN ET C. PEARCY, Multiplicative commutators of operators, *Canad. J. Math.* **18** (1966), 737–749.

[Cu] J. CUNTZ, The internal structure of simple C^*-algebras, *in* "Proceedings, Symposium in Pure Mathematics, Vol. 38, Part 1," pp. 85–115, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1982.

[E] E. G. EFFROS, Dimensions and C^*-algebras, *in* "Reg. Conf. Ser. Math., Vol. 46," Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1981.

[F] T. FACK, Finite sums of commutators in C^*-algebras, *Ann. Inst. Fourier* **32** (1982), 129–137.

[FH] T. FACK ET P. DE LA HARPE, Somme de commutateurs dans les algèbres de von Neumann finies continues, *Ann. Inst. Fourier* **30** (1980), 49–73.

[Hn] D. HANDELMAN, Extensions for AF C^*-algebras and dimension groups, *Trans. Amer. Math. Soc.* **271** (1982), 537–573.

[Ha] P. DE LA HARPE, Classical groups and classical Lie algebras of operators, *in* "Proceedings, Symposium in Pure Mathematics, Vol. 38, Part 1," pp. 477–513, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1982.

[HM] P. DE LA HARPE ET D. MCDUFF, Acyclic groups of automorphisms, *Comment. Math. Helv.* **58** (1983), 48–71.

[HS1] P. de la Harpe et G. Skandalis, Déterminant associé à une trace sur une algèbre de Banach, *Ann. Inst. Fourier* **34**, 1 (1984), 241–260.

[HS2] P. de la Harpe et G. Skandalis, Produits finis de commutateurs dans les C^*-algèbres, *Ann. Inst. Fourier* **34**, 4 (1984), 169–202.

[He] I. N. Herstein, Lie and Jordan structures in simple associative rings, *Bull. Amer. Math. Soc.* **67** (1961), 517–531.

[Hi] E. Hille, On roots and logarithms of elements of a complex Banach algebra, *Math. Ann.* **136** (1958), 46–57.

[J] N. Jacobson, "Structure of Rings," rev. ed., Amer. Math. Soc. Coll. Publ., Vol. 37, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1964.

[Kar] M. Karoubi, Homologie de groupes discrets associés à des algèbres d'opérateurs, prépublication, 1983.

[Ker] M. Kervaire, Multiplicateur de Schur et K-théorie, *in* "Essays on Topology and Related Topics," Mémoires dédiés à Georges de Rham (A. Haefliger and R. Narasimhan, Eds.), Springer-Verlag, New York/Berlin, 1970.