Université Paris Diderot MASTÈRE ENSEIGNANTS *À rendre le lundi 8 janvier 2018*

THÉORIE SPECTRALE - EXAMEN.

Les deux parties sont indépendantes.

I

On note T l'opérateur de Voltera : T est l'opérateur de l'espace de Hilbert $H = L^2([0,1])$ des fonctions de carré intégrable pour la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$ donné par la formule $(Tf)(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$.

1. Exprimer l'opérateur T^*T sous la forme $T^*T(f)(x) = \displaystyle\int_0^1 k(x,y)\, f(y)\, dy$ où f est une fonction sur $[0,1]^2$.
2. Calculer le spectre de T^*T.
3. Démontrer que T est un opérateur compact. Est-ce que T est un opérateur de Hilbert Schmidt ? Est-il à trace ?

II

Soit H un espace hilbertien.

1. *Deux questions d'intégration que l'on pourra admettre*
   a) Soit $\alpha \in]0,1[$. Démontrer qu'il existe $a_\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ on ait
   $$\int_0^{+\infty} \frac{x}{x+t}\, t^\alpha\, \frac{dt}{t} = a_\alpha\, x^\alpha.$$
   Démontrer que la convergence est uniforme sur tout compact de $\mathbb{R}_+^*$. (On a $a = \dfrac{\pi}{\sin \alpha\pi}\cdot$)

   b) Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur auto adjoint.
   Soit $I = [a,b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $F : I \times \operatorname{Sp} T \to \mathbb{C}$ une application continue. Pour $t \in I$, on note $F_t : \operatorname{Sp} T \to \mathbb{C}$ l'application définie par $F_t(x) = F(t,x)$. Pour $x \in \operatorname{Sp} T$, on pose aussi $f(x) = \displaystyle\int_a^b F(t,x)\, dt$.
   Démontrer que $\displaystyle\int_a^b F_t(T)\, dt = f(T)$.
2. Soit $T \in \mathcal{L}(H)_+$ un opérateur positif *inversible.* Démontrer que l'on a
   $$\int_0^{+\infty} T(T + t\,\mathrm{id}_H)^{-1}\, t^{-\alpha}\, dt = a_\alpha\, T^{1-\alpha}.$$
3. Soient E, F des espaces hilbertiens et soient $S \in \mathcal{L}(H,E)$ et $T \in \mathcal{L}(H,F)$. Démontrer que $S^*S \leqslant T^*T$ si et seulement s'il existe $A \in \mathcal{L}(F,E)$ tel que $\|A\| \leqslant 1$ et $S = AT$.
4. Soient H un espace hilbertien $S, T \in \mathcal{L}(H)$ tels que $0 \leqslant S \leqslant T$.
   a) On suppose que S et T sont inversibles. Démontrer que $T^{-1} \leqslant S^{-1}$.
   b) Démontrer que $0 \leqslant S(\mathrm{id}_H + S)^{-1} \leqslant T(\mathrm{id}_H + T)^{-1}$.
   c) Démontrer que, pour tout $\alpha \in]0,1[$ on a $S^\alpha \leqslant T^\alpha$. *On étudiera d'abord le cas où S et T sont inversibles.*
5. Soient H un espace hilbertien et $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur positif.
   a) Démontrer que pour tout $S \in \mathcal{L}(H)$ tel que $S^*TS = 0$, on a $TS = 0$.
   Soit $P \in \mathcal{L}(H)$ un projecteur orthogonal (*i.e.* tel que $P = P^* = P^2$).
   b) Supposons que $T^2 \leqslant (T+P)^2$. Démontrer que $((T+P)^2 - T^2)(1-P) = 0$.
   c) Démontrer que $T^2 \leqslant (T+P)^2$ si et seulement si $TP = PT$.